РОЗДІЛ 1.
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ ТА ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Основні поняття і властивості

<u>Елементи математичної логіки.</u>

Прості й сполучені висловлювання. Логічні зв'язування.
Оповідальне речення, яке за змістом істина або неправда називається *висловлюванням* (приклад: 2×2 = 4 – висловлювання, що є істиною; 2×2 = 5 – висловлювання, що є неправдою). Прості висловлювання позначають літерами (маленькими або великими грецькими або латинськими A, B, C, D, …) та називають *пропозиціональними змінними*. За допомогою операцій логічного зв'язування можна створювати *складні висловлювання* та формули. Змістовно виправдано використання 5ти логічних зв'язувань[1], які вказано у порядку пріоритету:

1. унарна – заперечення « $\neg$ » ($\neg A$) (не A);
   і бінарні:
2. кон'юнкція « $\wedge$ » ($A \wedge B$, A і B);
3. диз'юнкція « $\vee$ » ($A \vee B$, A або B);
4. імплікація « $\Rightarrow$ » ($A \Rightarrow B$, якщо A то B, із A випливає B);
5. еквіваленція « $\Leftrightarrow$ » ($A \Leftrightarrow B$, A еквівалентно B).

Для значень «істина» та «неправда» використовують скорочення «і» та «н» або «1» та «0» відповідно. Результати застосування 5ти логічних зв'язувань до висловів наведемо у наступній таблиці (таблиці істинності):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

[1] Додаткові логічні зв'язування:
« | » – антікон'юнкція (штрих Шефера): $A \mid B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$;
« $\downarrow$ » – антідиз'юнкція (стрілка Пірса): $A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$.

Таким чином мова математичної логіки складається із наступного *алфавіту*: $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$, де $\sigma_1 = \{A_0, A_1, A_2, ...\}$ - змінні висловлювання або пропозиціональні змінні, $\sigma_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ - логічні зв'язування; $\sigma_3 = \{(,)\}$ - додаткові символи.

Взаємозв'язок логічних зв'язувань:
Кожне зв'язування можна виразити через три основні $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$;

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

Алгебраїчні властивості зв'язувань:

1. $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$ – комутативний закон (всі бінарні зв'язування окрім імплікації комутативні);
2. $\left.\begin{array}{l} a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c \end{array}\right\}$ – асоціативні закони ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ неасоціативні);
3. $\left.\begin{array}{l} a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{array}\right\}$ – дистрибутивні закони;
4. $\left.\begin{array}{l} \neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b \\ \neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b \end{array}\right\}$ – закони де Моргана;
5. Транзитивність $\Rightarrow$ (так саме і $\Leftrightarrow$): $a \Rightarrow b$ та $b \Rightarrow c$, тоді $a \Rightarrow c$;
6. Закон подвійного заперечення: $\neg\neg a \Leftrightarrow a$;
7. Принцип тотожності: $\neg a \vee a \Leftrightarrow 1$, $\neg a \wedge a \Leftrightarrow 0$;
8. Правила поглинання: $a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$, $a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$;
9. Закони 0 та 1: $0 \wedge a \Leftrightarrow 0$, $1 \wedge a \Leftrightarrow a$, $0 \vee a \Leftrightarrow a$, $1 \vee a \Leftrightarrow 1$.

Формули та їх класифікація.
Формула: = {пропозиціональна змінна | $\neg U$ | $(U \wedge V)$ | $(U \vee V)$ | $(U \Rightarrow V)$ | $(U \Leftrightarrow V)$}, де U і V – формули або висловлювання.
Def. Формула може бути
а) *здійснима* – якщо існує ($\exists$) набор параметрів (значень змінних), при яких формула істина;
б) *тавтологія* (тотожна істина) – якщо для будь-якого набору параметрів формула істинна;

в) *спростовна* – якщо існує набор параметрів, при яких формула неправдива;
г) *протиріччя* (тотожна неправда) – якщо для будь-якого набору параметрів формула неправдива.

Формула називається *формулою з тісними запереченнями*, якщо в ній нема символів $\Rightarrow$ та $\Leftrightarrow$, і заперечення має відношення тільки до пропозиціональних змінних.

Довільна кон'юнкція (диз'юнкція) формул, кожна з яких є пропозиціональною змінною або її запереченням називається *елементарною кон'юнкцією* (*диз'юнкцією*).

