РОЗДІЛ 5.
ПЕРВІСНА. НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.

5.1. Основні поняття і властивості

Похідна та диференціал функції. Диференційованість.

Def. Рівняння яке, крім аргументу та невідомої функції, містить похідні скінченого порядку шуканої функції, називається *звичайним диференційним рівнянням* (ЗДР). Причому найвищій порядок похідної, що входить в рівняння називається *порядком рівняння*.

Def. *Частковим рішенням* ЗДР на проміжку X, називається будь яка функція, яка при підстановці в рівняння звертає його у тотожність на цьому проміжку. Множина всіх часткових рішень ЗДР називається *загальним рішенням* ЗДР.

Def. *Первісною* $F(x)$ *функції* f на проміжку X називається часткове рішення диференційного рівняння першого порядку виду $y' = f(x)$ тобто $\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$. Загальне рішення цього рівняння називається *неозначеним інтегралом* функції f на проміжку X та позначається $\int f(x)dx$.

Первісна функції на проміжку є первісною на будь-якому підпроміжку.

Th. Будь-які первісні однієї функції відрізняються на константу.

C. $\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C = const\}$ або спрощено $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Властивості неозначеного інтегралу.

1. Зв'язок із диференціюванням:

а) $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$; б) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

в) $\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C$ або $\int dF(x) = F(x) + C$.

2. Лінійність неозначеного інтегралу:

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx, \ \left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right).$$

3. Заміна змінної у неозначеному інтегралі:

$$\int f(x)dx = \left| x = \varphi(t); \ dx = \varphi'(t)dt \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$\xrightarrow{\text{підстановка}}$ $\xleftarrow{\text{введення нової змінної}}$

4. Формула інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Таблиця неозначених інтегралів.

1. $\int 0dx = const$; $\int 1dx = x + C$; $\int a dx = a x + C$;

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$; 3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4. $\int e^x dx = e^x + C$; $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$;

6. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$; $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$;

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, $(x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z})$;

8. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$; $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$; $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arth} x + C \\ \operatorname{arcth} x + C \end{array}\right.$;

$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arsh} x + C \\ \operatorname{sgn} x \operatorname{arch} x + C \end{array}\right.$;

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

13. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{|a|} + C$;

14. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Інтегрування простіших (елементарних) дробів.

Існує чотири типа елементарних дробів. Їх інтеграли наступні:

I. $\int \frac{Adx}{x-a}$; **II.** $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbf{N}, k \neq 1$;

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$; **IV.** $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $k \in \mathbf{N}, k \neq 1$, $p^2-4q<0$.

Інтеграли перших двох типів – це табличні інтеграли:

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$; **II.** $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.

Для інтегрування дробів третього та четвертого типів використовують наступну послідовність дій: 1) виділити повний квадрат; 2) зробити зміну змінної; 3) розбити дріб на дві (інтеграли а), б) і в), г) нижче) із однорідним лінійним чисельником та з постійним чисельником відповідно:

III, IV. $$\int \frac{Mx+N}{\left[(x+p/2)^2+(q-p^2/4)^2\right]^k}dx = \left| \begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt, \\ \underbrace{q-p^2/4}_{+}=s^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{Mt+N-Mp/2}{(t^2+s^2)^k}dt = M\int \frac{tdt}{(t^2-s^2)^k} + \left(N-\frac{1}{2}Mp\right)\int \frac{dt}{(t^2-s^2)^k}.$$

Інтегрування першого інтегралу:

а) $\int \frac{tdt}{t^2+s^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+s^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+s^2) + C$;

б) $\int \frac{tdt}{(t^2+s^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2+s^2)^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{(-k+1)}\frac{1}{(t^2+s^2)^{k-1}} + C$.

Складність обчислення другого інтегралу залежить від показника степеня у знаменнику:

в) $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+s^2} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{t}{s} + C$;

г) Рекурентне співвідношення (формула зниження для показника)

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ks^2}\frac{t}{(t^2+s^2)^k} + \frac{2k-1}{2ks^2}I_k, \quad (k=1,2,3,4\ldots).$$

Алгоритм інтегрування дрібно-раціональних функцій $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$.

а) Якщо *m*>*n*: тобто дріб під знаком інтегралу *неправильна*. Робимо ділення $P_m(x) = Q_n(x)S_{m-n}(x) + R_{n-1}(x)$ та отримуємо

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int S_{m-n}(x)dx + \int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx,$$

де інтеграл $\int S_{m-n}(x)dx$ легко береться (інтеграл від поліному);

а інтеграл $\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx$ – є інтегралом від *правильного* дробу.

б) Розкладаємо поліном $Q_n(x)$ на множники над полем дійсних чисел, тобто на лінійні та квадратичні з від'ємним дискримінантом.

$$Q_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{k_i} \prod_{t=1}^{j}(x^2+p_t x+q_t)^{l_t}, \qquad (4.1)$$

де $a_i, x_i, p_t, q_t \in \mathbf{R}$, $\sum_1^s k_i + \sum_1^j 2l_t = n$.

в) **Th (метод розкладення правильного дробу на простіші).** Правильний дріб $\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$, у якого знаменник $Q_n(x)$ представлений у вигляді (4.1) можна розкласти на суму елементарних дробів виду I, II, III, IV. Тобто існують константи $A_{it}, M_{it}, N_{it} \in \mathbf{R}$ такі, що

$$\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1 1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_s}}{x-a_s} + \frac{A_{2k_s}}{(x-a_s)^2} + \ldots + \frac{A_{k_s k_s}}{(x-a_s)^{k_s}} +$$

$$+ \frac{M_{1l_1}x+N_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{2l_1}x+N_{2l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ldots + \frac{M_{l_1l_1}x+N_{l_1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{M_{1l_j}x+N_{1l_j}}{x^2+p_jx+q_j} +$$

$$+ \frac{M_{2l_j}x+N_{2l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \ldots + \frac{M_{l_jl_j}x+N_{l_jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}.$$

Таким чином неозначений інтеграл від раціональної функції існує на будь-якому проміжку де знаменник дробу не обертається у нуль та може бути виражений у лінійну комбінацію раціональних функцій,

логарифмів й арктангенсів.
Для усунення складнощів інтегрування елементарних дробів типу IV застосовують наступний метод.

