РОЗДІЛ 4.
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА.

4.1. Основні поняття і властивості

Поле комплексних чисел.

Def. **C** $= \{\, z \mid z = x + iy;\quad x, y \in \mathbf{R},\quad i^2 = -1 \}$ – множина комплексних чисел, де запис $z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа; $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ називаються *дійсна* (або *реальна*) та *уявна* частини числа z відповідно.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$, тоді $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$. Визначимо асоціативні та комутативні операції +, ·, що як і для дійсних чисел пов'язані дистрибутивним законом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);\qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

В множині **C** існують різні елементи 1, 0 нейтральні за + та · відповідно: $1 = 1 + i0\,; 0 = 0 + i0$. А також для кожного $z \in \mathbf{C}$ існує протилежний елемент $-z = -x + i(-y) = -x - iy$; та для кожного $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ існує обернений $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\,\dfrac{-y}{x^2 + y^2}$.

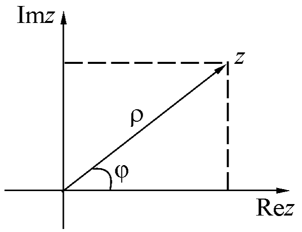
Таким чином множина **C** утворює *поле* за операціями +, · .

Def. Величина $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем* комплексного числа z. Для $z = x + iy$ *спряженим* комплексним числом називається $\bar{z} = z^* = x - iy$. Основні властивості операції спряження:

1. $(z^*)^* = z$; 2. $zz^* = |z|^2$; 3. $\dfrac{z + z^*}{2} = \operatorname{Re} z$; 4. $\dfrac{z - z^*}{2i} = \operatorname{Im} z$;

5. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$; 6. $(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*$; 7. $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1} \underset{\text{за } 2.}{=} \dfrac{z}{|z|^2}$.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел.



Розглянемо декартову площину та поставимо у відповідність кожній точці $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ комплексне число $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Таким чином комплексні числа можна розглядати як точки або радіус-вектора на площині (отже **C** називається *комплексною площиною*).

Тригонометрична форма запису.

Перейдемо від декартової системи координат до полярної:

$$x = \rho\cos\varphi,\;\; y = \rho\sin\varphi\,.$$

Тоді отримаємо *тригонометричну форму* запису комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Величина $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ задає відстань від точки z до начала координат (довжину радіус-вектору z), а величина φ задає кут між додатнім напрямком осі абсцис та радіус-вектором z. Остання називається аргументом комплексного числа і позначається $\operatorname{Arg} z$, вона знаходиться неоднозначно, з точністю до величини кратної 2π :

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in Z \text{ , де } \arg z = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\; x \ge 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\; x \le 0 \end{array}\right. \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Зауважимо, що $z = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$ аргумент φ при цьому не визначено.

Th. Нехай $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2) \wedge (\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\; k \in Z)$;
2. $z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

Геометрична інтерпретація добутку комплексних чисел – це поворот та розтягнення.

Формула Муавра. $\left(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

C. $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\,(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n})$, тут $k = 0, 1, 2, \ldots, n{-}1$.

Отже для будь якого ненульового комплексного числа існує рівно n різних значень кореня n-го степеню, та ці n значень утворюють вершини правильного многокутника вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\rho}$.

Визначимо розширення ще деяких функцій на комплексну площину (нескінчені суми нижче розуміємо як границі скінчених):

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!};\qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}; \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Формули Ейлера.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

С. $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

С (показникова форма запису комплексного числа**).**

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = \rho e^{i\varphi}.$$

Логарифм комплексного числа.

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbf{Z}$.

Також позначають $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ – головне значення логарифму комплексного числа.

Нарешті введемо операцію піднесення будь-якого комплексного числа до будь-якого комплексного степеню: $z_1^{z_2} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}$.

Th (основна теорема алгебри**).** Кожен поліном не нульового степеню $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, $z, c_k \in \mathbf{C}$, має хоча б один комплексний корінь z_0: $P_n(z_0) = 0$.