Def. Довільна диз'юнкція елементарних кон'юнкцій називається *диз'юнктивною нормальною формою*, а довільна кон'юнкція елементарних диз'юнкцій називається *кон'юнктивною нормальною формою* (д.н.ф. і к.н.ф. відповідно).

Def. Д.н.ф. (к.н.ф.) називається *досконалою* – д.д.н.ф. (д.к.н.ф.), якщо кожна змінна формули входить до елементарної кон'юнкції (диз'юнкції) рівно один раз із запереченням або без нього.

Зауваження: д.к.н.ф. дозволяє сказати, що вихідна формула неправдива тільки у випадку, коли A, B, C – неправдиві. Знаючи д.к.н.ф., легко написати і д.д.н.ф якщо врахувати, що окремі елементарні кон'юнкції описують випадки істинності форми.

$$((A \vee B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee$$
$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)).$$

У записаної формулі ліворуч від $\Leftrightarrow$ стоїть д.к.н.ф. а праворуч д.д.н.ф.

Обчислити складне висловлювання, тобто встановити істинна воно або неправда при різних значеннях пропозиціональних змінних можливо не тільки за допомогою таблиць істинності, але й за допомогою репрезентуючих функцій, при цьому обчислення висловлювань робиться за допомогою арифметичних дій із 0 та 1. Нехай f (істина) = 1, f (неправда) = 0 тоді:

$f(\neg A) = 1 - f(A)$; $\quad f(B \vee A) = f(B) + f(A) - f(A) \cdot f(B)$;

$f(A \wedge B) = f(A) \cdot f(B)$; $\quad f(B \Rightarrow A) = 1 - f(B) + f(A) \cdot f(B)$;

$f(A \Leftrightarrow B) = 1 - f(A) - f(B) + 2 f(A) f(B)$.

Обчислити висловлювання можна також, якщо змоделювати вихідне складене висловлювання еквівалентною електричною схемою. Для цього, записавши вихідну формулу як формулу з тісними запереченнями, можна замінити її еквівалентним електроланцюгом. При цьому: кон'юнкція $A \wedge B$ може бути промодельована послідовним включенням в ланцюг двох вимикачів A і B, а диз'юнкція $A \vee B$ – паралельним. Провідність ланцюга визначається істинністю формули, що дозволяє а) спрощувати ланцюги (зменшити число розмикачів), спрощуючи відповідні формули з використанням алгебраїчних властивостей зв'язок; б) будувати ланцюга із заданою функцією провідності від положень (станів) пакетних перемикачів.

Квантори

Квантор - логічна операція, що перетворює твердження про певну властивість у об'єктів даного класу в твердження про кількість об'єктів, що володіють цією властивістю.

Важливими для використання є наступні квантори:
$\forall$ – квантор загальності (від англ. All, Any);
$\exists$ – квантор існування (від англ. Exist);
$\exists!$ – квантор існування й одиничності;

$\forall x\ A(x)$ – для всіх x виконується властивість $A(x)$;
$\exists x\ A(x)$ – існує x, для якого виконується властивість $A(x)$;
$\exists! x\ A(x)$ – існує й тільки один x, для якого виконана властивість $A(x)$.

Алгебраїчні властивості кванторів:

1. $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)$,
   $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)$;
2. Комутування кванторів із запереченням
   $\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$,
   $\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$;
3. Комутування однойменних кванторів по різним змінним
   $\forall x\, \forall y\, A(x, y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, A(x, y)$,
   $\exists x\, \exists y\, A(x, y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, A(x, y)$;

Різнойменні квантори, взагалі, не комутирують, але
   $\exists x\, \forall y\, A(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, A(x, y)$, хоча зворотної імплікації нема;

4. Дистрибутивність $\forall$ відносно $\wedge$ та $\exists$ відносно $\vee$:
   $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$,

$\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$;

5. $\forall x\,A(x) \vee \forall x\,B(x) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x))$,

$\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\,A(x) \wedge \exists x\,B(x)$,

$\exists x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \Rightarrow \exists x\,B(x)$,

$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x\,A(x) \Rightarrow \forall x\,B(x)$;

6. Властивості кванторів щодо ототожнення:

$\forall x\,\forall y\,A(x, y) \Rightarrow \forall x\,A(x, x)$,

$\exists x\,A(x, y) \Rightarrow \exists x\,\exists y\,A(x, y)$;