Th (метод Остроградського виділення раціональної частини інтегралу). Якщо знаменник $Q_n(x)$ правильного дробу $\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$ є представленим у вигляді (4.1), то

$$\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{L(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\dots(x-a_s)^{k_s-1}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1-1}\dots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j-1}}+$$

$$+\int \frac{S(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_s)\left(x^2+p_1x+q_1\right)\dots\left(x^2+p_jx+q_j\right)}dx\cdot$$

Тут $L(x)$ и $S(x)$ поліноми на 1 степінь нижче за поліноми у відповідних знаменниках. Інтеграл правої частини можна взяти методом розкладення дробу у суму простіших, причому II і IV типа серед них не буде.

Якщо розкладення $Q_n(x)$ на множники невідоме, то

$$\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{L(x)}{НСК(Q_n,Q_n')}+\int \frac{S(x)}{Q_n(x)/НСК(Q_n,Q_n')}dx,$$

де $НСК(Q_n,Q_n')$ – найбільше спільне кратне полінома $Q_n(x)$ та його похідної.

<u>Інтегрування деяких ірраціональностей.</u>

А. Дробово-лінійні ірраціональності.

$$R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right),\ r_1,r_2,\dots r_k\in Q.$$

Щоб позбутися цієї ірраціональності, представимо $r_i=\frac{m_i}{N}$ (N-спільний знаменник $r_1,r_2,\dots r_k$) та зробимо наступну заміну змінної у інтегралі:

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\dots\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{ax+b}{cx+d}=t^N;(ax+b)=t^N(cx+d)\\ x=\varphi(t)=\frac{dt^N-b}{a-ct^N};dx=\varphi'(t)dt\end{array}\right|=\int R\left(\varphi(t),t^{m_1},\dots,t^{m_k}\right)\varphi'(t)dt\cdot$$

Б. ***Диференційний біном*** **(***біноміальний диференціал***).**

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

Th (Чебишева**).** Якщо $m,n,p\in Q$, то інтеграл від диференційного біному $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ може бути виражений через елементарні функції тоді й тільки тоді коли виконується один із наступних трьох випадків, при цьому відповідна *підстановка Чебишева* зводить інтеграл до інтегралу від раціональної функції.

1) $p\in\mathbf{Z}\ \Rightarrow$ підстановка $x=t^N$ (N – спільний знаменник m, n);

2) $\frac{m+1}{n}\in\mathbf{Z}\Rightarrow$ підстановка $(a+bx^n)=t^N$ (N – знаменник p);

3) $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbf{Z}\Rightarrow$ підстановка $ax^{-n}+b=t^N$ (N – знаменник p).

В. Квадратичні ірраціональності.

Th (Ейлера**)** У інтегралах виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ наступні *підстановки Ейлера* усувають ірраціональність

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t\ (a>0)$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}\ (c>0)$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)\ (a>0)\ (D>0)$.

Хоча підстановки Ейлера мають універсальний характер, іноді вони приводять до складних раціональних виразів та зручнішими виявляються інші методи.

Г. Інші способи інтегрування квадратичних ірраціональностей.

1. $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Для знаходження коефіцієнтів $Q_{n-1}(x)$ та α треба диференціювати обидві частини рівності, привести до спільного знаменника та дорівняти поліноми у чисельниках дробів ліворуч та праворуч від знаку дорівнює.

2. $\int \frac{dx}{(x-p)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left| \begin{matrix} \text{Заміна} \\ t=\frac{1}{x-p} \end{matrix} \right| = \int \frac{At^{k-1}}{\sqrt{\tilde{a}t^2+\tilde{b}t+\tilde{c}}}dt$ та отже зводиться до 1. Якщо у чисельнику вихідного інтеграла стоїть поліном степеню більше за нуль, то його можна розкласти по степенях $(x-p)$ та по-членним діленням звести до вихідного інтегралу.

3. У інтегралах вигляду $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k+\frac{1}{2}}}$ використовують *підстановку Абеля*: $\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'=t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\frac{dt}{1-t^2}$; $x^2+px+q=\frac{q-\frac{p^2}{4}}{1-t^2}$. Зауважимо, що цей метод також працює для інтегралів вигляду $\int \frac{dx}{(x^2+px+b)^k\sqrt{x^2+px+q}}$.

4. $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+q^2\right)^k\sqrt{ax^2+b}}dx = M\int \frac{xdx}{\left(x^2+q^2\right)^k\sqrt{ax^2+b}} + N\int \frac{xdx}{\left(x^2+q^2\right)^k\sqrt{ax^2+b}}$.

У першому інтегралу робимо заміну: $ax^2+b=t^2$, у другому $\left(\sqrt{ax^2+b}\right)'=t$.

5. Інтеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ або зводиться до пункту 3 або після заміни до пункту 4. У загальному випадку (а саме, коли $b\neq ap$) роблять дробово-лінійну підстановку $x=\frac{\mu t+\nu}{1+t}$ або $t=\frac{x-\nu}{\mu-x}$, ($\mu\neq\nu$) та знаходять μ та ν такі, щоб після заміни у квадратних трьохчленів

не залишилось перших степенів (випадок 4).

Зауважимо, що не всі неозначені інтеграли можна «обчислити», тобто виразити через елементарні функції. Зокрема випадків у диференціальному біномі, які не охоплені підстановками Чебишева, важливими у застосуваннях є наступні інтеграли з ірраціональностями.

