

Введение

Данные методические указания отражают многолетний опыт авторов по чтению лекций и ведению семинарских занятий по линейной алгебре на физико-техническом факультете Харьковского национального университета.

Трудно представить себе образование современного физика без знания и владения основными методами линейной алгебры. Линейной алгебре посвящена обширная литература, имеются прекрасно написанные учебники и задачки. Вместе с тем ощущается недостаток пособий, помогающих студентам выработать навыки решения задач по различным разделам линейной алгебры. Авторы данных указаний ставили перед собой цель в какой-то мере ликвидировать этот пробел.

Назначение указаний мы видим в том, чтобы активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса линейной алгебры, помочь активному и неформальному усвоению этого предмета.

Авторами задуман целый цикл методических указаний по различным разделам изучаемого курса «Высшая алгебра». Первой «ласточкой» в этом цикле, являются методические указания по первой части изучаемого курса «Линейные (векторные) пространства. Алгебра матриц».

Структура методических указаний подчинена решению, поставленных выше учебно-методических задач. Материал указаний разбит на четыре параграфа. В параграфе «Основные понятия и теоремы» приводятся без доказательства основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения задач. В параграфе «Контрольные вопросы и задания» содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение

параграфа – дать возможность студенту самому проконтролировать усвоение основных понятий. Предполагается, конечно, что основная работа над теоретическим материалом с проработкой доказательств теорем ведется по учебнику или конспекту лекций. В параграфе «Примеры решения задач» представлены решение типичных задач по изучаемой теме. Назначение параграфа «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» отражено в его названии. Из этого раздела подбираются задачи для решения на практических занятиях, для домашних заданий по заданному разделу.

ЧАСТЬ 1

§ 1. Основные понятия и теоремы

Def: Множество V называется линейным (векторным) пространством над числовым полем $\mathbf{K}$, если на множестве V корректно^{*)} заданы две операции: одна внутренняя, в дальнейшем именуемая сложением (обозначается $\oplus$ или $+$), другая – внешняя над полем $\mathbf{K}$, в дальнейшем именуемая умножением на скаляр (обозначается $\odot$ или $\cdot$), удовлетворяющие аксиомам:

$$A. \forall x, y \in V \quad \exists z \in V \mid z = x \oplus y$$

$$\begin{aligned} 1) \quad x \oplus y &= y \oplus x; & 2) \quad (x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z); \\ 3) \quad \exists \theta \in V \mid x \oplus \theta &= x; & 4) \quad \forall x \in V \quad \exists y \in V \mid x \oplus y &= \theta. \end{aligned}$$

$$B. \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbf{K} \quad \exists z \in V \mid z = \alpha \odot x$$

$$1) \quad 1 \in \mathbf{K}; \quad 1 \odot x = x \quad 2) \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K} \quad \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha\beta) \odot x.$$

^{*)} Операция называется корректной на множестве M , если результатом этой операции является элемент множества M .

С. Эти операции связаны соотношениями:

$$1) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K} \quad \forall x \in V \quad (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x;$$

$$2) \quad \forall \alpha \in \mathbf{K} \quad \forall x, y \in V \quad \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$$

Если поле $\mathbf{K}$ это $\mathbf{R}$ (поле вещественных чисел), то V называется вещественным линейным пространством. Если же поле $\mathbf{K}$ это $\mathbf{C}$ (поле комплексных чисел), то V называется комплексным линейным пространством.

Элементы линейного (векторного) пространства называются векторами.

Если множество $W \in V$ и 1) $\forall x, y \in W \Rightarrow x \oplus y \in W$, 2) $\forall x \in W \quad \forall \alpha \in \mathbf{K} \Rightarrow \alpha \odot x \in W$, то множество W называется подпространством линейного пространства V .

Вектор $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k$ ($\alpha_i \in \mathbf{K}$, $e_i \in V$, $i = 1, 2, \dots, k$) называется линейной комбинацией векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$.

Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ называется линейной оболочкой этих векторов и обозначается $\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Если $\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_k) = V$, то система векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ называется полной в пространстве V .

Система векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ называется линейно-независимой, если

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

В линейном пространстве V система векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$ называется базисом пространства V , если система является:

- а) минимальной полной в V или
- б) максимальной линейно-независимой в V или
- в) полной линейно-независимой в V .

Количество векторов в базисе называется размерностью пространства V и обозначается $\dim V$.

Если в пространстве V задан базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, то $\forall x \in V \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ такие, что $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. Такое представление называется разложением вектора x по базису $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – координатами вектора x в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Два линейных пространства V и V' называются изоморфными, если между их элементами установлено взаимно-однозначное соответствие $(x \leftrightarrow x')$, причем такое, что: если $x \leftrightarrow x'$ и $y \leftrightarrow y'$, то $x \oplus y \leftrightarrow x' \oplus y'$ и $\alpha \odot x \leftrightarrow \alpha \odot x'$.

Линейные пространства V и V' изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$.

Пусть L_1 и L_2 – подпространства V . Тогда суммой L и пересечением N этих подпространств называются:

- 1) $L = L_1 + L_2 \Leftrightarrow L \equiv \{x \mid x = x_1 \oplus x_2; x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$;
- 2) $N = L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow N \equiv \{x \mid x \in L_1, x \in L_2\}$

Сумма и пересечение подпространств есть подпространство.

Формула Грасмана: $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$.

Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств называется прямой суммой (и обозначается $L_1 \oplus L_2$), если представление $x = x_1 \oplus x_2$ ($x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$) единственно $\forall x \in L$.

Если L – подпространство V и $x_0 \in V$, то множество $M \equiv \{x \mid x = x_0 \oplus y, y \in L\}$ называется линейным многообразием в V . Базис и размерность подпространства L называются базисом и размерностью линейного многообразия M , а вектор $x_0 \in V$ называется вектором сдвига.

Если $x_0 \in L$ (и только в этом случае) M является подпространством пространства V и при этом $L \equiv M$.

Def: Линейное пространство V над числовым полем $\mathbf{K}$ называется алгеброй если на нем корректно введена еще одна операция ($\otimes$ или $\times$) такая, что:

$\forall x, y \in V \exists z \in V \mid z = x \otimes y$ со свойствами:

- 1) $\alpha \odot (x \otimes y) = (\alpha \odot x) \otimes y = x \otimes (\alpha \odot y)$;
- 2) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$;
- 3) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z$.

Матрицей порядка $n \times m$ называется прямоугольная таблица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_{ij} \in \mathbf{K}$ (числовое поле) и называются элементами матрицы A . Другое обозначение матричных элементов матрицы A : $(A)_{ij}$.

Def: Матрица A , для которой $a_{ij} = a_{ji}$ называется симметрической, а $a_{ij} = -a_{ji}$ называется кососимметрической (антисимметрической).

Любая квадратная матрица может быть однозначно разложена в сумму симметрической и кососимметрической матриц.

Операции над матрицами:

- 1) Умножение на скаляр из поля $\mathbf{K}$: $(\alpha A)_{ij} = \alpha (A_{ij})$;
- 2) Сложение матриц одного порядка: $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$;
- 3) Умножение матриц $A_{n \times m} \cdot B_{m \times k}$. (Вводится только для матриц у которых количество столбцов у 1^{ой} матрицы совпадает с количеством строк у 2^{ой} матрицы): $(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^m (A)_{ik} (B)_{kj}$. Это правило в обиходе называют: строка на столбец;
- 4) Транспонирование матрицы: $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$;
- 5) Операция комплексного сопряжения (для матриц с комплексными элементами): $(\overline{A})_{ij} = \overline{(A)_{ij}}$;
- 6) Операция эрмитового сопряжения (для матриц с комплексными элементами, обозначается $*$ или $+$): $(A^+)_{ij} = (A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$.

Нетрудно понять, что по операциям 1), 2) и 3) множество квадратных матриц (т.е. матриц порядка $n \times n$) для заданного n образуют алгебру.

§ 2. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение линейного пространства и приведите примеры линейных пространств.
2. Чем отличается вещественное линейное пространство от комплексного? Приведите примеры этих пространств.

3. Могут ли в линейном пространстве существовать а) два нулевых элемента; б) два элемента противоположных некоторому элементу x ? Ответ обоснуйте.
4. Дайте определение подпространства линейного пространства.
5. Является ли подпространством линейного пространства V само V ?
6. Докажите, что множество, содержащее только нулевой элемент θ , является подпространством, причем наименьшим среди подпространств линейного пространства V .
7. Дайте определение линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства.
8. Являются ли линейно зависимыми элементы линейного пространства V : а) x и $2x$; б) $x_1, x_2, \dots, x_n, \theta$? Ответ обоснуйте.
9. Дайте определение базиса линейного пространства.
10. Что такое координаты элемента линейного пространства в данном базисе?
11. Может ли базис содержать нулевой элемент? Ответ обоснуйте.
12. Дайте определение размерности линейного пространства.
13. Сколько базисов имеется в n -мерном линейном пространстве?
14. Что означают слова «между элементами двух множеств установлено взаимно однозначное соответствие»?
15. Какие линейные пространства называются изоморфными?
16. Могут ли линейное пространство и его подпространство, не совпадающее со всем пространством, быть изоморфными?
17. Приведите примеры трех линейных пространств, изоморфных линейному пространству векторов на плоскости.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Является ли линейным пространством множество $\mathbb{R}^+$ (вещественных положительных чисел), если операции на нем введены следующим образом: 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad x \oplus y \equiv x \cdot y$; 2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha \odot x \equiv x^\alpha$.

Здесь в правой части равенств стоят обычные операции умножения и возведения в степень вещественных чисел. Если является линейным пространством, то указать его базис и размерность.

Решение. Обе операции корректны в множестве положительных чисел, так как произведение вещественных положительных чисел и возведение положительного числа в любую вещественную степень дают положительное число. Проверим свойства этих операций:

A. 1) $x \oplus y \equiv x \cdot y = y \cdot x \equiv y \oplus x$.

2) $(x \oplus y \oplus z) \equiv (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \equiv x \oplus (y \oplus z)$.

3) $\exists \theta = 1 \quad x \oplus \theta \equiv x \cdot 1 = x$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \exists y \in \mathbb{R}^+ \quad y = 1/x \mid x \oplus y \equiv x \cdot 1/x \equiv 1 \equiv \theta$.

B. 1) $1 \in \mathbb{R} \quad 1 \odot x \equiv x^1 = x$.

2) $\alpha \odot (\beta \odot x) \equiv (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta} \equiv (\alpha \cdot \beta) \odot x$.

C. 1) $(\alpha + \beta) \odot x \equiv x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta \equiv \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$.

2) $\alpha \odot (x \oplus y) \equiv (x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha \equiv \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

В данных выкладках знаками $\cdot$ и $+$ обозначены операции в $\mathbb{R}$. Все свойства операций, необходимые для того, чтобы множество $\mathbb{R}^+$ было линейным пространством выполнены. Следовательно, $\mathbb{R}^+$ с так введенными операциями есть линейное пространство.