7. Дистрибутивність кванторів щодо $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ коли одно з висловлювань не залежить від кванторної змінної:

$\forall x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \wedge B$,

$\exists x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge B$,

$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \Rightarrow B$,

$\forall x\,(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \Rightarrow \forall x\,B(x)$;

8. Квантор існування й одиничності $\exists!$

$\exists! x\,A(x) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge \forall y\,(A(y) \Rightarrow y = x)$;

9. Релятивізовані квантори:

$\forall_R\, x\,A(x) \Leftrightarrow \forall x\,(R(x) \Rightarrow A(x))$ «для всіх x таких, що $R(x)$»

$\exists_R\, x\,A(x) \Leftrightarrow \exists x\,(R(x) \wedge A(x))$. «існує x такий, що $R(x)$ і $A(x)$»

Елементи теорії множин.

Множина – це об’єднання в одно ціле певних, цілком розпізнавальних об’єктів (*елементів*) нашого сприйняття або думки[2].

Елементи множин, здебільшого, позначатиме малими літерами із початку або кінця латинського алфавіту: $a, b, c, \ldots; x, y, z, \ldots$. А множини – здебільшого, великими буквами з початку або з кінця латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots; X, Y, Z, \ldots$. Звісно, послідовно витримувати цю угоду, в взагалі, неможливо оскільки множини самі можуть бути елементами інших множин.

[2] Наведене поняття (Г.Кантор) не є означенням множини воно лише пояснює його, зв’язуючи із іншими. Поняття множини відноситься до основних понять, що не визначається.

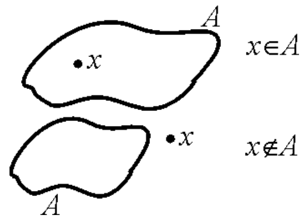
Множина задається сукупністю своїх елементів, які перелічуються у фігурних душках: $M = \{x, y, z\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Часто множина задається за допомогою *класифікатора* («|» або «:»), після якого описується властивість, що характеризує елементи цієї множини: $M \equiv \{x \mid P(x)\}$ – «множина M є множина об’єктів x для яких виконана властивість $P(x)$».

Наведемо основні позначення та ілюстрації до них за допомогою діаграм Ейлера-Венна (множини – фігури на площині, елементи – точки):

$x \in A$ – елемент x *належить* множені A, або

$A \ni x$ – множина A *містить* елемент x;

$x \notin A \Leftrightarrow \neg\,(x \in A)$ – x *не належить* множені A, або $A \not\ni x$ – множина A *не містить* елемента x.



Відношення *рівності* **й** *включення***:**

1. $A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

   а) рефлексивність: $A = A$;

   б) симетрія: $A = B \Rightarrow B = A$;

   в) транзитивність: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

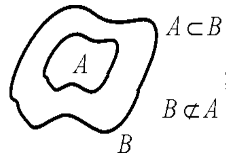
2. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

«Множина A *міститця* у множинні B»,

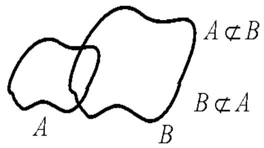
A – *підмножина*, B – *надмножина*.

$A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$ – «A *містить* B».

Якщо $x \in A$, то $\{x\} \subset A$, але $x \neq \{x\}$.



;



   а) рефлективність: $A \subset A$;

   б) антисиметрія: $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$;

   в) транзитивність: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

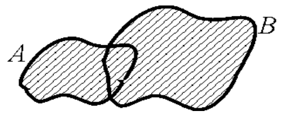
Перелічені властивості означають, що відношення рівності та включення визначають *часткову впорядкованість* на множинах.

Порожня множина $\varnothing$ – це множина, яка не має елементів: а) $\forall x\;\; x \notin \varnothing$; б) $\forall X\;\; \varnothing \subset X$.