Принцип Руше. Приріст Arg $f(z)$ при руху по замкнутому контуру C в додатному напрямку дорівнює $2\pi n$, де n кількість нулів функції $f(z)$ усередині області обмеженою C.

Def. Поділити поліном $P(z)$ на $S(z)$ означає знайти поліноми $Q(z)$- *неповну частку* та $R(z)$- *остачу* такі, що: $P(z) = S(z)Q(z) + R(z)$. При цьому deg $Q(z)$ = deg $P(z)$ – deg $S(z)$; deg $R(z)$ < deg $S(z)$; де deg – це число $n \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, *степінь поліному*, що є найбільшою степеню його одночленів $c_n z^n$ із $c_n \neq 0$ (deg *Const* = 0). *Ділене* $P(z)$ ділиться на *дільник* $S(z)$ націло, якщо остача тотожно дорівнює 0; ділення неможливе, якщо дільник дорівнює 0. Поліном завжди націло ділиться на *Const*.

Th (Безу**).** Остача від ділення поліному $P_n(z)$ на двочлен $z - c$ дорівнює значенню многочлена $P_n(z)$ в точці $z = c$.

С1. Якщо $z = c$ корінь полінома $P_n(z)$, то $P_n(z)$ ділиться на $z - c$ без остачі та навпаки.

С2. Якщо $z = c$ корінь полінома $P_n(z)$, то $P_n(z)$ можна розкласти на множники: $P_n(z) = (z - c)Q_{n-1}(z)$.

Розкладання над полем комплексних чисел.

Якщо $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$ поліном з комплексними коефіцієнтами, то його можна розкласти на лінійні множники в $\mathbf{C}$: $P_n(z) = c_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$. З урахуванням кратності це дає: $P_n(z) = c_n \prod_{i=1}^{r} (z - z_i)^{k_i}$, де $\sum_{1}^{r} k_i = n$.

Розкладання поліному над полем дійсних чисел.

Якщо $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ поліном з коефіцієнтами із $\mathbf{R}$, то його можна розкласти на лінійні та квадратичні множники над полем $\mathbf{R}$: $P_n(z) = a_n \prod_{i=1}^{r} (z - x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} (z^2 + p_j z + q_j)^{l_j}$, де $p_j = -2 \operatorname{Re} z_j$, $q_j = |z_j|^2 \in \mathbf{R}$ для не дійсних коренів $z_j \in \mathbf{C}$ та $\sum_{1}^{r} k_i + \sum_{1}^{s} 2 l_j = n$.

Основна теорема алгебри гарантує наявність коренів у поліному степені вище за нульову. А які існують формули для знаходження цих коренів через коефіцієнти поліному? Для першого та другого степенів ці формули добре відомі зі шкільного курсу математики. Для третього степеню існують, так звані, формули Кардано. Для розв'язку рівнянь у випадку поліномів четвертого степеня є метод Феррарі. Однак виявляється, що починаючи із 5-го степеня спроби знайти загальний розв'язок будуть марними, що стверджує наступна теорема.

Th (теорема Абеля**).** У загальному випадку, для рівнянь 5-го та вище степеня неможливо подати корені рівнянь через радикали (виразити через скінчену кількість добувань коренів та алгебраїчних операцій із коефіцієнтами полінома).