Д. Еліптичні інтеграли.

Взагалі інтеграли $\int R\left(x,\sqrt{P_3(x)}\right)dx$ і $\int R\left(x,\sqrt{P_4(x)}\right)dx$, де $P_3(x)$ і $P_4(x)$ – поліноми без кратних коренів 3[го] та 4[го] степеню відповідно, не виражаються через елементарні функції і називаються *еліптичними*. Ті з них які можливо виразити через елементарні називаються *псевдоеліптичними*. Інтеграли $\int R\left(x,\sqrt{P_3(x)}\right)dx$ зводяться зміною до $\int R\left(x,\sqrt{P_4(x)}\right)dx$. Ці приводяться до *канонічного вигляду* $\int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$ який зводиться до наступних трьох.

Еліптичні інтеграли I, II та III роду: I. $\int \frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$;

II. $\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$; III. $\int \frac{dz}{\left(1+hz^2\right)\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$, де $k\in(0,1)$, $z\in[0,1]$, $h\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Останні, у свою чергу, також виражають через *еліптичні інтеграли у формі Лежандра*:[1] $F(\varphi,k)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}$,

$E(\varphi,k)=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin\varphi}\,d\varphi$, $\Pi(\varphi,k,h)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(1+h\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}$. Отже

[1] Означені інтеграли у цьому розділу можна розуміти у сенсі формули Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

$\mathrm{I} = F(\varphi,k)+C$, $\quad \mathrm{II} = -\frac{1}{k^2}E(\varphi,k)+\frac{1}{k^2}F(\varphi,k)+C$, $\quad \mathrm{III} = \Pi(\varphi,k,h)+C$.

Інтегрування раціональних дробів від тригонометричних функцій.

Наступні підстановки зводять інтеграли вигляду $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ до інтегралів від раціональної функції.

1) $R(-\sin x,\ \cos x) = -R(\sin x,\ \cos x) \Rightarrow$ підстановка $\cos x = t$;
2) $R(\sin x,\ -\cos x) = -R(\sin x,\ \cos x) \Rightarrow$ підстановка $\sin x = t$;
3) $R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x) \Rightarrow$ підстановка $\mathrm{tg}\, x = t$;

4) **Універсальна тригонометрична підстановка:**

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ще деякі корисні формули при інтегруванні $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$:

1. $$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = \int \frac{\alpha\cdot знам + \beta\cdot(знам)'}{a\sin x + b\cos x}dx;$$

2. $$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx = \int \frac{\alpha\cdot знам + \beta\cdot(знам)' + \gamma}{a\sin x + b\cos x + c}dx;$$

3. $$\int \frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cdot\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}dx = \int \frac{\alpha\cos x\cdot знам + \beta\sin x\cdot знам + \gamma}{a\sin x + b\cos x}dx;$$

5. $$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x}dx = \alpha\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1} + \beta\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

де λ_1, λ_2 – корені рівняння $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\quad k_i\ \frac{1}{a-\lambda_i}$,

$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x$;

6. $$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{\alpha\sin x + \beta\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + \gamma\int\frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}};$$

7. $$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{\alpha\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \beta\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \gamma\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

(| a | $\neq$ | b |).

Інтегрування раціональних дробів від експоненти.

Для інтегралів виду $\int R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)dx$ працюють такі самі підстановки як і для тригонометричної залежності.

Універсальна гіперболічна підстановка:

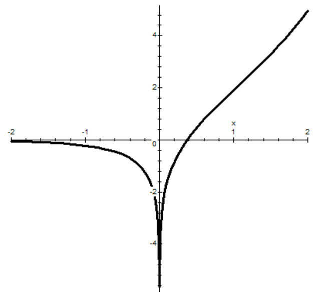
$$\mathrm{th}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \mathrm{sh}x = \frac{2t}{1-t^2};\ \mathrm{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2};\ \ dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Взагалі для інтегралів виду $\int R(e^x)dx$, та зокрема для $\int R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)dx$, оскільки $R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x) = R(e^x)$, зручнішою є підстановка

$$e^x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}.$$

Інтеграли, які не можна виразити через елементарні функції.

1. Інтегральна експонента: $\quad Ei(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$;

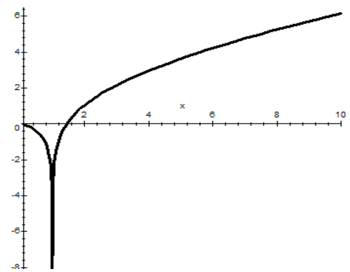


Тоді $\int\frac{e^x}{x}dx = Ei(x)+C$, $(x\neq 0)$.

При цьому $Ei(x) = \gamma + \ln|x| + O(x)$, якщо $x\to 0$,

тут $\gamma = 0{,}5772156649...$ – стала Ейлера

Рекурентна формула $I_n = \frac{e^x}{x^{n-1}} - I_{n-1}$ дозволяє обчислювати інтеграли вигляду $I_n = \int\frac{e^x}{x^n}dx$.



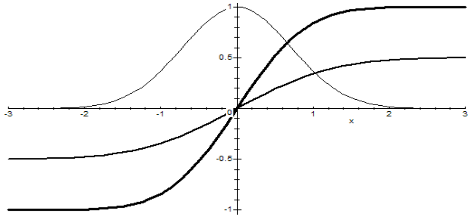
2. Интегральный логагифм: $\quad Li(x) \equiv \int\limits_{0}^{x}\frac{dt}{\ln t}$;

Тоді $\quad \int\frac{dx}{\ln x} = Li(x)+C \quad (x>0,\ x\neq 1)$.