Возьмем x_0 – любое вещественное положительное число ($x_0 \neq 1$). Тогда $\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad y = x_0^{\log_{x_0} y} \equiv (\log_{x_0} y) \odot x_0$ т.е. y является линейной комбинацией x_0 . Таким образом, построенное линейное пространство имеет размерность 1 и базисом может служить любое положительное число $\neq 1$.

При этом $\log_{x_0} u$ является координатой вектора u в базисе $\{x_0\}$.

Задача 2. Дана однородная система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$

[illegible]

Доказать, что множество всех решений этой системы является подпространством линейного пространства V_n .

Решение. Решение системы будем записывать в виде $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Запишем исходную систему уравнений в виде: $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$

Пусть $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ и $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ – два решения исходной системы.

Рассмотрим вектор $x(x_1^1 + x_1^2, x_2^1 + x_2^2, \dots, x_n^1 + x_n^2)$ и подставим его в систему

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}(x_k^1 + x_k^2) = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^1 + \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^2 = 0. \text{ Тем самым доказано, что сумма}$$

решений однородной системы линейных уравнений является решением той же системы.

Пусть $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – решение системы. Рассмотрим вектор

$(\alpha x_1^0, \alpha x_2^0, \dots, \alpha x_n^0)$ и подставим в систему. Получим: $\sum_{k=1}^n a_{ik}(\alpha x_k^0) =$

$$= \alpha \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^0 = 0, \text{ т.е. любое решение системы, умноженное на скаляр, также}$$

есть решением той же системы. Следовательно множество решений исходной системы образует линейное подпространство в пространстве V_n векторов вида $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Задача 3. Найти базис и размерность пространства полиномов степени не выше четырех и удовлетворяющих условию: $P(3) = P(2) = 0$.

Решение.

Используя теорему Безу и тот факт, что $x = 3$ и $x = 2$ являются корнями многочлена, представим многочлен $P_4(x)$ в виде:

$$P_4(x) = (x-2)P_3(x) = (x-2)(x-3)P_2(x) = (x-2)(x-3)(a_0 + a_1x + a_2x^2) =$$
$$= a_0(x-2)(x-3) + a_1x(x-2)(x-3) + a_2x^2(x-2)(x-3).$$
 Из этой формулы следует, что любой полином из рассматриваемого множества является элементом линейной оболочки: $\mathcal{L}\{(x-2)(x-3), x(x-2)(x-3), x^2(x-2)(x-3)\}$. Следовательно, система $\{(x-2)(x-3), x(x-2)(x-3), x^2(x-2)(x-3)\}$ является полной в рассматриваемом множестве полиномов.

Проверим линейную независимость указанной системы:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)(x-2)(x-3) = 0 \quad \text{т.е.} \quad (x-2)(x-3)(a_0 + a_1x + a_2x^2) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что

$$\text{При } x = 0 \Rightarrow a_0 = 0;$$

$$\text{При } x = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0;$$

$$\text{При } x = -1 \Rightarrow -a_1 + a_2 = 0$$

Решением полученной системы уравнений является $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Таким образом, система функций $\{(x-2)(x-3), x(x-2)(x-3), x^2(x-2)(x-3)\}$ – линейно независима.

Итак, множество полиномов степени не выше 4 и удовлетворяющих условиям задачи, образует линейное пространство размерности 3 и с базисом $\{(x-2)(x-3), x(x-2)(x-3), x^2(x-2)(x-3)\}$.

Задача 4. Линейно независима ли система векторов: $a_1(1, 2, 3, 4),$

$a_2(0, 1, 0, 1), a_3(1, -1, 1, -1), a_4(4, 1, 6, 3)$? Найти эту зависимость.

Решение. Рассмотрим равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = \theta$.
Перейдем в этом равенстве к покомпонентной записи. Имеем систему

линейных уравнений:
$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_3 + 6\alpha_4 = 0 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \end{cases}.$$

Проверим, имеет ли эта система ненулевое решение. Решая данную систему, имеем:

$$3\alpha_1 + \alpha_3 + 6\alpha_4 = 2\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_3 + 4\alpha_4) + 2\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_4 \Rightarrow -\alpha_4 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -3\alpha_4; -4\alpha_4 + \alpha_2 + 3\alpha_4 + 3\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -2\alpha_4.$$

Следовательно: $-\alpha_4 a_1 - 2\alpha_4 a_2 - 3\alpha_4 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$ и система имеет ненулевое решение. Если $\alpha_4 = 1$, то $a_4 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$.

Исходная система векторов линейно зависима.

Задача 5. Доказать, что функции $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$ ($x \in [0, 2\pi]$) линейно независимы в пространстве функций непрерывных на $[0, 2\pi]$.

Решение. Допустим, что данные функции линейно зависимы. Тогда существует их линейная комбинация, равная нулевому элементу, т.е. тождественно равная нулю: $\alpha \cos x + \beta \cos 2x + \gamma \cos 3x \equiv 0$, причем хотя бы один из коэффициентов α, β и γ не равен нулю. Продифференцировав это тождество два раза, а затем четыре раза, приходим к тождествам: $\alpha \cos x + 4\beta \cos 2x + 9\gamma \cos 3x \equiv 0$, $\alpha \cos x + 16\beta \cos 2x + 81\gamma \cos 3x \equiv 0$. Положив во всех трех тождествах $x = 0$, получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов α, β и γ

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 0 \\ \alpha + 16\beta + 81\gamma = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет только нулевое решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Получили противоречие с тем, что хотя бы один из коэффициентов α , β и γ отличен от нуля. Следовательно, данные функции линейно независимы.

Задача 6. Найти базис и размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$, где $a_1(1, 2, 3)$, $a_2(3, 0, -1)$, $a_3(-1, 10, 17)$.

Решение. 1) Рассмотрим линейную комбинацию a_1, a_2, a_3 и приравняем ее к θ : $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = \theta$; $\alpha(1, 2, 3) + \beta(3, 0, -1) + \gamma(-1, 10, 17) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + 10\gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 17\gamma = 0 \end{cases}.$$

Из 2-ого уравнения системы получим, что $\alpha = -5\gamma$; подставляя значение α в 1-ое уравнение системы, имеем: $-5\gamma + 3\beta - \gamma = 0$ т.е. $\beta = 2\gamma$; тогда:

$-5\gamma a_1 + 3\beta a_2 - \gamma a_3 = 0$ т.е. $a_3 = 5a_1 - 2a_2$. Так как a_3 является линейной комбинацией a_1 и a_2 , то система $\{a_1, a_2, a_3\}$ и система $\{a_1, a_2\}$ будут одновременно линейно зависимы или линейно независимы.

2) Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha a_1 + \beta a_2 = \theta \Rightarrow \alpha(1, 2, 3) + \beta(3, 0, -1) = \theta, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

В силу того, что система уравнений и имеет только нулевые решения, заключаем, что векторы a_1 и a_2 линейно независимы. Следовательно $\dim \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3) = 2$, а ее базисом может служить, например, система $\{a_1, a_2\}$.

Задача 7. Найти все матрицы перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицу перестановочную с A будем искать из равенства:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в правой и левой частях равенства, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{array}{l|l|l} d+g=0 & g=0 & 0=0 \\ e+h=a & h=d & 0=g \\ f+k=a+b & k=d+e & 0=g+h \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g=0; h=0; h=0 \Rightarrow k=e=a; f=b.$$

Учитывая это, заключаем, что искомая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где α, β, γ произвольные вещественные числа. Из этой записи видно, что множество всех матриц перестановочных с исходной образуют линейное пространство размерности 3 и с базисом:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 8. Найти координаты вектора $x(4, 7, 4)$ в базисе $\{a_1, a_2, a_3\}$, где $a_1(2, 3, 1), a_2(1, -1, 0), a_3(0, 2, 1)$.

Решение. Пусть $x = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$. Тогда, переходя к координатной записи, получим:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 7 \\ \alpha + \gamma = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 4 - 2\alpha; \gamma = 4 - \alpha \Rightarrow 3\alpha - 4 + 2\alpha + 8 - 2\alpha = 7 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3.$$

Таким образом $x = a_1 + 2a_2 + 3a_3$. Это значит, что вектор x в базисе $\{a_1, a_2, a_3\}$ имеет координаты $x(1, 2, 3)$.

Задача 9. Найти базис и размерность $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$, где $L_1 = \mathcal{L}\{a_1(2, 1, -1), a_2(3, 5, 4), a_3(1, -3, -6)\}$, а $L_2 = \mathcal{L}\{b_1(-1, 1, 2), b_2(6, 5, 1), b_3(7, 4, -1)\}$.

Решение. 1) Выясним, является ли система $\{a_1, a_2, a_3\}$ линейно независимой. Из равенства $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = \theta$ следует, что

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta - 3\gamma = 0 \\ -\alpha + 4\beta - 6\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma; \alpha = -2\beta.$$

Тогда $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 1$. Следовательно, $-2a_1 + a_2 + a_3 = \theta \Rightarrow a_3 = 2a_1 - a_2$.

Из этого вытекает, что $\mathcal{L}\{a_1, a_2, a_3\} = \mathcal{L}\{a_1, a_2\} \Rightarrow \dim \mathcal{L}\{a_1, a_2\} = 2$.

2) Выясним, является ли система $\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно независимой. Из равенства $\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = \theta$ следует, что

$$\begin{cases} -\alpha + 6\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 3\gamma; \alpha = -\gamma.$$

Тогда $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = 1$. Следовательно, $-b_1 + 3b_2 + b_3 = \theta \Rightarrow b_3 = b_1 - 3b_2$.

Из этого вытекает, что $\mathcal{L}\{b_1, b_2, b_3\} = \mathcal{L}\{b_1, b_2\} \Rightarrow \dim \mathcal{L}\{b_1, b_2\} = 2$.

3) Найдем векторы принадлежащие $L_1 \cap L_2$. Если $x \in L_1 \cap L_2$ то $x = \alpha a_1 + \beta a_2 = \gamma b_1 + \delta b_2$. Последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\gamma + \delta \\ 2\alpha + \beta = 3\gamma + 2\delta \\ \alpha - \beta = -\gamma + 2\delta \end{cases}$$

Из решения системы следует, что $\delta = \gamma$, $\alpha = 2\gamma$, $\beta = \gamma$. То есть $2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = \gamma \cdot (3, 5, 1)$. Следовательно, $L_1 \cap L_2 = \mathcal{L}\{3, 5, 1\}$.

Тогда $\dim L_1 \cap L_2 = 1$; $\dim (L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2 = 3$.

Базисом $L_1 + L_2$ может служить, например, система векторов $\{a_1, a_2, b_1\}$.

§ 4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Показать, что множество всех полиномов от x степени не выше n с числовыми коэффициентами является линейным пространством относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.

2. Будет ли линейным пространством с обычными операциями множество многочленов от x степени равной n ?

