

Задачи по статистической физике (8 семестр)

Задача 1 — страница 1

[1] Система имеет температуру T . Найти среднее значение относительной намагниченности модельной системы спинов во внешнем поле H (как функцию H и T).

Задача 2 — страница 2

[1] Найти химический потенциал μ системы, у которой степень вырождения $g = BV^N$, где B - постоянная, V - объем системы.

Задача 3 — страница 3

[1] Найти химический потенциал μ системы спинов в магнитном поле H (как функцию H и T).

Задача 4 — страница 4

[1] Подсчитать число состояний в модели спиновых стрелок и степень вырождения, получить выражение гауссовского типа для нее.

Задача 5 — страница 8

[1] Найти энтропию, температуру для модели спиновых стрелок в магнитном поле.

Задача 6

[1] Найти средние числа заполнения в парастатистике.

Задача 7 — страница 9

[2] Найти уравнение состояния, внутреннюю энергию и теплоемкость классического идеального одноатомного газа, рассматривая его статистическую сумму в каноническом ансамбле.

Задача 8 — страница 11

[2] Найти уравнение состояния, внутреннюю энергию и теплоемкость для ультрарелятивистского газа с законом дисперсии $\epsilon = cp$, где c - скорость света, рассматривая его статистическую сумму в каноническом ансамбле.

Задача 9 — страница 13

[2] Найти внутреннюю и свободную энергии и теплоемкость C_V при постоянном объеме столба одноатомного идеального газа из N молекул в трубе высотой h_0 площадью сечения S , находящегося в однородном поле тяжести напряженностью g . Определить C_V в предельных случаях $mgh_0/(kT) \ll 1$ и $mgh_0/(kT) \gg 1$.

Задача 10 — страница 15

[2] Вычислить электрический дипольный момент идеального газа, состоящего из линейных молекул с неизменным дипольным моментом b , при помещении его в однородное электрическое поле напряженностью ϵ .

Задача 11 — страница 18

[2] Доказать, что классическая система не может обладать магнитными свойствами (теорема Бора - ван Левен).

Задача 12 — страница 19

[2] Вычислить классическую статистическую сумму системы из N одинаковых одномерных невзаимодействующих осцилляторов с собственной частотой ω . Найти внутреннюю энергию и теплоемкость такой системы.

Задача 13 — страница 20

[2] Вычислить квантовую статистическую сумму системы из N одинаковых одномерных невзаимодействующих осцилляторов с собственной частотой ω . Найти внутреннюю энергию и теплоемкость такой системы.

Задача 14

[2] Пользуясь соотношением $p(E) = 1/2\pi i \oint Q(\beta) \exp\{\beta E\} d\beta$ получить выражение для плотности состояний $p(E) = \sum \delta(E - E_i)$.

Задача 15 — страница 25

[2] Вычислить плотность состояний для нерелятивистского одноатомного ферми-бозе-газа с законом дисперсии $\epsilon = p^2/(2m)$.

Задача 16 — страница 21

[2] Определить среднее число столкновений молекул одноатомного максвелловского газа с единичной площадью поверхности сосуда, в котором он находится, в единицу времени.

Задача 17 — страница 23

[2] Определить среднюю энергию молекул максвелловского газа в веерообразном пучке, который выходит через небольшое отверстие в стенке сосуда в вакуум, и среднее значение косинуса угла между направлением скорости вылетающих молекул и нормалью к стенке сосуда.

Задача 18— страница 27

[2] Определить среднее значение высоты молекул в столбе одноатомного идеального газа из N молекул в трубе высотой h_0 и площадью сечения S , находящегося в однородном поле силы тяжести.

Задача 19— страница 29

Найти объем шара и объем шарового слоя в N -мерном фазовом пространстве.

Задача 20— страница 31

[3] Вычислить фазовый объем Γ для:

- а) гармонического осциллятора;
- б) релятивистской частицы, движущейся в объеме V и обладающей энергией E .

задача 21 — страница 32

[3] N частиц идеального газа заключены в объеме V и подчиняются микроканоническому распределению с энергией E . Вычислить для них фазовый объем Γ , энтропию S и температуру T . Найти уравнение состояния газа.

Задача 22

[4] Найти матрицу плотности свободной частицы с одной степенью свободы.

Задача 23

[4] Найти матрицу плотности линейного одномерного гармонического осциллятора.

Задача 24— страница 33

[5] Определить число столкновений со стенкой в электронном газе при абсолютном нуле температур.

Задача 25

[5] Определить число столкновений со стенкой в ультрарелятивистском, полностью в вырожденном электронном газе.

Задача 26

[5] (стр. 200) Определить теплоемкость вырожденного ультрарелятивистского электронного газа.

Задача 27— страница 36

[5] (стр. 204) Определить скачок производной $(dC_v/dT)_V$ в точке $T=T_0$.

Задача 28— страница 38

Вычислить энергию Ферми для полностью вырожденного электронного газа.

Задача 29— страница 39

Для ультрарелятивистского вырожденного электронного газа найти энергию Ферми.

Задача 30— страница 40

Определить давление полностью вырожденного ультрарелятивистского электронного газа.

Задача 31— страница 41

Определить давление полностью вырожденного идеального ферми-газа из электронов.

Задача 32

Система может находиться в любом из N состояний. Вероятность того, что система находится в i -том состоянии равна ω_i ($i=1,2,\dots,N$) причём $\sum \omega_i=1$. Показать, что распределение $\omega_i=1/N$ соответствует максимуму информационной энтропии $S=-k_B \sum \omega_i \ln \omega_i$.

Задача 33— страница 42

[5] Вычисление интегралов вида

Литература

1. В.В. Ангелейко, В.Л.Ходусов. Спінова модель побудови статистичної теорії макроскопічних систем. Х., RISO ХНУ, - 21 с.
2. А.С.Кондратьев, В.П.Романов. Задачи по статистической физике. М., "Наука", 1992, - 150 с.
3. Терлецкий Я.П. Статистическая физика. М., 1973.
4. Р.Фейман. Статистическая механика. М., "Мир", 1973., - 407 с.
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Статистическая физика, часть 1.. М., "Наука", 1976, 584.

