ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Задачи для самостоятельного решения

1.

Метод интервалов решения дробно-рациональных (и не только!) неравенств.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 11*

Применяя метод интервалов решить следующие неравенства:

1*. $\dfrac{(x-4)(x+5)}{(x-7)(3-x)} \le 0$, **2*.** $\dfrac{(x-2)^3(7-x)(x^2+x-1)(9+2x)}{(x-4)^2(x^2-4x+3)(x-3)} \ge 0$,

3*. $\dfrac{(2x-5)}{(x^2-6x-7)} < \dfrac{1}{x-3}$, **4*.** $\dfrac{8+4x}{4x+x^2} \le \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4+x}$,

5*. $|x-3| > 4x$, **6*.** $|x+2| - |3-x| < x$,

7*. $|x+1| + 2|7-x| - 6|2x-1| + |x-3| \ge 7x$, **8*.** $x^2 + x - 10 < 2|x-1|$,

9*. $|4x-1| \le \dfrac{1}{3x-1}$, **10*.** $\big||x-1|-2\big| > 1$, **11*.** $\big||x-1|+2\big| > 1$.

5.

Степенная, показательная, логарифмическая функции. Основные свойства и графики. Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 24*

Решить следующие показательные неравенства:

1*. $25^{-x} + 5^{-x+1} \ge 50$; **2*.** $2\cdot 3^{2x^2} + 4 \le 3^{x^2+2}$;

3*. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$; **4*.** $98 - 7^{x^2+5x-48} \ge 49^{x^2+5x-49}$;

5*. $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x \le 7\cdot 10^x$; **6*.** $\sqrt{13^x-5} \le \sqrt{2(13^x+12)} - \sqrt{13^x+5}$;

7*. $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 3^{\sqrt{x^2-3}-1}\cdot 28$; **8*.** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{1/\log_3 5}$;

9*. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x} \ge 1$; **10*.** $(0{,}008)^x + 5^{1-3x} + (0{,}04)^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30{,}04$;

11*. $(0{,}09)^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots} < \sqrt[3]{0{,}3^{3x^2+5x}} < 1$; **12*.** $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1$;

13*. $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \ge (x^2+x+1)^3$;

Решить следующие логарифмические неравенства:

14*. $\log_{5/8}\left(2x^2 - x - \dfrac{3}{8}\right) \ge 1$; **15*.** $\log_{1/4}\dfrac{2x-1}{x+1} < \cos\dfrac{2\pi}{3}$;

16*. $\log_{1/4}(2x+3) > \log_9 27$; **17*.** $\log_4(3^x-1)\cdot\log_{1/4}\dfrac{3^x-1}{16} \le \dfrac{3}{4}$;

18*. $2\log_4 x - \dfrac{1}{2}\log_2(x^2-3x) + 2 \le \cos\dfrac{4\pi}{3}$;

19*. $\log_2\left(\sqrt{x+3} - x - 1\right) \le 0$; **20*.** $\log_{1/x}\dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} \ge 1$;

21*. $\log_{\frac{x^2+1}{x}}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 4\right) \ge 1$; **22*.** $\log_{0,3}\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4} < 0$;

23*. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)} < \dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$; **24*.** $\log_x\left(\log_2(4^x-6)\right) \le 1$.

6.

Тригонометрические функции углового и числового аргументов. Определение и свойства. Обратные тригонометрические функции. Формулы двойного и половинного аргумента. Формулы приведения.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 18*

Доказать тождества:

1*. $\dfrac{1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$; **2*.** $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

3*. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg}3\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg}2\alpha$;

4*. $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cdot\cos\alpha$.

Вычислить без помощи таблиц:

5*. $\frac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ+\cos 51^\circ\sin 69^\circ}$; **6*.** $\sin^2 70^\circ\cdot\sin^2 50^\circ\cdot\sin^2 10^\circ$;

7*. $\sin 15^\circ$; **8*.** $\sin 18^\circ$; **9*.** $\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}$.

Вычислить: **10*.** $\sin(2\arccos\frac{1}{4})$; **11*.** $\cos[\arcsin(-\frac{1}{2})]$;

12*. $\sin(\arcsin\frac{3}{6}+\arcsin\frac{8}{17}]$. **13*.** $\mathrm{tg}(2\arcsin\frac{2}{3})$;

14*. $\arcsin(\sin 2)$; **15*.** $\sin(\mathrm{arctg}2+\mathrm{arctg}3)$;

16*. $\sin(2\mathrm{arctg}\frac{1}{3})+\cos(\mathrm{arctg}\,2\sqrt{3})$.