Операції над множинами

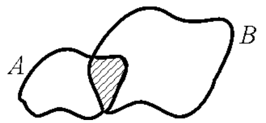
1. $A \cup B \equiv \{x \in A \vee x \in B\}$

$A \cup B$ – *об’єднання множин*;



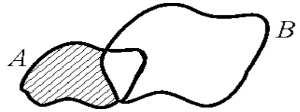
2. $A \cap B \equiv \{x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cap B$ – *перетин множин*;



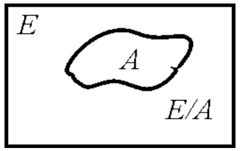
3. $A \setminus B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \setminus B$ – *різниця множин*;



Доповнення до множини на множині E:

$$E \setminus A \equiv C_E A = \bar{A}.$$



При цьому

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

4. *Симетрична різниця*:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

5. *Декартов (прямий) добуток* множин:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\},$$

тут (a, b) – *упорядкована пара* елементів a і b, на відміну від $\{a, b\}$, де порядок неважливий.

Властивості операцій

Об'єднання та перетин множин комутативні, асоціативні і дистрибутивні по відношенню один до одного:

1. $A \cup B = B \cup A$; $\quad A \cap B = B \cap A$;

2. $((A \cup B) \cup C) = (A \cup (B \cup C))$; $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C))$; $\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C))$.

4. Об'єднання і перетин ідемпотентні:

$A \cup A = A \cap A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \setminus \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $\varnothing \setminus A = \varnothing$; $A \setminus A = \varnothing$.

5. Різниця дистрибутивна щодо об'єднання, перетину і різниці:

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

6. Прямий добуток не комутує та не асоціативен: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$; $A \times B \neq B \times A$ (якщо $B \neq A$); також $A \times A = A^2$; $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$;

$$\left.\begin{array}{l} A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \\ (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \end{array}\right\} \text{ дистрибутивність } \cup;$$

$$\left.\begin{array}{l} A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \\ (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \end{array}\right\} \text{ дистрибутивність } \cap.$$

Приклади множин[3]**:**

$\varnothing$ - порожня множина;

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - натуральний ряд;

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ - множина цілих чисел;

$\mathbf{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z} \right\}$ - множина раціональних чисел;

$\mathbf{R}$ = множина дійсних чисел;

$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ - множина невід'ємних дійсних чисел;

$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ - декартова площина;

$\mathbf{C} = \{z \mid z = x + iy;\ x, y \in \mathbf{R},\ i^2 = -1\}$ - множина комплексних чисел.

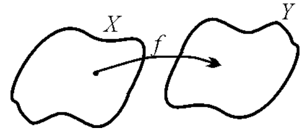
Числові проміжки:

а) інтервал : $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$;

б) полуінтервали: $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$;

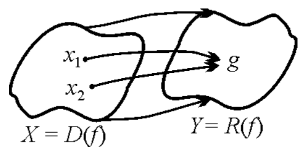
в) сегмент: $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Відповідності між множинами



Нехай X та Y – довільні множини, f – закон або правило за яким кожному елементу множини X встановлюється у відповідність один елемент множини Y: $\forall x \in X\ \exists! y \in Y\ y = f(x)$, тоді говорять, що задано *відображення* (або, у разі числових множин, *функція*) $f : X \to Y$ між множинами X та Y. Множина X називається *областю визначення* відображення f і позначається $D(f)$; множина елементів $y \in Y$, які поставлені у відповідність елементам множини X називається *областю значень* відображення f і позначається $E(f)$. Відображення від множини це $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, тоді маємо $E(f) = f(D(f))$.

Типи відповідностей:



1. Сюр'єкція (f -sur, відображення «на»):

$Y = E(f)$; тобто

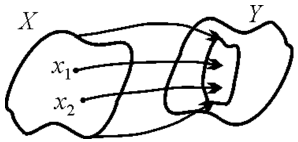
$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ y = f(x)$;

$\uparrow$ (не обов'язково $\exists!$)

---

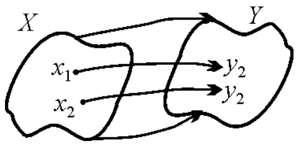
[3] Зауважимо, що тут ми не наводимо аксіоматичних означень множин. Детальніше про множину **R** див. нижче у цьому розділу, про **C** у розділу 4.

2. Ін'єкція (f-inj, вкладення або відображення «в»):



$E(f) \subset Y, \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$

3. Бієкція (f-bij, взаємооднозначне відображення):



f-sur $\wedge$ f-inj;

або $E(f) = Y, \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$

тобто $\forall y \in Y \quad \exists!\, x \in X \quad y = f(x);$

а це те саме, що у f є *обернене* до неї відображення $f^{-1} : Y \to X$.

Def. Множини X і Y називаються *рівнопотужними* ($X \cong Y$), якщо існує бієкція між X та Y (взаємнооднозначна відповідність).