система имеет температуру T . Найти среднее значение относительной намагниченности модельной системы спинов во внешнем поле H (как функцию $M(T)$)

$$\frac{M}{M_{\max}} = \frac{2m\mu}{N\mu} = \frac{2m}{N}$$

$$\langle \frac{M}{M_{\max}}(H, T) \rangle = ?$$

$$g(N, m) = g(N, 0) \times \exp\left\{-\frac{2m^2}{N}\right\}$$

$$S = \ln g(N, m) = \ln g(N, 0) + \left(-\frac{2m^2}{N}\right)$$

$$U = -2m\mu H \Rightarrow m = -\frac{U}{2\mu H} \Rightarrow m^2 = \frac{U^2}{4\mu^2 H^2}$$

$$S = S_0 - \frac{U^2}{2N\mu^2 H^2}$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_N = \frac{U}{N\mu^2 H^2}$$

$$U(T) = -\frac{N\mu^2 H^2}{T}$$

$$\langle U \rangle = -2\langle m \rangle \mu H = -N\mu^2 H^2 / T$$

$$2\langle m \rangle = \frac{N\mu H}{T} \Rightarrow \langle \frac{M}{M_{\max}} \rangle = \frac{\mu H}{T}$$

$$\langle M(H, T) \rangle = \frac{N\mu^2 H}{T}$$

Найти хим. потенциал μ системы, у
которой, степень вырождения $g = BV^N$,
где $B = \text{const}$, V - объем системы.

$$S = \ln g = \ln BV^N = \ln B + \ln V^N = \\ = \ln B + N \ln V$$

$$\frac{\partial S}{\partial N} = (\ln B + N \ln V)' = 0 + \frac{\partial N \ln V}{\partial N} = \ln V = \\ = -\frac{\mu}{T} \Rightarrow \boxed{\mu = -T \ln V}$$

Найти химический потенциал и энергию стиро в магнитном поле H (как функцию μ и T)

$$S = S_0 - \frac{\mu^2}{2\mu_0^2 N H^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\mu}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\partial S(N, 0)}{\partial N} + \frac{\mu^2}{2\mu_0^2 N^2 H^2} = -\frac{\mu(0)}{T} + \frac{\mu_0^2 H^2}{T^2}$$

$$\mu(T) = -\frac{\mu_0^2 H^2 N}{T}$$

$$\mu = \mu(0) - \frac{\mu_0^2 H^2}{2T^2}$$

Подсчитать число состояний в модели
спинового стекла и степень вырождения,
написать выражение гурсовского типа
для нее

$\oplus \mu$ - магн. момент
- величина магн. момента одного
магнита (стрелки)

состояние - набор стрелок

$$\uparrow\uparrow \Rightarrow (\uparrow+\downarrow)(\uparrow+\downarrow) = \uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow + \uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow \quad 3 = 2+1$$

$$(\uparrow\uparrow\uparrow) \Rightarrow (\uparrow+\downarrow)(\uparrow+\downarrow)(\uparrow+\downarrow) = \uparrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow + \\ + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow \quad 4 = 3+1$$

$$(\uparrow+\downarrow)^N$$

2^N - число состояний

$$M \in (-N\mu, +N\mu)$$

$$M = N\mu, (N-2)\mu, (N-4)\mu, \dots, -N\mu \quad | \quad N+1$$

$$2^N > N+1$$

для $N > 1$

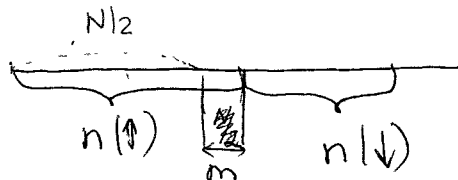
$$2^{10} = 1024 > 11$$

$$n(\uparrow) + n(\downarrow) = N$$

$$\underline{N \gg 1}$$

$$n(\uparrow) = \frac{N}{2} + m$$

$$n(\downarrow) = \frac{N}{2} - m$$



$$M = \mu n(\uparrow) - \mu n(\downarrow) = \mu \left[\frac{N}{2} + m \right] - \mu \left[\frac{N}{2} - m \right] = 2m\mu$$

$$n(\uparrow) - n(\downarrow) = 2m$$

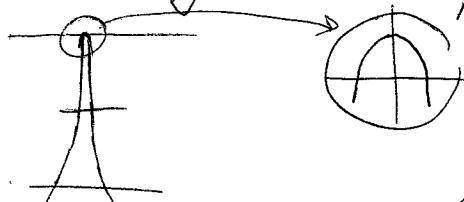
$$(\uparrow + \downarrow)^N = \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)! i!} \uparrow^{N-i} \downarrow^i = \sum_{m=-N/2}^{N/2} \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}-m\right)! \left(\frac{N}{2}+m\right)!} \cdot$$

$$\cdot \uparrow^{N/2+m} \downarrow^{N/2-m}$$

$$\sum_{m=-N/2}^{N/2} g(N, m) = 2^N$$

g - функция
вырождения

Фун g имеет острый макс при $m=0$.



Найдем гауссовское выражение для $g(N, m)$

$$\ln [g(N, m)] = \ln (N!) - \ln \left[\left(\frac{N}{2} + m \right)! \right] - \ln \left[\left(\frac{N}{2} - m \right)! \right]$$

$$1) \ln \left[\left(\frac{N}{2} + m \right)! \right] = \ln \left[\left(\frac{N}{2} \right)! \cdot \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{N}{2} + 2 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{N}{2} + m \right) \right] =$$

$$= \ln \left(\frac{N}{2} \right)! + \sum_{s=1}^m \ln \left(\frac{N}{2} + s \right)$$

$$2) \ln \left[\left(\frac{N}{2} - m \right)! \right] = \ln \left[\left(\frac{N}{2} \right)! \cdot \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{N}{2} - 2 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{N}{2} - m \right) \right] =$$

$$= \ln \left(\frac{N}{2} \right)! - \sum_{s=1}^m \ln \left(\frac{N}{2} - s \right)$$

$$\ominus 2 \ln \left[\left(\frac{N}{2} \right)! \right] + \sum_{s=1}^m \frac{(N/2 + s)}{(N/2 - s)} = \left\{ 1 \ll |m| \ll N \right\} \ominus$$

$$= 2 \ln \left[\left(\frac{N}{2} \right)! \right] + \sum_{s=1}^m \ln \frac{(1 + \frac{2s}{N})}{(1 - \frac{2s}{N})} = \left\{ \begin{array}{l} \ln(1+x) \sim x \\ \ln \frac{(1+x)}{(1-x)} = \ln(1+x) - \ln(1-x) \sim \\ \sim x - (-x) \sim 2x \end{array} \right\}$$

$$= 2 \ln \left[\left(\frac{N}{2} \right)! \right] + \sum_{s=1}^m 2 \cdot \frac{2s}{N} = \left\{ \sum_{s=1}^m s = \frac{m(m+1)}{2} \sim \frac{m^2}{2} \right\} =$$

$$= 2 \ln \left[\left(\frac{N}{2} \right)! \right] + \frac{2m^2}{N}$$

$$\ln \{ g(N, m) \} = \ln(N!) - 2 \ln \left[\left(\frac{N}{2} \right)! \right] - \frac{2m^2}{N}$$

$$g(N, m) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} \right)! \left(\frac{N}{2} \right)!} \exp \left\{ -\frac{2m^2}{N} \right\}$$

$$g(N, m) = g(N, 0) \exp \left\{ -\frac{2m^2}{N} \right\}$$

где $m = \sqrt{N/2}$, значение exp уменьш.

$$g(N, \sqrt{N/2}) = g(N, 0) / e$$

$\frac{\sqrt{N/2}}{N}$ - полуширина

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad \text{— формула Стирлинга}$$

$$g(N, 0) = \frac{\sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}}{2^N \frac{N!}{2} \left(\frac{N}{2}\right)^N e^{-N/2}} = 2^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}}$$

$$g(N, m) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} 2^N \exp\left[-\frac{2m^2}{N}\right]$$

