РОЗДІЛ 3.
ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.

3.1. Основні поняття і властивості

Похідна та диференціал функції. Диференційованість.

Нехай $x \in \overset{\circ}{D}(f)$, внутрішня точка області визначення функції.

Def. Похідною функції f у точці x називається

$$f'(x) = \lim_{\hat{x}\to x} \frac{f(\hat{x}) - f(x)}{\hat{x} - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

де $\Delta x = \hat{x} - x$, $\Delta f = \Delta f(x, \Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ - приріст аргументу та функції відповідно.

Якщо $y = f(x)$, для похідної зазвичай використовують наступні позначення: y', y'_x, $f'(x)$, $f'_x(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Однобічні похідні визначаються відповідною однобічною границею

$$f'_{\pm} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Функція має похідну у точці тоді й тільки тоді, коли вона має рівні однобічні похідні у цієї точці.

***Def*.** Функція $f(x)$ називається диференційованою в точці x_0 (пишемо $f(x) \in D(x_0)$), якщо її приріст можна представити у вигляді головна лінійна частина плюс нескінченна мала від $\Delta x = x - x_0$:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$ де A є сталою, що не залежить від Δx.

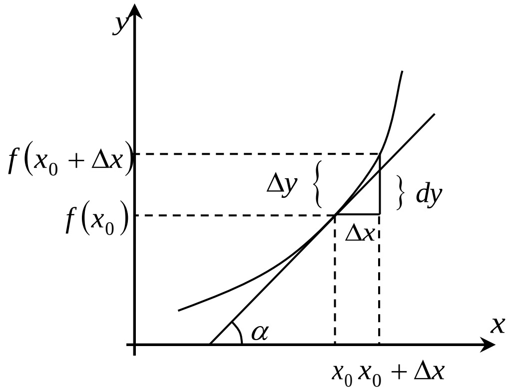
При цьому головна лінійна частина позначається $df = df(x)$ і називається диференціалом функції: $df = A \cdot \Delta x$. Коли x - незалежна змінна Δx вважається фіксованою величиною та позначається dx.

Th. Функція однієї змінної диференційована у точці x тоді й тільки тоді, коли має скінчену похідну у цієї точці і $A = f'(x)$.

C. $df(x) = f'(x)dx$, отже похідна це відношення диференціала функції к диференціалу аргументу.

Th (формула нескінченно малих приростів)**.** $\Delta f \approx df$.

Геометричний зміст похідної: похідна функції у точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіку $f(x)$, що проведено в точці $(x_0, f(x_0))$:



$f'(x_0) = tg\alpha$.

Геометричний зміст диференціала - приріст ординати дотичної.

Рівняння дотичної до графіку функції $f(x)$ в точці x_0:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Із формули нескінченно малих прирощень отримуємо формулу: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, що наближує функцію її дотичною.

Фізичний зміст похідної функції – це миттєва швидкість змінення функції за змінною x у даної точці.

Арифметичні властивості (правила диференціювання).

1. $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$; 2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$; 4. $(f(g(x)))' = f'_{g(x)}(g(x)) \cdot g'_x(x)$.

Зазначимо, що похідну функції $y = f(x)$, яка є добутком або часткою іноді зручно шукати за допомогою похідної від логарифма $f(x)$. Ця похідна називається *логарифмічною похідною*: $\left(\ln\left|f(x)\right|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Таблиця похідних.

1. $(const)' = 0$. 2. $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$.

3. $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \ln a$. 4. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$. 6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$. 8. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

11. $(\operatorname{arsh} x)' = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

$(\operatorname{arch} x)' = \left(\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

12. $(\operatorname{arth} x)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$;

$(\operatorname{arcth} x)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{x-1}\right)' = -\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Друга та вищі похідні явної функції $y = f(x)$ визначаються так: $f''(x) = (f'(x))' = f^{(2)}(x)$, $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'_x$. Зручно ототожнювати саму функцію і її нульову похідну. Зауважимо також, що у наведеному означенні друга похідна береться по точці x в якої було знайдено першу похідну і яку далі розглядають як змінну для пошуку другої похідної. При цьому точку у якої знайдено другу похідну позначено так саме x.

Def. Функція $f(x)$ називається (n-кратно) диференційованою на множені X (пишемо $f(x) \in D^n(X)$), якщо $f(x)$ та її $n-1$ похідні диференційовані для кожного $x_0 \in X$. Функція $f(x)$ неперервно-диференційована або гладка порядку n (пишемо $f(x) \in C^n(X)$), якщо існують $f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ і неперервні разом із $f(x)$ у кожній точці X.

Таблиця деяких похідних вищого порядку

1. $(e^x)^{(n)} = e^x$; $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$.
2. $(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$
3. $(\ln|x|)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; $(\log_a|x|)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\dfrac{1}{\ln a}$.
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\dfrac{\pi}{2})$; $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\dfrac{\pi}{2})$.

Арифметичні властивості.

1. $\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x)+\beta g^{(n)}(x)$.
2. **Th** (формула Лейбниця похідної добутку вищого порядку).

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x), \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Інваріантність форми першого диференціала та неінваріантність форми вищих диференціалів відносно заміни змінної.

Нехай $y = f\left(g(x)\right)$. Тоді $dy(x) = y'_x(x)dx = f'_g(g)g'_x(x)dx = f'_g(g)dg$ тобто

$$dy = y'_x(x)dx \quad \text{та} \quad dy = y'_g(g)dg.$$

Тут x - незалежна змінна, а g - функція залежна від x. Однак формули для першого диференціалу однакові – отже форма інваріантна.

Як і похідні, диференціали вищого порядку визначаються індуктивно: $d^n f(x) = d(d^{n-1}f(x))$.

Якщо x - незалежна змінна: $d^2y(x) = y''_{x^2}(x)dx^2$.

А для залежної змінної g: $d^2y(g) = y''_{g^2}(g)dg^2 + y'_g(g)d^2g$.

Це означає неінваріантність форми другого (та звісно) вищих диференціалів відносно заміни змінної.

Похідні функцій заданих параметрично, неявно та оберненої функції.

Система рівнянь
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in T \qquad (3.1)$$

задає функцію $y = f(x)$ *параметрично*, якщо, за теоремою про обернену функцію, $x(t)$ неперервна та строго монотонна на проміжку

T. Дійсно, тоді $t = t(x)$ і $y = y(t(x)) = f(x)$.

Якщо $x(t), y(t) \in C(T)$, функція $x(t)$ строго монотонна в околі точці t_0, обидві функції диференційовані у цьому околі та $x'(t) \neq 0$, тоді існує функція $y = f(x)$, що задана параметрично і диференційована в околі t_0 та її похідна дорівнює $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Якщо за вищенаведених умовах $x(t), y(t) \in D^n(T)$, то $y = f(x)$ також *n*-кратно диференційована та її *n*-у похідну можна раціонально виразити через *n* перших похідних функцій $x(t)$ і $y(t)$:

$$y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{\left(x'(t)\right)^3}, \quad y'''_{xxx} = \frac{dy''_{xx}}{dx} = \frac{\dots}{\left(x'(t)\right)^4}.$$

Рівняння

(3.2) $\qquad F(x, y) = 0 \qquad$ (див. розділ функції декількох змінних)

задає функцію $y = y(x)$ *неявно* в деякому околу точки x_0, якщо функція $F(x, y)$ неперервно-диференційована за x та y в околі (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) \equiv 0$ та $F'_y(x, y) \neq 0$. При цьому y'_x можна виразити явно і дорівнює $-\dfrac{F'_x}{F'_y}$. З практичної точки зору знаходження похідної функції, що задана неявно можна здійснювати прямим диференціюванням за змінною x рівняння (3.2) вважаючи $y = y(x)$.

Th (диференціювання оберненої функції)**.** Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і строго монотонна у деякому околі точки x_0 та існує $f'(x_0) \neq 0$, тоді у околі точці $y_0 = f(x_0)$ визначена обернена функція $x = f^{-1}(y)$ – неперервна, строго монотонна та диференційована у точці y_0, крім того:

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{y'_x}.$$

Якщо за вищенаведених умовах існує y''_{xx}, то $x''_{yy} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y'_x}\right) = \dfrac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}$.

__**Основні теореми диференціального числення та їх застосування.**__

Th (Дарбу)**.** Якщо $f(x) \in C[a,b]$ та $f(x) \in D(a,b)$, то $f'(x) - \text{sur}$.

С. Якщо у $f'(x)$, що визначена на (a,b), немає розривів 2-го роду, то вона неперервна.