Δ Нет. Например, для многочленов 3^{ей} степени $(2x^3 + 5x^2 + 3x - 5)$
и $(-2x^3 + 5x^2 - 7x + 12)$ сумма будет многочленом 2^{ой} степени ∇

3. Образует ли множество радиус-векторов на плоскости, концы которых находятся в первой четверти, линейное пространство (с обычными операциями)?

Δ Нет. Например, умножение элемента данного множества на $\alpha < 0$ выводит за пределы этого множества ∇

4. Образуют ли линейное пространство все полиномы от x степени не выше 5, у которых коэффициент при x^3 равен 0? Δ Да. ∇

5. Образуют ли линейное пространство все полиномы от x степени не выше 5, у которых коэффициент при x^3 равен 1? Δ Нет. ∇

6. Образуют ли линейное пространство функции $f(x)$, которые на $[a, b]$ удовлетворяют условию: $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Δ Да. ~~Δ~~
7. Образуют ли линейное пространство все непрерывные функции такие, что: а) $f(1) = 0$; б) $f(1) = 1$? Δ а) да; б) нет. ~~Δ~~
8. Образуют ли линейное пространство все дифференцируемые функции $y(x)$, для которых $y(0) = y'(0)$? Δ Да. ~~Δ~~
9. Образуют ли линейное пространство все векторы A_n ($x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$) у которых: а) $\xi_1 = 2\xi_2$; б) $\xi_1 = 2\xi_2 + 1$? Δ а) да; б) нет. ~~Δ~~
10. Образуют ли линейное пространство все решения уравнения: а) $y'' - 2y = 0$; б) $y'' + y = x$? Δ а) да; б) нет. ~~Δ~~
11. Образует ли вещественное линейное пространство множество R^+ , если $x \oplus y \equiv \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)$ и $\alpha \odot x \equiv \operatorname{tg}(\alpha \operatorname{arctg} x)$. Δ нет. ~~Δ~~
12. Доказать, что в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций, функции $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_k}$ линейно независимы, если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ различные вещественные числа.
13. Доказать, что если система $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.
14. Пусть векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы. Доказать, что векторы $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + \alpha x_1$ также линейно независимы.
15. Доказать, что если векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы, а векторы $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ линейно зависимы, то вектор y есть линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$.
16. Доказать, что если $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы и вектор y не может быть представлен как линейная комбинация $x_1, x_2, \dots, x_n$, то система $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ линейно независима.

17. Выполнить действия над матрицами:

$$\text{а) } 5 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \text{ а) } \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ -35 & -5 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \text{ д) } \begin{pmatrix} 6 & -31 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

~~▲~~

18. Разложить матрицы в сумму симметрической S и кососимметрической A :

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \text{ а) } S = \begin{pmatrix} 2 & 7/2 & -1/2 \\ 7/2 & 5 & 4 \\ -1/2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ -3/2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \text{ в) } S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

19. Найти:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot 3 - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^T; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \text{ а) } \begin{pmatrix} -4 & 1 & 9 \\ 16 & 12 & 5 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -9 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

20. Найти произведение матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

21. Найти произведение матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} (1 \ 5 \ 4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} 4; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & -5 & -4 \\ 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 75 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 132 \\ -34 \\ -68 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

22. Вычислить произведение матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

23. Вычислить произведения матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

24. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Проверить, что

$$(AB)C = A(BC). \quad \Delta \quad \begin{pmatrix} 22 & 67 \\ -8 & -23 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

$$25. \text{ Даны матрицы: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 & -8 \\ 4 & -3 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти } AC, AB, BC, A(BC), (AB)C.$$

$$\Delta \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

26. Для заданных пар матриц проверить выполняется ли равенство:

$AB = BA$:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}; \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad \Delta \quad \text{а) да; б) нет; в) нет.} \quad \blacktriangle$$

27. Показать, что для матрицы A : $A = A^2$:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ -30 & -24 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

28. Если $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, то $\varphi(A) = aA^2 + bA + cE$. Вычислить $\varphi(A)$

, если:

$$\text{а) } \varphi(x) = 3x^2 - 2x - 2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \varphi(x) = 3x^2 - 9x + 6; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \varphi(x) = 2x^2 + 4x - 3; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \varphi(x) = 3x^2 - 2x + 5; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \text{ а) } \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -12 & 24 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 60 & -108 \\ 27 & -48 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 31 & 32 & 24 \\ 40 & 43 & 32 \\ 56 & 60 & 47 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

29. Проверить, что для матриц Паули: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Справедливы следующие соотношения:

$$\text{а) } \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3; \quad \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1; \quad \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2;$$

$$\text{б) } \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i \sigma_3; \quad \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2 = 2i \sigma_1; \quad \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_3 = 2i \sigma_2;$$

$$\text{в) } \sigma_l \sigma_k + \sigma_k \sigma_l = 2E \delta_{lk}, \quad (l, k = 1, 2, 3); \quad \text{г) } \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 3E.$$

30. Показать, что все матрицы перестановочные с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ имеют вид: } B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha, \beta, \gamma, \delta -$$

произвольные числа.

31. Найти все матрицы перестановочные с матрицей:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a) } \begin{pmatrix} c_1 & 2c_2 \\ 3c_2 & c_1 + 3c_2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} c_1 & 3c_2 \\ -5c_2 & c_1 + 9c_2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

$$32. \text{ Для матриц } A = \begin{pmatrix} 3 & 2+i & -3 \\ 0 & 1 & 4-i \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 3 & 2 & i \end{pmatrix}$$

найти: а) $(A+B)^+ \cdot B$; б) $(3A-B)^+ \cdot (2A-B)$.

$$\Delta \quad \text{a) } \begin{pmatrix} 13 & 14-4i & 3i \\ 13 & 14-4i & 3i \\ 9 & 2+3i & 4i \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 49 & 16+24i & -72+9i \\ 17-20i & 20+4i & -16+21i \\ -81-12i & -18-27i & 162-4i \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

33. Выяснить, образует ли данное линейное множество функций на произвольном отрезке $[a, b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

- а) множество $C_{[a, b]}$ функций непрерывных на $[a, b]$;
- б) множество $C^1_{[a, b]}$ функций непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$;
- в) множество $R_{[a, b]}$ функций интегрируемых по Риману на $[a, b]$;
- г) множество функций, ограниченных на $[a, b]$;
- д) множество функций таких, что $\sup_{[a, b]} |f(x)| \leq 1$;
- е) множество функций неотрицательных на $[a, b]$;
- ж) множество функций таких, что $f(a) = 0$;
- з) множество функций таких, что $f(a) = 1$;
- и) множество функций таких, что $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$;
- к) множество функций, монотонно возрастающих на $[a, b]$;
- л) множество функций, монотонных на $[a, b]$.

Δ а) да; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) да; з) нет; и) нет; к) нет; л) нет. Δ

34. Выяснить, является ли подпространством данное множество векторов в n -мерном арифметическом пространстве $(X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$ и если является, то найти его размерность:

- а) множество векторов, у которых первая координата равна 0;
- б) множество векторов, у которых все координаты равны между собой;
- в) множество векторов сумма координат которых равна 0;
- г) множество векторов сумма координат которых равна 1;
- д) множество векторов плоскости параллельных данной прямой;
- е) множество векторов трехмерного пространства, перпендикулярных данной прямой;
- ж) множество векторов плоскости с модулем, не превышающем единицу;
- з) множество векторов плоскости, образующих угол α с данной прямой.

Δ а) да, $n-1$; б) да, 1; в) да, $n-1$; г) нет; д) да, 1; е) да, 2; ж) нет; з) при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ – да, 1; при $\alpha \in (0, \pi/2)$ – нет. ~~А~~

35. Является ли линейным подпространством соответствующего линейного пространства каждая из соответствующих совокупностей векторов:

- а) все векторы n -мерного пространства с целыми координатами;
- б) все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox или Oy ;
- в) все векторы начала и концы которых лежат на данной прямой;
- г) все векторы трехмерного пространства, концы которых не лежат на данной прямой.

Δ а) нет; б) нет; в) да; г) нет. ~~А~~

36. Доказать, что следующие системы векторов образуют линейные подпространства, и найти их базис и размерность:

- а) все n -мерные векторы, у которых первая и последняя координаты равны между собой;
- б) все n -мерные векторы у которых координаты с четными номерами равны нулю;
- в) все n -мерные векторы, у которых координаты с четными номерами равны между собой;
- г) все n -мерные векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, 0, \dots)$, где α и β – любые числа.

Δ а) $n-1$; $(1, 0, \dots, 0, 1)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$; б) $[(n+1)/2]$; $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$...; в) $[(n+1)/2]+1$; $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$...; г) 2; $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$. $\triangleleft$

37. Выяснить, является ли данное множество квадратных матриц порядка n линейным подпространством в пространстве всех квадратных матриц порядка n и, если является, то найти его размерность:

- а) множество матриц с нулевой первой строкой;
- б) множество диагональных матриц;
- в) множество верхних треугольных матриц;
- г) множество симметрических матриц;
- д) множество кососимметрических матриц.

Δ а) да, $n(n-1)$; б) да, n ; в) да, $n(n+1)/2$; г) да, $n(n+1)/2$; д) да, $n(n-1)/2$ $\triangleleft$

38. Установить, являются ли следующие совокупности векторов подпространствами:

- а) совокупность всех векторов n -мерного пространства ($n \geq 2$), у которых, по крайней мере, одна из первых двух координат равна нулю;
- б) совокупность всех векторов n -мерного пространства, у которых

первые две координаты ξ_1 и ξ_2 удовлетворяют уравнению:

$$3\xi_1 + 4\xi_2 = 0;$$

в) совокупность всех векторов n -мерного пространства, у которых

первые две координаты удовлетворяют уравнению: $7\xi_1 - \xi_2 = 1$;

г) все векторы плоскости, концы которых лежат на одной прямой, а

начало совпадает с началом координат;

д) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных век-

торов $x_1, x_2, \dots, x_k$ из R_n .

Δ а) нет; б) да; в) нет; г) да, если прямая проходит через начало координат; нет, если прямая не проходит через начало координат; д) да. $\triangleleft$

39. В пространстве полиномов степени не выше 3 является ли подпространством совокупность полиномов, удовлетворяющих условию:

$$\text{а) } P(1) = P(-1); \quad \text{б) } P'(1) = P(1).$$

Если да, то какова его размерность и базис?