распределение Гаусса

Найти температуру для модели
стигматов стрел в равновесии

$$S = k_B \ln g(N, m) = k_B \ln g(N, U)$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2}\right)_{N_2}$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_N$$

$$U_1, N_1 \quad U_2, N_2 \quad U_1 > U_2$$

$$U = U_1 + U_2 = \text{const}$$

$$dU_1 = dU_2$$

$$dS = d(S_1 + S_2) = \left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} dU_1 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2}\right)_{N_2} dU_2 =$$

$$= \left(-\left(-\frac{\partial S_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2}\right)_{N_2}\right) dU_2 > 0$$

$$\left(-\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) > 0 \quad T_1 > T_2 \quad dU_2 > 0$$

$$T = k_B \cdot T^\circ K$$

Аддитивность энтропии $S = \ln g$

$$\ln g_1(N_1, U_1) g_2(N_2, U_2) = \ln g_1 + \ln g_2$$

$$S = S_1 + S_2$$

Найти уравнение состояния, внутреннюю энергию и теплоемкость классического идеального одноатомного газа, рассматривая его стат. сумму в каноническом ансамбле

$$\text{Стат. сумма } Z_N = \underbrace{\frac{1}{\text{const}} e^{-H/T}}_{\Gamma\text{-образный объем}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3N} N! \int e^{-H/T} d\Gamma}_{\text{стат. сумма в канон. стат.}}$$

Найдем стат. сумму для идеального газа

$$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$$

$$(*) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{a}} dx = \sqrt{2\pi a}$$

$$Z_N = \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} \int \exp\left\{-\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m\theta}\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} V^N \left(\int_{(x)} \exp\left\{-\frac{p^2}{2m\theta}\right\} dp_x dp_y dp_z \right)^N \quad (*)$$

$$= \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} V^N \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2m\theta}} \right)^N = \frac{V^N}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} \cdot (2\pi m\theta)^{3N/2}$$

$$F = -k_B T \ln Z_N = -\theta \ln Z_N = -\theta \ln \left[\frac{V^N}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} (2\pi m\theta)^{3N/2} \right] =$$

$$= -\theta \left[\ln V^N - \ln N! - \ln (2\pi\hbar)^{3N} + \ln (2\pi m\theta)^{3N/2} \right] =$$

$$= \left\{ \ln N! \approx N \ln \frac{N}{e} \right\} = -\theta \left[N \ln V - \ln N! - 3N \ln (2\pi\hbar) + \frac{3}{2} N \ln (2\pi m\theta) \right] = -\theta N \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln T + \text{const} \right] = F$$

$$F = U - TS \quad U = F + TS$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad dF = -SdT - pdV$$

$$S = k_B N \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln T + C \right) + \frac{3}{2} N \ln \left(\frac{1}{T} \right)$$

$$U = \frac{\partial N \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln T + C \right)}{\partial T} - \frac{\partial N \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln T + C \right)}{\partial T} + N \frac{3}{2} = \frac{3}{2} N \frac{3}{2} = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} \frac{k_B N}{R} = \frac{3}{2} R$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial N}{\partial V} \left(\frac{1}{V} \right) = \frac{\partial N}{\partial V} = n k_B T$$

$$n = \frac{N}{V} \quad D = k_B T$$

Найти уравнение состояния, внутреннюю энергию и теплоемкость для ультрарелятивистского газа в законе энергии $\epsilon = cp$, где c - скорость света, рассчитывая стат. сумму в каноническом ансамбле

p - ? V - ? G - ?

для бозонов

$$\epsilon_i(p) = c|\vec{p}_i|$$

$$M = \sum_{i=1}^N \epsilon_i(p) \quad Z = Z_i^N / N!$$

$$\ln N! = N(\ln N - 1)$$

$$Z_i = \int_{(x)} e^{-\frac{H(x)}{\theta}} dx$$

$$Z_i = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left[-\frac{c|\vec{p}|}{\theta}\right] d\vec{p} d\vec{r} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left[-\frac{cp}{\theta}\right] \cdot$$

$$\cdot p^2 \sin\theta d\theta d\varphi dp = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int p^2 e^{-\frac{cp}{\theta}} dp =$$

$$= \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\theta}{c}\right)^3 \int_0^\infty dx x^2 e^{-x} = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\theta}{c}\right)^3$$

$$F = -\theta \ln \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\theta}{c}\right)^3 \right]^N = \theta \ln N! - \theta N.$$

$$\cdot \ln \left[\frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\theta}{c}\right)^3 \right] = \theta N [\ln N - 1 - \ln \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\theta}{c}\right)^3]$$

$$dF = -S dT - p dV \Rightarrow S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$S = -N \ln N + N \ln \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\theta}{c}\right)^3 + \theta N$$

$$S = -N \ln \frac{V}{N \pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\theta}{c}\right)^3 - \theta N$$

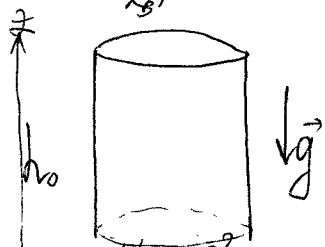
$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = 2N \frac{1}{V} = nD = \frac{N}{V} D \rightarrow D = \frac{PN}{V}$$

$$C_V = D \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \cancel{TN} 3 \frac{1}{\cancel{T}} = 3N$$

$$U = F - TS = 3DN = 6D$$

Найти внутреннюю энергию, свободную энергию и теплоемкость C_V при постоянном объеме стержня длиной h_0 и площадью поперечного сечения S , находящегося в однородном поле тяжести, напряженностью g . Определить C_V в предельных случаях

$$\frac{mgh_0}{k_B T} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{mgh_0}{k_B T} \gg 1$$



$$M = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N mgh_i$$

$$Z = \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} \int \exp \left\{ -\frac{H}{k_B T} \right\} dx = \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} \int_{(x)} dp \int_{(x)} dq \times \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N mgh_i}{k_B T} \right\} = \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}}$$

$$\cdot \int_{(s)} dx dy \int_0^{h_0} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^N mgh_i}{k_B T} \right\} dh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S^N}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} \left(\int_0^{h_0} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^N mgh_i}{k_B T} \right\} dh = \right. \\ \left. = \frac{S^N}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} \left(-\frac{1}{mg} \right) \left[\exp \left(-\frac{mgh_0}{k_B T} \right) - 1 \right] \right)^N = Z$$

$$P = -\Theta \ln Z = -\Theta \left[N \ln S - \ln N! + \frac{3N}{2} \ln T + N \ln T + N \ln \left(1 - \exp \left\{ -\frac{mgh_0}{\Theta} \right\} \right) + \underbrace{CN}_{const} \right] =$$

$$= -\Theta N \left[\ln N + \frac{3}{2} \ln T + \ln \left(1 - \exp \left\{ -\frac{mgh_0}{\Theta} \right\} \right) + C \right] \quad (1)$$

$$U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = -T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{F}{T} \right)_V = T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} k_B N [1] \right)_V =$$

$$= T^2 k_B N \left(\frac{5}{2T} - \frac{1}{1 - \exp \{ mgh_0 / \Theta \}} \left(\frac{k_B mgh_0}{\Theta^2} \right) \exp \left\{ -\frac{mgh_0}{\Theta} \right\} \right) =$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 2k_B N T [2] + k_B N T^2 \left\{ -\frac{5}{2T} + \frac{1}{(1 - \exp \{ -\frac{mgh_0}{k_B T} \})^2} \cdot \left(\frac{k_B mgh_0}{\Theta^2} \right)^2 + \frac{\exp \{ -\frac{mgh_0}{\Theta} \}}{1 - \exp \{ -\frac{mgh_0}{\Theta} \}} \left(-\frac{1 mgh_0}{k_B T^3} \right) \right\}$$

$$C_V = \frac{5}{2} N k_B - \frac{N (mgh_0 / T)^2 \exp \{ mgh_0 / k_B T \}}{[\exp \{ mgh_0 / k_B T \} - 1]^2 k_B}$$