4.2. Контрольні запитання і завдання

1. Які є форми запису комплексного числа?
2. Що таке дійсна та умовна частини комплексного числа?
3. Яке комплексне число називається спряженим до даного?
4. Як знайти частку двох комплексних чисел
5. Що таке аргумент і модуль комплексного числа?
6. Записати формули переходу від алгебраїчної до тригонометричної і показової форми запису комплексного числа.
7. Які правила множення і ділення двох комплексних чисел, що задані у тригонометричній формі? Записати формулу Муавра.
8. Як визначається операція знаходження кореня $n^{\text{го}}$-степеня з комплексного числа?
9. Надати геометричну ілюстрацію до комплексного числа , пояснити що відбувається при множенні/діленні на інше комплексне число, при піднесенні до натурального степеня та при добуванні кореня $n^{\text{го}}$-степеня?
10. Навести формули Ейлера зв'язку між $\sin z$, $\cos z$ і e^z. Перевірити, що $\sin iz = i\cdot \mathrm{sh} z$; $\mathrm{tg} iz = i\cdot \mathrm{th} z$; $\mathrm{sh} iz = i\cdot \sin z$; $\mathrm{th} iz = i\cdot \mathrm{tg} z$; $\cos iz = \mathrm{ch} z$; $\mathrm{ch} iz = \cos z$; $\mathrm{ctg} iz = -i\,\mathrm{cth} z$; $\mathrm{cth} iz = -i\,\mathrm{ctg} z$.
11. Навести формулу для обчислення логарифма $\mathrm{Ln}\, z$ комплексного числа та формулу піднесення комплексного числа до комплексного ступеня $z_1^{z_2}$.
12. Сформулювати основну теорема алгебри.
13. Що таке принцип аргументу (проілюструвати його для функції $f(z) = z$)?
14. Що таке ділення многочлена на многочлен (навести означення)? Сформулювати теорему Безу.
15. Записати розкладання многочлена на незвідні множники над полем комплексних та дійсних чисел.
16. Сформулювати теорему Абеля про формулу для розв'язку рівняння п'ятого та вище степеню.

4.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.

$$\frac{1-2i}{3+4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-10i+8i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{3-10i-8}{9+16} = \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \; .$$

Приклад 2. Знайти модуль та головне значення аргументу комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$, записати z в тригонометричній та показниковій формі.

Модуль z дорівнює $\rho = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$, аргумент дорівнює $\varphi = \arg z = \pi - arctg\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Отже у тригонометричній формі $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, а у показниковій $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Приклад 3.

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = (\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}) = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3},$$

k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Усі корені шостого степеню від одиниці лежать на окружності одиничного радіусу на вершинах правильного шестикутника і дорівнюють: 1; $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; -1; $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Приклад 4.

а) $\mathrm{Ln}\,2 = \ln 2 + i\cdot 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$;

б) $\mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi),\; k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5.

а) $(1+i)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{\frac{1}{5}\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{\frac{1}{5}\ln\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)} =$

$= \sqrt[10]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$.

б) $(1+i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}}$.

в) $(1+i)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})} = e^{\sqrt{2}\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$.

г) $(1+i)^{\sqrt{2}+i\sqrt{3}} = e^{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})} = e^{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} =$

$= e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \cdot e^{i\left(\sqrt{3}\ln\sqrt{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}$.

д) $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}i} = e^{i\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$.

е) $2^2 = e^{2\mathrm{Ln}2} = e^{2\left(\ln 2+i\cdot 2k\pi\right)} = e^{2\ln 2}\cdot e^{i\cdot 4k\pi} = e^{2\ln 2} = 4$.

Зробимо декілька спостережень із розглянутих прикладів. У пункті а) отримано п'ять різних рішень, що лежать на окружності радіуса $\sqrt[10]{2}$ у вершинах правильного п'ятикутника. У задачі б) нескінчена кількість розв'язків. Усі вони лежать на промені $\varphi = \ln\sqrt{2}$ та за модулем утворюють нескінчену (в обидві сторони: до 0 та ∞) геометричну послідовність із знаменником $e^{2\pi}$. У задачі в) всі рішення лежать на окружності радіуса $e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}$ та покривають її усюди щільним чином. У задачі г) рішення лежать на спіралі та щільно наближуються до 0 та ∞. Пункт д) є дивний факт: чисто уявне число в чисто уявній степені є нескінчена множина дійсних додатних чисел. І все ж таки, пункт е), двічі два дорівнює чотирьом ☺.

Приклад 6. Знайти геометричне місце точок *z*, що задовольняють співвідношенню: **а)** $\frac{\pi}{6} < \arg\frac{1-i}{z^4} < \frac{3\pi}{2}$; **б)** $1 < \mathrm{Re}\left(e^{3-2i}z\right) < 5$.