Якщо у кожній точці x проколотого околу деякої точки a існує скінчена похідна функції f і існує скінчена її однобічна границя, то $f'_{\pm}(a) = \lim\limits_{x \to a \pm 0} f'(x)$. Отже, якщо $f'(x)$ має стрибок у точці a, то f не диференційована в a, якщо розрив другого роду – треба перевіряти диференційованість за означенням.

Th (Ролля)**.** Якщо $f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b)$ та $f(a) = f(b)$, тоді існує $\gamma \in (a,b)$: $f'(\gamma) = 0$.

Th (Лагранжа)**.** Якщо $f(x) \in C[a,b]$ та $f(x) \in D(a,b)$, тоді існує $\gamma \in (a,b)$: $f'(\gamma) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Тобто існує точка, де дотична паралельна хорді.

С (формула скінчених приростів)**.** $\Delta f = df(x + \theta\Delta x)$, де $\exists \theta \in (0,1)$.

Узагальненням теореми Лагранжа для кривих є теорема Коші.

Th (диференціювання нерівностей)**.**

Якщо $f(x), g(x) \in C^n([x_0, x_1])$ та виконуються нерівності:

$f^{(k)}(x_0) \geq g^{(k)}(x_0)$, $k = 0,1,\dots,n-1$; і $\forall x \in [x_0, x_1)$ $f^{(n)}(x) \geq g^{(n)}(x)$,

Тоді $\forall x \in [x_0, x_1)$ $f(x) \geq g(x)$.

Th (формула Тейлора)**.** Нехай $f(x) \in C^{n+1}(U(x_0))$, тоді в околі $U(x_0)$ функцію можна представити у вигляді

(3.3) $\qquad f(x) = P_n + R_n \qquad$ (формула Тейлора),

де $P_n = P_n(f, x_0, x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ - поліном Тейлора, а $R_n =$ $= R_n(f, x_0, x) \equiv f(x) - P_n$ -залишковий член формули Тейлора. Існує декілька форм запису залишкового члену, наведемо дві з них.

Форма Пеано: $R_n = \left[\begin{array}{l} o\left((x - x_0)^n\right) \\ O\left((x - x_0)^{n+1}\right) \end{array}\right.$.

Форма Лагранжа: $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\exists \gamma \in U(x_0)$.

Формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано носить локальний характер та показує асимптотичну поведінку функції наближуючи її поліномом, коли $x \to x_0$. А формула із залишковим членом у формі Лагранжа має вже глобальний характер та використовується для оцінки абсолютної похибки наближення функції многочленом Тейлора на деякому проміжку $U(x_0)$. При постановці у формулу Тейлора (3.3) з залишковим членом у формі Пеано та відповідну функцію, отримуємо, зокрема, п'ять основних розкладань Маклорена, що наведені у попередньому розділі. Якщо натомість залишкового члену продовжувати додавання до нескінченості, то отримаємо ряд Тейлору $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Локальні екстремуми функції.

Нехай $x \in \overset{\circ}{D}(f)$, внутрішня точка області визначення функції.

Def. Точка x_0 називається точкою *локального мінімуму* (*максимуму*), якщо існує окіл U точки x_0 такий, що для будь-якого $x \in U$ виконується нерівність $f(x_0) \le f(x)$ ($f(x_0) \ge f(x)$). Якщо нерівність строга, то мінімум (максимум) також строгий. Точка у якій є локальний мінімум ($loc \min$) або локальний максимум ($loc \max$) називається точкою *локального екстремуму* (loc extr).

Th (Ферма)**.** У точці loc extr похідна функції, якщо існує і скінчена, дорівнює нулю (*стаціонарна* точка).

Точка x_0 називається *критичною* точкою функції $f(x)$, якщо вона стаціонарна або $f'(x_0) = \infty$, або похідна не існує.

C (Необхідна умова loc extr)**.** Точки loc extr є критичними.

Th (Перша достатня умова loc extr)**.** Якщо $f'(x)$ при переході змінної x через точку x_0 змінює знак з "$-$" на "$+$", то у точці x_0 $loc \min$ функції $f(x)$; якщо з "$+$" на "$-$", то $loc \max$.

Th (Друга достатня умова loc extr)**.** Нехай $f(x) \in D^n(\{x_0\})$, $f^n(x_0) > 0$ (< 0) та $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Якщо *n*-непарна, то у x_0 нема loc extr; якщо *n*-парна, то у x_0 є $loc \min$ (відповідно $loc \max$) $f(x)$.

Для x із деякого проміжку X виконується наступне твердження.

Th (умова монотонності диференційованої функції)**.**

$f(x) \nearrow (\searrow) \Leftrightarrow f'(x) \ge 0$ (≤ 0). Якщо $f'(x) > 0$ (< 0), то $f(x) \uparrow (\downarrow)$.

Опуклість функції.

Def. Функція $f(x)$ називається *опуклою донизу*, $f(x)$"$\cup$", (*догори*, $f(x)$"$\cap$"), якщо її дуга не вища (не нижча) за хорду, що стягує її:

$f(x)$"$\cup$": $\quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, для $\forall \alpha_1, \alpha_2 \ge 0: \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

(якщо $f(x)$"$\cap$", то нерівність $\ge$ відповідно).

Th (достатня умова опуклості)**.** Нехай $f(x) \in C^2(X)$. Тоді на проміжку X $f(x)$"$\cup$" ($f(x)$"$\cap$"), якщо $f''(x) > 0$ (< 0).

Def. Точками *перегину* функції називаються точки в яких змінюється напрямок опуклості функції.

Деякі чудові нерівності математичного аналізу:[1]

Далі всі числові коефіцієнти невід'ємні: $\alpha_i \ge 0$, $x_k > 0$, $p, q > 0$ $a_i, b_i > 0$.

1. *Нерівність Ієнсена.* Для $f(x)$"$\cap$" на проміжку I та $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \ge \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

2. *Нерівність Коші.* Для $n \in \mathrm{N}$: $\quad \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots x_n}$.

3. *Нерівність Юнга.* Для $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$: $\quad \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q} \ge a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}$.

4. *Нерівність Гьольдера.* $\left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge \sum a_i b_i$, для $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

5. *Нерівність Коші – Буняковського – Шварца.* $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2} \cdot \sqrt{\sum b_i^2}$.

6. *Нерівність Мінковского.* $\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

---

[1] Нерівності 4-6 мають аналоги для означених інтегралів та грають важливу роль як у класичному так і у функціональному аналізі.

Побудова графіка функції.

Def. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = f(x)\}.$$

Схема дослідження для функції заданої явно:

0. Перевірка функції на схожість із відомими.

1. Область визначення D_f та значення E_f функції, парність, непарність, періодичність. Парність – симетрія відносно осі абсцис, непарність – симетрія відносно начала координат. Періодичність – достатність дослідження і побудови графіка функції в періоді.

2. Нулі функції, проміжки знакопостійності (метод інтервалів). Перетин з OY: $x = 0,\ y = f(0)$, з OX: $y = 0,\ x$ знаходимо із рівняння $f(x) = 0$.

3. Дослідження функції на неперервність (див. попередній розділ).

Асимптоти:

*Вертикальна***.** Якщо при $x \to a$ функція $f(x) \to \infty$, то функція має вертикальну асимптоту $x = a$.

*Горизонтальна***.** Якщо при $x \to \infty$ функція $f(x) \to b$, то функція має горизонтальну асимптоту $y = b$.

*Похила***.** Якщо при $x \to \infty$ функція $f(x) \to \infty$, то можливо існує похила асимптота $y = kx+b$. Для її існування необхідно і достатньо існування та скінченність двох границь:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \ \text{ і } \ b = \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - kx\big).$$

4. Дослідження на loc extr та проміжки монотонності функції.

5. Дослідження на проміжки опуклості та точки перегину функції.

6. Таблиця.

7. Графік функції.

Зауважимо, що ця схема може бути як доповнена так и скорочена в залежності від функції. Найбільш важливими пунктами є 3 та 4, таблиця зібраної інформації може також значно допомогти при побудові графіку функції.

Побудова графіка кривої.

Def. Графік кривої заданої параметрично системою (3.1) це множина

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in T\}.$$

Для побудови графіка кривої заданої системою (3.1) треба провести дослідження для обох функцій та зіставити отримані данні.

Схема дослідження для кривої заданої параметрично:

0. Загальні спостереження відносно функцій $x(t)$, $y(t)$.

