РОЗДІЛ 5.
ПЕРВІСНА. НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.

5.1. Основні поняття і властивості

Похідна та диференціал функції. Диференційованість.
Def. Рівняння яке, крім аргументу та невідомої функції, містить похідні скінченого порядку шуканої функції, називається *звичайним диференційним рівнянням* (ЗДР). Причому найвищій порядок похідної, що входить в рівняння називається *порядком рівняння*.
Def. *Частковим рішенням* ЗДР на проміжку X, називається будь яка функція, яка при підстановці в рівняння звертає його у тотожність на цьому проміжку. Множина всіх часткових рішень ЗДР називається *загальним рішенням* ЗДР.
Def. *Первісною* $F(x)$ *функції* f на проміжку X називається часткове рішення диференційного рівняння першого порядку виду $y' = f(x)$ тобто $\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$. Загальне рішення цього рівняння називається *неозначеним інтегралом* функції f на проміжку X та позначається $\int f(x)dx$.

Первісна функції на проміжку є первісною на будь-якому підпроміжку.
Th. Будь-які первісні однієї функції відрізняються на константу.
C. $\int f(x)dx = \{F(x) + C \,|\, C = const\}$ або спрощено $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Властивості неозначеного інтегралу.
1. Зв'язок із диференціюванням:

а) $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$; б) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

в) $\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C$ або $\int dF(x) = F(x) + C$.

2. Лінійність неозначеного інтегралу:
$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx, \ \left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right).$$
3. Заміна змінної у неозначеному інтегралі:
$$\int f(x)dx = \left| x = \varphi(t); \ dx = \varphi'(t)dt \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$
$\xrightarrow{\text{підстановка}}$ $\xleftarrow{\text{введення нової змінної}}$

4. Формула інтегрування частинами:
$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Таблиця неозначених інтегралів.

1. $\int 0dx = const$; $\int 1dx = x + C$; $\int adx = ax + C$;

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$; 3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4. $\int e^x dx = e^x + C$; $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$;

6. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$; $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z})$;

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, $(x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z})$;

8. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$; $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$; $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arth} x + C \\ \operatorname{arcth} x + C \end{array}\right.$;

$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arsh} x + C \\ \operatorname{sgn} x \operatorname{arch} x + C \end{array}\right.$;

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

13. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C$;

14. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Інтегрування простіших (елементарних) дробів.

Існує чотири типа елементарних дробів. Їх інтеграли наступні:

I. $\int \frac{Adx}{x-a}$; **II.** $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbf{N}, k \neq 1$;

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$; **IV.** $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $\begin{array}{l} k \in \mathbf{N}, k \neq 1 \\ p^2-4q<0 \end{array}$.

Інтеграли перших двох типів – це табличні інтеграли:

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$; **II.** $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.

Для інтегрування дробів третього та четвертого типів використовують наступну послідовність дій: 1) виділити повний квадрат; 2) зробити зміну змінної; 3) розбити дріб на дві (інтеграли а), б) і в), г) нижче) із однорідним лінійним чисельником та з постійним чисельником відповідно:

III, IV. $$\int \frac{Mx+N}{\left[\left(x+p/2\right)^2 + \left(q-p^2/4\right)^2\right]^k}dx = \left| \begin{array}{c} x+\dfrac{p}{2}=t,\ dx=dt, \\ \underbrace{q-p^2/4}_{+}=s^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{Mt+N-Mp/2}{\left(t^2+s^2\right)^k}dt = M\int \frac{tdt}{\left(t^2-s^2\right)^k} + \left(N-\frac{1}{2}Mp\right)\int \frac{dt}{\left(t^2-s^2\right)^k}.$$

Інтегрування першого інтегралу:

а) $\int \frac{tdt}{t^2+s^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+s^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+s^2\right) + C$;

б) $\int \frac{tdt}{\left(t^2+s^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{\left(t^2+s^2\right)^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{(-k+1)}\frac{1}{\left(t^2+s^2\right)^{k-1}} + C$.

Складність обчислення другого інтегралу залежить від показника степеня у знаменнику:

в) $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+s^2} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{t}{s} + C$;

г) Рекурентне співвідношення (формула зниження для показника)

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ks^2}\frac{t}{\left(t^2+s^2\right)^k} + \frac{2k-1}{2ks^2}I_k, \quad (k=1,2,3,4\ldots).$$

Алгоритм інтегрування дрібно-раціональних функцій $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$.

а) Якщо $m>n$: тобто дріб під знаком інтегралу *неправильна*. Робимо ділення $P_m(x) = Q_n(x)S_{m-n}(x) + R_{n-1}(x)$ та отримуємо

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int S_{m-n}(x)dx + \int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx,$$

де інтеграл $\int S_{m-n}(x)dx$ легко береться (інтеграл від поліному);

а інтеграл $\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx$ – є інтегралом від *правильного* дробу.

б) Розкладаємо поліном $Q_n(x)$ на множники над полем дійсних чисел, тобто на лінійні та квадратичні з від'ємним дискримінантом.

$$Q_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{k_i} \prod_{t=1}^{j}(x^2+p_t x+q_t)^{l_t}, \tag{4.1}$$

де $a_i, x_i, p_t, q_t \in \mathbf{R}$, $\sum_1^s k_i + \sum_1^j 2l_t = n$.

в) **Th** (метод розкладення правильного дробу на простіші**).**

Правильний дріб $\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$, у якого знаменник $Q_n(x)$ представлений у вигляді (4.1) можна розкласти на суму елементарних дробів I, II, III, IV типу. Тобто існують константи $A_{it}, M_{it}, N_{it} \in \mathbf{R}$ такі, що

$$\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{\left(x-a_1\right)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1 1}}{\left(x-a_1\right)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_s}}{x-a_s} + \frac{A_{2k_s}}{\left(x-a_s\right)^2} + \ldots + \frac{A_{k_s k_s}}{\left(x-a_s\right)^{k_s}} +$$

$$+ \frac{M_{1l_1}x+N_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{2l_1}x+N_{2l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)} + \ldots + \frac{M_{l_1l_1}x+N_{l_1l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}} + \ldots + \frac{M_{1l_j}x+N_{1l_j}}{x^2+p_jx+q_j} +$$

$$+ \frac{M_{2l_j}x+N_{2l_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2} + \ldots + \frac{M_{l_jl_j}x+N_{l_jl_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}}.$$

Таким чином неозначений інтеграл від раціональної функції існує на будь-якому проміжку де знаменник дробу не обертається у нуль та може бути виражений у лінійну комбінацію раціональних функцій, логарифмів й арктангенсів.