Зазначимо зв'язок $Li(x) = Ei(\ln x)$ та $Ei(x) = Li(e^x)$, а також формулу

$$\int \frac{x^n dx}{\ln x} = Li(x^{n+1}) + C.$$

3. Інтеграл Коши – функція помилок: $erf\,(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$;



тоді $\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf\,(x) + C$.

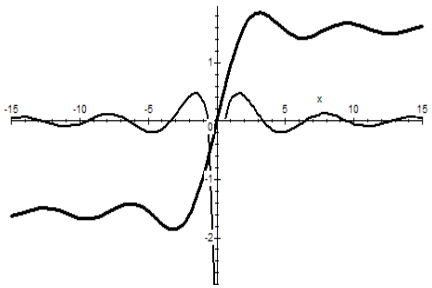
(позн. від англ. *error function* – функція помилок). Вона непарна: $erf\,(0) = 0;\ erf\,(-x) = -erf\,(x)$.

Функція $\Phi_0(x) = \frac{1}{2} erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ називається інтегралом ймовірностей (Ейлера- Пуасона).

На малюнку зображені: функція $y = e^{-x^2}$ – Гаусіана (самою тонкою лінією «дзвіночок»); функція $y = erf\,(x)$ – самою товстою лінією, її амплітуда в двічі більша за амплітуди інтеграла ймовірностей (зображено середньою за товщиною лінією).

4. Інтегральні синус та косинус та гіперболічні інтегральні функції:

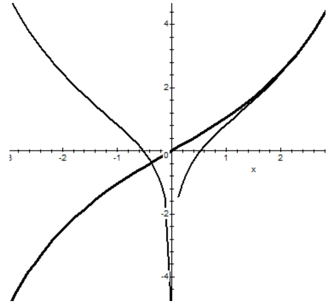
$Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt;\ Ci(x) = \int\limits_{-\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt$,



На малюнку графік функції $Si(x)$ проходить через начало координат, а $Ci(x)$ симетричний відносно осі ординат.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x) + C; \quad \int \frac{\cos x}{x} dx = Ci(x) + C.$$

Та $Shi(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt;\ Chi(x) = \int\limits_{-\infty}^x \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$.



На малюнку графік функції $Shi(x)$ проходить через начало координат, а $Chi(x)$ симетричний відносно осі ординат.

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx = Shi(x) + C; \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{x} dx = Chi(x) + C.$$

При цьому: $Si(0) = 0;\ Si(-x) = -Si(x)$;

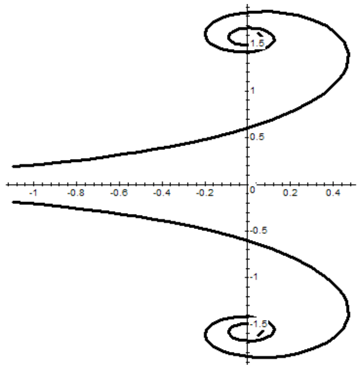
$$Shi(0) = 0;\ Shi(-x) = -Shi(x);$$

$$Ci(-x) = Ci(x);\ Chi(-x) = Chi(x).$$

Тобто функції $Si(x)$ и $Shi(x)$ непарні, а функції $Ci(x)$ та $Chi(x)$ парні та при $x \to 0$ мають однакові асимптотики:

$Ci(x) = \gamma + \ln|x| + O(x);\ Chi(x) = \gamma + \ln|x| + O(x)$.

На малюнку праворуч наведено графік кривої $\{x = Ci(t);\ y = Si(x)\}$, заданої параметрично («вуса» симетричні відносно осі абсцис).



5. Інтеграли Френеля:

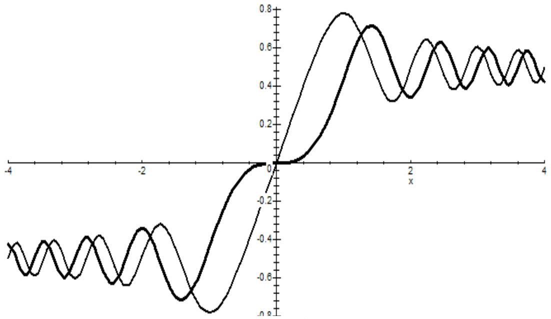
$S(x) \equiv \int\limits_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt;\ C(x) \equiv \int\limits_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$,

отже

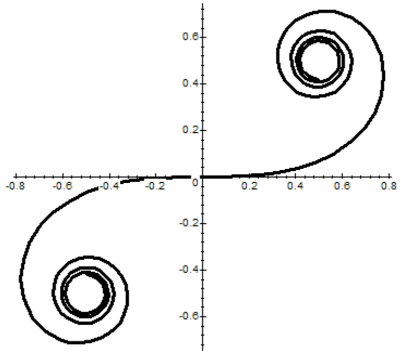
$$\int \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = S(x) + C; \quad \int \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = C(x) + C$$

Ці функції непарні: $S(0) = 0; C(0) = 0;\ S(-x) = -S(x);\ C(-x) = -C(x)$.

На малюнку вгорі праворуч приведено графік функцій $y = C(x)$ и $y = S(x)$ (функція $S(x)$ має в початку координат нульову похідну).



На малюнку праворуч внизу побудовано графік кривої $\{x = C(t);\ y = S(x)\}$, заданої параметрично («вуса» симетричні відносно начала координат).



.

5.2. Контрольні запитання і завдання

1. Що таке первісна та невласний інтеграл?

2. Пояснити, чому у однієї функції $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ існує дві різні похідні: а) $F(x) = \operatorname{arctg} x$; та б) $\forall x \neq 0 \quad F(x) = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Як пов’язані операції диференціювання та інтегрування?

4. Виписати таблицю первісних, довести її.

5. Записати формулу заміни змінної у невласному інтегралі та формулу інтегрування частинами. Довести їх.