1. Області визначення $D_{x(t)}, D_{y(t)}$ та значення $E_{x(t)}, E_{y(t)}$ функції, їх парність, непарність, періодичність. Парність $x(t)$ і непарність $y(t)$ – симетрія відносно осі абсцис; непарність $x(t)$ і парність $y(t)$ – симетрія відносно осі ординат, парність $x(t)$ і $y(t)$ – самонакладення кривої; непарність $x(t)$ і $y(t)$ – симетрія відносно начала координат. Загальний період у функцій $x(t)$ і $y(t)$ – замкнута або самонакладена крива.

2. Нулі функції, проміжки знакопостійності (метод інтервалів).
Перетин з OY: $x(t) = 0$, з OX: $y(t) = 0$.

3. Дослідження функцій $x(t)$ і $y(t)$ на неперервність. Значення $t = \omega$ (скінчені або нескінчені) на границях $D_{x(t)}, D_{y(t)}$ при яких $x(t)$ або $y(t)$ прямує до нескінченості.

Асимптоти:

*Вертикальна***.** Якщо при $t \to \omega \in \overline{\mathbf{R}}$ $x(t) \to a,\ y(t) \to \infty$, то функція має вертикальну асимптоту $x = a$.

*Горизонтальна***.** Якщо при $t \to \omega \in \overline{\mathbf{R}}$ $x(t) \to \infty,\ y(t) \to b$, то функція має горизонтальну асимптоту $y = b$.

*Похила***.** Якщо при $t \to \omega \in \overline{\mathbf{R}}$ $x(t) \to \infty,\ y(t) \to \infty$, то можливо існує похила асимптота $y = kx+b$. Для її існування необхідно і достатньо існування та скінченність двох границь:

$$k = \lim_{t\to\omega} \frac{y(t)}{x(t)} \ \text{ і } \ b = \lim_{t\to\omega}\big(y(t) - kx(t)\big).$$

4. Дослідження loc extr, проміжки монотонності функцій $x(t)$ і $y(t)$.

5. Дослідження на проміжки опуклості та точки перегину кривої. Для цього треба визначити знак y''_{x^2} для функції заданої параметрично.

6. Таблиця.

t	$-\infty$	$(-\infty, \omega_1)$		ω_1	(ω_1, ω_2)	...	$+\infty$
$x(t)$	x_0	↗ (↘)	"∩"("∪")	x_1 max	…	…	…
$y(t)$	y_0	↘(↗)		y_1 min	…	…	…

7. Графік функції.

Зауважимо, що поведінка кривої у точках $loc\,\mathrm{extr}$ функції $x(t)$ виглядає як «)» для $loc\,\max$ та «(» для $loc\,\min$ $x(t)$. Точки (x_0, y_0) у яких обидві функції $x(t)$ та $y(t)$ мають $loc\,\mathrm{extr}$ називаються *точками повернення*. Також зазначимо, що при побудові кривої параметр t можна розглядати як час, у процесі перебігу якого і змінюються координати $(x(t), y(t))$. Отже на графіку кривої параметр t не відображається, хоча його можна вказати для окремих точок.

Хоча криву задану у полярній системі можна розглядати як окремий випадок параметрично заданої кривої

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in T,$$

дослідження у цьому випадку можна значно спростити.

Схема дослідження для кривої $r = r(\varphi)$ заданої у полярній системі координат:

0. Перевірка функції на схожість із відомими.

1. Область визначення $D_{r(\varphi)} = \{\varphi : r(\varphi) \geq 0\}$, область значення $E_{r(\varphi)}$. Парність $r(\varphi)$ – симетрія відносно осі абсцис, непарність – нічого. Періодичність – достатність дослідження в періоді і побудови кривої у відповідному секторі. Періодичність з періодом π – симетрія відносно начала координат.

2. Перетин з $OY : \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, з $OX : \varphi = \pi k, k \in Z$.

3. Дослідження функції $r(\varphi)$ на неперервність.

Асимптоти:

*Кругова***.** Якщо при $\varphi \to \infty$ $r(\varphi) \to a$, то крива намотується на окружність $r = a$.

*Похила***.** Якщо при $\varphi \to \omega$ функція $r(\varphi) \to +\infty$, то можливо існує похила асимптота $y = kx+b$. Для її існування необхідно і достатньо існування та скінченність двох границь:

$$k = \mathrm{tg}\,\omega \quad \text{і} \quad b = \lim_{\phi\to\omega} r(\phi)\sin(\phi - \omega).$$

4. Дослідження на $loc\,\mathrm{extr}$ та проміжки монотонності функції $r(\varphi)$.

5. Таблиця.

6. Графік функції.

3.2. Контрольні запитання і завдання

1. Визначення похідної функції в точці, її геометричний і фізичний зміст. Односторонні похідні.
2. Що таке диференційованість функції у точці?
3. Що таке диференціал функції у точці? Його зв'язок із похідною та приростом функції, геометричний зміст?
4. Виписати таблицю похідних. Виписати правила диференціювання. Що таке логарифмічна похідна? Навести приклади.
5. Визначення похідних та диференціалів порядку, більшого ніж перший. Таблиця похідних вищого порядку, $n^{\text{і}}$ похідної для а) a^x; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) x^m $(m \in Z)$; д) $\ln x$; е) $\dfrac{1}{x}$.
6. Правила обчислення похідних $n^{\text{го}}$ порядку від лінійної комбінації двох функцій та добутку двох функцій (формула Лейбница). Навести приклади застосування.
7. Що таке інваріантність форми першого та не інваріантність форми другого та вищих диференціалів відносно зміни змінної?
8. Навести формули обчислення $1^{\text{ої}}$ і $2^{\text{ої}}$ похідної складної функції.
9. Навести формули обчислення $1^{\text{ої}}$ і $2^{\text{ої}}$ похідної зворотної функції. Які умови існування, монотонності та диференційованості зворотної функції?
10. Навести формули обчислення $1^{\text{ої}}$ і $2^{\text{ої}}$ похідної функції, що задана параметрично.
11. Теорема Дарбу про диференційовану функцію на проміжку. Її наслідки про розриви та неперервність похідної.
12. Теорема Ролля про диференційовану функцію на проміжку. Її геометрична інтерпретація.
13. Теорема Лагранжа про диференційовану функцію на проміжку. Її геометрична інтерпретація. Формула скінчених приростів.
14. Сформулювати теорему Коші про дотичну, що паралельна хорді до гладкої кривої, подібно теоремі Лагранжа, із врахуванням формули похідної функції, що задана параметрично.
15. Як можна з'ясувати нерівність між двома функціями на проміжку (a,b), за умови, що вони співпадають у точці a та відомого співвідношення між їх похідними?
16. Виписати формулу Тейлора в околі точки x_0 із залишковим членом у формі Лагранжа. Замінити похідні помножені на приріст аргументу

на диференціали, та отримати формулу Тейлора у термінах диференціалів.

17. Виписати формули Тейлора в околі $x_0 = 0$ (формули Маклорена) із залишковим членом у формі Пеано для функцій: а) e^x; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $\ln(1 + x)$; д) $(1 + x)^\alpha$.

18. Дати означення $loc\,\mathrm{extr}$ функції. Сформулювати необхідну та першу достатню умови $loc\,\mathrm{extr}$ диференційованої функції.

19. Сформулювати другу достатню умову $loc\,\mathrm{extr}$ диференційованої функції. Записати окремий випадок цієї теореми для $n=2$.

20. Виписати умову (строгої) монотонності функції.

21. Означення опуклої донизу (догори) функції, її геометричний зміст.

22. Сформулювати достатню умову опуклості. Що означає ця умова у термінах першої похідної?

23. Що таке точка перегину функції? Із означення та попередніх властивостей отримати необхідну та достатні умови точки перегину функції. Який її геометричний зміст?

24. Записати нерівності Ієнсена, Коші та Юнга.

25. Записати нерівності Гьольдера, Коші-Буняковського-Шварца та Мінковського.

26. Виписати схему дослідження явно заданої функції для побудови її графіку.

27. Як з'ясувати наявність вертикальної, горизонтальної та похилої асимптот у явно заданої функції?

28. Виписати схему дослідження кривої, що задана параметрично, для побудови її графіку. Які є умови симетрії?

29. Як з'ясувати наявність вертикальної, горизонтальної та похилої асимптот у кривої, що задана параметрично?

30. Як враховується та відображається змінення параметра t при побудові графіка $\Gamma=\{(x(t),y(t))\,|\,t\in T\}$.