Для усунення складнощів інтегрування елементарних дробів типу IV застосовують наступний метод.

Th (метод Остроградського виділення раціональної частини інтегралу)**.** Якщо знаменник $Q_n(x)$ правильного дробу $\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$ є представленим у вигляді (4.1), то

$$\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{L(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\ldots(x-a_s)^{k_s-1}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1-1}\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j-1}}+$$

$$+\int \frac{S(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_s)\left(x^2+p_1x+q_1\right)\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)}dx\cdot$$

Тут $L(x)$ и $S(x)$ поліноми на 1 степінь нижче за поліноми у відповідних знаменниках. Інтеграл правої частини можна взяти методом розкладення дробу у суму простіших, причому II і IV типа серед них не буде.

Якщо розкладення $Q_n(x)$ на множники невідоме, то

$$\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{L(x)}{НСК(Q_n,Q_n')}+\int \frac{S(x)}{Q_n(x)/НСК(Q_n,Q_n')}dx,$$

де $НСК(Q_n,Q_n')$ – найбільше спільне кратне полінома $Q_n(x)$ та його похідної.

<u>Інтегрування деяких ірраціональностей.</u>

А. Дробово-лінійні ірраціональності.

$$R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right),\ r_1,r_2,\ldots r_k\in Q.$$

Щоб позбутися цієї ірраціональності, представимо $r_i=\frac{m_i}{N}$ (N-спільний знаменник $r_1,r_2,\ldots r_k$) та зробимо наступну заміну змінної у інтегралі:

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\frac{ax+b}{cx+d}=t^N;(ax+b)=t^N(cx+d)\\ x=\varphi(t)=\frac{dt^N-b}{a-ct^N};dx=\varphi'(t)dt\end{array}\right| = \int R\left(\varphi(t),t^{m_1},\ldots,t^{m_k}\right)\varphi'(t)dt\ \cdot$$

Б. Диференційний біном (біноміальний диференціал**).**

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

Th (Чебишева)**.** Якщо $m,n,p\in Q$, то інтеграл від диференційного біному $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ може бути виражений через елементарні функції тоді й тільки тоді коли виконується один із наступних трьох випадків, при цьому відповідна *підстановка Чебишева* зводить інтеграл до інтегралу від раціональної функції.

1) $p\in\mathbf{Z}$ $\Rightarrow$ підстановка $x=t^N$ (N – спільний знаменник m, n);

2) $\frac{m+1}{n}\in\mathbf{Z}$ $\Rightarrow$ підстановка $(a+bx^n)=t^N$ (N – знаменник p);

3) $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbf{Z}$ $\Rightarrow$ підстановка $ax^{-n}+b=t^N$ (N – знаменник p).

В. Квадратичні ірраціональності.

Th (Ейлера**)** У інтегралах виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ наступні *підстановки Ейлера* усувають ірраціональність

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$ $(a>0)$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ $(c>0)$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$ $(a>0)$ $(D>0)$.

Хоча підстановки Ейлера мають універсальний характер, іноді вони приводять до складних раціональних виразів та зручнішими виявляються інші методи.

Г. Інші способи інтегрування квадратичних ірраціональностей.

1. $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Для знаходження коефіцієнтів $Q_{n-1}(x)$ та λ треба диференціювати обидві частини рівності, привести до спільного знаменника та прирівняти поліноми у чисельниках дробів ліворуч та праворуч.

2. $\int \frac{dx}{(x-p)^k \sqrt{ax^2+bx+c}} = \left| \begin{matrix} \textit{Заміна} \\ t = \dfrac{1}{x-p} \end{matrix} \right| = \int \frac{At^{k-1}}{\sqrt{\tilde{a}t^2+\tilde{b}t+\tilde{c}}}dt$ та отже зводиться до 1. Якщо у чисельнику вихідного інтеграла стоїть поліном степеню більше за нуль, то його можна розкласти по степенях $(x-p)$ та почленним діленням звести до вихідного інтегралу.

3. У інтегралах вигляду $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k+\frac{1}{2}}}$ використовують наступну *підстановку Абеля*: $\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{dt}{1-t^2}$; $x^2+px+q = \frac{q-\frac{p^2}{4}}{1-t^2}$. Зауважимо, що цей метод також працює для інтегралів вигляду $\int \frac{dx}{(x^2+px+b)^k \sqrt{x^2+px+q}}$.

4. $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+q^2\right)^k \sqrt{ax^2+b}}dx = M\int \frac{xdx}{\left(x^2+q^2\right)^k \sqrt{ax^2+b}} + N\int \frac{xdx}{\left(x^2+q^2\right)^k \sqrt{ax^2+b}}$.
У першому інтегралу робимо заміну: $ax^2+b=t^2$, у другому $\left(\sqrt{ax^2+b}\right)' = t$.

5. Інтеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$ або зводиться до пункту 3 або після заміни до пункту 4. У загальному випадку (а саме, коли $b \neq ap$) роблять дробово-лінійну підстановку $x = \frac{\mu t+\nu}{1+t}$ або $t = \frac{x-\nu}{\mu - x}$, ($\mu \neq \nu$) та знаходять μ та ν такі, щоб після заміни у квадратних трьохчленів не залишилось перших степенів t (випадок 4).

Зауважимо, що не всі неозначені інтеграли можна «обчислити», тобто виразити через елементарні функції. Зокрема випадків у диференціальному біномі, які не охоплені підстановками Чебишева, важливими у застосуваннях є наступні інтеграли з ірраціональністями.

Д. Еліптичні інтеграли.

Взагалі інтеграли $\int R\left(x, \sqrt{P_3(x)}\right)dx$ і $\int R\left(x, \sqrt{P_4(x)}\right)dx$, де $P_3(x)$ і $P_4(x)$ – поліноми без кратних коренів 3[го] та 4[го] степеню відповідно, не виражаються через елементарні функції і називаються *еліптичними*. Ті з них які можливо виразити через елементарні називаються *псевдоеліптичними*. Інтеграли $\int R\left(x, \sqrt{P_3(x)}\right)dx$ зводяться зміною до $\int R\left(x, \sqrt{P_4(x)}\right)dx$. Ці приводяться до *канонічного вигляду* $\int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$ який зводиться до наступних трьох.