а) Запишемо у показниковій формі $\frac{1-i}{z^4} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\rho^4 e^{i4\varphi}} = \sqrt{2}\rho^{-4}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-4\varphi\right)}$. Отже $\arg\frac{1-i}{z^4} = -\frac{\pi}{4} - 4\varphi$ та умова задачі перетворюється на $-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) > \varphi > -\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, тобто $-\frac{5}{48}\pi > \varphi > -\frac{7}{16}\pi$.

Схематично відповідь можна зобразити рисунком «а» нижче.

б) Запишемо у алгебраїчній формі $e^{3-2i}z = \left(e^3\cos 2 - ie^3\sin 2\right)\left(x+iy\right) =$ $= xe^3\cos 2 + ye^3\sin 2 + i(ye^3\cos 2 - xe^3\sin 2)$. Отже $\mathrm{Re}\left(e^{3-2i}z\right) =$ $= xe^3\cos 2 + ye^3\sin 2$ та умова задачі перетворюється на $y < \frac{5}{e^3\sin 2} - x\,\mathrm{ctg}\,2$ одночасно із $y > \frac{1}{e^3\sin 2} - x\,\mathrm{ctg}\,2$. Або приблизно $\frac{3}{2} + x\,\mathrm{tg}(205^\circ) < y < 7 + x\,\mathrm{tg}(205^\circ)$ тобто це область, що знаходиться між двома паралельними прямими (див схематичний рисунок «б» нижче).

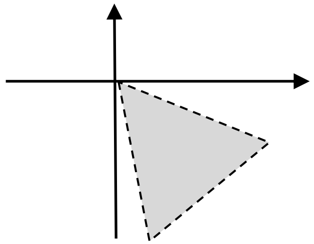


рис. «а»

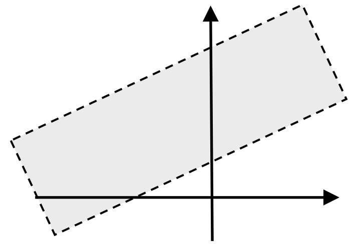


рис. «б»

Приклад 7. Розкласти на незвідні множники над полем комплексних та над полем дійсних чисел поліном $x^6 - 1$.

Знайдемо всі корені полінома, тобто розв'яжемо рівняння $z^6 - 1 = 0$. Корені цього рівняння знайдені у прикладі 3 цього розділу. Отримаємо

$$z^6 - 1 = (z-1)(z+1)(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

тобто розкладення над полем комплексних чисел. Не дійсні корені z_j у полінома з дійсними коефіцієнтами йдуть парою зі своїми спряженими z_j^*, що при розкритті душків $(z-z_j)(z-z_j^*)$ дає $z^2 - 2\,\mathrm{Re}\,z_j + |z_j|^2$. Отже $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, що є розкладенням на незвідні множники над полем дійсних чисел. Зауважимо, що для даного прикладу цю відповідь можна було отримати простіше за формулами різниці кубів та квадратів.

4.4. Задачі для самостійного розв'язку

1. Виконати зазначені дії над комплексними числами в алгебраїчній формі: $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 2-3i$, $z_3 = -2+6i$.

z_1+z_2; z_1-z_2; $3z_1-2z_3$; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{z_1}{z_3}$; z_1^2; z_2^3.

2. Виконати зазначені дії: $\frac{2}{1-3i}$; $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$; $\left(\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6$.

3. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} z_1+2z_2 = 1+i \\ 3z_1+iz_2 = 2-i \end{cases}$.

4. Визначити, при яких дійсних значеннях x і y будуть спряжені наступні комплексні числа: $z_1 = y^2 - 7y - 9xi$ та $z_2 = -12 + 20i + x^2 i$.