Def. Множина рівнопотужна множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ називається *зліченною*. Множина рівнопотужна інтервалу (0,1) називається множиною *потужності континуум*.

Множина дійсних чисел **R** рівнопотужна інтервалу (0,1), отже є множиною потужності *континуум*.

Th. Множина **Q** раціональних чисел – зліченна.

Th. Множина дійсних чисел **R** як і інтервал (0,1) не є зліченними.

Зауважимо, що існування або відсутність множин потужності більше за зліченну та менше за континуум не випливає з аксіом теорії множин і може бути прийнято як ще одна аксіома теорії множин.

Дійсна числова пряма. R – повне впорядковане поле.

Множину дійсних чисел **R** наділено операціями додавання і добутку, тобто відображеннями $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, з наступними властивостями:

1. $a + b = b + a$ і $a \cdot b = b \cdot a$ (комутативний закон);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ і $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot a)$ (асоціативний закон);
3. $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (дистрибутивний закон);
4. Існують різні елементи 0 і 1 такі, що $0 + a = a$, $1 \cdot a = a$ для всіх a.
5. Для кожного a існує *протилежний* $-a$ такий, що $a + (-a) = 0$; для кожного $a \neq 0$ існує *зворотний* елемент a^{-1} такий, що $a \cdot (a^{-1}) = 1$.

Множина з двома операціями, що задовольняють аксіомам 1-5, називається *полем*. Множина **Q** раціональних чисел, як **R** і **C**, є поле.

Відношення порядку ≤.

Множина дійсних чисел впорядкована відношенням ≤, з наступними властивостями:

6. Для кожної пари дійсних чисел a і b виконується $a \leq b$ або $b \leq a$ (якщо $a \leq b$ і $b \leq a$ одночасно, то $a = b$);
7. Якщо $a \leq b$ і $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивність);
8. Якщо $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$ для будь-якого c, та якщо $0 \leq c$, то $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Поле з відношенням порядку, що задовольняє 6-8 є впорядкованим полем. Поле **Q** раціональних чисел, як і **R**, є впорядкованим.

Найважливішою аксіомою для математичного аналізу дійсних чисел є наступна дев'ята *аксіома повноти*. Пред тим як її сформулювати нам знадобляться ще декілька означень.

Грані числових множин.

Def. Множина X називається *обмеженою зверху* (*знизу*) якщо існує дійсне число L – *верхня грань* (l – *нижня грань*) таке, що L більше (l менше) кожного елементу X.

Обмежена зверху: $\exists L \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad x \leq L.$

Обмежена знизу: $\exists l \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad x \geq l.$

Множина *обмежена*, якщо вона обмежена зверху і знизу:

$$\exists L, l \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad l \leq x \leq L \quad \text{або} \quad \exists A \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad |x| < A.$$

Def. Найменша з верхніх граній множини, якщо вона існує, називається *супремумом* або *точною верхньою гранню* L^* множини X і позначається: $L^* = \sup X$. Найбільша з нижніх граній, якщо існує, називається *інфімумом* або *точною нижньою гранню* l^* множини X і позначається: $l^* = \inf X$.

Th (критерій супремума й інфімума).

$L^* = \sup X$: 1. $\forall x \in X \quad x \leq L^*$ і 2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \quad x > L^* - \varepsilon$.

$l^* = \inf X$: 1. $\forall x \in X \quad x > l^*$ і 2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \quad x < l^* + \varepsilon$.

Def. Якщо $L^* \in X$, тоді L^* називається *максимальним елементом* множини X: $L^* = \max X$. Аналогічно, якщо $l^* \in X$, то l^* називається *мінімальним елементом* множини X: $l^* = \min X$.

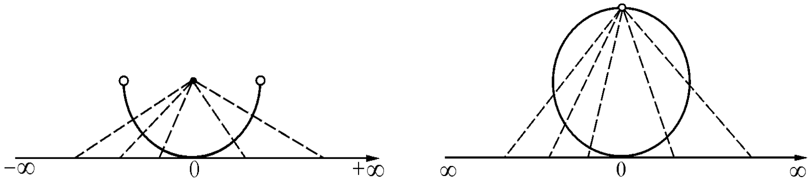
Аксіома повноти. Якщо непуста множина в **R** обмежена зверху (знизу), то вона має точну верхню (нижню) грань в **R**.