31. Виписати схему дослідження кривої, що задана у полярній системі координат, для побудови її графіку. Яка умова на область визначення?

32. Які асимптоти шукають для кривої, що задана у полярній системі координат, як з'ясувати їх наявність?

33. Згадати геометричний зміст змінної φ і $r(\varphi)$ у полярній системі координат та сформулювати як виглядає процес побудови графіку кривої на декартової площині XOY.

3.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. $y=(1-5x)^{\mathrm{tg}3x}\cdot\ln\arcsin\dfrac{x}{2}-f\left(\dfrac{\sqrt{x+\varphi(x)}}{\psi(x^2)-1}\right)$, y'_x – ?

$$y'_x=\underbrace{\left((1-5x)^{\mathrm{tg}3x}\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}\right)'_x}_{A}-\underbrace{\left(f\left(\frac{\sqrt{x+\varphi(x)}}{\psi(x^2)-1}\right)\right)'_x}_{B};$$

$$A=\left((1-5x)^{\mathrm{tg}3x}\right)'\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}+(1-5x)^{\mathrm{tg}3x}\cdot\left(\ln\arcsin\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=\left(e^{\mathrm{tg}3x\ln(1-5x)}\right)'\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}+(1-5x)^{\mathrm{tg}3x}\cdot\frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}\cdot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=e^{\mathrm{tg}3x\ln(1-5x)}\cdot\left(\mathrm{tg}\,3x\cdot\ln(1-5x)\right)'\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}+\frac{(1-5x)^{\mathrm{tg}3x}\,\frac{1}{2}}{\arcsin\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=$$

$$=e^{\mathrm{tg}3x\ln(1-5x)}\cdot\left(\frac{3}{\cos^2 3x}\cdot\ln(1-5x)+\mathrm{tg}\,3x\frac{1}{1-5x}\cdot(-5)\right)\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{(1-5x)^{\mathrm{tg}3x}\,\frac{1}{2}}{\arcsin\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}};\qquad B=f'\left(\frac{\sqrt{x+\varphi(x)}}{\psi(x^2)-1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+\varphi(x)}}{\psi(x^2)-1}\right)'=$$

$$=f'(\ldots)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+\varphi(x)}\right)'\cdot\left(\psi(x^2)-1\right)-\sqrt{x+\varphi(x)}\left(\psi(x^2)-1\right)'}{\left(\psi(x^2)-1\right)^2}=$$

$$= f'(\ldots)\cdot\frac{\dfrac{1+\varphi'(x)}{2\sqrt{x+\varphi(x)}}\cdot\left(\psi\left(x^2\right)-1\right)-\sqrt{x+\varphi(x)}\left(\psi'\left(x^2\right)\cdot 2x\right)}{\left(\psi\left(x^2\right)-1\right)^2}.$$

Отже, підставляючи отримуємо відповідь $y'_x = A - B$.

Нагадаємо, що *логарифмічною похідною* функції $y = f(x)$ називається $\left(\ln\left|f(x)\right|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Вона є зручний інструмент пошуку похідних від функцій вигляду $y(x) = f^{\alpha}(x)g^{\beta}(x)\ldots h^{\gamma}(x)$, де $\alpha,\beta,\ldots,\gamma\in\mathbb{R}$, а $f(x), g(x),\ldots,h(x)$ – диференційовані додатні функції:

$\ln y(x) = \ln f^{\alpha}(x)\cdot g^{\beta}(x)\cdot\ldots\cdot h^{\gamma}(x) = \alpha\ln f(x)+\beta\ln g(x)+\ldots+\gamma\ln h(x)$.

Диференціюємо цю рівність $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = \alpha\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\beta\dfrac{g'(x)}{g(x)}+\ldots+\alpha\dfrac{h'(x)}{h(x)} \Rightarrow$

$$y(x) = y(x)\left(\alpha\frac{f'(x)}{f(x)}+\beta\frac{g'(x)}{g(x)}+\ldots+\gamma\frac{h'(x)}{h(x)}\right).$$

Якщо, при цьому $\alpha(x),\beta(x),\ldots,\gamma(x)$ – також функції від x, то:

$$y'(x) = y(x)\cdot\left(\alpha(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+\beta(x)\frac{g'(x)}{'g(x)}+\ldots+\gamma(x)\frac{h'(x)}{'h(x)}\right)+$$
$$+y(x)\cdot\left(\alpha'(x)\ln f(x)+\beta'(x)\ln g(x)+\ldots+\gamma'(x)\ln h(x)\right).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \dfrac{(3x+5)^2(7x-9)^3}{\left(x^2+x-29\right)^4(x-1)}$.

Розв'яжемо цю задачу за допомогою логарифмічної похідної:

$\ln y = 2\ln(3x+5)+3\ln(7x-9)-4\ln\left(x^2+x-29\right)-\ln(x-1)$,

диференціюємо обидві частини рівності за змінною x

$\dfrac{1}{y}\cdot y' = \dfrac{6}{3x+5}+\dfrac{21}{7x-9}-\dfrac{4(2x+1)}{x^2+x-29}-\dfrac{1}{x-1}$. Помножимо результат на y та підставимо натомість неї вихідну функцію, отримаємо відповідь:

$$y' = \frac{(3x+5)^2(7x-9)^3}{\left(x^2+x-29\right)^4(x-1)}\cdot\left[\frac{6}{3x+5}+\frac{21}{7x-9}-\frac{4(2x+1)}{x^2+x-29}-\frac{1}{x-1}\right].$$

Приклад 3. Знайти $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Спосіб 1. $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'_x dx}{(x^2)'_x dx} = \dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2\cdot 2x}$.

Спосіб 2. $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \left|\begin{matrix}\textit{Заміна}\\ x^2 = t\end{matrix}\right| = \left(\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)'_t =$

$= \dfrac{\sqrt{t}\cos\sqrt{t}\cdot(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})-\sin\sqrt{t}\cdot(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})}{t} = \dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2\cdot 2x}$.

Приклад 4. Для функції $y = \sin x^4$ знайти y''_{x^2}. Послідовно диференціюємо вихідну функцію:

$y' = \left(\sin x^4\right)'_{x^4}\cdot\left(x^4\right)'_x = 4x^3\cos x^4;$

$y'' = 12x^2\cos x^4+4x^3\left(\cos x^4\right)'_{x^4}\cdot\left(x^4\right)'_x = 12x^2\cos x^4-16x^6\sin x^4$.

Приклад 5. Знайти $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{(n)}$. Застосуємо формулу Лейбниця:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(\sin x)^{(n)}\left(x^{-1}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\left(x^{-1}\right)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)x^{n-k}\left[(-1)(-2)(-3)\ldots(n-k)\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!n!}{(n-k)!k!}x^{n-k-1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}k\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}x^{n-k-1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}k\right).$$

Приклад 6. Знайти другий диференціал функції $y = f(1+x^2)$, у два способи: I) через dx та d^2x, де x незалежна змінна; II) через dt та d^2t, де $x = \sin t$.

Знайдемо перший диференціал: I) $dy = f'(1+x^2)\cdot 2x\,dx$. Оскільки перший диференціал є інваріантним відносно зміни змінної, то для II) можна підставити у нього відповідне значення $x = \sin t$:

II) $dy = f'(1+\sin^2 t)\cdot 2\sin^2 t\, d\sin t = f'(1+\sin^2 t)\cdot 2\sin^2 t\cos t dt$.

Знайдемо другий диференціал:

I) $d^2 y = d\left(f'(1+x^2)\cdot 2x\,dx\right) = \left(f''(1+x^2)\cdot 4x^2 + f'(1+x^2)\cdot 2\right)(dx)^2$.

Другий диференціал вже не є інваріантним відносно зміни змінної, тобто треба його шукати безпосередньо для незалежної змінної *t*:

II) $d^2 y = d\left(f'(1+\sin^2 t)\cdot 2\sin^2 t\cos t dt\right) =$

$= \left(f''(\ldots)\cdot(2\sin^2 t\cos t)^2 + f'(\ldots)\cdot 4\sin t\cos^2 t + f'(\ldots)\cdot(-2)\sin^3 t\right)(dt)^2.$

Приклад 7. Знайти x''_{y^2}, якщо $y = x + e^x$.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+e^x};\; x''_{y^2} = \left(x'_y\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x \cdot x'_y = \left(\frac{1}{1+e^x}\right)'_x \cdot \frac{1}{y'_x} = \ldots .$$

Приклад 8. Знайти $y'_x,\ y''_{x^2}$, якщо $e^{x^2+y^3} + x\sin\left(xy^2\right) = 0$.