Рассл. 2 предельных случая:

$C_V = ?$

1) $\frac{mgh_0}{k_B T} \gg 1 \Rightarrow C_V = \frac{5}{2} N k_B$ - обл. низких температур

2) $\frac{mgh_0}{k_B T} \ll 1 \Rightarrow C_V = \frac{5}{2} N k_B - \frac{N (mgh_0 / T)^2}{\left(\frac{mgh_0}{k_B T} \right)^2 k_B} =$

$= \frac{5}{2} N k_B - N k_B = \frac{3}{2} N k_B$ - область высоких температур

Вычислить электрический дипольный момент идеального газа, состоящего из молекул молекулы с дипольным моментом $\vec{d}$ при помещении его в однородное электр. поле, напряженность E

$\vec{P}$ - ? - намагничивание / диполь. мом. един. объема
 $dF = -SdT - pdV - \vec{P}d\vec{E}$

$$\vec{P} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{E}}\right) \quad \vec{Q} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$dU = TdS - \frac{1}{4\pi} \vec{E} d\vec{Q} - pdV$$

$$dU = TdS - \frac{1}{4\pi} \vec{E} d\vec{E} - \vec{E} d\vec{P} - pdV$$

$$d\left(U - \frac{E^2}{8\pi}\right) = TdS + \vec{E} d\vec{P} - pdV$$

термод. потенциал : $dU_2 = TdS - \vec{P}d\vec{E} - pdV$

$$\vec{P} = -\frac{\partial F}{\partial \vec{E}} \Big|_{V,T}$$

Смат сумма - ? вычитаемая - ?

$$U_i = \sum_m \frac{p_m^2}{2m} - \vec{E} \vec{D} + E_p(\vec{M})$$

$\frac{1}{\epsilon}$ $\leftarrow$ мал. вращений

$$Z_i = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int e^{-H/kT} d\vec{p} d\vec{r} = \left(\frac{V}{2\pi\hbar}\right)^3 \int \int \int e^{-\frac{p^2}{2m}} dp_x dp_y dp_z \cdot \int \exp\{E(\vec{M})/kT\} d\vec{M} \cdot \int \exp\{\vec{E} \vec{D} \cos\theta/kT\} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$Z_i = C_i \frac{kT}{\epsilon b} \int_0^1 \exp \left\{ \epsilon b \cos \theta / kT \right\} d \left\{ \epsilon b \cos \theta / kT \right\}$$

$$Z_i = a \int_0^\pi d\theta \sin \theta \exp \left\{ b \epsilon \cos \theta / T \right\}$$

$$Z = \frac{1}{N!} Z_i^N \Rightarrow F = -T \ln Z \Rightarrow p = - \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right)_T$$

$\vec{\epsilon}$ - внешний параметр
 p - сопр. сила

$$Z_i = a \int_0^\pi C \cos \theta \exp \left(\frac{b \epsilon}{T} \cos \theta \right) (-1) = a \frac{T}{\epsilon b} \cdot$$

$$\int_{-b \epsilon / T}^{b \epsilon / T} \exp(x) dx = a \frac{T}{b \epsilon} \exp(x) \Big|_{-b \epsilon / T}^{b \epsilon / T} = \frac{2 a T}{b \epsilon} \cdot \text{ch} \left(\frac{b \epsilon}{T} \right)$$

$$Z = \frac{1}{N!} Z_i^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{2 a T}{b \epsilon} \text{sh} \left(\frac{\epsilon b}{T} \right) \right)^N$$

$$F = -T \ln Z = -T \ln \left\{ \frac{1}{N!} \left(\frac{2 a T}{b} \right)^N \right\} + T N \ln \epsilon - T N \ln \left(\text{sh} \frac{b \epsilon}{T} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \Big|_T = \frac{T N}{\epsilon} - T N \frac{1}{\text{sh}(b \epsilon / T)} \text{ch} \frac{b \epsilon}{T} \cdot \frac{b}{T} =$$

$$= \frac{T N}{\epsilon} - \frac{N b}{\text{th}(b \epsilon / T)} = \frac{T N}{\epsilon} \left(1 - \frac{b}{T} \right) \text{cth} \left(\frac{b \epsilon}{T} \right)$$

$$p = - \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \Big|_T = \frac{T N}{\epsilon} \left(\frac{b}{T} \text{cth} \left(\frac{b \epsilon}{T} \right) - 1 \right) - \text{ф. н. в.}$$

$T \gg 1$

$$\text{cth} \left(\frac{b \epsilon}{T} \right) = \frac{e^{\frac{b \epsilon}{T}} + e^{-\frac{b \epsilon}{T}}}{e^{\frac{b \epsilon}{T}} - e^{-\frac{b \epsilon}{T}}} = \frac{1 + \frac{b \epsilon}{T} + 1 - \frac{b \epsilon}{T} + \dots}{1 + \frac{b \epsilon}{T} - 1 + \frac{b \epsilon}{T} + \dots} =$$

$$= \frac{2}{2 \frac{b\varepsilon}{T}} = \frac{T}{b\varepsilon}$$

$$P \approx \frac{TN}{\varepsilon} \left(\frac{b}{T} \frac{T}{b\varepsilon} - 1 \right) - \frac{TN}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)$$

расшириваем до 2-степеней

Доказать, что система не может обладать
моментами импульса (т.н. Бора-ван-Левен)

$$\vec{M} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}}{2m} \right) + \mathcal{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$$

↑
гамильтониан
сист. клас. частиц

N-класовая система

$$Z = \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} \int d\vec{q} e^{-\frac{\mathcal{U}}{\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p} \exp \left\{ -\frac{1}{2m} \int \left(\frac{\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}}{\hbar} \right)^2 \right\} =$$

$$= \int \left\{ \vec{p}'_i = \vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right\} = \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} \int d\vec{q} e^{-\frac{\mathcal{U}}{\hbar}}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p}' \exp \left\{ -\frac{1}{2m\hbar} \vec{p}'^2 \right\} \rightarrow \text{не зависит от } \vec{A}$$