Проверить равенства:

17*. $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; **18*.** $\mathrm{arctg}3-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\pi}{4}$.

7.

Решение простейших (и не только!) тригонометрических уравнений и неравенств.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 20*

Решить следующие тригонометрические уравнения:

1*. $2\sin^2x+\sin x-1=0$; **2*.** $4\sin^4x+\cos 4x=1+12\cos^4x$;

3*. $\mathrm{tg}^3x+2\mathrm{tg}^2x\;\;3\mathrm{tg}x=0$.

Следующие уравнения свести к однородным и решить:

4*. $2\sin x\cos x+5\cos^2x=4$; **5*.** $8\sin 2x-3\cos^2x=4$;

6*. $\sin^4x-\cos^4x=\frac{1}{2}$; **7*.** $\cos^6x+\sin^6x-\cos^2 2x=\frac{1}{16}$.

Вводя дополнительный аргумент решить уравнения:

8*. $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x)$;

9*. $\sin 11x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x+\frac{1}{2}\cos 7x=0$;

10*. $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\sin 15x$; **11*.** $4\sin 3x+3\cos 3x=5{,}2$.

Применяя универсальную тригонометрическую подстановку:

$t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$; $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\mathrm{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}$, *решить:*

12*. $\sin x+\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=2$; **13*.** $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4}-x)=5\mathrm{tg}2x+7$;

14*. $3\sin 4x=(\cos 2x-1)\mathrm{tg}x$;

Применяя подстановку $t=\cos x+\sin x$, решить:

15*. $5(\sin x+\cos x)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}(2+\sin 2x)$;

16*. $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$; **17*.** $\sin x+\cos x-2\sin x\cos x=1$.

Решить: **18*.** $\sin^2 6x+8\sin^2 3x=0$;

19*. $\sin^8x+\cos^8x=\frac{17}{32}$; **20*.** $\cos 2x+4\sin^4x=8\cos^6x$.

Основные формулы школьной математики

1. Формулы сокращенного умножения и разложения на сомножители

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

2. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

4. $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 2a^2b + 2a^2c + 2b^2a + 2b^2c + 2c^2a + 2c^2b + 6abc$;

5. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

6. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

7. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \ldots + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i$;

2. Квадратное уравнение

1. $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $D = b^2 - 4ac$;

$D > 0$ – 2 различных корня ($x_1 \neq x_2$); $D = 0$ – 2 совпадающих корня ($x_1 = x_2$); $D < 0$ – нет вещественных корней.

2. $x_{1,2} = \dfrac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$.

3. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

4. Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + px + q = 0$.

5. T° Виета: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

6. Если $p = 2k$, то $x^2 + 2kx + q = 0$, $x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - q}$.

3. Степени и корни

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$; 2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 3. $a^x : a^y = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 4. $(a^x)^y = a^{xy}$;

5. $(ab)^x = a^x b^x$; 6. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; 7. $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$; 8. $\sqrt{a^2} = |a|$; 9. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$;

10. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$; 11. $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$; 12. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$; 13. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

14. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 15. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 16. $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$.

4. Логарифмы

1. $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ ($a \geq 0$, $a \neq 1$); 2. $a^{\log_a b} = b$; 3. $\log_a a = 1$;

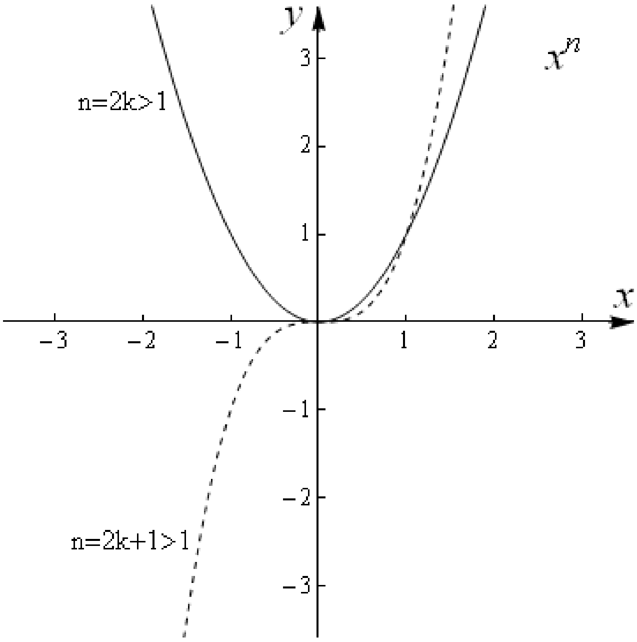
4. $\log_a 1 = 0$; 5. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$; 6. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