5. Знайти розв'язок системи рівнянь: $|z+1-i| = |3+2i-z| = |z+i|$

6. Записати в тригонометричній формі наступні комплексні числа: $1+i$; $2-2i$; $-1-i$; $1-\sqrt{3}i$; $\sqrt{3}+i$; i; $3i$; 5; -8; $3-4i$; $3+4i$; $1-\sin\alpha+i\cos\alpha$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

7. Знайти модуль та головне значення аргументу наступних чисел: $2+5i$; $-2+5i$; $-2-5i$; $2-5i$; $-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$; $\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

8. Використовуючи тригонометричну форму виконати над комплексними числами $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+\sqrt{3}\,i$ наступні дії:

$z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{z_2}{z_1}$; z_1^{40}; z_2^{66}.

9. Розв'язати рівняння: $z^* = z^{n-1}$ ($n \neq 2$, $n\in\mathbf{N}$).

10. Знайти всі значення наступних коренів і побудувати їх:

$\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[4]{-8}$; $\sqrt[3]{i}$; $\sqrt{1-i}$; $\sqrt[5]{1+i}$; $\sqrt{3+4i}$; $\sqrt[3]{-2+2i}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

11. Знайти всі значення: $\sqrt[3]{-8}+\sqrt{2i}$; $\sqrt{i+\sqrt{-1}}$; $\left(\sqrt[4]{(1+i)^2}\right)^2$.

12. Розв'язати рівняння: $z^5 = 1+\sqrt{3}i$.

13. Навести наступні комплексні числа в показовій формі:

±1; $\pm i$; $\pm1\pm i$; $1-\sqrt{3}\,i$; $-2+2i$; $4i$; 5; -8; $\sin\alpha - i\cos\alpha$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

14. Обчислити: $e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$, $e^{k\pi i}$ (k = 0, ±1, ±2, …).

15. Знайти модулі та головні значення аргументів чисел:

e^{2+i}; e^{2-3i}; e^{3+4i}; e^{-3-4i}; $-ae^{i\varphi}$ ($a > 0$, $|\varphi| \le \pi$); $e^{-i\varphi}$ ($|\varphi| \le \pi$); $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ ($0 \le \beta < \alpha \le 2\pi$).

16. Знайти дійсні та уявні частини комплексних чисел:

а) e^{2+3i}; $\cos i$; $\sin i$; $\operatorname{tg} i$; б) $\cos(2+i)$; $\sin(3-2i)$; $\operatorname{tg}(3+2i)$.

17. Виразити $\sin^5\varphi$ через тригонометричні функції кратних кутів, а $\sin 5\varphi$ через степені $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$.

18. Знайти суми:

а) $1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$;

б) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$;

в) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x$;

г) $\sin x-\sin 2x+\ldots+(-1)^{n-1}\sin nx$;

д) $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+n\sin nx$.

19. Довести, що а) $\sin^2 z+\cos^2 z = 1$; б) $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$.

20. Обчислити: $\operatorname{Ln} 4$; $\operatorname{Ln}(-1)$; $\ln(-1)$; $\operatorname{Ln} i$;

$\ln i$; $\operatorname{Ln}\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{Ln}(2-3i)$; $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.

21. Знайти всі значення: а) 1^{π}; б) i^{i}.

22. Обчислити (знайти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, |z|, $\arg z$) та відобразити на комплексній площині: $1^{\sqrt{2}}$; $(-2)^{\sqrt{2}}$; 2^{i}; 1^{-i}; i^{i};

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; $(3-4i)^{1+i}$; $(-3+4i)^{1+i}$.

23. Обчислити (знайти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, |z|, $\arg z$) та відобразити на комплексній площині: $2^{\sqrt{2}}$; $(-1)^{\sqrt{2}}$; 3^{i}; i^{i}; π^{1-i};

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$; $\left(\sqrt{3}+i\right)^{i-1}$; 2^{2-i}; $(-e)^{\sqrt{3}+i}$.

24. Знайти комплексні числа, що лежать на бісектрисі кута, утвореного векторами $z_1=6+8i$, $z_2=4-3i$.

25. Виходячи з геометричних міркувань, довести нерівності. Довести ці ж нерівності алгебраїчним шляхом. З'ясувати, коли має місце знак рівності.

а) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$; б) $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$;

в) $\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le|\arg z|$; г) $|z-1|\le\ \big||z|-1\big|+\ |z|\cdot|\arg z|$.

26. Знайти геометричні місця точок z (ГМТ):

а) $\operatorname{Re}(z+2)>1$; б) $\operatorname{Re}(z+2)\ge 1$; в) $\operatorname{Im}(z-2+i)>1$;
г) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=1$; д) $|z|\le 3$; е) $2\le|z-2+i|<4$;
є) $\operatorname{Re}\{z(1+i)\}=2$; ж) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}=1$; з) $0<\arg z\le\pi/4$;
и) $0<\arg(z-i)\le\pi/4$; і) $0<\arg\{z(1-i)\}\le\pi/4$;

27. Визначити сімейства ліній на комплексній площині, заданих відповідними рівняннями:

$\operatorname{Re}\frac{1}{z}=C$; $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=C$; $\operatorname{Re} z^2=C$; $\operatorname{Im} z^2=C$, ($C\in\mathbf{R}$).

28. З'ясувати геометричний зміст зазначених співвідношень:

а) $|z-3|=|z-1|$; б) $|z-z_1|=|z-z_2|$;
в) $0<\operatorname{Re}(iz)<1$; г) $|z|=\operatorname{Re} z+1$;
д) $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z-2}=0$; е) $\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$;
є) $\operatorname{Re}\frac{z-i}{z-3}=0$; ж) $\operatorname{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$;
з) $|z|<\arg z$, $0\le\arg z<2\pi$; и) $|z|<\arg z$, $0<\arg z\le 2\pi$.

29. Знайти геометричне місце точок z, що задовольняють співвідношенню: а) $\frac{\pi}{2}<\arg z^2\le\pi$; б) $\operatorname{Re}\left(e^{-3i}z\right)<1$;

в) $\frac{\pi}{4}<\arg\frac{1-i}{z^3}<\frac{\pi}{2}$; г) $0<\operatorname{Re}\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}z\right)$; д) $0\le\arg\frac{z+i}{z-i}\le\frac{\pi}{2}$.

30. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:
$\left|e^{z^{20}}\right|\le 1$.

31. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:

$$\left|\operatorname{Re}\left\{z\left(\cos 2^\circ+i\sin 2^\circ\right)\right\}\right|+\left|\operatorname{Im}\left\{z\left(\cos 2^\circ+i\sin 2^\circ\right)\right\}\right|\le 1$$

32. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:

$$|z-2|^2+|z+2|^2=26.$$

33. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:
$|z|^2+3z+3\bar{z}=0.$

34. Яку криву в комплексній площині описує точка: $z = at + be^{i\omega t}$, якщо t, a, b, ω – дійсні.

35. Яку криву в комплексній площині описує точка: $z = (a + it)e^{it}$, якщо t, a – дійсні.

36. Знайти a і b при яких поліном $x^4 + 3x^2 + ax + b$ ділиться на $x^2 + 2ax + 2$.

37. Розв'язати рівняння: $z^6 - z^3 - 2 = 0$.

38. Рівняння $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$ має корінь $1 + i$. Знайти інші корені.

39. Розв'язати рівняння: $z^{10} - z^5 - 992 = 0$.

40. Розв'язати рівняння: $(z - i)z(z + i)(z + 2i) = 24$.

41. Розв'язати рівняння: $\left(\frac{1 - iz}{1 + iz}\right)^i = i$.

42. Розв'язати рівняння: $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

43. Розв'язати рівняння: $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

44. Розв'язати рівняння: $(3 - i)z^2 - (8 - i)z + (4 + 7i) = 0$.

45. Знайти спільні корені рівнянь:

$$z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0, \quad z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 4 = 0.$$

46. Знайти остачу ділення полінома $z^{1989} - 1$ на $z^2 + 1$.

47. Знайти остачу від ділення $z^{1983} - 1$ на $(z^2 + 1)(z^2 + z + 1)$.

48. Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $z^{2n+1} - 1$.

49. Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $x^{2n} + 1$.

50. Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $x^{2n} - 1$.