Вычислить классическую стат. сумму системы из N -одномерных одномерных не-взаимодействующих осцилляторов с собственной частотой ω . Найти внутреннюю энергию и теплоемкость такой системы.

$$\mu = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

$$Z = \frac{1}{N!} (2\pi\hbar)^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{p^2}{2mKT}\right\} dp \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m\omega^2 q^2}{2KT}\right\} dq \right)^N =$$

$$\stackrel{1\#}{=} \frac{1}{N!} (2\pi\hbar)^N (2\pi mKT)^N \left(\sqrt{\frac{2\pi KT}{m\omega^2}} \right)^N =$$

$$F = -k_B T \ln Z = - \frac{k_B T N \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} - \ln e \right)}{N!}$$

$$U = -T^2 \frac{d}{dT} \frac{F}{T} = -T^2 \frac{d}{dT} \left(\frac{F}{T} - k_B N \ln \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right) =$$

$$= \frac{T^2 \frac{1}{\hbar\omega}}{KT} k_B N \frac{1}{\hbar\omega} = NKT$$

$$C_V = - \frac{\partial U}{\partial T} = NK$$

Вычислить квантовую стат. сумму системы из N -осцилляторов с собственными частотами ω . Найти внутреннюю энергию и теплоемкость такой системы

$$Z = \prod_n \exp \left\{ -\frac{E_n}{kT} \right\}$$

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \prod_n \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega n}{kT} - \frac{\hbar\omega/2}{kT} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega}{2kT} \right\} \prod_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega n}{kT} \right\} = \frac{\exp \left\{ -\frac{\hbar\omega}{2kT} \right\}}{1 - \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega}{kT} \right\}} = \\ &= \left\{ \frac{1}{1-q} \quad q = \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega}{kT} \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\exp \left\{ \frac{\hbar\omega}{2kT} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega}{2kT} \right\}} = \frac{1}{\operatorname{sh} \left\{ \frac{\hbar\omega}{2kT} \right\}}$$

$$F = -k_B T \ln Z_1 = k_B T N \ln \operatorname{sh} \left(\frac{\hbar\omega}{2kT} \right) + \ln 2$$

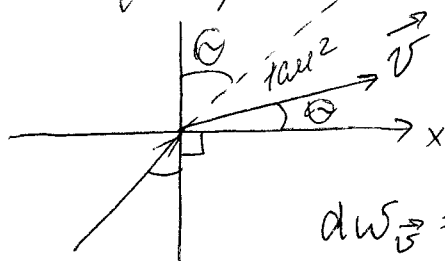
$$U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \frac{F}{T} = -T^2 \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\frac{\hbar\omega}{2kT} \right)} \operatorname{ch} \left(\frac{\hbar\omega}{2kT} \right) \cdot \left(-\frac{\hbar\omega}{2kT^2} \right) kN =$$

$$= N \frac{\hbar\omega}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar\omega}{2kT} \right)$$

$$C_V = -N \frac{\hbar\omega}{2} \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\hbar\omega/2kT \right)} \left(-\frac{\hbar\omega}{2kT} \right) = N k_B \left(\frac{\hbar\omega}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(\hbar\omega/2kT \right)} \quad 12$$

Определить среднее число столкновений
маленькой сферической частицы (максимально-
го) с единичной площадью поверхно-
сти сосуда, в котором он находится, в еди-
ницу времени.

if $\theta < \pi/2$, то частица
соударяется со
стенкой



$$d\omega_{\vec{v}} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m\vec{v}^2}{2T}\right\} v^2 d\vec{v} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dV = S_1 \cdot v_x \cdot t + d\omega_{\vec{v}} \cdot n \quad \text{---}$$

ка-бо частица в $V = S_1 v_x t$

$$\text{---} S_1 v \cos\theta \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T}\right\} v^2 d\vec{v} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$V = S_1 \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} 2\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}} \cos\theta \sin\theta dv =$$

$$= S_1 \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} 2\pi \left(\int_{\pi/2}^0 \cos\theta d\cos\theta\right) \int_0^{\infty} v^3 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T}\right\} dv =$$

$$= S_1 \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} (2\pi)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv \quad \text{---}$$

$$= \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^n dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\frac{n+1}{2}} \right\}$$

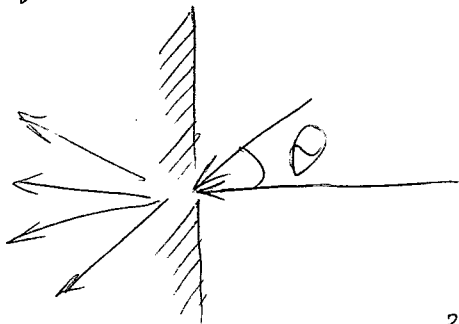
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{m}{2\pi}\right)^2} \Gamma(2) \frac{S_1}{2} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} (2\pi)^{-1/2} = 2^{-2} \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{m}{T}\right)^{-1/2}$$

$$\therefore S \cdot (2\pi)^{-1/2} = S_1 \sqrt{\frac{T}{2\pi m}} \quad n = \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8T}{\pi m}} =$$

$$= \frac{S_1}{\frac{1}{4}} \langle v \rangle$$

Определить среднюю энергию максвелловского газа в сферической пучке, который входит через небольшое отверстие в сосуд в вакуум, и среднее значение косинуса угла между направлением скорости молекул и нормалью к стенке сосуда

Рассчитают те частицы, которые сталкиваются со стенкой в ед. времени



$$dE = n v_x \frac{mv^2}{2} d\omega_{\vec{v}}$$

$$dV = n v_x d\omega_{\vec{v}}$$

$$E = \frac{\langle E \rangle}{V}$$

$$d\omega_{\vec{v}} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T}\right\} v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi$$

Для всего газа:

$$\langle E \rangle = n \iiint v \cos\theta \frac{mv^2}{2} \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T}\right\} \cdot$$

$$\cdot v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi n \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot$$

$$\cdot \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{\infty} v^5 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T}\right\} dv = 2\pi n \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m}{2T}\right)^3 \cdot 2 = \frac{\pi n m}{2} \frac{1}{T^{3/2}} \left(\frac{1}{2T}\right)^{3/2} = \frac{\pi n m}{2} \left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{f n m}{2} \left(\frac{2T}{f m} \right)^{3/2} \frac{1}{n \left(\frac{f}{2 f m} \right)^{1/3}} = \frac{f m}{2} \left(\frac{2T}{f m} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2 f m}{T} \right)^{1/2} = 2T$$

$$\mathcal{E} = 2T$$

$$\frac{d \cos \theta}{d} = \frac{\cos \theta d v}{d}$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{d} \int \cos \theta \cdot n v_x \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m v^2}{2T} \right) d^3 v$$

$$d^3 v = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int \cos \theta d v}{d}$$

Вычислим плотность состояний для
 неупругого одноатомного
 ферми-газа в кубическом объеме
 $\epsilon = p^2 / 2m$

$$g(\epsilon) = \sum_{p_x, p_y, p_z} \delta(\epsilon - \epsilon_p) = \sum_{p_x, p_y, p_z} \delta(\epsilon - \frac{p^2}{2m})$$