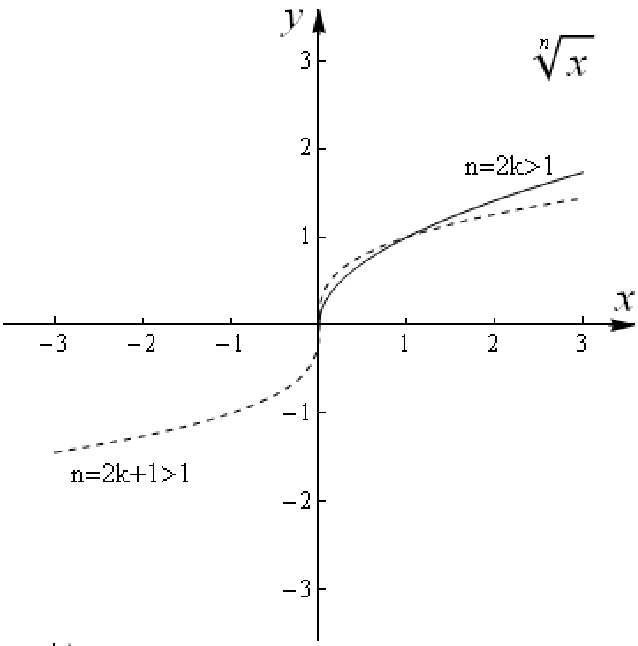
7. $\log_a b^p = p \log_a b$ ($b > 0$); 8. $\log_{pq} a = \dfrac{1}{q} \log_p a$ ($p > 0$, $a > 0$);

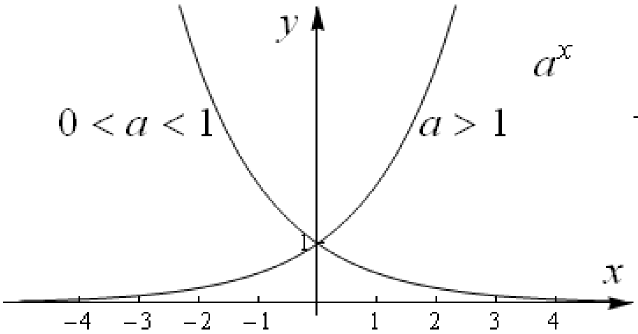
9. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; 10. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ($c > 0$, $c \neq 1$); 11. $\log_{10} x = \lg x$;

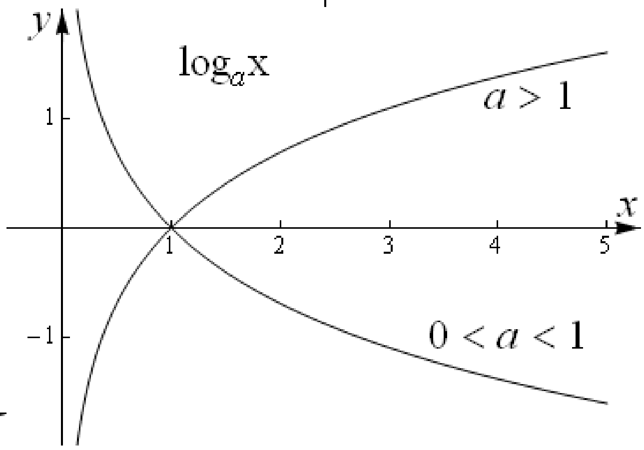
12. $\log_e x = \ln x$.

5. Графики степенной, показательной и логарифмической функций









6. Прогрессии

6.1. Арифметическая прогрессия

1. $a_{n+1} = a_n + q$; 2. $a_n = a_1 + q(n-1)$; 3. $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

4. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; 5. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$; 6. $S_n = \dfrac{2a_1 + q(n-1)}{2} n$.

6.2. Геометрическая прогрессия

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q$; 2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; 3. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$; 4. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{(1-q)}$;

5. $S_\infty = \dfrac{b_1}{(1-q)}$ $(|q| < 1)$.