6. Які дроби із дійсними коефіцієнтами є елементарними, та як обчислити від них інтеграли?

7. Що таке правильна та неправильна дроби?

8. Як виглядає алгоритм інтегрування довільної раціональної функції?

9. Як уникнути інтегрування елементарного дробу типу IV?

10. Записати метод Остроградського інтегрування раціональної функції.

11. Яка заміна зводить інтеграл із дробно-лінійною ірраціональністю до інтегралу від раціональної функції?

12. Які існують заміни, що зводять інтеграл із ірраціональністю типу диференціальний біном до інтегралу від раціональної функції?

13. Які існують заміни, що зводять інтеграл із квадратичною ірраціональністю до інтегралу від раціональної функції?

14. Яка ще є заміни, що усувають квадратичну ірраціональність?

15. Чи будь-який інтеграл із ірраціональністю можна звести до інтеграла від раціональною функцією?

16. Які заміни та у яких випадках застосовують, щоб позбавитись тригонометричних функцій у неозначених інтегралах?

17. Які заміни та у яких випадках застосовують, щоб позбавитись експоненти або гіперболічних функцій у неозначених інтегралах?

18. Що таке еліптичні інтеграли, які існують їх типи та загальний канонічний вигляд?

19. Що таке інтегральна експонента та інтегральний логарифм?

20. Що таке функція похибок та інтеграл імовірності?

21. Що таке інтегральні синус та косинус та їх гіперболічні аналоги?

22. Як виглядають інтеграли Френеля, та що про них відомо?

5.3. Приклади розв’язування задач

Приклад 1.

$$\int e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+C \quad , \alpha\neq 0;$$

Приклади на заміну змінної.

1.

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\ln x}{\ln x}=\left|\begin{array}{l}\ln x=t\text{ - введение}\\ \text{нового агумента}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C\ ;$$

2.

$$\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}=\left|\begin{array}{c}x=\cos t, dx=-\sin t dt\\ \text{Ï î äñò àí î âêà}\end{array}\right|=\int\frac{-\sin t dt}{\sin^3 t}=\mathrm{ctg}t+C=\frac{\cos t}{\sin t}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C;$$

3.

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\left|\begin{array}{c}x=\mathrm{sh}t\\ dx=\mathrm{ch}t dt\end{array}\right|=\int\frac{\mathrm{ch}t dt}{\mathrm{ch}^3 t}=\int\frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t}=\mathrm{th}t+C=\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C;$$

4.

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\int\frac{dx}{\left|x^3\right|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=\mathrm{sgn}\,x\cdot\int\frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=\left|\begin{array}{l}1+\frac{1}{x^2}=t\\ x^2=\frac{1}{t-1}\end{array}\right|=\mathrm{sgn}\,x\cdot\int\frac{dt}{-t^{3/2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,x\cdot\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=\frac{\mathrm{sgn}\,x}{\sqrt{t}}+C=\frac{\mathrm{sgn}\,x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+C=\frac{\mathrm{sgn}\,x\cdot|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Приклади на формулу інтегрування частинам.

1. $$\int\ln x dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x}\\ v=x,\quad dv=dx\end{array}\right|=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C\ ;$$

2. Багатократне застосування:

$$\int x^2e^x dx=\int x^2de^x=|\text{по частям}|=x^2e^x-\int e^x dx^2=x^2e^x-2\int xe^x dx=x^2e^x-2\int xde^x=$$

$$=|\text{по частям}|=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$$

3. Рекурентні формули (формули зниження):

$$I_{m,n}=\int x^m\ln^n xdx=\left|\begin{array}{l}\ln^n x=u,\ du=n\frac{\ln^{n-1}x}{x}\\ x^m dx=dv, v=\frac{x^{m+1}}{m+1}\end{array}\right|=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\int\frac{x^{m+1}}{m+1}n\frac{\ln^{n-1}x}{x}dx=$$

$$=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\frac{n}{m+1}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^{n-1}x-\frac{n-1}{m+1}I_{m,n-2}\right),\ (n>0, n\neq -1)$$

При цьому: $I_{m,0}=\int x^m dx=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+C$.

4. Отримання рівнянь для даного інтегралу:

$$I=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{b}\int e^{ax}d\sin bx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{b}\int\sin bxde^{ax}=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx=$$

$$\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}\int e^{ax}d\cos bx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx+C$$

Отримано рівняння: $I=\dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\dfrac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\dfrac{a^2}{b^2}I+C$, з якого випливає

$$I\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)=\frac{b}{b^2}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx+C$$, тобто

$$I\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{a^2+b^2}+C.$$

Приклади на обчислення інтегралів від раціональної функції:

1. Обчислити інтеграл $\int\frac{x^6-x^2+2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx=\ldots$.

Раціональний підінтегральний дріб неправильний, отже ділимо з остачею. Спочатку запишемо $x(x-1)\left(x^2+1\right)=x^4-x^3+x^2-x$. Зараз

$$\begin{array}{l|l} x^6-x^2+2x+1 & x^4-x^3+x^2-x \\ \cline{2-2} \ldots\ldots\ldots & x^2+x \\ \cline{1-1} \quad 2x+1 & \end{array}$$

та маємо

$$\int\frac{x^6-x^2+2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx.$$

Для обчислення останнього інтегралу, розкладемо дріб у суму простіших:

$$\frac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{(x-1)\left(x^2+1\right)A+x\left(x^2+1\right)B+x(x-1)(Mx+N)}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}$$

(*A, B, M, N* – невизначені коефіцієнти). Прирівнюємо чисельники:

$$2x+1=(x-1)\left(x^2+1\right)A+x\left(x^2+1\right)B+x(x-1)(Mx+N).$$

Два полінома дорівнюють тоді тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях співпадають. Із цього критерію та останньої рівності отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l} x^3: A+B+M=0 \\ x^2: -A+N-M=0 \\ x^1: A+B-N=2 \\ x^0: -A=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=3/2 \\ M=-1/2 \\ N=-3/2 \end{array}\right.\Rightarrow\int\frac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx=-\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}$$

Отже, $I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

2. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}$.