Здесь δ — сумма по п. состояниям в
 сумме в фазовом пространстве точек

$\sum$ может превратиться в $g = 2s + 1$

$\sum_{p_x, p_y, p_z}$ можно заменить интегралом $\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$

L_x — ширина куба по оси x

$$V = L_x L_y L_z$$

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi p V}{(2\pi\hbar)^3} \int dp p^2 \delta(\epsilon - \frac{p^2}{2m}) \stackrel{p^2}{=} \frac{p^2}{2m} = \epsilon$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{2m\epsilon} & dp &= \frac{1}{2} (2m\epsilon)^{-1/2} 2m d\epsilon = \\ &= \frac{\sqrt{m}}{(2\epsilon)^{1/2}} d\epsilon \end{aligned} \right\}$$

$$\stackrel{p^2}{=} \frac{4\pi g V}{(2\pi\hbar)^3} \int dp p^2 \delta(\epsilon - x) = \frac{4\pi g V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m^2 m^{1/2}}{\sqrt{2}}$$

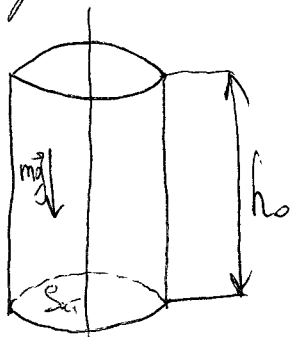
$$\cdot \int x^{-1/2} x d\epsilon \delta(\epsilon - x) = \frac{4\sqrt{2} \pi g V m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\int x^{1/2} dx \cdot \delta(\epsilon - x) = \int_{-\infty}^{\epsilon} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$

$$= \frac{4\sqrt{2} \sqrt{g V m^{3/2}}}{(2\pi\hbar)^3} \epsilon^{-1/2} \epsilon = \frac{4\sqrt{2} \sqrt{g V m^{3/2}}}{(2\pi\hbar)^3} \epsilon$$

$$= \frac{g V m^{3/2} \epsilon^{1/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3}$$

Определить среднее значение высоты молекул в столбе однородного идеального газа из N молекул в трубе высотой h_0 и площадью сечения S находящуюся в однородном поле тяжести



$$n = n_0 \exp \left\{ -\frac{mgz}{T} \right\}$$

$$\langle h \rangle = \frac{\langle z \cdot n \rangle}{\langle n \rangle}$$

$$\langle h \rangle = \frac{\int_0^{h_0} z \exp \left\{ -\frac{mgz}{T} \right\} dz}{\int_0^{h_0} \exp \left\{ -\frac{mgz}{T} \right\} dz} =$$

$$= \frac{-T/mg \int_0^{h_0} z d \left(\exp \left\{ -\frac{mgz}{T} \right\} \right)}{-T/mg \exp \left\{ -\frac{mgz}{T} \right\} \Big|_0^{h_0}} = \frac{z \exp \left\{ -\frac{mgz}{T} \right\} \Big|_0^{h_0}}{\left(\exp \left\{ -\frac{mgh_0}{T} \right\} - 1 \right)}$$

$$= \frac{\int_0^{h_0} \exp \left\{ -\frac{mgz}{T} \right\} dz}{\exp \left\{ -\frac{mgh_0}{T} \right\} - 1} = \frac{h_0 \cdot \exp \left\{ -\frac{mgh_0}{T} \right\} + \frac{T}{mg} \exp \left\{ -\frac{mgz}{T} \right\} \Big|_0^{h_0}}{\exp \left\{ -\frac{mgh_0}{T} \right\} - 1} =$$

$$= \frac{h_0 e^{-\frac{mgh_0}{T}} + \frac{T}{mg} \left(\exp \left\{ -\frac{mgh_0}{T} \right\} - 1 \right)}{\exp \left\{ -\frac{mgh_0}{T} \right\} - 1} = \frac{\left(h_0 + \frac{T}{mg} \right) e^{-\frac{mgh_0}{T}} - \frac{T}{mg}}{\exp \left\{ -\frac{mgh_0}{T} \right\} - 1}$$

$$= \frac{T/mg \left(\frac{mgh_0}{T} + 1 \right) e^{-\frac{mgh_0}{T}} - T/mg}{e^{\frac{mgh_0}{T}} - 1} = \left\{ \frac{mgh_0}{T} \ll 1 \right. \\ \left. e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} \right\} =$$

$$= \frac{T/mg \left(\frac{mgh_0}{T} + 1 \right) \left(1 - \frac{mgh_0}{T} + \frac{m^2 g^2 h_0^2}{2T^2} \right) - \frac{T}{mg}}{1 - \frac{mgh_0}{T} - 1} =$$

$$= \frac{1/mg \left(\frac{mgh_0}{T} + 1 \right) \left(1 - \frac{mgh_0}{T} + \frac{m^2 g^2 h_0^2}{2T^2} \right) - 1/mg}{1 - \frac{mgh}{T} - 1}$$

$$= \frac{T/mg \left(\frac{mgh_0}{T} - \frac{m^2 g^2 h_0^2}{2T^2} + O\left(\frac{m^2 g^2 h_0^2}{T^2}\right) + 1 + \frac{mgh_0}{T} + \right)}{1 - \frac{mgh}{T} - 1}$$

$$+ \frac{m^2 g^2 h_0^2}{2T^2} - 1 = \frac{T/mg \left(-\frac{m^2 g^2 h_0^2}{2T^2} \right)}{-\frac{mgh_0}{T}} =$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{mgh_0^2}{2T}}{\frac{mgh_0}{T}} = \frac{h_0}{2}$$

Найти объем шара и объем шарового слоя
в N -мерном евклидовом пространстве

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$V = C_n R^n$$

n -размерность
пр-ва

$$I = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -a(x_1^2 + \dots + x_n^2) \right\} \underbrace{dx_1 dx_2 \dots dx_n}_{dV_n} =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax_1^2} dx_1 \right)^n = J^{n/2}$$

$$I = \int \exp(-aR^2) dV_n = C_n \cdot n \int_0^{\infty} \exp(-aR^2) R^{n-1} dR =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} aR^2 = y \\ R = \sqrt{y/a} \end{array} \right\} dR = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \left\{ \right\} =$$

$$= n C_n \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = n C_n \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{n}{2}-1} dy \cdot \frac{1}{2a^{n/2}} =$$

$$= \frac{n C_n}{2a^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = J^{n/2}$$

$$C_n = 2J^{n/2} a^{n/2} \frac{1}{n \Gamma(n/2)}$$

$$a=1$$

$$C_n = 2J^{n/2} \frac{1}{n \Gamma(n/2)}$$

Найдем объем шарового слоя, заключенный

методы сферич. R и (R-ΔR)

$$\Delta V_n = V_n(R) - V_n(R - \Delta R)$$

$$\begin{aligned}\Delta V_n &\doteq C_n (R^n - (R - \Delta R)^n) = C_n R^n \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta R}{R} \right)^n \right) = \\ &= C_n R^n \left(1 - 1 + \frac{n \Delta R}{R} - \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 \frac{n(n-1)}{2} + \dots \right) = \\ &= C_n R^n \left(n \frac{\Delta R}{R} - \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 \frac{n(n-1)}{2} + \dots \right) \\ n &\sim 10^{20} \quad \frac{\Delta R}{R} \sim 10^{-3} \Rightarrow \text{пред факторами}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x} = e$$

$$C_n R^n \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta R}{R} \right)^n \right) = C_n R^n \left(1 - e^{-\frac{n \Delta R}{R}} \right)$$

$$\text{if } n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta V_n \Rightarrow V_n$$