Δ а) да; 3; Базис: $1, (x^2-1), (x^2-1)x$; б) да; 3; Базис: x, x^2+1, x^3+2 $\triangleleft$

40. В пространстве полиномов степени не выше 3, найти базис и размерность подпространства L полиномов, удовлетворяющих условиям:

$$\text{а) } P(1) = 0; P'(2) = 0; \quad \text{б) } P'(0) = 0; P''(1) = 0;$$

$$\text{в) } P(2) = 0; P'(1) + P''(0) = 0; \quad \text{г) } P(0) = P''(1); \quad \text{д) } P(1) + P'(0) = 0.$$

$$\Delta \text{ а) } \dim L = 2; \{x^2 - 4x + 3, x^3 - 12x + 1\}; \quad \text{б) } \dim L = 2; \{1, x^3 - 3x^2\};$$

$$\text{в) } \dim L = 2; \{x^2 - x - 2, x^3 - 6x + 4\}; \quad \text{г) } \dim L = 3; \{x, x^2 + 2, x^3 + 6\};$$

$$\text{д) } \dim L = 3; \{x - 2, x^2 - 1, x^3 - 1\}. \quad \triangleleft$$

41. В пространстве полиномов степени не выше трех является ли подпространством совокупность полиномов, таких, что $P(1) = P(-1) = 0$. Найти базис и размерность этого пространства.

Δ а) да; 2; Базис: $(x^2-1), (x^2-1)x$. $\triangleleft$

42. Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ данное множество функций образует конечномерное линейное пространство, найти размерность и указать базис этого пространства:

- а) множество четных полиномов, степени не выше n ;
- б) множество нечетных полиномов, степени не выше n ;
- в) множество тригонометрических полиномов порядка не выше n , т.е. множество функций вида:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx;$$

- г) множество четных тригонометрических полиномов порядка не выше n ;
- д) множество нечетных тригонометрических полиномов порядка не выше n ;
- е) множество функций вида:

$$f(x) = e^{\alpha x} (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где α – фиксированное вещественное число.

- Δ а) $[n/2]+1$; базис: $1, x^2, x^4, \dots, x^{2[n/2]}$; б) $[(n+1)/2]$; базис: $x, x^3, \dots, x^{2[(n+1)/2]-1}$; в) $2n+1$; базис: $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$; г) $n+1$; базис: $1, \cos x, \dots, \cos nx$; д) n ; базис: $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$; е) $2n+1$; базис: $e^{\alpha x}, e^{\alpha x} \cos x, e^{\alpha x} \sin x, \dots, e^{\alpha x} \cos nx, e^{\alpha x} \sin nx$. $\triangleleft$

43. Доказать, что данное множество функций образует бесконечномерное линейное пространство:

- а) множество всех полиномов;
- б) множество всех тригонометрических полиномов;
- в) множество функций непрерывных на некотором отрезке.

44. Выяснить, будут ли данные векторы линейно зависимы или нет:

- а) $a(1, 3, 1), b(-1, 1, 3), c(-5, -7, 3)$;
- б) $a(2, -1, -2), b(6, -3, 1)$;
- в) $a(2, -1, 7, 3), b(1, 4, 11, -2), c(3, -6, 3, 8)$.

- Δ а) да; $3a - 2b + c = 0$; б) нет; в) да; $2a - b - c = 0$. $\triangleleft$

45. Какие из следующих систем векторов линейно независимы, и найти эту зависимость:

- а) $a(1, 3), b(2, 6)$; б) $a(1, 3), b(2, 5)$;
 в) $a(2, -1, -2), b(6, -3, -6)$; г) $a(2, 5), b(4, 0)$;
 д) $a(2, 5), b(4, 10), c(-6, -15)$;
 е) $a(1, 2, 3, 4), b(1, 0, 1, 2), c(3, -1, -1, 0), d(1, 2, 0, -5)$.

Δ а) да; $2a - b = 0$; б) нет; в) да; $3a - b = 0$; г) нет; д) да; $a + b + c = 0$; е) нет. ~~⚠~~

46. Найти линейные зависимости между векторами:

- а) $(-1, 2i), (3, 2), (1 - i, -2 - 2i)$; б) $(-1, 2i), (-1, 1), (1 + i, 3)$;
 в) $(1, -i, 1 + i), (1, 0, 3i), (-1, 2i, -2 + i)$.

Δ а) $a_3 = (-1 + i)a_1$; б) $a_3 = -\frac{2 + 9i}{5}a_1 + \frac{-3 + 4i}{5}a_2$; в) $a_3 = -2a_1 + a_2$. ~~⚠~~

47. Найти размерность и базис линейных подпространств натянутых на системы векторов:

- а) $a_1(1, 0, 0, -1), a_2(2, 1, 1, 0), a_3(1, 1, 1, 1), a_4(1, 2, 3, 4), a_5(0, 1, 2, 3)$;
 б) $a_1(1, 1, 1, 1, 0), a_2(1, -1, -1, -1, -1), a_3(2, 2, 0, 0, -1), a_4(1, 1, 5, 5, 2),$
 $a_5(1, -1, -1, 0, 0)$.

Δ а) 3; базис: a_1, a_2, a_4 ; б) 3; базис: a_1, a_2, a_5 . ~~⚠~~

48. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно независимыми или нет:

- а) $a_1(1, 2, 3), a_2(3, 6, 7)$; б) $a_1(4, -2, 6), a_2(6, -3, 9)$;
 в) $a_1(2, -3, 1), a_2(3, -1, 5), a_3(1, -4, 3)$; г) $a_1(5, 4, 3), a_2(3, 3, 2), a_3(8, 1, 3)$;
 д) $a_1(4, -5, 2, 6), a_2(2, -2, 1, 3), a_3(6, -3, 3, 9), a_4(4, -1, 5, 6)$;
 е) $a_1(1, 0, 0, 2, 5), a_2(0, 1, 0, 3, 4), a_3(0, 0, 1, 4, 7), a_4(2, -3, 4, 11, 12)$.

Δ а) нет; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) нет. ~~⚠~~

49. Какова размерность пространства решений уравнения:

а) $y' + ay = 0$; б) $y'' + \frac{x^3}{x^3 + 1}y = 0$

Δ а) 1; б) 2. $\triangleleft$

50. Докажите, что следующие системы функций линейно независимы

а) $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$; б) $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}$.

51. Пусть R^+ линейное пространство положительных чисел, в котором $x \oplus y \equiv x \cdot y$, а $\alpha \odot x \equiv x^\alpha$. Доказать, что в R^+ любые x и y линейно зависимы.

52. Выявить линейные зависимости между векторами:

а) $(1, 3), (3, 2), (-11, 16)$;

б) $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 3), (3, -5, 7, 2), (1, -7, 5, -2)$;

в) $(4, 3, 1), (1, 2, 3), (2, -1, -5)$;

г) $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2), (0, 0, 1, 1), (2, 2, 3, 3)$.

Δ а) $a_3 = 10a_1 - 7a_2$; б) $a_4 = a_3 - a_2 - a_1$; в) $a_3 = a_1 - 2a_2$; г) $a_3 = a_2 - a_1$; $a_4 = a_2 + a_1$. $\triangleleft$

53. Векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ в X заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что $e_1, e_2, \dots, e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе:

а) $e_1(1, 1, 1), e_2(1, 1, 2), e_3(1, 2, 3), x = (6, 9, 14)$;

б) $e_1(2, 1, -3), e_2(3, 2, -5), e_3(1, -1, 1), x = (6, 2, -7)$;

в) $e_1(1, 2, -1, -2), e_2(2, 3, 0, -1), e_3(1, 2, 1, 4), e_4(1, 3, -1, 0), x = (7, 14, -1, 2)$;

Δ а) $(1, 2, 3)$; б) $(1, 1, 1)$; в) $(0, 2, 1, 2)$. $\triangleleft$

54. Найти координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3 : $e_1(1, 3, 5), e_2(6, 3, 2), e_3(3, 1, 0)$, если:

а) $x(3, 7, 1)$; б) $x(0, 0, 1)$; в) $x(2, 3, 5)$.

Δ а) $(33, -82, 154)$; б) $(-3, 8, -15)$; в) $(-1, 5, -9)$. $\triangleleft$

55. Найти координаты функции $A \cos(x + \alpha)$ в базисе $e_1 = \cos x, e_2 = \sin x$.

$\Delta (A \cos \alpha, -A \sin \alpha)$ $\triangleleft$

56. Линейное пространство полиномов степени не выше n . Показать, что $1, (x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^n$ образуют базис этого пространства. Найти в этом базисе координаты многочлена:

а) $2 + 3x - 5x^2 + 4x^5$;

б) $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$;

Δ а) $(4, 13, 35, 40, 20, 4, 0, 0, \dots)$; б) $\left(f(1), \frac{f'(1)}{1!}, \frac{f''(1)}{2!}, \frac{f'''(1)}{3!}, \dots\right)$. $\triangleleft$

57. Найти размерность и базис линейной оболочки системы полиномов: $(1+t)^3, t^3, 1, t+t^2$.

Δ 3; базис: $(1+t)^3, t^3, 1$. $\triangleleft$

58. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве квадратных матриц 2-го порядка и найти координаты матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Δ $(-1, 2, -1, 1)$. $\triangleleft$

59. Доказать, что многочлены $2t + t^5, t^3 - t^5, t + t^3$ образуют базис в пространстве нечетных полиномов степени не выше 5 и найти координаты полинома $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

Δ $(4, 2, -3)$. $\triangleleft$

60. Проверить, что матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве квадратных матриц 2-го порядка. Матрицу $B = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ представить, как линейную комбинацию базисных матриц.

Δ $B = 2A_2 + A_3 + 2A_4$. $\triangleleft$

61. Доказать, что пространство квадратных матриц порядка n является прямой суммой подпространства симметрических матриц и подпространства кососимметрических матриц того же порядка.

62. Доказать, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n .

63. Доказать, что n -мерное линейное пространство является прямой суммой подпространства векторов. Все координаты которых равны между собой и подпространства векторов сумма координат которых равна нулю.

64. Доказать, что сумма L двух подпространств P и Q тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $x \in L$ однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in P$, $z \in Q$.

65. Пусть P и Q два линейных подпространства конечномерного линейного пространства V . Доказать, что:

а) $\dim P + \dim Q > n = \dim V \Rightarrow \exists x \in V, x \neq \theta, x \in P \cap Q$;

б) $\dim P + \dim Q = \dim P \cap Q + 1$, то одно из этих подпространств содержится в другом.

66. Доказать, что для любого линейного подпространства P конечномерного линейного пространства V , существует другое подпространство Q такое, что $V = P \oplus Q$.

67. Найти размерность суммы и размерность пересечения линейных подпространств натянутых на системы векторов $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$:

а) $a_1(1, 2, 0, 1), a_2(1, 1, 1, 0); b_1(1, 0, 1, 0), b_2(1, 1, 1, 1)$;

б) $a_1(1, 1, 1, 1), a_2(1, -1, 1, -1), a_3(1, 3, 1, 3); b_1(1, 2, 0, 2), b_2(1, 2, 1, 2), b_3(3, 1, 3, 1)$.