Еліптичні інтеграли I, II та III роду: I. $\int \frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$;

II. $\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$; III. $\int \frac{dz}{\left(1+hz^2\right)\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$, де $k \in (0,1)$, $z \in [0,1]$, $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Останні, у свою чергу, також виражають через *еліптичні інтеграли у формі Лежандра*:[1] $F(\varphi,k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}$,

$E(\varphi,k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin\varphi}\,d\varphi$, $\Pi(\varphi,k,h) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left(1+h\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}$. Отже

[1] Означені інтеграли у цьому розділу можна розуміти у сенсі формули Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

$\mathrm{I} = F(\varphi,k)+C$, $\mathrm{II} = -\frac{1}{k^2}E(\varphi,k)+\frac{1}{k^2}F(\varphi,k)+C$, $\mathrm{III} = \Pi(\varphi,k,h)+C$.

Інтегрування раціональних дробів від тригонометричних функцій.

Наступні підстановки зводять інтеграли вигляду $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ до інтегралів від раціональної функції.

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ підстановка $\cos x = t$;

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ підстановка $\sin x = t$;

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ підстановка $\mathrm{tg}\, x = t$;

4) **Універсальна тригонометрична підстановка:**

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ще деякі корисні формули при інтегруванні $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$:

1. $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=\int\frac{\alpha\cdot знам+\beta\cdot(знам)'}{a\sin x+b\cos x}dx$;

2. $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx=\int\frac{\alpha\cdot знам+\beta\cdot(знам)'+\gamma}{a\sin x+b\cos x+c}dx$;

3. $\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cdot\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx=$

$$=\int\frac{\alpha\cos x\cdot знам+\beta\sin x\cdot знам+\gamma}{a\sin x+b\cos x}dx;$$

5. $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2 x+2b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x}dx=\alpha\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+\beta\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}$,

   де λ_1, λ_2 – корені рівняння $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$, $k_i\ \frac{1}{a-\lambda_i}$,

   $u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x$;

6. $\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+\gamma\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}}$;

7. $\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{\alpha\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\beta\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\gamma\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$.

($|a| \neq |b|$).

Інтегрування раціональних дробів від експоненти.

Для інтегралів виду $\int R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)dx$ працюють такі самі підстановки як і для тригонометричної залежності.

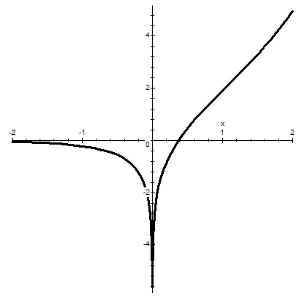
Універсальна гіперболічна підстановка:

$$\mathrm{th}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \mathrm{sh}x=\frac{2t}{1-t^2};\ \mathrm{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\ dx=\frac{2dt}{1-t^2}.$$

Взагалі для інтегралів виду $\int R(e^x)dx$, та зокрема для $\int R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)dx$, оскільки $R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)=R(e^x)$, зручнішою є підстановка $e^x=t \Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$.

Інтеграли, які не можна виразити через елементарні функції.

1. Інтегральна експонента: $Ei(x)\equiv\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$.

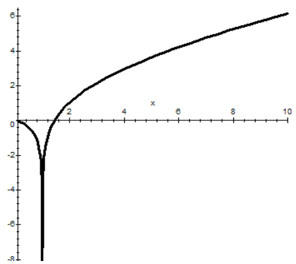


Отже $\int\frac{e^x}{x}dx=Ei(x)+C$, $(x\neq 0)$. Графік $Ei(x)$ наведено праворуч. При цьому $Ei(x)=\gamma+\ln|x|+o(x)$, якщо $x\to 0$, де

$\gamma = 0,5772156649...$ – стала Ейлера.

Рекурентна формула $I_n=\frac{e^x}{x^{n-1}}-I_{n-1}$ дозволяє обчислювати інтеграли вигляду $I_n=\int\frac{e^x}{x^n}dx$.

2. Інтегральний логарифм: $Li(x)\equiv\int_0^x\frac{dt}{\ln t}$.



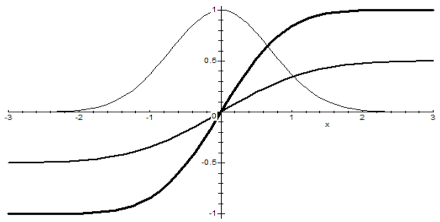
Отже $\int\frac{dx}{\ln x}=Li(x)+C$ $(x>0,\ x\neq 1)$. Графік $Li(x)$ наведено праворуч. Зазначимо зв'язок $Li(x)=Ei(\ln x)$ та $Ei(x)=Li(e^x)$, а також формулу $\int \frac{x^n dx}{\ln x} = Li(x^{n+1}) + C$.

3. Інтеграл Коши – функція помилок: $erf(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.[2]

Отже $\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(x) + C$. Зазначимо, що вона непарна: $erf(0) = 0$; $erf(-x) = -erf(x)$.

Функція $\Phi_0(x) = \frac{1}{2} erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ називається *інтегралом імовірності* (Ейлера- Пуасона).

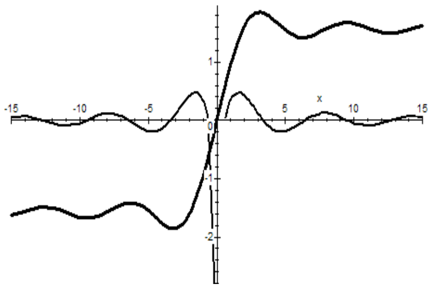
На малюнку праворуч зображені: функція $y = e^{-x^2}$ – крива Гауса (самою тонкою лінією «дзвіночок»); функція $y = erf(x)$ – самою товстою лінією, її амплітуда в двічі більша за амплітуду інтеграла імовірності (зображено середньою за товщиною лінією).



4. Інтегральні синус та косинус та гіперболічні інтегральні функції:

$Shi(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt$; $Chi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$. Отже $\int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x) + C$ та $\int \frac{\cos x}{x} dx = Ci(x) + C$.