Розкладаємо дріб у суму простіших дробів:

$$\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1},$$

можна знайти *A, B, C, D, E, F* як у попередній задаче, але можна й зробити наступні перетворення:

$$\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{dx1}{\left(1+x^2\right)^2}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x-\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Інтеграл, що залишився є інтегралом від елементарного дробу четвертого типа $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ та для його обчислення треба використовувати формулу зниження.

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\quad.$$

Далі, в загальному випадку, будемо усувати інтеграли четвертого типу за допомогою методу Остроградського.

Примеры.

1°. Вычислить $\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx$.

НОД$\left(Q_n, Q_n'\right)$ можно найти с помощью алгоритма Евклида.

$Q_n' = 4x^3+6x^2+6x+2$; От деления на 2 наибольший общий делитель двух полиномов не изменится $\Rightarrow 2x^3+3x^2+3x+1$.

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^4+2x^3+3x^2+2x+1 & \underline{2x^3+3x^2+3x+1} \\
\underline{x^4+\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x} & \frac{1}{2} \\
\quad \frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1 & \\
-\;\underline{\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}} & \\
\qquad \frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\,2x^3+3x^2+3x+1 & \underline{x^2+x+1} \\
\underline{2x^3+2x^2+2x} & 2x+1 \\
\qquad x^2+x+1 & \\
\quad -\underline{x^2+x+1} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Наибольший общий делитель знаменателя и его производной $\Rightarrow x^2+x+1$.

Тогда:

$$\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx.$$

Для нахождения *A, B, C, D* продифференцируем обе части:

$$\frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{A\left(x^2+x+1\right)-\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A\left(x^2+x+1\right)-\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

и числители дробей должны совпадать.

$$4x+3 = A\left(x^2+x+1\right)+\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+x+1\right).$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях x.

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & C=0 \\ x^2: & A-2A+C+D=0 \\ x^1: & A-A-2B+C+D=4 \\ x^0: & A-b+D=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=2 \\ A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

. Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{d\left(x+1/2\right.}{\left(x+1/2\right)^2+}$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 4/\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} + C.$$

2°.

$$\int \frac{dx}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2\left(x^2+x+2\right)^3} = \frac{P_4(x)}{\left(x-2\right)\left(x^2+x+2\right)^2} + \int \frac{P_3(x)}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x^2+x+2\right)}d$$

$$= \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{\left(x-2\right)\left(x^2+x+2\right)^2} + \int \frac{f}{x-1}dx + \int \frac{g}{x-2}dx + \int \frac{hx+m}{x^2+x+2}dx;$$

продифференцировав обе части равенства, получим систему для нахождения неопределенных коэффициентов $a, b, c, d, e, f, g, h, m$.

Остроумие метода Остроградского состоит в получении вне интегральной дроби без интегрирования, а с помощью решения системы линейных уравнений.

Примеры: 1°. 1) $\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+2=t^3; \\ dx=3t^2dt; \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^3-2\right)t\cdot 3t^2}{t^3+t-2}\,dt$.

2°. $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}+\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x+3}}} = \ldots$

3°. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}} = \int \sqrt[6]{\left(\frac{x-7}{x-5}\right)^5}\,\frac{dx}{(x-7)^2} =$

$$= \left| \frac{x-7}{x-5}=t^6; dx=\frac{12t^5dt}{\left(1-t^6\right)^2}; x=\frac{7-5t^6}{1-t^6}; x=5+\frac{2}{1-t^6} \right| =$$

$$\int t^5\,\frac{12t^5\left(1-t^6\right)^2 dt}{\left(1-t^6\right)^2\left(2t^6\right)^2} = 3\int\frac{dt}{t^2} = -\frac{3}{t}+C\,.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}} = -3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}}+C\,.$$

Примеры:

1°. $\int \sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\cdot dx = \int x^{1/2}\left(1-x^{3/2}\right)^{1/4}dx =$

$$\left| m=1/2;\ n=-3/2;\ p=1/4;\ \frac{m+1}{n}\in\square; \right| =$$

$=$

$$\left| 1-x^{-3/2}=t^4;\ x=\left(1-t^4\right)^{-2/3};\ dx=\frac{2}{3}\left(1-t^4\right)^{-5/3}4t^3dt \right| =$$

$=$

$$\int\left(1-t^4\right)^{-1/3}\cdot t\cdot\frac{2}{3}\left(1-t^4\right)^{-5/3}\cdot 4t^3dt = \frac{8}{3}\int\frac{t^4dt}{\left(1-t^4\right)^2}\,.$$

С помощью второй подстановки Чебышева интеграл от дифференциального бинома стал интегралом от рациональной функции.

2°. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-5/3}dx = \ldots$

В данном случае $m=-2;\ n=3;\ p=-\frac{5}{3};\ \frac{m+1}{n}+p=-2$ и, следовательно, третья подстановка Чебышева должна рационализовать подынтегральное выражение. В самом деле,

$$\frac{2+x^3}{x^3}=t^3;\ \frac{2}{x^3}+1=t^3;\ dx=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{2/3}\left(-\frac{2}{(t^3-1)^2}\right)3t^2dt\,,$$ и

получается интеграл

$$\ldots = \int\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{-7/3}\cdot t^{-5}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{-2/3}\cdot\frac{2(-3)t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} = -\frac{1}{4}\int\frac{t^3-1}{t^3}dt\,.$$

Интеграл рационализован.