7. Тригонометрия

7.1. Основные тригонометрические формулы

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; 2. $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 3. $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4. $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$; 5. $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 6. $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

7. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; 8. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

9. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$;

10. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; 11. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

12. $\operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$;

13. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; 14. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

15. $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$;

16. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

17. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

18. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$;

19. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$;

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$;

21. $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; 22. $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$;

23. $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$; 24. $\cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$;

25. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$; 26. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$; 27. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$;

28. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 29. $\cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 30. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

7.2. Тригонометрические уравнения

1. $\sin x = \alpha \ (|\alpha| < 1) \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin\alpha + k\pi, \ k \in Z$
2. $\cos x = \alpha \ (|\alpha| < 1) \Rightarrow x = \pm\arccos\alpha + 2\pi k, \ k \in Z$
3. $\operatorname{tg} x = \alpha \Rightarrow x = \operatorname{arctg}\alpha + k\pi, \ k \in Z$
4. $\operatorname{ctg} x = \alpha \Rightarrow x = \operatorname{arcctg}\alpha + k\pi, \ k \in Z$

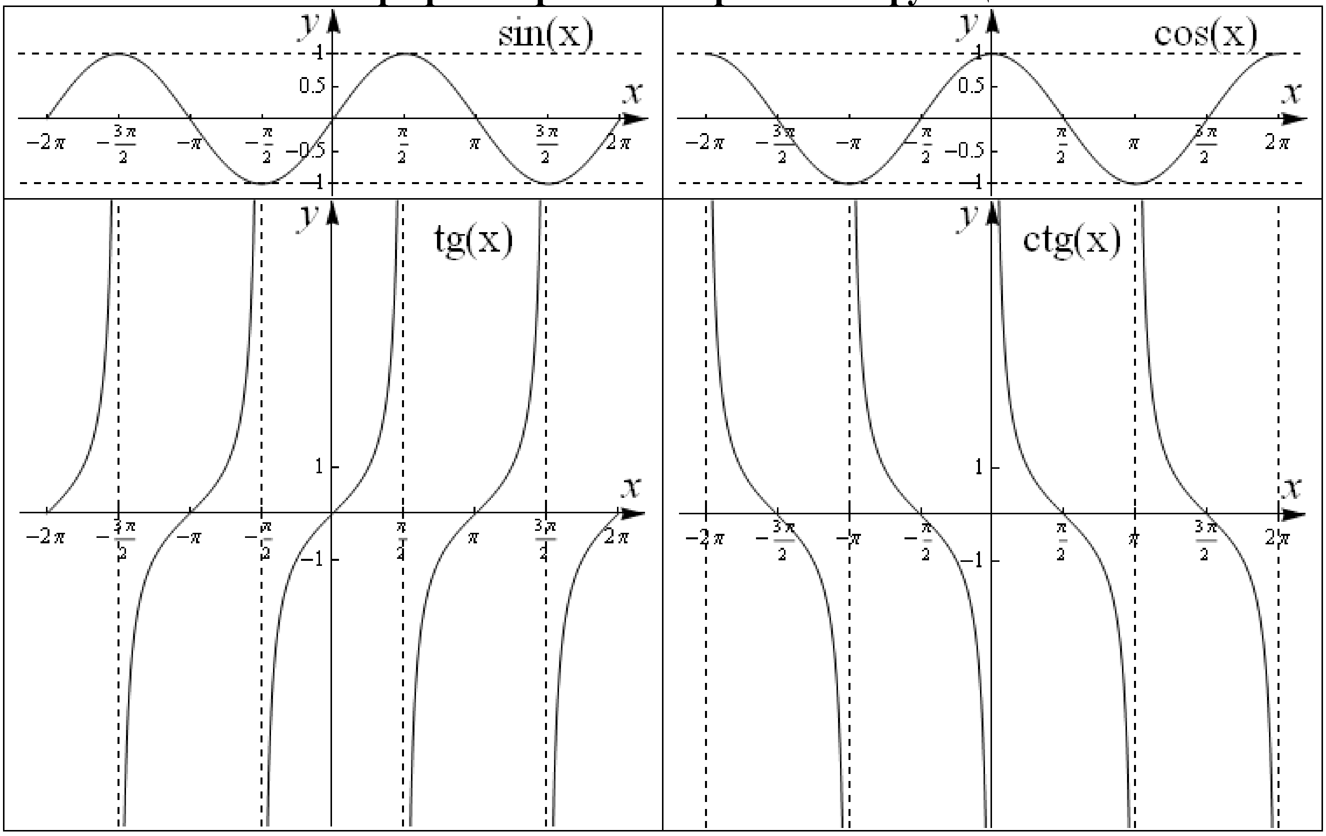
7.3. Формулы приведения

β	$\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

7.4. Значения тригонометрических функций

	0° 0	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$	180° π	270° $3\pi/2$	360° 2π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-	0	-

7.5. Графики тригонометрических функций



7.6. Графики обратных тригонометрических функций (упражнение)

<u>Указание</u>: отразите вышеприведенные графики для тригонометрических функций относительно биссектрисы ***y* = *x*.**