Δ а) 3; 1; б) 3; 2. ▲

68. Найти базисы суммы и пересечения пространств натянутых на системы векторов $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$:

а) $a_1(1, 2, 1), a_2(1, 1, -1), a_3(1, 3, 3); b_1(2, 3, -1), b_2(1, 2, 2), b_3(1, 1, -3);$

б) $a_1(1, 1, 0, 0), a_2(0, 1, 1, 0), a_3(0, 0, 1, 1); b_1(1, 1, 1, 1), b_2(1, 0, 1, -1),$
 $b_3(1, 3, 0, -4);$

в) $a_1(1, 2, 1, -2), a_2(2, 3, 1, 0), a_3(1, 2, 2, -3); b_1(1, 1, 1, 1), b_2(1, 0, 1, -1),$
 $b_3(1, 3, 0, 4);$

г) $a_1(1, 1, 0, 0), a_2(0, 1, 0, 1), a_3(0, 0, 1, 1); b_1(1, 0, 1, 0), b_2(0, 2, 1, 1),$
 $b_3(1, 2, 1, 2).$

Δ а) $\{a_1, a_2, b_1\}; \{2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3, 5, 1)\};$ б) $\{a_1, a_2, a_3, b_2\}; \{a_1 + a_3 = b_1 = (1, 1, 1, 1)\};$

в) $\{a_1, a_2, a_3, b_2\}; \{b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3; b_3 = 5a_1 - a_2 - a_3\};$ г) $\{a_1, a_2, a_3, b_2\}; \{b_1 = a_1 - a_2 + a_3 =$
 $= (1, 0, 1, 0); 2a_1 + 2a_3 = b_1 + b_3 = (2, 2, 2, 2)\}.$ ~~▲~~

69. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств пространства многочленов степени не выше 3, натянутых на системы многочленов:

$$1 + 2t + t^3, \quad 1 + t + t^2, \quad t - t^2 + t^3 \quad \text{и} \quad 1 + t^2, \quad 1 + 3t + t^3, \quad 3t - t^2 + t^3.$$

Δ сумма: 3; базис: $\{1 + 2t + t^3, 1 + t^2, 1 + t + t^2\};$ пересечение: 1; базис: $\{2 + 3t + t^2 + t^3\}.$ ~~▲~~

70. а) Доказать, что если в n -мерном комплексном линейном пространстве рассматривать умножение векторов лишь на вещественные числа, то получим $2n$ -мерное вещественное пространство;

б) В двумерном комплексном арифметическом пространстве рассматривается операция умножения лишь на вещественные числа. Найти базис в полученном вещественном пространстве и координаты вектора $(-3 + 2i, -i)$ в этом базисе.

Δ б) базис: $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}; (-3 + 2i, -i) = (-3, 2, 0, -1).$ ~~▲~~

71. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств комплексного n -мерного арифметического пространства, натянутых, на системы векторов $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$:

а) $n = 3$; $a_1(1, 2, 3)$, $a_2(1, -2, i)$, $a_3(2, 0, 3 + i)$; $b_1(1, 0, 3i)$, $b_2(1, 4, 3 + i)$,
 $b_3(-1, 4, 3 - 4i)$;

б) $n = 3$; $a_1(1, -i, 1 + i)$, $a_2(1, 0, 3i)$, $a_3(-1, 2i, -2 + i)$; $b_1(1, -2, i)$,
 $b_2(2, 1 + i, -i)$, $b_3(-1, 4, 3 - 4i)$;

в) $n = 4$; $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 2, 1, 3 - i)$, $a_3(2, 3, 2, 4 - i)$, $a_4(1, 1, 1, 1 - i)$;
 $b_1(0, 1, 0, 3 - i)$, $b_2(0, 2, 0, 5 - 2i, -i)$, $b_3(0, 2 + i, 0, 6 + i)$, $b_4(1, 4 + i, 5 - i, -2 - i)$.

Δ а) 3; базис: a_1, a_2, b_1 ; 1; базис: $(0, 4, 3 - i)$; б) 3; базис: a_1, a_2, b_1 ; 1; базис: $(9 + 10i, 2 - 16i, -10 - 3i)$;

в) 4; базис: a_1, a_2, a_3, b_4 ; 2; базис: b_1, b_2 . ~~Δ~~

72. Доказать, что множество многочленов степени не выше n с комплексными коэффициентами можно рассматривать и как комплексное линейное пространство и как вещественное линейное пространство. В обоих случаях найти:

а) базис и размерность;

б) координаты многочлена $1 - 2i + (3 + i)t - 3t^2$ в найденном базисе (при $n = 2$).

Δ а) Комплексное пространство: $\dim V = n + 1$, базис: $1, t, t^2, \dots, t^n$; Вещественное пространство:

$\dim V = 2n + 2$, базис: $1, i, t, it, \dots, t^n, it^n$; б) Комплексное пространство: $(1 - 2i, 3 + i, -3)$;

Вещественное пространство: $(1, -2, 3, 1, -3, 0)$. ~~Δ~~

73. Для заданных матриц A и B найти $A^+ \cdot B$, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 2i & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 - i \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \\ 1 + i & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & 0 & 1 - i \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4i \\ 0 & i & -5 \end{pmatrix}$;

г) $A = (1, 1 + i, -2)$; $B = (5, 2 + i)$;

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 3-2i & -i & 4 \\ 2i & 0 & 1-i \\ 2+i & i & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+3i \\ -i & 3 & -1 \\ 2 & 1-i & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } A = \begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -2i & 0 & 3i \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 1 & -i \\ 3 & 3i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 2+i & 1+5i \\ -3 & -11 \\ -1 & i \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+2i & 7 \\ 3i & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & i & -5+4i \\ -2i & 0 & 4 \\ 2i & -1+i & -9-5i \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 5 & 2+i \\ 5-5i & 3-i \\ -10 & -4-2i \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} i & 1-9i & -4+17i \\ -1-2i & -1-i & -3+4i \\ 11+3i & 8-2i & -13+11i \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} 3+6i & 3i & 3 & -i \\ -i & 1-2i & -i & -1 \\ 1-9i & 11+i & 1 & -4i \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

74. Произвести действия с матрицами:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 4i & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1-2i & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad (2A+B)^+ \cdot B = ?;$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3 \\ 4-i & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 0 \\ 4 & 1 & i \end{pmatrix}; \quad (A+3B)^+ \cdot B = ?;$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 4i & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1-2i & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad (A+4B)^+ \cdot B = ?;$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3 \\ 4-i & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 0 \\ 4 & 1 & i \end{pmatrix}; \quad (3A+B)^+ \cdot A = ?;$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 4i & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1-2i & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad (A-B)^+(A+B) = ?.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 5 & 5-4i & 5-4i \\ 3+4i & 67-2i & 73+4i \\ 1 & 69-2i & 86 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 68+4i & 24+5i & -1+16i \\ 18-5i & 20-4i & 3i \\ 7-12i & 7 & 3+i \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 6 & 6-28 & 6-20 \\ 5+9i & 107-i & 110+9i \\ 4 & 108-8i & 134 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 72 & 8i & 28+3i \\ 6-8i & 14+4i & 7-21i \\ 20-7i & 18 & 30-i \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 19 & 2-39 & 1-44i \\ i & 6-2i & 11-i \\ -3+4i & 7+3i & 10 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

75. Квадратная матрица с комплексными элементами называется эрмитовой, если $A^+ = A$; и называется унитарной, если $A^+ A = E$.

Квадратная матрица с вещественными элементами называется самосопряженной, если $A^T = A$; и называется ортогональной, если $A^T A = E$.

Для следующих матриц установить какими из указанных выше характеристик они обладают:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; & \text{б)} \quad & \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{в)} \quad & 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; & \text{г)} \quad & \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & (4/5)i \\ 0 & 1 & 0 \\ -(4/5)i & 0 & 3/5 \end{pmatrix}; \\ \text{д)} \quad & 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 0 \end{pmatrix}; & \text{е)} \quad & 1/3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{ж)} \quad & \begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+b^2} & b/\sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ -b/\sqrt{a^2+b^2} & a/\sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \text{з)} \quad & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Δ а) ортогональная; б) ортогональна и самосопряженная; в) самосопряженная; г) эрмитова;
д) эрмитова; е) ортогональная; ж) ортогональная; з) ортогональная. $\triangleleft$

76. Найдите n для указанных ниже пространств, если известно, что эти пространства изоморфны пространству V_6 :

- а) для пространства симметричных $n \times n$ – матриц с нулевыми диагональными элементами;
 - б) для пространства P_n полиномов степени не выше n ;
 - в) для подпространства многочленов $p(x)$ из P_n , удовлетворяющих условию: $p(0) = 0$.
- Δ а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$. $\triangleleft$

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1973.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.
6. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.
7. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2001.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.

ЧАСТЬ 1

§ 1. Основные понятия и теоремы

В линейном пространстве V над числовым полем $\mathbf{K}$ определено скалярное произведение, если

$\forall x, y \in V \quad \exists \alpha \in \mathbf{K} \quad | \quad \alpha = (x, y)$ и выполнены четыре аксиомы:

$$1^\circ (x, y) = \overline{(y, x)}, \text{ если } \mathbf{K} \equiv \mathbf{C} \text{ и } (x, y) = (y, x), \text{ если } \mathbf{K} \equiv \mathbf{R};$$

$$2^\circ (\lambda x, y) = \lambda(x, y);$$

$$3^\circ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$$

$$4^\circ (x, x) \geq 0, \text{ причем } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Комплексное конечномерное линейное пространство со скалярным произведением ($\mathbf{K} \equiv \mathbf{C}$) называется унитарным пространством.

Вещественное конечномерное линейное пространство со скалярным произведением ($\mathbf{K} \equiv \mathbf{R}$) называется евклидовым пространством. (Если в дальнейшем тексте написан знак « $\bar{}$ » комплексного сопряжения, то в евклидовом пространстве он не пишется).

Если в пространстве V со скалярным произведением задан базис $\{e_i\}^n$, то

$$(x, y) = \left(\sum_i \xi_i e_i, \sum_j \eta_j e_j \right) = \sum_i \sum_j \xi_i \bar{\eta}_j (e_i, e_j), \text{ т.е. чтобы задать скалярное произведение}$$

достаточно задать матрицу с матричными элементами $\gamma_{ij} = (e_i, e_j)$. Эта матрица называется матрицей Грамма.

Длиной (нормой) вектора x называется величина $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Другое обозначение нормы вектора — $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

В евклидовом пространстве углом φ между векторами x и y называется угол между $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\text{такой, что } \cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

В унитарном пространстве содержательного понятия угла нет.

Векторы x и y евклидового или унитарного пространства называются ортогональными, если $(x, y) =$

0. Система векторов $\{f_i\}_1^n$ называется ортогональной, если $(f_i, f_j) = 0$ для $i \neq j$. Система векторов

$\{e_i\}_1^n$ называется ортонормированной, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$.