Розширена числова пряма.

Числову пряму **R** можна розширити додаючи до неї нескінченість ∞, або дві нескінченості $-\infty$, $+\infty$ (*невласні елементи*):

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \text{ або } \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Наступні малюнки ілюструють той факт, що $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ топологічно еквівалентна полуокружності із крайніми точками дуги або



відрізку, а $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ топологічно еквівалентна окружності.

На $\overline{\mathbf{R}}$ кожна непуста множина має точну верхню (нижню) грань (можливо невласну).

Приклади.

1. $X = \mathbf{N}$ $\inf X = \min X = 1$, $\sup X = +\infty$, $\max X$ не існує.
2. $X = \mathbf{Q}$ $\inf X = -\infty$, $\sup X = +\infty$, $\max X$ і $\min X$ не існують.

Обмеженість, числові грані, супремум (*інфімум*) *функції* f визначаються як відповідні властивості для множини її значень $E(f)$.

Числові проміжки та околи точок.

Def. Види проміжків:

а) інтервал: $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$;

б) полуінтервали: $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x \le b\}$;

в) сегмент (відрізок): $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$.

Def. *Відкритим околом* точки a (позначаємо U_a) називається будь-який інтервал, що її містить.

Def. *Відкритим ε-околом* точки a називається інтервал $O(a,\varepsilon)$:

$$O(a,\varepsilon) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}.$$

Def. *Проколотим околом* точки a називається множина $\widehat{U}_a = U_a \setminus \{a\}$.

Відповідно, *проколотим ε-околом* точки a є множина

$$\widehat{O}(a,\varepsilon) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathrm{R} \mid 0 < |x-a| < \varepsilon\}.$$

Def. *Однобічним околом* точки a називається перетин околу a і однією із полупрямих, на які a розбиває числову пряму:

$$U_a^+ = [a, +\infty) \cap U_a, \quad U_a^- = (-\infty, a] \cap U_a;$$

$$\hat{U}_a^+ = (a, +\infty) \cap U_a, \quad \hat{U}_a^- = (-\infty, a) \cap U_a.$$

Для невласних елементів околи визначаються наступним чином:

Лівий полуокіл $+\infty$: $O(+\infty, \varepsilon) \equiv (\varepsilon, +\infty)$,

Правий полуокіл $-\infty$: $O(-\infty, \varepsilon) \equiv (-\infty, \varepsilon)$.

Розташування точок відносно множини.

Def. Точка a називається *внутрішньою* точкою множини M, якщо вона належить множині M разом із деяким околом: $\exists U_a \mid U_a \subset M$.

Множина всіх внутрішніх точок M називається *внутрішністю* M і позначається $\overset{\circ}{M}$. Якщо $M = \overset{\circ}{M}$, то M називається *відкритою* множиною (тобто всі його точки внутрішні).

Def. Точка a називається *точкою дотику* множини M, якщо будь-який її окіл має точки спільні із множиною M: $\forall U_a \mid U_a \cap M \ne \varnothing$.

Сукупність точок дотику M називається *замиканням* множини M і позначається $\overline{M}$. Якщо $M = \overline{M}$, то M називається замкненою (містить всі його точки дотику).

Def. Точка a називається *точкою згущення* множини M (*гранична точка*), якщо будь-який проколотий окіл a має з M спільні точки: $\forall \widehat{U}_a \mid \widehat{U}_a \cap M \ne \varnothing$.

Множина всіх граничних точок M називається *похідною множиною* і позначається M'.

Def. Точка a називається *ізольованою точкою* множини M, якщо існує її окіл, що не має з M спільних точок, окрім точки a: $\exists \widehat{U}_a \mid \widehat{U}_a \cap M = \varnothing$.

Def. Точка a називається *точкою межи* множини M, якщо кожний її окіл має точки, що належать множині M і точки, що не належать M:

$$\forall U_a \mid \exists x \in U_a \cap M \quad \wedge \quad \exists y \in U_a \mid y \notin M.$$

Сукупність точок межи утворює *межу* множини M і позначається ∂M.

Def. Точка a називається *зовнішньою точкою* множини M, якщо існує її окіл, що не має з M спільних точок: $\exists U_a \mid U_a \cap M = \varnothing$.

Більш того, числова пряма має дві важливі властивості (аксіоми).