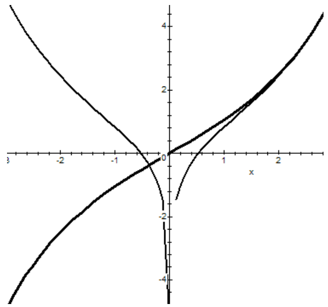
На малюнку праворуч графік функції $Si(x)$ проходить через початок координат, а $Ci(x)$ симетричний відносно осі ординат. $Si(0) = 0$; $Si(-x) = -Si(x)$ – непарна; $Ci(-x) = Ci(x)$ – парна та при $x \to 0$ має асимптотику: $Ci(x) = \gamma + \ln|x| + o(x)$.



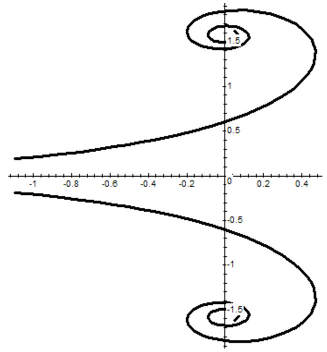
[2] від англ. *error function* – функція помилок

$Shi(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt$; $Chi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$. Отже $\int \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx = Shi(x) + C$ та $\int \frac{\operatorname{ch} x}{x} dx = Chi(x) + C$.

На малюнку праворуч графік функції $Shi(x)$ проходить через начало координат, а $Chi(x)$ симетричний відносно осі ординат. Як і звичайні інтегральний синус та косинус $Shi(0) = 0$, $Shi(-x) = -Shi(x)$ – непарна; $Ci(-x) = Ci(x)$ – парна та при $x \to 0$ має асимптотику: $Ci(x) = \gamma + \ln|x| + o(x)$.



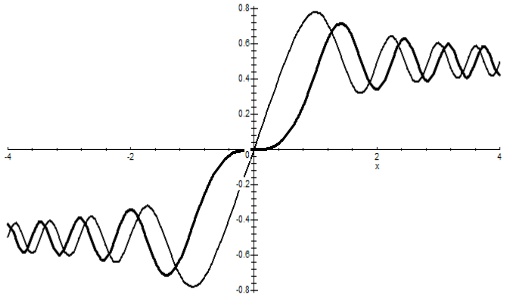
На малюнку праворуч наведено графік кривої $\{x = Ci(t);\ y = Si(x)\}$, заданої параметрично («вуса» симетричні відносно осі абсцис).



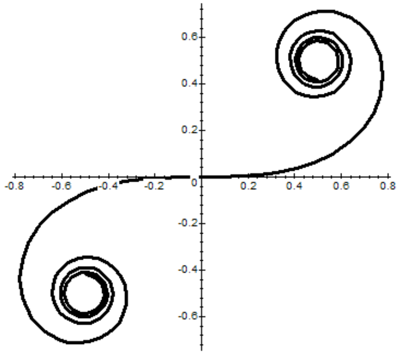
5. Інтеграли Френеля:

$S(x) \equiv \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$; $C(x) \equiv \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$. Отже $\int \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = S(x) + C$; $\int \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = C(x) + C$. Ці функції непарні: $S(0) = 0$; $C(0) = 0$; $S(-x) = -S(x)$; $C(-x) = -C(x)$.

На малюнку праворуч приведено графік функцій $y = C(x)$ и $y = S(x)$ (функція $S(x)$ має в початку координат нульову похідну).



На малюнку праворуч побудовано графік кривої $\{x = C(t);\ y = S(x)\}$, що задана параметрично («вуса» симетричні відносно начала координат). Ця крива має назви: «спіраль Корню[3]» або «клотоїда[4]». У цієї кривій кривизна змінюється лінійно як функція від довжини дуги. Вона використовується як перехідна дуга при будівництві доріг. Коли ділянка дороги має форму клотоїди, кермо повертається рівномірно. Така форма дороги дозволяє здійснювати поворот без суттєвого зниження швидкості.



[3] М.А.Корню – французький фізик, використовував цю криву для полегшення обрахунку дифракції в прикладних задачах оптики.
[4] Клото́ (греч. Κλωθώ, «Пряха») – у давньогрецькій міфології одна з трьох богинь долі і призначення людей та богів, що пряла нить життя.

5.2. Контрольні запитання і завдання

1. Що таке первісна та невласний інтеграл?
2. Пояснити, чому у однієї функції $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ існує дві різні первісні: а) $F(x) = \operatorname{arctg} x$; та б) $\forall x \neq 0 \quad F(x) = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.
3. Як пов'язані операції диференціювання та інтегрування?
4. Виписати таблицю первісних, довести її.
5. Записати формулу заміни змінної у невласному інтегралі та формулу інтегрування частинами. Довести їх.
6. Які дроби із дійсними коефіцієнтами є елементарними, та як обчислити від них інтеграли?
7. Що таке правильна та неправильна дроби?
8. Який алгоритм інтегрування довільної раціональної функції?
9. Як уникнути інтегрування елементарного дробу типу IV?
10. Записати метод Остроградського інтегрування раціональної функції.
11. Яка заміна зводить інтеграл із дробно-лінійною ірраціональністю до інтегралу від раціональної функції?
12. Які існують заміни, що зводять інтеграл із ірраціональністю типу диференціальний біном до інтегралу від раціональної функції?
13. Які існують заміни, що зводять інтеграл із квадратичною ірраціональністю до інтегралу від раціональної функції?
14. Яка ще є заміни, що усувають квадратичну ірраціональність?
15. Чи будь-який інтеграл із ірраціональністю зводиться до інтеграла від раціональної функції?
16. Які заміни та у яких випадках застосовують, щоб позбавитись раціональної залежності від тригонометричних функцій у неозначених інтегралах?
17. Які заміни та у яких випадках застосовують, щоб позбавитись експоненти або гіперболічних функцій у неозначених інтегралах?
18. Що таке еліптичні інтеграли, їх загальний канонічний вигляд, які є їх типи та їх запис у формі Лежандра?
19. Що таке інтегральна експонента та інтегральний логарифм?
20. Що таке функція похибок та інтеграл імовірності?
21. Що таке інтегральні синус та косинус та їх гіперболічні аналоги?
22. Як виглядають інтеграли Френеля, та що про них відомо?

5.3. Приклади розв'язування задач

Приклади на заміну змінної.

1. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \left|t = \ln x\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\ln x\right| + C$;

2. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} = \left|\begin{matrix} x = \cos t, \\ dx = -\sin t dt \end{matrix}\right| = \int \frac{-\sin t dt}{\sin^3 t} = \mathrm{ctg} t + C = \frac{\cos t}{\sin t} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C;$

3. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} = \left|\begin{matrix} x = \mathrm{sh} t \\ dx = \mathrm{ch} t dt \end{matrix}\right| = \int \frac{\mathrm{ch} t dt}{\mathrm{ch}^3 t} = \int \frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t} = \mathrm{th} t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C;$

Або у інший спосіб:

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left|x^3\right|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \mathrm{sgn}\, x \cdot \int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \left|\begin{matrix} 1+\frac{1}{x^2} = t \\ x^2 = \frac{1}{t-1} \end{matrix}\right| = \mathrm{sgn}\, x \cdot \int \frac{dt}{-t^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\, x \cdot \frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{\mathrm{sgn}\, x}{\sqrt{t}} + C = \frac{\mathrm{sgn}\, x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C = \frac{\mathrm{sgn}\, x \cdot |x|}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Приклади на формулу інтегрування частинам.

1. $\int \ln x dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x, \; du = \frac{dx}{x} \\ v = x, \;\; dv = dx \end{matrix}\right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C$;

2. Багатократне застосування:

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x \underset{\substack{інтегруємо\\частинами}}{=} x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x de^x =$$

$$\underset{\substack{інтегруємо\\частинами}}{=} x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C;$$

3. Виключіть інтегрування неелементарної функції: $\int xCi(x)dx$.

$$\int xCi(x)dx = \int Ci(x) d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}Ci(x) - \int \frac{x^2}{2} dCi(x) = \frac{x^2}{2}Ci(x) - \int \frac{x\cos x}{2}.$$

4. Рекурентні формули (формули зниження).

Нехай $n,m > 0$, $n,m \neq -1$.

$$I_{m,n} = \int x^m \ln^n x dx = \left|\begin{matrix} \ln^n x = u, \; du = n\frac{\ln^{n-1} x}{x} \\ x^m dx = dv, v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \end{matrix}\right| = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} n \frac{\ln^{n-1} x}{x} dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^{n-1} x - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}\right),$$

При цьому: $I_{m,0} = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.

5. Отримання рівняння із вихідним інтегралом:

$$I = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}\int e^{ax} d\sin bx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{1}{b}\int \sin bx de^{ax} =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\int e^{ax} d\cos bx =$$

$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx + C$. Отже отримано рівняння: $I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I + C$, з якого випливає $I = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$.

Приклад по типу «матрьошка» із інтегруванням частинами.

$$\int \frac{2^x \cdot \ln \mathrm{arctg}\, 2^x \cdot \cos\ln \mathrm{arctg}\, 2^x}{\left(1+2^{2x}\right)\cdot \mathrm{arctg}\, 2^x} dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln \mathrm{arctg}\, 2^x \cdot \cos\ln \mathrm{arctg}\, 2^x}{\left(1+2^{2x}\right)\cdot \mathrm{arctg}\, 2^x} d(2^x) \underset{\left|t=2^x\right|}{=}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln \mathrm{arctg}\, t \cdot \cos\ln \mathrm{arctg}\, t}{\left(1+t^2\right)\cdot \mathrm{arctg}\, t} dt = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln \mathrm{arctg}\, t \cdot \cos\ln \mathrm{arctg}\, t}{\mathrm{arctg}\, t} d\,\mathrm{arctg}\, t =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int \ln \mathrm{arctg}\, t \cdot \cos\ln \mathrm{arctg}\, t \, d\ln \mathrm{arctg}\, t \underset{y=\ln \mathrm{arctg}\, t}{=} \frac{1}{\ln 2}\int y \cdot \cos y\, dy =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int y\, d\sin y \underset{\substack{інтегрування\\частинами}}{=} \frac{1}{\ln 2}\left(y\sin y - \int \sin y\, dy\right) = \frac{1}{\ln 2}\left(y\sin y + \cos y\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\ln \mathrm{arctg}\, 2^x \cdot \sin\ln \mathrm{arctg}\, 2^x + \cos\ln \mathrm{arctg}\, 2^x\right) + C.$$

Приклади на обчислення інтегралів від раціональних функцій:

1. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^6 - x^2 + 2x + 1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)} dx$

Раціональний підінтегральний дріб неправильний, отже спочатку ділимо з остачею. Для цього запишемо $x(x-1)\left(x^2+1\right) = x^4 - x^3 + x^2 - x$. Ділимо у стовпчик

$$\begin{array}{l|l} x^6 - x^2 + 2x + 1 & x^4 - x^3 + x^2 - x \\ \hline \quad \ldots\ldots\ldots & x^2 + x \\ \quad \overline{2x+1} & \end{array}$$

, та маємо:

$$\int \frac{x^6 - x^2 + 2x + 1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)} dx .$$

Для обчислення останнього інтегралу, розкладемо дріб на суму простіших: $\frac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} =$

$$= \frac{(x-1)(x^2+1)A + x(x^2+1)B + x(x-1)(Mx+N)}{x(x-1)(x^2+1)} .$$

(A, B, M, N – невизначені коефіцієнти). Прирівнюємо чисельники:

$$2x+1 = (x-1)\left(x^2+1\right)A + x\left(x^2+1\right)B + x(x-1)(Mx+N) .$$

Два полінома дорівнюють тоді тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях співпадають. Із цього критерію та останньої рівності отримуємо:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 : A + B + M = 0 \\ x^2 : -A + N - M = 0 \\ x^1 : A + B - N = 2 \\ x^0 : -A = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 3/2 \\ M = -1/2 \\ N = -3/2 \end{array}\right. ,$$

$$\int \frac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)} dx = -\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+3}{x^2+1} dx .$$

Отже, $I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

2. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}$.

Розкладаємо дріб у суму простіших дробів:

$$\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} ,$$

можна знайти A, B, C, D, E, F як у попередній задачі, але можна й зробити наступні перетворення:

$$\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx1}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} .$$

Інтеграл, що залишився є інтегралом від елементарного дробу четвертого типу $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ та для його обчислення треба використовувати формулу зниження.

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C .$$

Далі ми будемо (та радимо) усувати інтеграли четвертого типу за допомогою методу Остроградського.

Приклад на метод Остроградського:

Обчислити $\int \frac{4x+3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} dx$.