Диференціюємо праву та ліву частини рівності за змінною x, маючи на увазі, що $y = y(x)$. Отримаємо:

$$e^{x^2+y^3}\left(2x + 3y^2 y'\right) + \sin\left(xy^2\right) + x\cos\left(xy^2\right)\left(y^2 + 2xyy'\right) = 0.$$

Розв'язуємо це рівняння відносно y':

$$y'\left(3y^2 e^{x^2+y^3} + 2xyx\cos\left(xy^2\right)\right) + \left(2xe^{x^2+y^3} + \sin\left(xy^2\right) + y^2 x\cos\left(xy^2\right)\right) = 0.$$

Звідки: $y' = -\dfrac{\left(2xe^{x^2+y^3} + \sin\left(xy^2\right) + y^2 x\cos\left(xy^2\right)\right)}{\left(3y^2 e^{x^2+y^3} + 2xyx\cos\left(xy^2\right)\right)}$. Для знаходження y''_{x^2} треба ще раз диференціювати отриманий вираз для y' за змінною x, та підставити в результат для y''_{x^2} вже знайдений вираз для y'_x.

Приклад 9. Для функції заданої параметрично $x = 5\cos t,\ y = 5\sin t$ знайти y'''_{x^3}.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{5\cos t}{-5\sin t} = -\mathrm{ctg}t;\quad y''_{x^2} = \left(y'_x\right)'_t \cdot t'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\mathrm{ctg}t\right)'_t}{-5\sin t} = -\frac{1}{5\sin^3 t};$$

$$y'''_{x^3} = \left(y''_{x^2}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{\left(y''_{x^2}\right)'_t}{x'_t} = -\left(\frac{1}{5\sin^3 t}\right)'_t \frac{1}{-5\sin t} = -\frac{3\cos t}{25\sin^5 t}.$$

Приклад 10. Функцію $y = \left|(x-5)(x-6)^2\right|$ перевірити на диференційованість у точках $x = 5$ та $x = 6$. Похідні $y'_+(5),\ y'_-(5),\ y'_+(6),\ y'_-(6)$ знайти безпосередньо та за допомогою наслідку теореми Дарбу об однобічній похідній.

Безпосередньо:

$$y'_\pm(5) = \lim_{x\to 5\pm 0}\frac{|(x-5)(x-6)^2|}{x-5} = \pm 1;\quad y'_\pm(6) = \lim_{x\to 6\pm 0}\frac{|(x-5)(x-6)^2|}{x-6} = 0.$$

За наслідком теореми Дарбу об однобічних похідних:

$$y' \underset{x\neq 0}{=} \mathrm{sgn}(x-5)\cdot\left((x-6)^2 + (x-5)\cdot 2(x-6)\right);$$

$$y'_\pm(5) = \lim_{x\to 5\pm 0} y'(x) = \mathrm{sgn}(\pm 0)\cdot 1 = \pm 1;\quad y'_\pm(6) = \lim_{x\to 6\pm 0} y'(x) = \mathrm{sgn}(1)\cdot 0 = 0.$$

Приклад 11. Отримати розкладення функцій $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\mathrm{arctg}\,x$ у ряд Маклорена.

Кожну із формул можна отримати із формули для суми нескінченної спадаючою геометричної прогресії або із відомого розкладення $(1+x)^\mu$.

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right),\ x_0 = 0.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right),\quad x_0 = 0.$$

$$f(x) = \mathrm{arctg}x \;\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

$$\Rightarrow f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Приклад 12. а) Оцінити похибку наближеної формули

$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $x_0=0$, $x\in[0,\,1/5]$.

б) Знайти $\ln 1{,}3$ с точністю 10^{-2}.

Для обох задач випишемо загальну оцінку залишкового члену у формі Лагранжа: $\left|R_n(\ln,0;x)\right|=\left|\frac{(-1)^n\,n!\,x^{n+1}}{(1+\gamma)^{n+1}(n+1)!}\right|\underset{\gamma=0}{\leq}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$. Зауважимо, що цю оцінку можна сформулювати, як те, що абсолютна похибка розкладення не перевищує наступного доданку ряду Маклорена, на якому поліном було обірвано. Таке саме правило можна запам'ятати для $\sin x$ та $\cos x$.

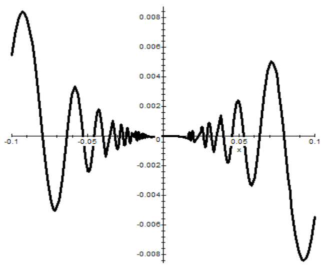
Отже для пункту а): $|R_3|\leq\frac{|x|^4}{4}\underset{x=1/5}{\leq}4\cdot10^{-4}$.

Для пункту б) відомо, що якщо застосувати формулу Маклорена для ln(1+*x*), то *x*=0,3 та $\left|R_n\right|\leq\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\underset{x=0,3}{\leq}\frac{3^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)}$. Отже підберемо *n* таке, щоб залишковий член не перевищував 10^{-2}, це *n* =2. Отримаємо $\ln(1+0{,}3)\approx0{,}3-\frac{(0{,}3)^2}{2}=0{,}255\approx0{,}26$ с точністю 10^{-2}.

Приклад 13. Знайти екстремуми функції $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Необхідна умова якщо $x\neq0$: 1) $f'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}=0$ або $2x=\operatorname{ctg}\frac{1}{x}$.

Можна показати, що це трансцендентне рівняння має нескінчену кількість розв'язків у яких похідна змінює знак і отже функція має екстремум. Проте, це також свідчить, що зручніше вказати ці екстремуми за допомогою графіка вихідної функції:



Залишається недослідженою точка $x=0$. Перевіримо за означенням: якщо $x>0$ $f(x)-f(0)=x^2\sin\frac{1}{x}>0$ інакше якщо $x<0$ вираз $f(x)-f(0)<0$. Отже екстремуму у 0 немає.

Приклад 14. Побудувати графік кривої заданої неявно $x^3+y^3=3xy$.

Параметризуємо $t=\frac{y}{x}$, та підставимо в рівняння, отримаємо: $x^3\left(1+t^3\right)=3tx^2$. Отже маємо вже параметрично задану криву: $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$. Перевіримо основні пункти дослідження:

1. ОДЗ: $t\neq-1$.
2. Перетин із початком координат при *t* = 0. Зміна знака *x*(*t*) при переході *t* через -1 (з + на –) та при переході через 0 (з – на +). Зміна знака *y*(*t*) при переході *t* через -1 (з – на +). Отже графік кривої при $t\in(-\infty,-1)$ знаходиться у IV чверті, потім при $t\in(-1,0)$ у II, далі при $t\in(0,+\infty)$ у I. Крім того він підходить до початку координат із I та II чверті.
3. Дослідження функцій $x(t)$ і $y(t)$ на границях області визначення $D_{x(t)}, D_{y(t)}$, коли *t* прямує до -1, а також до нескінченості. Для -1:

   $$\lim_{t\to-1\pm0}x(t)=\lim_{t\to-1\pm0}\frac{3t}{1+t^3}=\mp\infty;\qquad \lim_{t\to-1\pm0}y(t)=\lim_{t\to-1\pm0}\frac{3t^2}{1+t^3}=\pm\infty.$$

   Це свідчить про те, що крива може мати похилі асимптоти. Перевіряємо:

   $$k=\lim_{t\to-1\pm0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to-1\pm0}\frac{3t^2}{3t}=-1,$$

   $$b=\lim_{t\to-1\pm0}\left(y(t)-kx(t)\right)=\lim_{t\to-1\pm0}\left(\frac{3t^2}{t^3+1}+\frac{3t}{t^3+1}\right)=-1.$$

   Отже $y=-x-1$ похила асимптота.

   Для нескінченості:

   $$\lim_{t\to\pm\infty}x(t)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{3t}{1+t^3}=+0,\qquad \lim_{t\to\pm\infty}y(t)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{3t^2}{1+t^3}=\pm0.$$

   Тобто графік підходить до початку координат із I та IV чверті, але початку координат не досягає.
4. Дослідження loc extr, проміжки монотонності:

$$y'_t = \frac{6t\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot 3t^2}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3t\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}, \qquad x'_t = \frac{3\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot 3t}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}.$$

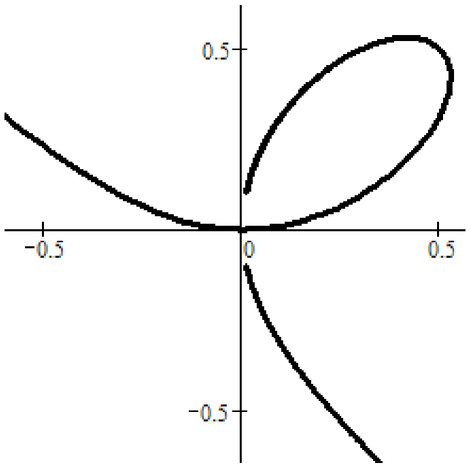
$y'_t(t) = 0$ при 1) $t = 0;\ x = 0;\ y = 0$, та 2). $t = \sqrt[3]{2};\ x = \sqrt[3]{2};\ y = \sqrt[3]{4}$.