В каждом евклидовом и унитарном пространстве существует ортонормированный базис. При этом, в ортонормированном базисе $\{e_i\}_1^n$:

$$(x, y) = \sum_i \xi_i \bar{\eta}_i \quad \text{и} \quad |x| = \sum_i |\xi_i|^2.$$

Получить ортонормированный базис пространства V из произвольного базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ можно с помощью процесса ортогонализации:

Положим: $e_1 = f_1$; $e_2 = f_2 + \alpha e_1$. Здесь α подбирается из условия $e_1 \perp e_2 \Rightarrow \alpha = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$. $e_3 = f_3$

+ $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ и β_1, β_2 ищутся из условий $e_1 \perp e_3$,

$e_2 \perp e_3$: $\beta_1 = -\frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$; $\beta_2 = -\frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$ и т.д.

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1} \quad \text{и}$$

$$\lambda_1 = -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)}; \lambda_2 = -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)}; \dots; \lambda_{k-1} = -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})}.$$

Нормируя векторы e_k полученного базиса, мы сделаем его ортонормированным. Описанный процесс получения ортогонального базиса из заданного не ортогонального базиса, называется **процессом ортогонализации Штурма**.

Два евклидовых или унитарных пространства V и V' называются изоморфными, если они изоморфны как линейные пространства и, кроме того, $\forall x, y \in V \quad \exists x', y' \in V'$ такие, что $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y'$. Тогда $(x, y) = (x', y')$.

Если два евклидовых или унитарных пространства изоморфны, то в них можно ввести одинаковую норму.

Вектор h называется перпендикулярным к подпространству L ($h \perp L$) если $\forall y \in L \quad (h, y) = 0$.

Ортогональным дополнением $L^\perp$ к подпространству L называется:

$$L^\perp \equiv \{h \in V \mid h \perp L\}.$$

При этом, $L^\perp$ само является подпространством и:

а) $V = L \oplus L^\perp$, б) $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$.

Пусть L – подпространство V :

$$\forall x \in V \quad \exists x_0 \in L, \exists x^\perp \in L^\perp \mid x = x_0 + x^\perp.$$

x_0 – называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство L ,

$x^\perp$ – называется ортогональной составляющей вектора x относительно L .

Длина вектора $x^\perp$ ($|x^\perp|$) называется расстоянием между вектором x и подпространством L .

Для евклидова пространства V угол между векторами x и x_0 называется углом между вектором x и подпространством L .

Если $\{e_i\}_1^n$ – ортогональный базис в V , то

$$x_0 = -\frac{(x, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 + \frac{(x, e_2)}{(e_2, e_2)}e_2 + \dots + \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}e_k; \quad x^\perp = x - x_0.$$

Если $M = y + L$ многообразие линейного подпространства L , то расстоянием между подпространством L и многообразием M называется длина ортогональной составляющей $y^\perp$ вектора сдвига y относительно подпространства L .

§ 2. Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определение евклидова пространства и приведите пример такого пространства.
- Сформулируйте определение унитарного пространства и приведите пример такого пространства.
- Каким образом можно ввести скалярное произведение в пространстве функций непрерывных на отрезке $[a, b]$. Приведите три различных способа введения скалярного произведения.
- Как определяются норма (длина) элемента и угол между ненулевыми элементами евклидова пространства?
- Почему в унитарном пространстве нет осмысленного понятия угла?
- Какие элементы евклидова пространства называются ортогональными?
- Докажите, что если не нулевые элементы x и y евклидова пространства ортогональны, то они линейно независимы. Верно ли обратное утверждение?
- Что такое ортогональный и ортонормированный базис? Приведите примеры ортонормированных базисов.
- Опишите процедуру построения ортонормированного базиса на основе произвольного базиса (процедуру ортогонализации).
- Сколько ортонормированных базисов существует в данном n -мерном евклидовом пространстве?
- Напишите формулу для координат произвольного элемента евклидова пространства в ортонормированном базисе.
- Как выражается норма произвольного элемента через его координаты в ортонормированном базисе евклидова (унитарного) пространства?
- Что такое ортогональное дополнение к подпространству L евклидова пространства?
- Докажите, что ортогональное дополнение $L^\perp$ к подпространству L евклидова пространства само является подпространством этого пространства.

- Как связаны между собой размерности подпространств L и $L^\perp$?
- Какой элемент евклидова пространства называется проекцией элемента x на подпространство L , а какой ортогональной составляющей элемента x относительно подпространства L ?
- Что называется расстоянием между элементом x евклидова пространства и подпространством L ?

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Доказать, что для скалярного произведения в унитарном пространстве нельзя сохранить без изменения аксиомы скалярного произведения, принятые в евклидовом пространстве.

Решение. Предположим, что в унитарном пространстве скалярное произведение введено также как и в евклидовом пространстве. Тогда из аксиом 1° и 3° скалярного произведения, следует, что для любого числа α и для любого элемента x имеет место равенство

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha(\alpha x, x) = \alpha^2(x, x).$$

Положив $\alpha = i$, получим $(ix, ix) = -(x, x) < 0$, если $x \neq \theta$.

Таким образом, пришли к противоречию с аксиомой 4°, в силу, которой скалярный квадрат любого элемента линейного пространства должен быть не отрицательным. Следовательно, в унитарном пространстве нельзя сохранить без изменения аксиомы скалярного произведения, принятые в евклидовом пространстве. Как уже отмечалось, при переходе от евклидова пространства к унитарному пространству видоизменяется аксиома 1°.

Задача 2. а) Доказать теорему Пифагора в евклидовом пространстве: если $(x, y) = 0$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

б) доказать обратную теорему: если $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, то $(x, y) = 0$.

Решение. Вычислим квадрат нормы элемента $x + y$:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2.$$

Отсюда следует:

а) если $(x, y) = 0$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;

б) обратно, если $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, то $(x, y) = 0$.

Задача 3. Доказать, что в P_2 – пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, скалярное умножение элементов $f(x)$ и $g(x)$ можно ввести по формуле

$$(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1).$$

Кроме того, доказать, что в пространстве P_3 полиномов степени не выше 3 скалярное произведение по указанной формуле ввести нельзя.

Решение. Для доказательства данного утверждения нужно показать, что для предложенного правила выполняются четыре аксиомы скалярного произведения.

1°. $(f, g) = (g, f)$ в силу коммутативности умножения чисел.

2°. Проверим, что $(f + g, h) = (f, g) + (h, g)$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(f + g, h) &= [f(-1) + h(-1)] \cdot g(-1) + [f(0) + h(0)] \cdot g(0) + [f(1) + h(1)] \cdot g(1) = \\&= [f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1)] + [h(-1) \cdot g(-1) + h(0) \cdot g(0) + h(1) \cdot g(1)] = \\&= (f, g) + (h, g).\end{aligned}$$

3°. Проверим, что $(\alpha f, g) = \alpha (f, g)$, где α – произвольное число. Действительно, $(\alpha f, g) = \alpha f(-1) \cdot g(-1) + \alpha f(0) \cdot g(0) + \alpha f(1) \cdot g(1) = \alpha (f, g)$.

4°. Для любого многочлена $f(x)$, степень которого не выше двух, справедливо неравенство $(f, f) = f^2(-1) + f^2(0) + f^2(1) > 0$.

Остается показать, что если $(f, f) = 0$, то $f(x) = 0$ для любого x , т.е. $f = \theta$. Пусть $(f, f) = 0$, т.е. $f^2(-1) + f^2(0) + f^2(1) = 0$. Отсюда получаем $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Но так как степень многочлена $f(x)$ не превосходит 2, то число его корней не более двух, если хотя бы один коэффициент многочлена отличен от нуля. Следовательно, $f(x) = 0$.

Таким образом, выполнены все аксиомы скалярного произведения и, значит, по указанной формуле можно ввести скалярное произведение в P_2 .

В пространстве P_3 скалярное произведение нельзя ввести по указанной формуле, ибо для $f(x) = x(x^2 - 1)$ скалярное произведение $(f, f) = 0$ в то время, как $f \neq \theta$, что противоречит аксиоме 4°.

Задача 4. Пусть P_2 – евклидово пространство, рассмотренное в предыдущей задаче.

а) Вычислить нормы многочленов $f(x) = 1 - x + x^2$ и $g(x) = 1 + x$ и угол между ними.

б) Написать выражение скалярного произведения двух произвольных элементов пространства P_2 через их координаты в базисе $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2$.

Решение. а) Вычислим значения $f(x)$ и $g(x)$ в точках $x = -1, x = 0, x = 1$: $f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = 1, g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2$. По формуле скалярного произведения $(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1)$ находим

$$(f, g) = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3, \quad (f, f) = 3^2 + 1^2 + 1^2 = 11, \quad (g, g) = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5.$$

Вычислим теперь нормы элементов f и g и угол между ними:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{11}, \quad \|g\| = \sqrt{5}, \quad \cos \varphi = \frac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|} = \frac{3}{\sqrt{55}},$$

откуда $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{55}}$.

б) Найдем выражение скалярного произведения произвольных элементов $f(x)$ и $g(x)$ через их координаты в базисе: $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2$.

Пусть $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2, g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2$; тогда $f = \sum_{i=1}^2 c_i p_i, g = \sum_{j=1}^2 c_j p_j$

и скалярное произведение элементов f и g можно записать в виде:

$$(f, g) = \sum_{i,j=1}^2 \gamma_{ij} c_i d_j, \quad \text{где } \gamma_{ij} = (p_i, p_j). \text{ Коэффициенты } \gamma_{ij} \text{ образуют матрицу,}$$

которая называется матрицей Грамма. Знание элементов матрицы Грамма,

позволяет находить скалярные произведения. Находим коэффициенты γ_{ij} :

$$\gamma_{00} = (p_0, p_0) = 3; \quad \gamma_{11} = (p_1, p_1) = 2; \quad \gamma_{22} = (p_2, p_2) = 2;$$

$$\gamma_{01} = \gamma_{10} = (p_0, p_1) = 0; \quad \gamma_{02} = \gamma_{20} = (p_0, p_2) = 2; \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = (p_1, p_2) = 0.$$

Найденные коэффициенты составляют матрицу Грамма: $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, а

скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ через координаты этих элементов в базисе $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2$ выражается так:

$$(f, g) = 3c_0d_0 + 2c_1d_1 + 2c_2d_2 + 2c_0d_2 + 2c_2d_0.$$

Задача 5. В пространстве P_2 полиномов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1)$ построить ортонормированный базис.

Решение. Возьмем в пространстве P_2 какой-нибудь базис, например, $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2$, и построим ортогональный базис y_1, y_2, y_3 , пользуясь процессом ортогонализации Штурма. Положим

$$y_1 = p_1, \quad y_2 = p_2 - \alpha y_1, \quad y_3 = p_3 - \beta y_1 - \gamma y_2.$$

При этом $\alpha = (p_2, y_1)(y_1, y_1)^{-1}, \beta = (p_3, y_1)(y_1, y_1)^{-1}, \gamma = (p_3, y_2)(y_2, y_2)^{-1}$. Входящие сюда скалярные произведения находим с помощью заданной формулы скалярного произведения:

$$(p_2, y_1) = (p_2, p_1) = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0,$$

$$(p_3, y_1) = (-1)^2 \cdot 1 + 0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 2,$$

$$(y_1, y_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Отсюда следует, что $\alpha = 0$ и поэтому $y_2 = p_2 = x$. Кроме того, $\beta = 2/3$. Далее, имеем $(p_3, y_2) = (-1)^2 \cdot (-1) + 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 1 = 0$ и, следовательно, $\gamma = 0$ и $y_3 = p_3 - (2/3)p_1 = x^2 - (2/3)$.