$НСД(Q_n, Q'_n)$ можна знайти за допомогою алгоритму Евкліда. У цьому прикладі він дорівнює x^2+x+1. Тоді:

$$\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx.$$

Для знаходження *A, B, C, D* диференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{A\left(x^2+x+1\right)-\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A\left(x^2+x+1\right)-\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Оскільки знаменники однакові, то і чисельники мають співпадати:

$$4x+3 = A\left(x^2+x+1\right)+\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+x+1\right).$$

Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних ступенях x.

$$\left.\begin{array}{l} x^3: \ C=0 \\ x^2: \ A-2A+C+D=0 \\ x^1: \ A-A-2B+C+D=4 \\ x^0: \ A-b+D=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=2 \\ A=2 \\ B=1 \end{cases}.$$

Для вихідного інтеграла отримуємо:

$$\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{d\left(x+1/2\right)}{\left(x+1/2\right)^2+3/4} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 4/\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

Приклади на позбавлення від дрібно-лінійних ірраціональностей:

1. $\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx = \left| \begin{array}{l} x+2=t^3; \\ dx=3t^2dt; \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^3-2\right)t\cdot 3t^2}{t^3+t-2}dt.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{\left(x-7\right)^7\left(x-5\right)^5}} = \int \sqrt[6]{\left(\frac{x-7}{x-5}\right)^5}\frac{dx}{\left(x-7\right)^2} =$

$$= \left| \frac{x-7}{x-5} = t^6; dx = \frac{12t^5dt}{\left(1-t^6\right)^2}; x = \frac{7-5t^6}{1-t^6}; x = 5 + \frac{2}{1-t^6} \right| =$$

$= \int t^5 \frac{12t^5\left(1-t^6\right)^2 dt}{\left(1-t^6\right)^2\left(2t^6\right)^2} = 3\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{3}{t} + C$. Повертаючись до початкової змінної, отримаємо: $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{\left(x-7\right)^7\left(x-5\right)^5}} = -3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}} + C.$

Приклади на підстановки Чебишева (диференційній біном):

1. $\int \sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\cdot dx = \int x^{1/2}\left(1-x^{3/2}\right)^{1/4}dx =$

$$\left| \begin{array}{l} m=1/2;\ n=-3/2;\ p=1/4;\ \dfrac{m+1}{n} \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2 \ \textit{підстановка Чебишева} \\ 1-x^{-3/2}=t^4;\ x=\left(1-t^4\right)^{-2/3};\ dx=\dfrac{2}{3}\left(1-t^4\right)^{-5/3}4t^3dt. \end{array} \right| =$$

$= \int \left(1-t^4\right)^{-1/3}\cdot t\cdot\frac{2}{3}\left(1-t^4\right)^{-5/3}\cdot 4t^3dt = \frac{8}{3}\int \frac{t^4dt}{\left(1-t^4\right)^2}$. Отримали раціональну функцію, котру можна проінтегрувати методом Остроградського.

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-5/3}dx = \left| \begin{array}{l} m=-2;\ n=3;\ p=-\dfrac{5}{3}; \\ \dfrac{m+1}{n}+p=-2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow \\ 3 \ \textit{підстановка Чебишева} \end{array} \right| =$

$$= \left| \frac{2+x^3}{x^3} = t^3;\ \frac{2}{x^3}+1=t^3;\ dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{2/3}\left(-\frac{2}{(t^3-1)^2}\right)3t^2dt \right| =$$

$$\int\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{-7/3}\cdot t^{-5}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{-2/3}\cdot\frac{2(-3)t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} = -\frac{1}{4}\int\frac{t^3-1}{t^3}dt=-\frac{1}{4}t-\frac{1}{8t^2}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2+x^3}{x^3}}-\frac{1}{8}\left(\frac{2+x^3}{x^3}\right)^{-\frac{2}{3}}+C.$$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt[4]{\left(2+x^3\right)^5}}=\int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-5/4}dx=\left|p\notin\mathbf{Z};\quad \frac{m+1}{n}\notin\mathbf{Z};\quad \frac{m+1}{n}+p\notin\mathbf{Z}\right|.$

Жодна з підстановок Чебишева не підходить – інтеграл не може бути виражений через елементарні функції.

Приклади на підстановки Ейлера (квадратичні ірраціональності):

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+2}}=\left|\begin{array}{l} a>0,1\ \textit{підстановка Ейлера}:\sqrt{x^2+x+2}=-x+t \\ x^2+x+2=x^2-2xt+t^2;\ x=\dfrac{t^2-2}{1+2t}\end{array}\right|=$

$$=\int\frac{1}{t}d\left(\frac{t^2-2}{1+2t}\right)=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-2}{1+2t}+\int\frac{t^2-2}{1+2t}\cdot\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-2}{1+2t}+\int\frac{dt}{1+2t}-2\int\frac{dt}{(1+2t)t^2}.$$

Отримано інтеграли від раціональних функцій.

2. $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{1+x-x^2}}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx=\left|\begin{array}{l} c>0,\ 2\ \textit{підстановка Ейлеру}:\sqrt{1+x-x^2}=xt+1 \\ 1+x-x^2=1-2xt+x^2t^2;\ \ x=\dfrac{1-2t}{t^2+1}\end{array}\right|=$

$$=\int\frac{-t\cdot\frac{1-2t}{t^2+1}d\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\right)}{\frac{1-2t}{t^2+1}\cdot\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\cdot t+1\right)}.$$ Отримаємо інтеграл від раціональної функції.

3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{-3+4x-x^2}}{x+2\sqrt{-3+4x-x^2}}dx=\left|\begin{array}{l} D>0\ \underset{\substack{x_1=1,x_2=3;\ 3\,\textit{підстановка} \\ \textit{Ейлера}}}{\Rightarrow}\ \sqrt{-(x-1)(x-3)}=t(x-1) \\ \sqrt{3-x}=t\sqrt{x-1};\ 3-x=t^2(x-1);\ x=\dfrac{3+t^2}{t^2+1}\end{array}\right|=$

$$=\int\frac{t\left(\frac{3+t^2}{t^2+1}\right)}{\frac{3+t^2}{t^2+1}+\left(2t\frac{3+t^2}{t^2+1}\right)}dt.$$ Також інтеграл від раціональної функції.