$x'_t(t) = 0$ при $t = 1/\sqrt[3]{2};\ x = \sqrt[3]{4};\ y = \sqrt[3]{2}$.

У випадку 1) функція $y(t)$ має мінімум, а у випадку 2) максимум. При $t = 1/\sqrt[3]{2};\ x = \sqrt[3]{4};\ y = \sqrt[3]{2}$ функція $x(t)$ має максимум. Дослідження на проміжки опуклості та точки перегину пропустимо.

t	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(-1,0)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	$+\infty$
$x(t)$	+0	$\nearrow$ $+\infty$	асимптота	$\nearrow$ -0	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$ max	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	+0
$y(t)$	- 0	$\searrow$ $-\infty$	$y=-x-1$	$\searrow$+0	0 min	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$ max	$\searrow$	+0

Графік цієї кривої наведено нижче, вона має назву «Декартов лист».



3.4. Задачі для самостійного розв'язку

Знайти похідні y' наступних функцій, що задані явно $y = y(x)$:

1. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

2. $y=\dfrac{x^2(1-x)^3}{1+x}$.

3. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

4. $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)$.

5. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

6. $y=(1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$.

7. $y=\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x$.

8. $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

9. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)$.

10. $y=\dfrac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

11. $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

12. $y=\dfrac{1}{4x^4}\ln\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{16x^4}$.

13. $y=\dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{\arccos x}{\operatorname{arcctg} x}$.

14. $y=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

15. а) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; б) $y=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$.

16. а) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$, $(a>0)$;

б) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$.

17. $y=\sin\left(\cos^2 x\right)+\cos\left(\sin^2 x\right)$.

18. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

19. $y=e^{-x^2}$.

20. $y=e^x+e^{e^x}$.

21. $y=\sin(\sin(\sin x))$.

22. $y=\ln(\ln(\ln x))$.

23. $y=\sin\left(\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right)$.

24. $y=\sqrt[7]{x^3}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^x$.

25. $y=(\sin x)^{\cos x}$.

26. $y=\left(x^2+x+1\right)^{x^2-x+1}$.

Знайти похідні y' від функцій $y(x)$, що містять невідомі функції:

27. $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$.

28. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

29. а) $y=f\left(x^2\right)$; б) $y=f\left(\sin^2 x\right)+f\left(\cos^2 x\right)$;

в) $y=f\left(e^x\right)\cdot e^{f(x)}$; г) $y=f(f(f(x)))$.

30. $y=\operatorname{arctg}\left(\varphi\left(x^2\right)+\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}\right)-\sin(3x-2)\cdot x^{\psi(2x)}$.

31. $y=(\operatorname{tg} x)^{2x-1}\cdot\ln\arcsin\dfrac{x}{3}-f\left(\dfrac{x+3^x}{\varphi\left(\sqrt[3]{x}\right)-1}\right)$.

32. $y=\pi^x\cdot\operatorname{ctg}\left((x+1)^x-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)+\varphi\left(\sin x^2\cdot\psi^2(\cos x)\right)$.

Знайти y', побудувати графіки $y(x)$ та $y'(x)$, дати фізичну інтерпретацію:

33. $y=\begin{cases}1 & x<0\\ 1+x & 0\le x\le 3\\ x^2-5 & x>3\end{cases}$.

34. $y=\begin{cases}1-x & x<1\\ (1-x)(2-x) & 1\le x\le 2\\ x-2 & x>2\end{cases}$.

35. Знайти суму: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.

36. Знайти логарифмічні похідні від $y(x)$:

а) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$;

в) $y=\dfrac{(x-8)^{\frac{5}{7}}}{3+2x}\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{(3-x)^2}}$; г) $y=\dfrac{(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\dfrac{\sqrt[6]{(1+\operatorname{tg} x)^5}}{(3-6x)^{\pi}}$;

д) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$; е) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

Знайти перший диференціал dy функції y:

37. а) $y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$; б) $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

38. а) $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$. б) $y = \arcsin\frac{x}{a}$.

39. а) $y = \frac{u}{v^2}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$; в) $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

40. Знайти:

а) $d(xe^x)$; б) $d(\sin x - x\cos x)$; в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;

г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; д) $d\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)$; е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

ж) $d\ln(1 - x^2)$; з) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$; і) $d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$.

Знайти:

41. а) $\frac{d(\operatorname{tg}x)}{d(\operatorname{ctg}x)}$; б) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$; в) $\frac{d(\operatorname{arctg}x)}{d(\operatorname{arcctg}x)}$.

42. а) $(\sin x)'_{\cos x}$; б) $\frac{d}{dx^3}\left(x^3 - 2x^6 - x^9\right)$; в) $(x + \ln x)'_{x+e^x}$.

За допомогою формули нескінченно малих приростів, приблизно обчислити:

43. а) $\sqrt{0{,}98}$; б) $\sin 29°$; в) $\operatorname{arctg}1{,}05$; г) $\lg 11$.

44. Довести формулу наближень:

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0),$$

де $|x| << a$, та з її допомогою обчислити:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

Знайти похідні та диференціали вищого порядку від функцій, що задані явно $y = y(x)$:

45. $y = \operatorname{tg}x$, y''_{x^2} – ?

46. $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg}x$, y''_{x^2} – ?

47. $y = x(\sin\ln x + \cos\ln x)$, y''_{x^2} – ?

48. $y = f(x^2)$, y'''_{x^3} – ?

49. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, y'''_{x^3} – ?

50. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$, y'''_{x^3} – ?

51. $y = f(\ln x)$, y'''_{x^3} – ?

52. $y = \frac{\ln x}{x}$, d^2y – ?

53. $y = x^x$, d^2y – ?

54. $y = \ln\frac{u}{v}$, d^2y – ?

55. $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$, $y^{(6)}, y^{(7)}$ – ?

56. $y = \sqrt{x}$, $y^{(10)}$ – ?

57. $y = \frac{\ln x}{x}$, $y^{(5)}$ – ?

58. $y = \frac{x^2}{1-x}$, $y^{(8)}$ – ?

59. $y = \frac{1}{x(1-x)}$, $y^{(n)}$ – ?

60. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, $y^{(n)}$ – ?

61. $y = \frac{3 - 2x^2}{2x^2 + 3x - 2}$, $y^{(n)}$ – ?

62. $y = e^x\cos x$, y^{IV} – ?

63. $y = x\cos 2x$, $d^{10}y$ – ?

64. $y = (x^2 - x)\cos 3x$, $y^{(101)}$ – ?

65. $y = x^2\sin 2x$, $y^{(50)}$ – ?

66. $y = x^2e^{2x}$, $y^{(20)}$ – ?

67. $y = \frac{e^x}{x}$, $y^{(10)}$ – ?

68. $y^{(n)}$, если $y = x^{n-1}e^{1/x}$,

69. $y = x^2\sin ax$, $y^{(n)}$ – ?

70. $y = \cos^3 x$, $y^{(n)}$ – ?

71. $y = e^{ax}\cos(bx + c)$, $y^{(n)}$ – ?

72. $y = e^{2x}\sin^2 x$, $y^{(n)}$ – ?

73. $y = \sin^2 ax\cdot\cos^2 bx$, $y^{(n)}$ – ?

74. $y = x\sin x\cos 2$, $y^{(100)}(0)$ – ?

75. $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg}^2 x$, $y^{(n)}$ – ?

76. $y = (2x - 1)\cdot 2^{3x}\cdot 3^{2x}$, $y^{(n)}$ – ?

77. $y = \sin x\sin 2x\sin 3x$, $d^{10}y\left(\frac{\pi}{6}, dx\right)$ – ?

78. $y = (\sin^4 x + \cos^4 x)^{(n)}$, $y^{(n)}$ – ?