3°. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[4]{\left(2+x^3\right)^5}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-5/4}dx =$

$\left| p\notin\square;\ \frac{m+1}{n}\notin\square;\ \frac{m+1}{n}+p\notin\square \right|$. Ни одна из подстановок Чебышева не подходит – интеграл не может быть выражен через элементарные функции (не берётся).

4°. $\int \frac{dx}{x^{\pi+1}\sqrt[3]{1+x^{\pi}}} = \int x^{-(\pi+1)}\left(1+x^{\pi}\right)^{-1/3}dx = \ldots$

Здесь $m=-(\pi-1);\quad n=\pi;\quad p=-\frac{1}{3};\quad \frac{m+1}{n}=-1$

и выполняя замену $1+x^{\pi}=t^3;\ dx=\frac{1}{\pi}\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{\pi}-1}3t^2dt$, получим

$$\ldots = \int\left(t^3-1\right)^{\frac{\pi+1}{\pi}}\cdot t^{-1}\cdot\frac{1}{\pi}\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{\pi}-1}\cdot 3t^2dt=\frac{3}{\pi}\int\frac{t}{\left(t^3-1\right)^2}dt\,.$$

Приведенный пример показывает что для не рациональных показателей степеней подстановки Чебышева тоже могут быть полезны.

1°. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+2}}=\ \ldots$ Учитывая что $a>0$, выполним первую подстановку Эйлера.

$$\sqrt{x^2+x+2}=-x+t;\quad x^2+x+2=x^2-2xt+t^2;\ x=\frac{t^2-2}{1+2t};$$

$$\ldots = \int\frac{1}{t}d\left(\frac{t^2-2}{1+2t}\right)=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-2}{1+2t}+\int\frac{t^2-2}{1+2t}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot dt=$$

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-2}{1+2t}+\int\frac{dt}{1+2t}-2\int\frac{dt}{\left(1+2t\right)t^2}\,.$$

Полученные интегралы от рациональных функций трудностей не представляют.

2°. $\int\frac{1-\sqrt{1+x-x^2}}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx=\ldots$ Учитывая что $c>0$, выполним вторую подстановку Эйлера.

$\sqrt{1+x-x^2}=xt+1;\ 1+x-x^2=1-2xt+x^2t^2;\ x=\frac{1-2t}{t^2+1}$. Тогда $\ldots=$

$$\int\frac{-t\cdot\frac{1-2t}{t^2+1}d\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\right)}{\frac{1-2t}{t^2+1}\cdot\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\cdot t+1\right)}\,.$$

Вновь получен интеграл от рациональной функции.

3°. $\int\frac{\sqrt{-3+4x-x^2}}{x+2\sqrt{-3+4x-x^2}}dx=\ldots$ Квадратный трехчлен под знаком корня имеет вещественные корни $x_1=1;\ x_2=3$ поэтому можно применить третью подстановку Эйлера.

$$\sqrt{-\left(x-1\right)\left(x-3\right)}=t\left(x-1\right);\ \sqrt{3-x}=t\sqrt{x-1};\ 3-x=t^2\left(x-1\right);\ x=\frac{3+t^2}{t^2+1}$$

и получаем

$=\int\frac{t\left(\frac{3+t^2}{t^2+1}\right)}{\frac{3+t^2}{t^2+1}+\left(2t\frac{3+t^2}{t^2+1}\right)}dt$, а это интеграл от рациональной функции.

5.1. Задачі для самостійного розв'язку

Задачи для решения. Демидович. 1628, 1636, 1640,1643, 1646,1648, 1649, 1656, 1659, 1662, 1663, 1665,1677, 1681, 1682, 1685, 1709, 1715.

Вычислить неопределенные интегралы:

1628. $\int\left(3-x^2\right)^3 dx$. **1656**. $\int(2x-3)^{10}dx$.

1636. $\int\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$. **1640**. $\int\dfrac{x^2dx}{1-x^2}$.

1643. $\int\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$. **1646**. $\int\dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

1648. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx\ \ (0\le x\le\pi)$. **1649**. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

1659. $\int\dfrac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$. **1662**. $\int\dfrac{dx}{2-3x^2}$.

1663. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$. **1665**. $\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx$. .

1677. $\int\dfrac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$. **1681**. $\int\sin\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dx}{x^2}$.

1682. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$. **1685**. $\int\dfrac{x^2dx}{\left(8x^3+27\right)^{2/3}}$.

1709. $\int\dfrac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$. **1715***. $\int\dfrac{x^{17/2}dx}{\sqrt{1+x^{19}}}$.

Задачи для решения. Демидович. 1723, 1727, 1729, 1733, 1737, 1747, 1749, 1768, 1774, 1777, 1792, 1799, 1808, 1811, 1819.

Применяя метод разложения, вычислить:

1723. $\int\dfrac{x^2}{1+x}dx$. **1727**. $\int\dfrac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$. **1729**. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

1733. $\int\dfrac{dx}{(x-1)(x+3)}$. **1737**. $\int\dfrac{xdx}{(x+2)(x+3)}$.

1747. $\int\sin^3 x\,dx$. **1749**. $\int\sin^4 x\,dx$.

Применяя подходящие подстановки, найти:

1768. $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$. **1774**. $\int\dfrac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. **1777**. $\int\dfrac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{dx}{1+x}$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти:

1792. $\int x^n\ln x\,dx\ \ (n\ne-1)$. **1799**. $\int x^2\sin 2x\,dx$.

1808. $\int x\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$. **1811**. $\int x^5e^{x^2}\,dx$. **1819**. $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$.

Задачи для решения. Демидович. 1837, 1843, 1851, 1853, 1857, 1859, 1864, 1866, 1867, 1869, *, 1872, 1878, 1882, 1892, 1893, 1896.