1. Напіввідокремленість точок: $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \ne b$ $\exists U_a \mid b \notin U_a$.
2. Відокремленість точок: $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \ne b$ $\exists U_a$, $\exists U_b \mid U_a \cap U_b = \varnothing$.

Операції над функціями.

Нехай

$$f : D(f) \to E(f); \quad D(f) \subset \mathbf{R}, \quad E(f) \subset \mathbf{R},$$
$$g : D(g) \to E(g); \quad D(g) \subset \mathbf{R}, \quad E(g) \subset \mathbf{R}.$$

Операції над числовими функціями числового аргументу вводяться поточково, тобто

1°. $(f+g)(x) \equiv f(x)+g(x)$, $\quad D(f+g)=D(f)\cap D(g)$;

2°. $(\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x)$, $\quad D(\alpha f)=D(f)$;

3°. $(f\cdot g)(x) \equiv f(x)\cdot g(x)$, $\quad D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$;

4°. $(f/g)(x) \equiv f(x)/g(x)$, $\quad D(f/g)=D(f)\cap D(g)\setminus\{x|\, g(x)=0\}$;

5°. $(f\circ g)(x) \equiv f(g(x))$, $\quad D(f\circ g)=D(g)\setminus\{x|\, g(x)\notin D(f)\}$.

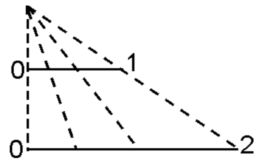
Остання операція називається *композицією* або *суперпозицією* f і g.

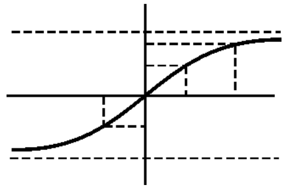
Def. Дійсно-значна функція натурального аргументу f: $\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ називається *послідовністю*. Кожному натуральному числу n ставиться у відповідність дійсне $x_n= f(n)$. Послідовність позначається $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ або просто (x_n), де x_n називається елементом послідовності.

1.2. Контрольні запитання і завдання

1. Що таке висловлювання?
2. Які є операції над висловлюваннями та їх властивості? Який порядок виконання операцій у висловлюванні $\left(\left(\neg P\Rightarrow Q\right)\vee\left(P\Rightarrow\left(Q\wedge P\right)\right)\right)$?
3. Перелічити три основні квантори. Як заперечення діє на висловлювання з кванторами? Чи комутують квантори (навести приклади)?
4. Поняття множини, їх опис, класифікатор, діаграми Ейлера-Венна. Перелічити відносини та основні операції над множинами та їх властивості.
5. Аксіоматика дійсних чисел **R**: аксіоми поля, упорядкованість, повнота. Визначення верхньої і нижньої та точної верхньої і нижньої грані множини їх критерії.
6. Записати означення множини:
   а) обмеженої зверху; б) обмеженої знизу;
   в) обмеженої; г) необмеженої зверху;
   д) необмеженої знизу; е) необмеженої.
7. Записати твердження, що функція $f(x)$ на множині X є:
   а) обмеженою зверху; б) обмеженою знизу;
   в) обмеженою; г) необмеженою зверху;
   д) необмеженою знизу; е) необмеженою.

8. Відображення та функції, відповідності між множинами. Потужності множин: скінчені, злічені множини і множини континуальної потужності. Навести функції, що здійснюють бієкції а) інтервалу (0, 1) та інтервалу (0, 2); б) (-1, 1) та **R** (див. малюнки нижче).





9. Навести приклад множини, що є об'єднанням замкненого проміжку, відкритого проколотого околу та ізольованої точки, що попарно не перетинаються. Які точки цієї множини є внутрішні, граничні, зовнішні та точки межі.
10. Що таке послідовність? Як визначити суму двох послідовностей, композицію (якщо одна з послідовностей має натуральні значення)?

1.3. Приклади розв'язування задач

Приклад. Обчислити висловлювання:

$$((A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg\,(C\vee A)\Rightarrow B)).$$

1 5 3 2 4

Цифри 1-5 вказують порядок операцій.

Спосіб 1. Таблиця істинності:

A	*B*	*C*	1	2	3	4	5
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

У 5^{му} стовпчику вказана істинність всього сполученого висловлювання при різних значеннях істинності *A*, *B* і *C*.