Таким образом, построен ортогональный базис:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2 - (2/3).$$

Нормируя элементы y_1, y_2, y_3 (т.е. деля каждый из них на свою норму), получаем ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 . Так как $(y_1, y_1) = 3, (y_2, y_2) = 2, (y_3, y_3) = 2/3$, то

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задача 6. В пространстве функций непрерывных на промежутке $[0, \pi]$ скалярное произведение введено по формуле: $(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\sin x dx$. Применяя процесс ортогонализации, ортонормировать систему $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$.

Решение. Применим к заданной системе $\{f_1, f_2, f_3\}$ процесс ортогонализации Штурма: $e_1 = f_1(x) = 1, e_2 = f_1 + \alpha e_1$. Умножив обе части равенства скалярно на e_1 и, воспользовавшись условием $(e_1, e_2) = 0$, получим, что:

$$\alpha = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\int_0^\pi x \sin x dx}{\int_0^\pi \sin x dx} = -\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $e_2 = x - (\pi/2)$.

Вектор e_3 ищем из соотношения: $e_3 = f_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$. Для коэффициентов α и β получаем:

$$\alpha = -\frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx}{\int_0^{\pi} \sin x dx} = -\frac{\pi^2 - 4}{2};$$

$$\beta = -\frac{(f_2, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{\int_0^{\pi} x^2 \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x dx}{\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin x dx} = -\frac{\pi \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right)}{\frac{\pi^2}{2} - 4} = -\pi,$$

и получаем: $e_3 = f_3 - ((\pi^2 - 4)/2)e_1 - \pi e_2 = x^2 - \pi x + 2$.

Система векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$ – ортогональная. Для нормирования этой системы, найдем нормы векторов e_1, e_2 и e_3 :

$$\|e_1\|^2 = (e_1, e_1) = \int_0^{\pi} 1 \cdot 1 \sin x dx = 2;$$

$$\|e_2\|^2 = (e_2, e_2) = \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin x dx = \frac{\pi^2}{2} - 4;$$

$$\|e_3\|^2 = (e_3, e_3) = \int_0^{\pi} (x^2 - \pi x + 2)^2 \sin x dx = 40 - 4\pi^2.$$

Тогда, результатом ортонормирования системы $\{f_1, f_2, f_3\}$ будет система:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{2}{\pi^2 - 8}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right); \frac{x^2 - \pi x + 2}{2\sqrt{10 - \pi^2}} \right\}.$$

Задача 7. В пространстве P_2 полиномов степени не выше 2 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^{\pi} f(x) g(x) \sin x dx \text{ найти координаты вектора } f = x^2 + x + 1 \text{ в ортогональном базисе } e_1 =$$

$$1, e_2 = x - (\pi/2), e_3 = x^2 - \pi x + 2.$$

Решение. I способ. Запишем вектор f как линейную комбинацию базисных векторов: $f = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Здесь α, β, γ – искомые координаты

вектора f в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Умножим обе части равенства скалярно на e_1

$(f, e_1) = \alpha(e_1, e_1) + \beta(e_2, e_1) + \gamma(e_3, e_1)$, и воспользуемся ортогональностью системы, т.е. тем, что $(e_2, e_1) = (e_3, e_1) = 0$.

$$\text{Тогда: } \alpha = \frac{(f, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{\int_0^{\pi} (x^2 + x + 1) \sin x dx}{\int_0^{\pi} \sin x dx} = \frac{\pi(\pi + 1)}{2} = 1.$$

Аналогично, для β и γ

$$\beta = \frac{(f, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{\int_0^\pi (x^2 + x + 1) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x dx}{\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin x dx} = \pi + 1;$$

$$\gamma = \frac{(f, e_3)}{(e_3, e_3)} = \frac{\int_0^\pi (x^2 + x + 1)(x^2 - \pi + 2) \sin x dx}{\int_0^\pi (x^2 - \pi + 2)^2 \sin x dx} = 1.$$

Значит f в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет координаты:

$$f\left(\frac{\pi(\pi+1)}{2} + 1, \pi + 1, 1\right).$$

II способ. Преобразуем функцию $f = x^2 + x + 1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= (x^2 - \pi x + 2) + \pi x - 2 + x + 1 = (x^2 - \pi x + 2) + (\pi + 1)x - 1 = \\ &= (x^2 - \pi x + 2) + (\pi + 1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi(\pi + 1)}{2} + 1 = e_3 + (\pi + 1)e_2 + \left(\frac{\pi(\pi + 1)}{2} + 1\right)e_1. \end{aligned}$$

Это подтверждает результаты, полученные I способом.

Задача 8. Доказать, что функции: $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ образуют ортогональный базис линейной оболочки этих функций, если скалярное произведение в указанной линейной оболочке определено формулой: $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Найти норму каждой из этих функций.

Решение. Обозначим функции, входящие в систему так: $e_0 = 1, f_k = \sin kx, g_m = \cos mx$ ($k, m = 1, 2, 3, \dots, n$).

Рассмотрим попарные скалярные произведения различных векторов системы:

$$\begin{aligned} 1) (e_0, f_k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx; & 2) (e_0, g_k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx; \\ 3) (g_l, f_k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos l x \cdot \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l)x dx; \\ 4) (f_l, f_k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin l x \cdot \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(l-k)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(l+k)x dx; \\ 5) (g_l, g_k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos l x \cdot \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(l-k)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(l+k)x dx. \end{aligned}$$

Равенство нулю всех записанных интегралов в 4) и 5) при $k \neq l$ и доказывает ортогональность исходной системы функций.

Найдем нормы векторов системы:

$$\|e_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi \Rightarrow \|e_0\| = \sqrt{2\pi};$$

$$\|f_k\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \pi \Rightarrow \|f_k\| = \sqrt{\pi};$$

$$\|g_k\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \pi \Rightarrow \|g_k\| = \sqrt{\pi}.$$

Итак, норма каждой из функций исходной системы равна $\sqrt{\pi}$, кроме первой, для которой норма равна $\sqrt{2\pi}$.

Задача 9. Векторы x_1, x_2, x_3, x_4 заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $x_1(1, 0, 1, -1, 2), x_2(1, 0, 1, -1, -2), x_3(1, 0, 3, 0, 0), x_4(0, 0, 2, 1, 6)$.

а) Найти ортогональный базис линейной оболочки $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4)$;

б) Найти базис ортогонального дополнения $L^\perp$ к $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Решение. а) Вначале установим базис и размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Прежде всего, отметим, что

$$\frac{1}{4}(x_1 - x_2) = \frac{1}{8}(x_1 - x_3 + x_4) = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Отсюда заключаем, что $x_4 = x_1 - 2x_2 + x_3$, т.е. вектор x_4 является линейной комбинацией векторов x_1, x_2, x_3 . Следовательно, $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3)$. Чтобы установить линейную независимость векторов x_1, x_2, x_3 , запишем $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$. Переходя к координатной записи, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}, \text{ которая имеет только нулевые решения: } \alpha = \beta = \gamma = 0. \text{ Таким образом}$$

векторы x_1, x_2, x_3 линейно независимы и образуют базис линейной оболочки $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Ортогонализуем базис $\{x_1, x_2, x_3\}$ применяя процесс ортогонализации: $e_1 = x_1 = (1, 0, 1, -1, 2)$, $e_2 = x_2 + \alpha e_1$ и $\alpha = -\frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{1}{7}$, т.е. $e_2 = x_2 + \frac{1}{7}e_1 = \left(\frac{8}{7}, 0, \frac{8}{7}, -\frac{8}{7}, -\frac{12}{7}\right)$.

Так как изменение длины вектора не меняет свойств ортогональности, то в качестве e_2 удобно взять вектор с целыми координатами и, отличающийся от найденного e_2 постоянным множителем:

$$e_2 = (2, 0, 2, -2, -3).$$

Далее $e_3 = x_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$, где $\alpha = -\frac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{4}{7}$; $\beta = -\frac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{8}{21}$. Тогда

$$e_3 = x_3 - \frac{4}{7}e_1 - \frac{8}{21}e_2 = \frac{1}{3}(-1, 0, 5, 4, 0). \text{ И вновь выберем в качестве } e_3:$$

$$e_3 = (-1, 0, 5, 4, 0).$$

Итак векторы $e_1 = (1, 0, 1, -1, 2)$, $e_2 = (2, 0, 2, -2, -3)$ и $e_3 = (-1, 0, 5, 4, 0)$ образуют ортогональный базис $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

б) Теперь найдем базис $\mathcal{L}^\perp(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathcal{L}^\perp(e_1, e_2, e_3)$. Если $y \in \mathcal{L}^\perp$ и имеет координаты $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ то

$$\left. \begin{aligned} (y, e_1) = 0 &= y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 0 \\ (y, e_2) = 0 &= 2y_1 + 2y_3 - 2y_4 - 3y_5 = 0 \\ (y, e_3) = 0 &= -y_1 + 5y_3 + 4y_4 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Сравнив 1^{ое} и 2^{ое} уравнения, полученной системы, заключаем, что $y_5 = 0$. При этом, так как y_2 не входит ни в одно из уравнений, то y_2 – любое. Для y_1, y_3, y_4 получили систему: $\begin{cases} y_1 + y_3 - y_4 = 0 \\ -y_1 + 5y_3 + 4y_4 = 0 \end{cases}$, из

которой устанавливаем, что $y_1 = -3y_3, y_4 = -2y_3$.

Учитывая, что y_2 и y_3 могут быть любыми, можно положить $y_2 = 1, y_3 = 0$ и $y_2 = 0, y_3 = 1$ и получить векторы, являющиеся решением системы: $e_4(0, 1, 0, 0, 0)$ и $e_5(-3, 0, 1, -2, 0)$. Векторы e_4 и e_5 принадлежат $\mathcal{L}^\perp(e_1, e_2, e_3)$, линейно независимы и ортогональны, т.е. $\{e_4, e_5\}$ – ортогональный базис $\mathcal{L}^\perp(e_1, e_2, e_3)$.

Задача 10. Векторы $x(1, 1, 1, 1, 1)$ и векторы $e_1(1, 0, 1, -1, 2), e_2(2, 0, 2, -2, -3), e_3(-1, 0, 5, 4, 0)$ заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на линейную оболочку $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$: $x = y + z$, где $y \in L = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3), z \in L^\perp$;

б) Найти угол между вектором x и $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$;

в) Найти расстояние от вектора x до $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$.