1837. $\int\dfrac{dx}{x^2-x+2}$. **1843**. $\int\dfrac{x^5dx}{x^6-x^3-2}$. **1851**. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

1853. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$. **1857**. $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$. **1859**. $\int\dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1864. $\int\dfrac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

Интегрирование рациональных функций методом неопределенных коэффициентов:

1866. $\int\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$. **1867**. $\int\dfrac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1878. $\int\dfrac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)}$. *****. $\int\dfrac{xdx}{(x+1)(x+2)^2\left(x^2+x+1\right)}$.

1872. $\int\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$. **1882**. $\int\dfrac{xdx}{x^3-1}$. **1869**. $\int\dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Применяя метод Остроградского, найти:

1892. $\int \frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}$. **1893.** $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$. **1896.** $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx$.

Задачи для решения. Демидович. 1904, 1914, 1920, 1928, 1933*, 1938, 1948, 1952, 1954, 1968, 1970, 1971, 1977, 1981, 1987, 1984.

Применяя различные приемы, найти:

1904. $\int \frac{xdx}{x^8-1}$. **1914**. $\int \frac{dx}{x\left(x^{10}+1\right)^2}$. **1920**. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

Применяя подстановки Эйлера, найти:

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$. **1970**. $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$.

Применяя различные методы, найти:

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$. **1933***. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}$.

1938. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. **1948**. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

1952. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$. **1954**. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$. **1977**. $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^4+1}}$.

С помощью подстановок Чебышева, найти:

1981. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$. **1984**. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **1987**. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

5.

Задачи для решения. Демидович. 1995, 2012, 2072, 2076, 2080, 2013, 2084, 2098, 2022, 2025, 2027, 2033, 2035, 2038, 2167, 2168, 2171, 2172, 2173, 2176.

С помощью формул понижения и тригонометрических тождеств, найти:

1995. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$. **2013.** $\int \sin 5x\cos x\,dx$. **2022**. $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\sin a}$.

2012. *Вывести формулы понижения для интегралов* $I_n=\int \frac{dx}{\sin^n x}$ и $K_n=\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$ *и с их помощью вычислить интегралы*:

$\int \frac{dx}{\sin^5 x}$; $\int \frac{dx}{\cos^7 x}$.

С помощью тригонометрических подстановок, найти:

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$. **2027**. $\int \frac{\sin^2 dx}{\sin x+2\cos x}$.

2033. $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$. **2035**. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

2038. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{1+\sin^4 x}$. **2051.** $\int \frac{\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$.

Интегрирование различных трансцендентных функций:

2072. $\int x^7e^{-x^2}dx$. **2076**. $\int xe^x\sin x\,dx$. **2080**. $\int \cos^2\sqrt{x}dx$.

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$. **2098**. $\int \ln^n x dx$.

2167. $\int x|x|dx$. **2168.** $\int (x+|x|)^2\,dx$ **2171**. $\int \max\left(1,x^2\right)dx$.

2173. $\int [x]|\sin \pi x|dx\ (x\ge 0)$.

2166. $\int |x|dx$. **2169**. $\int \{|1+x|-|1-x|\}dx$.

2174. $\int f(x)dx$, *где* $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\le 1\\ 1-|x|, & |x|>1\end{cases}$.

Еще интералы

198. $\int \frac{dx}{x^6\left(1+x^2\right)}$. 199. $\int x\operatorname{arctg}x\cdot\ln\left(1+x^2\right)dx$.

200. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$,

201. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

202. $\int xe^x\sin^2 x dx$.

203. $\int \frac{\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^{n-1}}{\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^{n+1}}dx$, а) $\cos a\neq 0$ б) $\cos a=0$.

204. $\int \frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$.

205. $\int \frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx$.

206 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$, а) $\cos(a-b)\neq 0$ б) $\cos(a-b)=0$.

207. $\int \sin^3 2x\cdot\cos^2 3x dx$. 208 $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

209. $\int \sqrt{(x-a)(x-b)}dx$.

210. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. 211. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

212. $\int \frac{dx}{\left(x^4-1\right)^3}$.

213. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

214. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

215. $\int \frac{x^4-3}{x\left(x^8+3x^4+2\right)}dx$.

216. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

217. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$. 218. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$.

219. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$. 220. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

221. $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$. 222. $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$,

223. $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\sin x)^2}dx$. 224. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$,

а) $0<|\varepsilon|<1$
б) $|\varepsilon|>1$.

225. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{1+2x-x^2}}$. 226. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

227. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$. 228. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

229. $\int \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}$. 230. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

231. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

232. $\int \sin x \ln \operatorname{tg} x dx$.

233. $\int \sqrt{e^{2x}+4e^{x}+1}\cdot dx$.

234. $\int \sin \ln x dx$.

235. $\int \frac{x^4-1}{x^6+1}dx$.

236. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

237. $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$.

238. $\int x^5\left(2-5x^3\right)^{2/3}dx$.

239. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$.

240. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

241. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

242. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}}$.

243. $\int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

244. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}dx$.

245. $\int \frac{x^4-1}{x\left(x^4-5\right)\left(x^5-5x+1\right)}dx$.

246. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

247. Выразите через интегральный логарифм $\mathrm{Li}(x)$ и элементарные функции, интегралы:

а) $\int \frac{e^{3x}}{x^3}dx$; б) $\int \frac{dx}{\ln^3 x}$.

248. Выразите через интегральный синус $\mathrm{Si}(x)$ и элементарные функции, интегралы:

а) $\int \frac{\sin 3x}{x^3}dx$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

249. Выразите через интеграл ошибок $erf(x)$ и элементарные функции, интегралы:

а) $\int x^2 e^{-x^2}dx$, б) $\int \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$.

250. Исключите интегрирование неэлементарных функций:

а) $\int \mathrm{Li}(x)dx$; б) $\int x\mathrm{Si}(x)dx$;

в) $\int e^{-x^2/2}erf(x)dx$.