Спосіб 2. За допомогою формули $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ позбавимося від імплікацій:

$$(\neg A \vee B) \Rightarrow (C \vee A \vee B)$$

$\neg(\neg A \vee B) \vee C \vee A \vee B$ та застосуємо закон де Моргана.

$(A \wedge \neg B) \vee C \vee A \vee B$ – отримана формула є формулою з тісними запереченнями. Запишемо її у вигляді

$$(A \wedge \neg B) \vee (C) \vee (A) \vee (B),$$

трактуючи кожну скобку як елементарну кон'юнкцію, бачимо диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій, тобто д.н.ф. Вона не є досконалою, оскільки у кожні дужки входять не всі змінні формули.

Запишемо останню формулу у вигляді $(A \wedge \neg B) \vee (C \vee A \vee B)$ і застосуємо дистрибутивний закон:

$$(A \vee C \vee A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee B),$$

тобто $(A \vee C \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee B)$. Висловлювання у останній дужці є тавтологія, тому отримуємо:

$$(A \vee B \vee C),$$

що є елементарна диз'юнкція, та отже ми маємо д.к.н.ф. Це висловлювання є завжди істина, крім випадку коли всі змінні одночасно приймають значення «неправда».

1.4. Задачі для самостійного розв'язку

<u>Елементи математичної логіки.</u>

1. Побудувати таблиці істинності:
   а) $(\neg(P \Rightarrow \neg(Q \wedge P)) \Rightarrow (P \vee R))$;
   б) $((P \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow \neg P)$;
   в) $(((P \wedge \neg Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$;
   г) $((P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \Rightarrow P) \vee Q))$.
2. Довести здійснимість формул:
   а) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$;
   б) $((Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \Rightarrow Q))$.
3. Довести тотожну істинність (тавтологію):
   а) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q)))$;
   б) $((\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$;
   в) $(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$;
   г) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$.
4. Довести еквівалентності:
   а) $(A \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg A$;
   б) $(A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
5. На питання, хто з трьох студентів вивчав логіку, було отримано правильну відповідь: «Якщо вивчав 1й, то вивчав і 3й; але, неправда, що, якщо вивчав 2й, то вивчав і 3й». Хто з студентів вивчав логіку?
6. Хто з чотирьох студентів здав екзамен, за умов:
   а) якщо 1й здав, то і 2й здав;
   б) якщо 2й здав, то і 3й здав або 1й не здав;
   в) якщо 4й не здав, то 1й здав, а 3й не здав;
   г) якщо 4й здав, то і 1й здав.
7. Вимагається, щоб вмикання світла в кімнаті здійснювалось за допомогою трьох різних перемикачів таким чином, що кожний з них вмикав світло, якщо воно не горить, і вимикав його, якщо світло горить.

<u>Елементи теорії множин.</u>

1. Довести тотожності:
   а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; б) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
   в) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; г) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
   д) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$; е) $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$;
   ж) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$; з) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Довести, що:
   а) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$; б) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$;
   в) $A \setminus B \subset C \Leftrightarrow A \subset B \cup C$; г) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$;
   д) $A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \cup C$; е) $A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subset C$;
   ж) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$; з) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$.
3. Для множин X і Y визначити тип включення $(X \subset Y, Y \subset X, X = Y)$:
   а) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
   б) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
   в) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4. Довести, що для кожного відображення $f : X \to Y$ і будь-яких підмножин $A, B \subset X$ виконується

а) $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$; б) $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$;

в) навести приклад, коли $f(A \bigcap B) \neq f(A) \bigcap f(B)$;

г) $f : X \to Y$ ін'єкція $\Leftrightarrow \forall A, B \subset X \quad f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$.

5. Довести, що множина A чисел кратних 3 равнопотужна множині раціональних чисел **Q**. Навести приклади функцій, що здійснюють бієкцію A і **N**, A і **Z**.

6. Нехай A – множина всіх раціональних чисел a таких, що $a^3 < 3$ і B – множина всіх інших раціональних чисел. Довести, що в множині A нема максимального числа, а в B – мінімального. Чому дорівнюють $\sup A, \inf A, \sup B, \inf B$ в **R**?

7. Визначити точну нижню та верхню грані функції на вказаної множині та обґрунтувати за допомогою критерію супремума та інфімума.

а) $f(x) = 1/(1 + x^2)$ для $x \in \mathbf{R}$;

б) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$;

в) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$.