Приклади на інші способи інтегрування квадратичних ірраціональностей:

1. $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+x-3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x^2+x+1}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}},$

$$\frac{x^3+2x^2+x-3}{\sqrt{x^2+x+1}}=(2ax+bx)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\left(ax^2+bx+c\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}+$$

$$+\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{(2ax+b)\left(x^2+x+1\right)+\left(ax^2+bx+c\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\alpha}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$x^3+2x^2+x-3=(2ax+b)\left(x^2+x+1\right)+\left(ax^2+bx+c\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3:1=2a+a \\ x^2:2=2a+b+\dfrac{a}{2}+b \\ x^1:1=2a+b+c+\dfrac{b}{2} \\ x^0:-3=b+\dfrac{c}{2}+\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{7}{12} \\ c=-\dfrac{13}{24} \\ \alpha=-\dfrac{159}{48}\end{array}\right.$$. Залишилось обчислити інтеграл

$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C,$ та підставити знайдений інтеграл та коефіцієнти у початковий вираз.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+2x+2}} = \left| t=\frac{1}{x-1},\ x=1+\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2} \right| =$

$\displaystyle\int \frac{-t^3\cdot t^{-2}dt}{\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+2}} = \operatorname{sgn} t\cdot\int\frac{-t^2dt}{\sqrt{5t^2+4t+1}}$, отже зведено до попереднього прикладу 1.

Приклади на тригонометричні підстановки:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x} = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right| = \int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int\frac{dt}{3+t^2}.$

2. $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx = \left|\sin x=t;\ dt=\cos x dx;\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\right| = \int\frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^4}dt.$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x} = \int\frac{dx}{3\cos^2 x\left(3-2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x\right)} =$

$\displaystyle= \left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x \\ dt=\left(1+t^2\right)dx \end{array}\right| = \int\frac{dt}{t^2-2t+3}.$

4. $\displaystyle\int\sin^r x\cdot\cos^s x\,dx = \left|\begin{array}{l} r,s\in Q;\ \sin^2 x=t \\ dt=2\sin x\cos x dx \end{array}\right| = \int\frac{1}{2}\,\frac{\sin^r x\cos^s x\,dt}{\sin x\cos x} =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int\sin^{r-1}x\cos^{s-1}x dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{r-1}{2}}\left(1-t\right)^{\frac{s-1}{2}}dt$ – інтеграл від диференційного бінома.

Приклад на для усунення експоненти/гіперболічних функцій:

$\displaystyle\int\frac{e^{2x}+1}{2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}dx = \left|\begin{array}{l} e^x=t,\ x=\ln t \\ dx=\frac{dt}{t} \end{array}\right| = \int\frac{t^2+1}{t-t^{-1}+\frac{t+t^{-1}}{2}}\cdot\frac{dt}{t}$ – отже отримано інтеграл від раціональної функції.

5.4. Задачі для самостійного розв'язку

Застосовуючи таблицю інтегралів і тотожні перетворення обчислити:

1. $\int\left(3-x^2\right)^3 dx$.

2. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

3. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$.

4. $\int\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}\,dx$.

5. $\int\frac{x^2dx}{1-x^2}$.

6. $\int\frac{x^2-3}{x^2+1}dx$.

7. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

8. $\int 2^{2x}e^x\,dx$.

9. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

10. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx\ \ (0\le x\le\pi)$.

11. $\int\sin^2 x\,dx$.

12. $\int\mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

13. $\int(2x-3)^{10}dx$.

14. $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx$.

15. $\int\frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$.

16. $\int\frac{dx}{2-3x^2}$.

17. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

18. $\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx$.

19. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

20. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

Шляхом належного перетворення підінтегрального виразу обчислити:

21. $\int\frac{x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

22. $\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

23. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

24. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

25. $\int\frac{x^2dx}{\left(8x^3+27\right)^{2/3}}$.

26. $\int\frac{dx}{1+2e^x}$.

27. $\int\frac{dx}{x\ln x}$.

28. $\int\mathrm{tg}\,x\,dx$.

29. $\int\frac{dx}{\sin x}$.

30. $\int\frac{dx}{\cos x}$.

31. $\int\frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$.

32. $\int\frac{x^{17/2}dx}{\sqrt{1+x^{19}}}$.

33. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. Вказівка: $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

34. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

35. $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

Застосовуючи метод розкладання, обчислити:

36. $\int\frac{x^2}{1+x}dx$.

37. $\int\frac{x}{(2-x)^{15}}dx$.

38. $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$.

39. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

40. $\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}dx$.

41. $\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

42. $\int\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$.

43. $\int\mathrm{tg}^3 x\,dx$.

44. $\int\sin^3 x\,dx$.

45. $\int\sin^4 x\,dx$.

Застосовуючи відповідні підстановки, знайти:

46. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$.

47. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

48. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$.

49. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

50. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

51. $\int\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

52. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

53. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

54. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x} dx$.

55. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin(2x)} dx$.

Застосовуючи метод інтегрування частинами, обчислити:

56. $\int \ln x \, dx$.

57. $\int x^n \ln x \, dx, \quad (n \neq -1)$.

58. $\int \ln^2 x \, dx$.

59. $\int x^2 e^{-2x} dx$.

60. $\int x^2 \sin 2x \, dx$.

61. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

62. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$.

63. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

64. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

65. $\int \frac{x^2 dx}{\left(4+x^2\right)^2}$.

66. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

67. $\int x^5 e^{x^2} \, dx$.

68. $\int \sqrt{x^2+a} \, dx$.

69. $\int e^{ax} \sin(bx) dx$.

70. $\int \ln^n x \, dx$.

71. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

Інтеграли по типу «матрьошка» із інтегруванням частинами:

72. $\int \frac{\ln \arccos x}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx$.

73. $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x} \cdot \cos\left(3^{\operatorname{arctg} x}\right)}{1+x^2} dx$.

74. $\int e^{\sqrt{\arcsin \sqrt{x}}} \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

75. $\int \cos \ln\left(\ln\left(1+e^{x^2}\right)\right) \frac{x e^{x^2}}{1+e^{x^2}} dx$.

76. $\int \frac{2^x}{\cos^2 2^x} \ln\left(\operatorname{tg} 2^x + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2^x}\right) dx$.

77. $\int \frac{2^x \cdot \ln \operatorname{arctg} 2^x \cdot \cos \ln \operatorname{arctg} 2^x}{\left(1+2^{2x}\right) \cdot \operatorname{arctg} 2^x} dx$.