79. Довести, що $\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$, если $\exists f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

80. Знайти другий диференціал вказаних функцій у два способи:
I) через dx та d^2x; II) через dt та d^2t:

а) $y = f\left(2^{\arcsin x}\right)$; $x = \ln\left(3+t^2\right)$.

б) $y = f\left(\mathrm{arctg} 3^x\right)$; $x = \mathrm{ctg} 2x$.

в) $y = f\left(\arccos(\ln x)\right)$; $x = \sin t$.

Похідні першого та вищого порядку від обернених функцій:
81. Визначити область існування обернених функцій $x = x(y)$ та знайти $x'_y, x''_{y^2}, x'''_{y^3}$ якщо:

а) $y = x + \ln x$; б) $y = \mathrm{sh} x$; в) $y = x + e^x$; г) $y = \mathrm{th} x$;

д) $y = e^x + \ln x$; е) $y = x \cdot \sin x$; ж) $y = \sqrt{x + \cos x}$; з) $y = \dfrac{x}{e^x}$.

82. Знайти x''_{y^2}, якщо а) $y = x^{x^x}$; б) $y = (\ln x)^{2x}$; в) $y = (\mathrm{tg} 2x)^{\sin x}$.

83. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована 4-ри рази. Знайти x', x'', x''', x^{IV} оберненої функції $x = f^{-1}(y)$.

Похідні першого та вищого порядку від функцій, що задані неявно:
Знайти $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}$ функцій $y(x)$, що задані неявно:

84. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

85. $x^2 + y^2 = 25$.

86. $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \mathrm{arctg}(xy)$.

87. $y + \exp(xy) = 2x$.

88. $x + \cos(xy) = y^2$.

89. $y^2 + 2\ln y = x^4$.

Похідні першого і вищого порядку від параметрично заданих функцій:
Знайти $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}$, якщо $a > 0$ та:

90. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

91. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

92. $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $y = \mathrm{tg} t - t$.

93. $x = -te^t$, $y = te^{-t}$.

94. $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$; $y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

95. $\begin{cases} x = t + e^{-t} \\ y = 2t + e^{-2t} \end{cases}$.

.

96. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$.

97. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

98. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

99. $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$.

100. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$.

101. $\begin{cases} x = a\cos 2t \\ y = a\cos 3t \end{cases}$.

102. $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

103. Знайти y'_x, y''_{x^2} функцій, що задані $\rho = \rho(\varphi)$ у полярній системі координат:

а) $\rho = a\varphi$; б) $\rho = ae^{m\varphi}$; в) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$; г) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$;

д) $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$; е) $\rho = a\sin 3\varphi$; ж) $\rho = a\cos 4\varphi$; з) $\rho = \dfrac{1}{\sin 3\varphi}$.

<u>Основні теореми диференціального числення та їх застосування</u>

Дослідження на диференційованість:
104. За допомогою наслідку теореми Дарбу, дослідити на диференційованість:

а) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; б) $y = |\cos x|$;

в) $y = |\pi^2 - x^2| \cdot \sin^2 x$; г) $y = \arcsin(\cos x)$.

105. Знайти ліву $f'_-(0)$ та праву $f'_+(0)$ похідні у точці 0, також знайти $\lim\limits_{x\to\pm 0} f'(x)$. Пояснити чому результати співпадають або ні.

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$;

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$;

в) $f(x) = \begin{cases} x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$;

г) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

106. Визначити якого порядку похідні є в точці $x = 0$ у функції

$y=\begin{cases}1-\cos x, & x<0\\ \ln(1+x)-x, & x\ge 0\end{cases}$. Обчислити відповідні похідні у цій точці.

107. Довести, що якщо всі корені полінома $P_n(x)$ із дійсними коефіцієнтами дійсні, то і $P'_n(x)$ має тільки дійсні корені.

108. Показати, що всі корені наступного полінома Лежандра $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\}$ дійсні та належать інтервалу (–1, 1).

109. Довести наступну теорему. Якщо

1) функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ n–кратно диференційовані;
2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$, $k=0, 1, 2, \dots n-1$;
3) $\varphi^{(n)}(x)=\psi^{(n)}(x)$, $\forall x>x_0$,

то має місце нерівність: $\varphi(x)>\psi(x)$, $\forall x>x_0$.

110. За допомогою номеру **109** довести наступні нерівності на вказаних множинах:

а) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$ $(x>0)$;

б) $\operatorname{tg}x>x+\dfrac{x^3}{3}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $\operatorname{ch}x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ $(x\in\mathbb{R})$;

г) $\operatorname{sh}x<x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$ $(x<0)$;

д) $(\lg x)\cdot\cos(\lg x)<\sin(\lg x)$ $(1<x<100)$;

е) $1-\dfrac{1}{|\arcsin x|^{\pi}}\le\pi\ln|\arcsin x|$ $(0<|x|<\sin 1)$;

ж) $(\ln x)\cdot\cos(\ln x)>\sin(\ln x)$ $\left(\dfrac{1}{e}<x<1\right)$;

з) $1-5\ln\sin^2 x\le\dfrac{1}{\sin^{10}x}$ $(x\ne k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$;

е) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{2}<\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{x^2+1}$ $(x>1)$.

Наступні функції розкласти у ряд Тейлора в околі точки $x=x_0$:

111. а) $y=x^2+3x-3$, $x_0=0$; б) $y=x^2+3x-3$, $x_0=1$.

112. $y=e^{x^2-x}$, $x_0=0$ (до x^5). **113**. $y=\sqrt{x}$, $x_0=1$, (до $(x-1)^3$).

114. $y=\ln(1+\sin x)$, $x_0=0$, (до x^5). **115**. $\dfrac{x}{e^x-1}$, $x_0=0$ до x^4.

116. $\operatorname{tg}x$ до x^5. **117**. $\sin(\sin x)$ до x^3.

118. $\ln\cos x$ до x^6. **119.** x^x-1 до $(x-1)^3$.

120. $\sqrt{1+x^2}-x$ до $\dfrac{1}{x^3}$. **121**. $y=\operatorname{arctg}x$, $x_0=0$ (весь ряд).

122. $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^3}$ до x^3.

123. $y=\ln(1+x+x^2+x^3)$, $x_0=0$, до x^5.

124. $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2+x^2}{x^4-3x^2+2}}$, $x_0=0$, до x^{2n+1}.

125. $y=\dfrac{1-2x\sqrt{e}+ex^2}{\sqrt{-\ln\left(2x-x^2\sqrt{e}\right)}}$, $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, до $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^9$.

126. $y=(x^2-1)^{1000}$, $x_0=1$, до $(x-1)^{1000}$.

127. $y=\left(6-\sqrt{1-10x^4}\right)^{\cos 2x^3}$, до x^9.

128. $y=\begin{cases}x^6\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $x_0=0$, до членів найбільшого порядку.

129. $y=\sin\dfrac{x^2-x}{2e^x}$, $x_0=0$, два члена розкладення.

130. При $x\to\infty$ знайти три члена асимптотики функції $y=x^2e^{2/(x+1)}$.

Розкласти за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеана:

131. $y=e^{1-\cos x^2}-\sqrt{1+\sin^2 x}$, $x\to 0$, до $o\left(x^6\right)$.

132. $y=x^{\pi}-\pi^{x}$, $x\to 1$, до $o\left((x-1)^4\right)$.

133. $y=\ln\dfrac{1}{x}+e^{x^2}$, $x\to 1$, до $o\left((x-1)^3\right)$.

134. $y=\ln\dfrac{x+2}{x}+2^{1+\frac{1}{x}}$, $x\to\infty$, до $o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

135. $y=\left(3+3x+x^2\right)^{3/5}-\ln\left(\dfrac{1}{-x}\right)$, $x\to-1$, до $o\left(\left(x+1\right)^4\right)$.

136. $y=\left(3+x\right)^{\pi}+\sin 2\cdot\cos x+\cos 2\cdot\sin x$, $x\to-2$, до $o\left(\left(x+2\right)^4\right)$.

137. При яких a та b величина $x-(a+b\cos x)\sin x$ буде нескінчено малою 3[го] порядку відносно x?

У наступних задачах знайти найбільше n та константи A, B, C,… такі, що при $x\to 0$ виконуються формули:

138. $e^x=\dfrac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+\mathrm{O}\left(x^n\right)$. **139**. $\mathrm{arctg}x=\dfrac{x+Ax^3}{1+Bx^2}+\mathrm{O}\left(x^n\right)$.