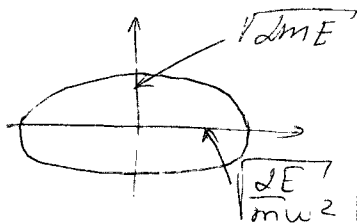
Вывести фазовый объем Γ из:

- а) гармонического осциллятора
 б) релятивистской частицы, движущейся в поле V и обладающей энергией E

а) $M = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$

$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$ — эллипс

$a = \sqrt{2mE}$ $b = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{\omega}$



$S = \oint a \cdot b = \oint \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{\omega} \Rightarrow \Gamma = \frac{2\pi E}{\omega}$

б) $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$

$E = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2} \rightarrow p^2 = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2}$ — ур-ие окружности

$p(E)$ — радиус сферы

$\Gamma(E) = V \frac{4}{3} \pi p^2(E)$

N -частичу идеальную газу зафиксирована
в объеме V и подчиняется микрока-
нонической распределению с энергией
 E состояний $\Omega(E)$ или фазовый объем $\Gamma(E)$,
энергией S и температурой T части
уравнение состояния газа

$3N$ (т.е. $3N$ степеней свободы)

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_{i=1}^N p_i^2 / 2m = E \quad \leftarrow N \text{ - мерный шип}$$

$$R^{N_{\text{мерн}}} = \sqrt{2mE}$$

$$\Gamma(E) = \int dp dq = V^N \int dp = V^N C_N R_N^3 = \left\{ C_{3N} = \frac{2\pi^{3N/2}}{3N \Gamma(3N/2)} \right\}$$

$$\Gamma(E) = V^N 2\pi^{3N/2} (2mE)^{3N/2} \frac{1}{3N \Gamma(3N/2)}$$

$$S = \frac{\ln(\Gamma(E))}{(2\pi\hbar)^{3N}}$$

$$S = \ln \left[\frac{V^N 2\pi^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^{3N} \cdot 3N \Gamma(3N/2)} (2mE)^{\frac{3N}{2}} \right] =$$

$$= \ln 2 + \ln (2mE)^{3N/2} = \ln 2 + \frac{3N}{2} \ln(2mE)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{3N}{2} \frac{1}{E} = \frac{1}{T} \quad kT = \frac{2E}{3N} \quad E = \frac{3}{2} kTN$$

$$\Omega = \frac{\partial \Gamma}{\partial E}$$

$$\bar{A} = p = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial V} = \frac{V^{-1} E^2}{3} = \frac{3}{2} \frac{kTN \cdot 2}{3V} = \frac{kTN}{V}$$

comp
cube

$$pV = kTN \quad - \text{уравнение состояния газа}$$

Определим число столкновений со стенкой
электронного газа при абсолютной
нуле температуры

$$dV = \frac{\pi \sin \theta d\theta p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 1 \text{ ат}^2 \text{ кв} \text{ см} \dots$$

$$V = \frac{4\pi C}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^k \sin \theta d\theta \int_0^{p_F} p^2 dp =$$

$$= \frac{4\pi C}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2} \frac{p_F^3}{3} = \frac{4\pi C}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_F^3}{6} = \frac{N}{V} = \frac{2CN}{8V} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{CN}{8}$$

Определить температурную зависимость теплопроводимости газа

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\epsilon) d\epsilon}{\exp\left(-\frac{\epsilon - \mu}{T}\right) + 1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon - \mu}{T} = z \\ \epsilon = Tz + \mu \\ d\epsilon = T dz \end{array} \right.$$

$$= \int_{-\mu/T}^{\infty} \frac{f(Tz + \mu)}{e^z + 1} T dz = T \int_{-\mu/T}^0 \dots + \int_0^{\infty} \dots =$$

$$= T \int_0^{\mu/T} \frac{f(\mu - Tz)}{e^{-z} + 1} dz + T \int_0^{\infty} \frac{f(Tz + \mu)}{e^z + 1} dz =$$

$$= \left\{ \frac{1}{e^{-z} + 1} = 1 - \frac{1}{e^{-z} + 1} \right\} = T \int_0^{\mu/T} \frac{f(\mu - Tz)}{e^{-z} + 1} dz +$$

$$+ T \int_0^{\infty} \frac{f(\mu + Tz)}{e^z + 1} dz = \left\{ \begin{array}{l} \mu/T \gg 1 \\ \mu - Tz = \epsilon \\ dz = -\frac{1}{T} d\epsilon \end{array} \right\} 2$$

$$= \int_0^{\mu} f(\epsilon) d\epsilon + \int_0^{\infty} \frac{f(\mu + Tz) - f(\mu - Tz)}{e^z + 1} dz \quad \text{①}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\mu} f(\epsilon) d\epsilon + \frac{T^2}{6} T^2 f'(\mu) + \frac{7T^4}{360} T^4 f'''(\mu) + \dots =$$

$$\{ f(\epsilon) \} = \epsilon^3$$

$$(\mu + Tz)^3 - (\mu - Tz)^3 = \mu^3 + 3\mu^2 Tz + 3\mu (Tz)^2 +$$

$$+ (Tz)^3 - (\mu^3 - 3\mu^2/Tz + 3\mu) Tz - (Tz)^3).$$

$$= 6\mu Tz + 2(Tz)^3$$

$$C = \frac{V}{-3\lambda^2 c^3 \hbar^3}$$

$$\Omega = c \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{\exp\left\{\frac{\epsilon - \mu}{T}\right\} + 1} = c \left(\int_0^\mu \epsilon^2 d\epsilon + \right.$$

$$\left. + T \left(6\mu^2 T \int_0^\infty \frac{z}{e^z + 1} dz + 2T^3 \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z + 1} dz \right) \right) =$$

$$= c \left(\frac{1}{4} \mu^4 + T(6\mu^2) T \frac{1}{2} T^2 \frac{1}{6} + 2T^3 \frac{2}{4} \frac{1}{30} \right)$$

$$= c \left(\frac{1}{4} \mu^2 + \frac{1}{2} \mu^2 T^2 T^2 \right)$$

$$S = - \frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{V \mu^2 T}{3(c\hbar)^3}$$

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v = \frac{V \mu^2 T}{3(c\hbar)^3}$$