Інтегрування раціональних функцій

Розкладання на найпростіші дроби, метод невизначених коефіцієнтів:

78. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$.

79. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$.

80. $\int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}$.

81. $\int \frac{x\, dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

82. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

83. $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}$.

84. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$.

85. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

86. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$.

87. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

88. $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)}$.

89. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)^2\left(x^2+x+1\right)}$.

90. $\int \frac{x dx}{x^3-1}$.

91. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$.

92. $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3} dx$.

93. $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$.

94. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.

95. $\int \frac{x^5 dx}{x^4-2x^3+2x-1}$.

Застосовуючи метод Остроградського, знайти:

96. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

97. $\int \frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}$.

98. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

99. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)^2} dx$.

100. $\int \frac{dx}{x^2\left(2x^2+3\right)^3}$.

101. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2} dx$.

Інтегрування ірраціональних функцій.

102. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

103. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

104. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

105. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

106. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

107. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}$.

108. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$.

109. $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}+\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x+3}}}$

110. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

111. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$.

112. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

113. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

114. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+2x+2}}$

115. $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

116. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

117. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$.

118. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

119. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

120. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

121. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

Застосовуючи підстановки Ейлера, знайти:

122. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

123. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

124. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

125. $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$.

126. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

127. $\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}dx$.

Застосовуючи підстановки Чебишева обчислити:

128. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

129. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

130. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

131. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

132. $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$.

133. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

134. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$.

135. $\int \frac{dx}{x^{\pi+1}\sqrt[3]{1+x^\pi}}$.

136. Виразити через елементарні функції і функції $F(\varphi,k)$ та $E(\varphi,k)$ еліптичні інтеграли: а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}$. б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2-8x^4}}$.

Інтегрування тригонометричних функцій.

За допомогою тригонометричних тотожностей, знайти:

137. $\int \sin 5x\cos x\,dx$.

138. $\int \sin^2 x\cos(3x+1)\,dx$.

139. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

140. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$.

141. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

142. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$.

143. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

144. $\int \operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x+a)\,dx$.

145. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

146. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

147. Вивести формули зниження для інтегралів $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ та $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$. З їх допомогою обчислити: а) I_5; б) K_7.

За допомогою тригонометричних підстановок, обчислити:

148. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

149. $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x)}$.

150. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x + 2\cos x}$.

151. $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$.

152. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

153. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{1+\sin^4 x}$.

154. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx$.

155. $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}dx$.

156. $\int \frac{dx}{3+5\,\mathrm{tg}\,x}$.

157. $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}dx$.

158. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}dx$.

159. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}}$.

160. $\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}dx$.

161. $\int \frac{1-\sin 2x - 4\cos^2 x}{2\sin x + \cos x}dx$.

162. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$.

163. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx$.

164. $\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x + \sin x)^2}$.

165. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

166. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

Інтегрування різних трансцендентних функцій

167. $\int x|x|dx$.

168. $\int (x+|x|)^2 dx$.

169. $\int \{|1+x|-|1-x|\}dx$.

170. $\int \max(1, x^2)dx$.

171. $\int [x]|\sin \pi x|dx$ $(x \ge 0)$.

172. $\int |x|dx$.

173. $\int f(x)dx$, де $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1 \\ 1-|x|, & |x|>1 \end{cases}$.

174. За допомогою інтегрального логарифму $\mathrm{Li}(x)$ і елементарних функцій, перетворіть інтеграли:

а) $\int \frac{1-x}{x}e^{-x}dx$; б) $\int \frac{e^{3x}}{x^3}dx$; в) $\int \frac{dx}{\ln^3 x}$; г) $\int \frac{x^{100}}{\ln x}dx$.

175. За допомогою інтегрального синусу $\mathrm{Si}(x)$ і елементарних функцій, перетворіть інтеграли:

а) $\int \frac{\sin 3x}{x^3}dx$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{x}dx$; в) $\int \frac{x\sin x - \cos x}{x^2}dx$.

176. За допомогою інтегралу похибок $\mathrm{erf}(x)$ і елементарних функцій, перетворіть інтеграли:

а) $\int e^{-(2x^2+2x+1)}dx$; б) $\int x^2 e^{-x^2}dx$; в) $\int \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$.

177. Виключіть інтегрування неелементарних функцій:

а) $\int \mathrm{Li}(x)dx$; б) $\int x\mathrm{Si}(x)dx$; в) $\int e^{-x^2/2}erf(x)dx$.

Застосовуючи різні прийоми, знайти:

178. $\int \frac{xdx}{x^8-1}$.

179. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

180. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

181. $\int \frac{x^4-1}{x^6+1}dx$.

182. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

183. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

184. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

185. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

186. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

187. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$.

188. $\int x^7 e^{-x^2}\,dx$.

189. $\int xe^x \sin x\,dx$.

190. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

191. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

192. $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$.

193. $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}\,dx$.

194. $\int x\cdot\operatorname{arctg}x\cdot\ln\left(1+x^2\right)dx$.

195. $\int x\,e^x \sin^2 x\,dx$.

196. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

197. $\int \frac{\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^{n-1}}{\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^{n+1}}\,dx$, а) $\cos a\neq 0$ б) $\cos a=0$.

198. $\int \sin x\cdot\ln\operatorname{tg}x\,dx$.

199. $\int \sin\ln x\,dx$.

200. $\int \frac{x^4-3}{x\left(x^8+3x^4+2\right)}\,dx$.

201. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

202. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

203. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$.

204. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx$.

205. $\int \frac{x^4-1}{x\left(x^4-5\right)\left(x^5-5x+1\right)}\,dx$.

206. $\int \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx$.

207. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

208. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

209. $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\cdot dx$.

210. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

211. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

212. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{1+2x-x^2}}$.

213. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

214. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

215. $\int x^5\left(2-5x^3\right)^{2/3}dx$.

216. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}}$.

217. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\,dx$.

218. $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}\,dx$.

219. $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\sin x)^2}\,dx$.

220. $\int \frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}\,dx$.

221. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, а) $0<|\varepsilon|<1$ б) $|\varepsilon|>1$.

222. $\int \frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx$.

223. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$, а) $\cos(a-b)\neq 0$ б) $\cos(a-b)=0$.

224. $\int \sin^3 2x\cdot\cos^2 3x\,dx$.

225. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

226. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

227. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.