140. $\ln(1+x)=\dfrac{x+Ax^2}{1+Bx}+\mathrm{O}(x^n)$. **141**. $\arcsin x=\dfrac{x+Ax^3}{1+Bx^2}+\mathrm{O}(x^n)$.

142. $\cos x=\dfrac{1+Ax^2}{1+Bx^2}+\mathrm{O}(x^n)$. **143**. $\mathrm{ctg}x=\dfrac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+\mathrm{O}(x^n)$.

144. $\left(1+x\right)^x=\dfrac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx}+\mathrm{O}(x^n)$. **145**. $\sqrt[x]{1+x}=\dfrac{e+Ax}{1+Bx}+\mathrm{O}(x^n)$.

У наступних завданнях застосувати формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

146. Для яких x виконується, с точністю до 0,0001, наближена формула: $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2}$?

Оцінити абсолютну похибку формул:

147. а) $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}$, $x\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$; б) $\mathrm{tg}x\approx x+\dfrac{x^3}{3}$ $\left(|x|\le 0{,}1\right)$;

в) $\sin 2x\approx 2x-\dfrac{4x^3}{3}$, $x\in\left[0,\ \dfrac{1}{4}\right]$; г) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}$ $(x\in[0,1])$.

148. $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$; $|x|\le 1$. **149**. $\mathrm{arctg}x\approx\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}$; $|x|>10^2$.

150. $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}\approx 1+\dfrac{2}{3x}$; $|x|>10^3$.

151. Виписати поліном Тейлора функції e^x у нулі, який дозволяє обчислити значення e^x на відрізку $[-1, 2]$ із точністю 10^{-3}.

Обчислити вказані значення із заданою точністю:

152. $\ln 1{,}3$; $\varepsilon=10^{-6}$. **153**. $\sqrt[3]{e}$; $\varepsilon=10^{-6}$. **154**. $\sqrt[5]{250}$; $\varepsilon=10^{-6}$.

155. e; $\varepsilon=10^{-6}$. **156**. $\mathrm{arctg}0{,}8$; $\varepsilon=10^{-5}$. **157**. $\sin 85°$; $\varepsilon=10^{-6}$.

158. $\ln 2$; $\varepsilon=10^{-3}$. **159**. $\arcsin 0{,}56$; $\varepsilon=10^{-5}$. **160**. $\cos 9°$($\varepsilon=10^{-5}$);

161. $\dfrac{1}{\sqrt{105}}$; $\varepsilon=10^{-4}$ **162**. $\sqrt{5}$; $\varepsilon=10^{-5}$. **163**. $\sqrt[4]{16{,}03}$; $\varepsilon=10^{-5}$.

164. а) $\sqrt{e}$ до 10^{-5}; б) $\sqrt{e}$ до 10^{-8}; в) $\sqrt[4]{e}$ до 10^{-5};

г) $\sqrt[4]{e}$ до 10^{-8}; д) $\cos 1°$ до 10^{-5}.

Дослідити функції на екстремум:

165. $y=2+x-x^2$. **166**. $y=(x+1)^{10}e^{-x}$. **167**. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

168. $y=x^3-6x^2+9x-4$. **169**. $y=\sqrt{x}\ln x$. **170.** $y=x+\dfrac{1}{x}$.

171. $y=|x|^{1/\sqrt{2}}\cdot|1-x|^{1-1/\sqrt{2}}$. **172**. $y=xe^{-x}$. **173**. $f(x)=\cos^{100}x+\mathrm{ch}^{100}x$.

174. Визначити проміжки монотонності функції: $y=x+|\sin 2x|$.

Знайти найбільше і найменше значення ($\sup$, $\inf$) функції на множині:

175. $f(x)=x^2-4x+6$, $x\in[-3, 10]$. **176**. $f\left(x\right)=e^{-x^2}\cos x^2$, $x\in\mathbf{R}$.

177. $f\left(x\right)=e^{-x^2}\cos x^2$, $x\in\mathbf{R}$. **178.** $y=2^x$, $x\in[-1, 5]$.

179. $y=|x^2-3x+2|$, $x\in[-10, 10]$. **180.** $y=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $x\in(0, +\infty)$.

181. Знайти найбільший член послідовності $x_n=\sqrt[n]{n}$.

182. Знайти точні верхню и нижню грані функції $f\left(\xi\right)=\dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ на інтервалі $x < \xi < +\infty$. Побудувати графіки функцій $M(x) = \sup\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$; $m(x) = \inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$.

Визначити кількість дійсних коренів та вказати проміжки на яких вони знаходяться для рівнянь:

183. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$. **184**. $x^3 + 3x^2 + 2x - 12 = 0$.

185. $3x^3 - 9x^2 + 9x + 7 = 0$. **186**. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

187. Визначити кількість дійсних коренів рівняння: $x^3 - x + a = 0$ при різних значеннях параметра a.

188. Відобразити на площині (p, q) області, в яких рівняння $x^3 + px + q = 0$ має: а) один; б) три дійсних кореня.

189. В чашку, що має форму півкулі радіуса a, опущено стрижень довжини l $(2a < l < 4a)$. Знайти положення рівноваги стрижня.

190. Вивести закон переломлення світла (закон Снелла), що проходить від точки А до точки В скрізь границю двох середовищ.

191. Із якого сектора круга радіусу R можна згорнути воронку найбільшої місткості?

192. Знайти відстань від початку координат до дотичної до кривої:

а) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$; б) $\rho = ae^{k\varphi}$.

194. У кулю радіуса R вписати циліндр найбільшого об'єму.

Довести нерівності, використовуючи опуклість функцій:

195. $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$, $x > 0$, $y > 0$.

196. $\dfrac{1}{2}\left(x^{\mu} + y^{\mu}\right) > \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{\mu}$ $\begin{array}{l} x > 0,\ y > 0 \\ x \neq y,\ \mu > 1 \end{array}$.

197. $\left(x^{\beta} + y^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} > \left(x^{\alpha} + y^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ $\begin{array}{c} x > 0, \quad y > 0 \\ 0 < \alpha < \beta \end{array}$.

198. $\dfrac{e^x + 3e^y}{4} > e^{\frac{x+3y}{4}}$, $(x \neq y)$.

199. $\left(x^{\alpha} + y^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(x^{\beta} + y^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ $\begin{array}{c} x > 0, \quad y > 0 \\ 0 < \alpha < \beta \end{array}$.

Побудувати графіки функцій:

200. $y = (x+1)(x-2)^2$. **201**. $y = \dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$. **202**. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

203. $y = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$. **204**. $y = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$. **205**. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

206. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$. **207**. $y = \left(1+x^2\right)e^{-x^2}$.

208. $y = e^{-2x}\sin^2 x$. **209**. $y = \sin x + \cos^2 x$.

210. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$. **211**. $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

212. $y = \arcsin x + 3\arccos x + \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

213. $y = \dfrac{2x-1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{2x-1}{2}\pi\right)$. **214**. $y = 2\operatorname{arctg}x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

215. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$. **216**. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1$.

Побудувати графіки кривих, що задані неявно:

217. $x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x = 0$. **218**. $y^2 - x^4 + x^6 = 0$.

219. $y^2 = x^3(2 - x)$. **220**. $x^4 + y^4 = 8xy^2$.

221. $x^y = y^x$ $(x > 0,\ y > 0)$. **222**. $4y^2 = 4x^2y + x^5$.

223. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (лист Декарта). Параметризувати зміною $t = \dfrac{y}{x}$.

Побудувати графіки кривих, що задані параметрично $(a > 0)$:

224. $x = \dfrac{(t+1)^2}{4}$; $y = \dfrac{(t-1)^2}{4}$. **225**. $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$; $y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

226. $x = a\cos 2t$; $y = a\cos 3t$, $(a > 0)$ (крива Лесажу).

227. $x = -te^t$, $y = te^{-t}$. **228**. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$. **229**. $\begin{cases} x = t + e^{-t} \\ y = 2t + e^{-2t} \end{cases}$.

230. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (циклоїда). **231**. $f(x) = \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (астроїда).

Побудувати графіки кривих, що задані у полярній системі координат ($a > 0$):

232. а) $\rho = a\varphi$ (спіраль Архімеда); б) $\rho = ae^{m\varphi}$ (логарифмічна спіраль).
233. а) $\rho = a\sin 3\varphi$ (трилисник); б) $\rho = a\cos 4\varphi$ (чотирьохлистник).
234. а) $\rho = a(1+\sin\varphi)$; б) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоїда).
235. а) $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{1}{\sin 3\varphi}$; в) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемніската Бернулі).