Определим скачок правых частей $\left(\frac{dC}{dT}\right)_V$ в точке $T = T_0$

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\epsilon - \mu}{T}\right\} - 1} \quad \text{распределение Бозе}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)_V$$

$$T = T_0$$

$$N = \frac{g V m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp\left\{\frac{\epsilon - \mu}{T}\right\} - 1}$$

$$\Omega = -\frac{2}{3} \frac{g V m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{\exp\left\{\frac{\epsilon - \mu}{T}\right\} - 1}$$

$$\Omega = -\frac{2}{3} E$$

$$\frac{N}{V} \quad T_0$$

$$\mu \leq 0 \quad \mu = 0 \quad N_0 = \frac{g V m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp\left\{\frac{\epsilon}{T}\right\} - 1}$$

$$T_0 = \frac{3.31}{g^{2/3}} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$g = 2S + 1$$

$$\epsilon = 0 \quad T < T_0$$

$$N_{\epsilon=0} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \right]$$

$$E = 0.1289 \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} T_0^{3/2}$$

$$V = 0,77 N T \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right) = 2,8875 \frac{N}{T_0} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon - \mu}{T}\right) - 1} - \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1} \right] \sqrt{\epsilon} d\epsilon$$

$T \rightarrow T_0$ малым μ малым, тогда будем иметь
малым μ μ малым, $|\epsilon|$ и $|\mu| \ll 1$

$$\frac{1}{\frac{\epsilon - \mu}{T}} - \frac{1}{\frac{\epsilon}{T}} = T \frac{\mu}{\epsilon(\epsilon - \mu)}$$

$$T \mu \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon}(\epsilon + |\mu|)} = -\Omega T \sqrt{\mu}$$

$$\mu = \frac{2\pi^2 \hbar^5}{g^2 m^3} \left(\frac{N_0(T) - N}{TV} \right)^2$$

$$\frac{d\epsilon}{d\mu} = -\frac{3}{2} \frac{d\mu}{d\epsilon} = \frac{3}{2} N \approx \frac{3}{2} N_0$$

$$E = E_0 + \frac{3}{2} N_0 \mu = E_0 - \frac{3\pi^2 \hbar^6}{g^2 m^3} N_0 \left(\frac{N_0 - N}{TV} \right)^2$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_V = \frac{6\pi^2 \hbar^6}{g^2 m^3 V^2} \left[N_0 \left(\frac{1}{T} \frac{\partial N_0}{\partial T} \right)^2 \right]_{T=T_0} \quad \text{скажем что } \mu \text{ мало}$$

$$= -3,66 \frac{N}{T_0}$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_V = \left(T = T_0 + 0 \right) = -0,77 \frac{N}{T_0}$$

Рассчитать энергию Ферми для полностью вырожденного электронного газа

При $T \downarrow \Rightarrow$ наступает вырождение $\Rightarrow$ отменяется хаотичность $\Rightarrow$ статистика вырожденного перестает работать

$T=0$ — газ полностью вырожден

$$S = \frac{1}{2} \quad g = 2S + 1 = 2$$

Кол-во электр. в куб. интервале $(p, p + dp)$

$$dN = 2 \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\epsilon_k - \mu}{T}\right\} - 1}$$

для распределения Ферми-Дирака
(при $T=0$ имеет ступенчатый вид)

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

$$p \in [0, p_F]$$

При $T=0$ N -электронов в кубическом пространстве займут некоторые объемы $V = \frac{4}{3}\pi p_F^3$

Ур-ие поверхности для ферм $\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}$

$$N = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \frac{p_F^3}{3} \Rightarrow p_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} \cdot \hbar$$

$$p_F \propto \left(\frac{N_e}{V}\right)^{1/3} = (n_e)^{1/3}$$

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

Для ультрарелятивистского вырожденного
электронного газа кинетическая энергия Ферми

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$\mathcal{E} = pc$ - ультрарелятивистский эффект
линейный закон дисперсии

при $T \rightarrow \infty$ - вырожденный ультрарелятив.
электронный газ

p_F не применимо, т.к. он применяется
к классической частице, а применимо $\mathcal{E}_F$

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar / \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

$$\mathcal{E}_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar c / \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

Определить давление полностью вырожденной ультрарелятивистской газы

Энергия ультрарелятивистской газы:

$$\begin{aligned} E &= \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{\epsilon_F^4}{4} = \\ &= \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \cdot \frac{3\pi^2}{4} \hbar^4 c^4 \frac{N}{V} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{1/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} = \\ &= \frac{3}{4} (3\pi^2)^{1/3} \hbar c N \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

$$p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S$$

$$p = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \left(\frac{3\pi^2}{4} \right)^{1/3} \hbar c \left(\frac{N}{V} \right)^{4/3} \quad p \sim \left(\frac{N}{V} \right)^{4/3}$$

$pV = \frac{1}{3} E$ — аналогично для вырожденной газы свободных электронов.
Это следует с законом дисперсии

Определить давление падающей волны
 с помощью формулы Ферми-газа
 из электронов

Возьмем энергию электр. как $\frac{4}{3}\pi p_F^3$

$$E = \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} \underbrace{\frac{V}{4\pi^2 h^2}}_{\substack{\text{кол-во электронов} \\ \text{в объеме } [p, p+\Delta p]}} p^2 dp = \frac{V}{10\pi^2 h^2 m} p_F^5$$

$$E = \frac{V h^5}{10\pi^2 h^3 m} (3\pi^2)^{5/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} = \frac{3\pi^2 h^2 N}{10\pi^2 m} (3\pi^2 \frac{N}{V})^{2/3}$$

$$p = \frac{\partial E}{\partial V}$$

$$p = \frac{h^2 N}{5\pi^2 m V^{5/2}} (3\pi^2 N)^{2/3} = \frac{h^2}{m h^2} (3\pi^2 \frac{N}{V})^{2/3}$$

$$p = \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

Выводимое интегралов мена $\int_0^{\infty} \frac{z^{n-1} dz}{e^z + 1}$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{n-1}}{e^z + 1} dz = \int_0^{\infty} \frac{z^{n-1} e^{-z}}{1 + e^{-z}} dz = \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-z} dz$$

делая замену
переменной

$$\int_0^{\infty} (-1)^n dz = \int_0^{\infty} (-1)^n z^{n-1} e^{-(n+1)z} dz = \int_0^{\infty} \frac{z^{n-1}}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{n+1}$$

$$dz = \frac{dt}{n+1} \Rightarrow \int_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^n} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} \right)^n \Gamma(x) = \int_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} \Gamma(x) =$$

$$= \Gamma(x) \left[1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \dots - \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \dots \right) \right] =$$

$$= \Gamma(x) (1 - 2^{1-x}) \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots \right) =$$

$$= \Gamma(x) (1 - 2^{1-x}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x)$$

$\zeta(x)$ — дзета-функция Римана ($x > 0$)

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} dz = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x)$$

$$\left(\frac{1}{1 + e^{-z}} \right) - \frac{1}{1 - e^{-z}} = \frac{e^{-z}}{1 - e^{-2z}}$$

$$x=1 \quad \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^z + 1} = \ln 2$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{e^z + 1} dz = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \prod_{p|2n} \frac{1}{p} \quad \text{wobei } p \text{ Primzahl}$$