Решение. а) Представим x в виде $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \in L^\perp$. Так как $y \in L$, то $y = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ и $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + z$.

Умножим обе части последнего равенства скалярно на e_1 и воспользуемся тем, что $z \in L^\perp$, т.е. $(z, e_1) = 0$ и система $\{e_1, e_2, e_3\}$ ортогональна, т.е. $(e_1, e_2) = (e_1, e_3) = 0$. Получим: $\alpha = \frac{(x, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{3}{7}$. Аналогично:

$$\beta = \frac{(x, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{1}{21}, \quad \gamma = \frac{(x, e_3)}{(e_3, e_3)} = \frac{4}{21}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } y &= \frac{3}{7}e_1(1, 0, 1, -1, 2) - \frac{1}{21}e_2(2, 0, 2, -2, -3) + \frac{4}{21}e_3(-1, 0, 5, 4, 0) = \\ &= \frac{1}{7}(1, 0, 9, 3, 7). \text{ В результате } z = x - y = (1, 1, 1, 1, 1) - \frac{1}{7}(1, 0, 9, 3, 7) = \\ &= \frac{1}{7}(6, 7, -2, 4, 0). \end{aligned}$$

Итак, ортогональной проекцией вектора x на $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$ является вектор $y = \frac{1}{7}(1, 0, 9, 3, 7)$, а ортогональной составляющей – вектор $z = \frac{1}{7}(6, 7, -2, 4, 0)$.

б) Углом между вектором x и $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$ называется угол между вектором x и его ортогональной проекцией y на $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

в) Расстояние между вектором x и $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$ называется длина его ортогональной составляющей z , т.е. $d = \|z\| = \sqrt{(z, z)} = \sqrt{\frac{15}{7}}$. Кстати, из прямоугольного треугольника с катетами y и z и гипотенузой x следует, что $\|z\| = \|x\| \cdot \sin \varphi = \|x\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{15}{7}}$.

§ 4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

4) Будет ли пространство евклидовым, если в трехмерном геометрическом пространстве за скалярное произведение принять:

а) произведение длин двух векторов?

б) произведение длин двух векторов на косинус угла между ними?

в) удвоенное обычное скалярное произведение этих векторов?

Δ а) нет; б) да; в) да. ~~▲~~

5) Можно ли в двумерном вещественном линейном пространстве скалярное произведение (x, y) векторов $x(x_1, x_2)$ и $y(y_1, y_2)$ определить формулами:

а) $(x, y) = x_2 y_1$;

б) $(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 10x_2 y_2$;

в) $(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$;

г) $(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$;

д) $(x, y) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$;

е) $(x, y) = 7x_1 y_1 + 6x_1 y_2 + 6x_2 y_1 + 9x_2 y_2$;

ж) $(x, y) = 9x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + x_2 y_2$;

з) $(x, y) = 2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2$.

Δ а) ,б) нет; нарушено 1^0 ; в) нет; нарушено 4^0 ; г), д), е) да; ж) нет; нарушено 4^0 ; з) да. ~~▲~~

3. Доказать, что в двумерном вещественном линейном пространстве функция $F(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$, где x_1, x_2, y_1, y_2 – координаты векторов x и y в некотором базисе, задает скалярное произведение тогда и только тогда, когда $a_{21} = a_{12}$, $a_{11} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

Δ Можно ли в двумерном комплексном пространстве скалярное произведение (x, y) векторов $x(x_1, x_2)$ и $y(y_1, y_2)$ определить формулами:

а) $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$; б) $(x, y) = x_1 \bar{y}_2$;

в) $(x, y) = ix_1 \bar{y}_2 + ix_2 \bar{y}_1$; г) $(x, y) = ix_1 \bar{y}_2 - ix_2 \bar{y}_1$;

д) $(x, y) = (3 + i)x_1 \bar{y}_2 + (3 - i)x_2 \bar{y}_1$; е) $(x, y) = 3x_1 \bar{y}_1 + 4x_2 \bar{y}_2$;

ж) $(x, y) = 5x_1 \bar{y}_1 + ix_2 \bar{y}_2$; з) $(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + (1 + i)x_1 \bar{y}_2 + (1 - i)x_2 \bar{y}_1 + 3x_2 \bar{y}_2$.

Δ а), б) нет; нарушено 1^0 ; в) нет; нарушено 1^0 ; г) нет; нарушено 4^0 ; д) нет; нарушено 4^0 ; е) да; ж) нет; нарушено 1^0 ; з) да. ~~А~~

5. Обозначив через x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов x и y в некотором базисе двумерного комплексного линейного пространства, найти условия на комплексные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} необходимые и достаточные для того чтобы функция $F(x, y) = a_{11}x_1 \bar{y}_1 + a_{12}x_1 \bar{y}_2 + a_{21}x_2 \bar{y}_1 + a_{22}x_2 \bar{y}_2$ определяла унитарное скалярное произведение.

Δ $a_{21} = \bar{a}_{12}$; $a_{11} > 0$; $a_{22} > 0$; $a_{11}a_{22} - |a_{12}|^2 > 0$. ~~А~~

6. В пространстве полиномов степени не выше трех можно ли скалярное произведение задать так:

$$(P(x), Q(x)) = P(0) \cdot \overline{Q(0)} + P(1/2) \overline{Q(1/2)} + P(1) \cdot \overline{Q(1)}.$$

А для полиномов степени не выше двух?

Δ $n = 3$, нет; нарушено 4^0 ; $n = 2$, да. ~~А~~

7. В пространстве полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n можно ли

скалярное произведение полиномов $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и

$Q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ формулами:

а) $(P, Q) = \sum_0^n a_k \bar{b}_k$; б) $(P, Q) = \sum_0^n k a_k \bar{b}_k$; в) $(P, Q) = \sum_0^n (k-1) a_k \bar{b}_k$.

Δ а) да; б) нет; нарушено 4^0 ; в) да. ~~А~~

8. Показать, что в линейном пространстве полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами скалярное произведение

может быть задано формулами:

а) $(P, Q) = \alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$, где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ коэффициенты

полиномов P и Q ;

б) $(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)$, где $P^{(k)}(a)$ и $Q^{(k)}(a)$ – производные k -го порядка

многочленов P и Q в некоторой точке $x = a, a \in \mathbf{R}$.

9. Можно ли принять за скалярное произведение в пространстве непрерывных функций, заданных на соответствующих интервалах следующие выражения:

- а) $\int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} x dx$ на $(-1, 1)$; б) $\int_0^1 f(x) \overline{g(x)} x dx$ на $(0, 1)$;
 в) $\int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} x^2 dx$ на $(-1, 1)$; г) $\int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ на $(-1, 1)$;
 д) $\int_0^1 f^2(x) g^2(x) x dx$ на $(0, 1)$; е) $\int_0^\pi f(\theta) \overline{g(\theta)} \sin \theta d\theta$ на $(0, \pi)$;
 ж) $\int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ на $(0, 1)$; з) $\int_0^1 f(x) g(x) dx$ на $(0, 1)$;
 и) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$ на $(-\infty, \infty)$.

Δ а) нет; нарушено 4^0 ; б) да; в) да; г) нет; нарушено 4^0 ; д) нет; нарушено 2^0 и 3^0 ;
 е) да; ж) да; з) да, если V вещественно и нет, если V комплексно; и) да. ~~А~~

10. Найти длину вектора x арифметического пространства с заданными скалярным произведением:

- а) $x(5, 4, 3)$, в стандартном скалярном произведении;
 б) $x(1, -2, 3, 4)$, в стандартном скалярном произведении;
 в) $x(1, 1)$, $(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$;
 г) $x(1, -1, 2)$, $(x, y) = 4x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + 3x_3 y_3$;
 д) $x(1, i)$, $(x, y) = 2x_1 \bar{y}_1 + (1+i)x_1 \bar{y}_2 + (1-i)x_1 \bar{y}_1 + 3x_1 \bar{y}_2$;
 е) $x(1+i, 1-i)$, $(x, y) = x_1 \bar{y}_1 - ix_1 \bar{y}_2 + ix_2 \bar{y}_1 + 2x_1 \bar{y}_2 + (2+i)x_2 \bar{y}_3 + (2-i)x_3 \bar{y}_2 + 6x_3 \bar{y}_3$.

Составить матрицы Грамма соответствующих скалярных произведений.

Δ а) $5\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\sqrt{30}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\sqrt{6}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; г) $3\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;
 д) $\sqrt{7}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$; е) $\sqrt{10}$, $\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & 2+i \\ 0 & 2-i & 6 \end{pmatrix}$. ~~А~~

11. Найти угол между данными векторами в E_3 со стандартным скалярным произведением:

- а) $(2, -3, 1)$, $(4, -6, 2)$; б) $(1, -1, 2)$, $(1, 0, 1)$; в) $(1, 0, -1)$, $(-1, 2, 2)$.

Δ а) 0; б) $\pi/6$; в) $3\pi/4$. ~~А~~

12. Найти угол между данными векторами в E_4 со стандартным скалярным произведением:

а) $(1, -1, 1, -1), (-1, 1, -1, 1)$; б) $(-1, 2, 3, -4), (5, 0, -2, 1)$;

в) $(1, 2, 2, 1), (1, 1, 1, 2)$.

Δ а) π ; б) $2\pi/3$; в) $\arccos \sqrt{7/10}$. ~~⚡~~

13. Найти угол между векторами в E_2 со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$:

а) $(1, 0), (0, 1)$; б) $(1, 0), (-1, 1)$.

Δ а) $\arccos 1/\sqrt{3}$; б) $\pi/2$. ~~⚡~~

14. Найти угол между векторами в E_3 со скалярным произведением $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$:

а) $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$; б) $(-1, 0, 0), (-1, 2, 2)$.

Δ а) $\pi/4$; б) $\pi/2$. ~~⚡~~

15. В пространстве E_4 в стандартном скалярном произведении определить (x, y) и угол между векторами x и y :

а) $x(2, 1, 3, 1), y(1, 2, -2, 2)$; б) $x(1, 2, 2, 3), y(3, 1, 5, 1)$;

в) $x(1, 1, 1, 2), y(3, 1, -1, 0)$.

Δ а) $0, \pi/2$; б) $18, \pi/4$; в) $3, \arccos 3/\sqrt{77}$. ~~⚡~~

16. В стандартном скалярном произведении найти нормированный вектор, ортогональный к векторам $(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1), (2, 1, 1, 3)$.

Δ один из векторов $\pm (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. ~~⚡~~

17. Найти какой-нибудь нормированный вектор, ортогональный к данной системе векторов арифметического пространства с заданным скалярным произведением:

а) $(2, 2, 1), (-2, 2, 3)$ в стандартном скалярном произведении;

б) $(1, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$ в стандартном скалярном произведении;

в) $(1, -1, 2)$, в стандартном скалярном произведении;

г) $(1, 1)$, $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$;

д) $(1, 2, 0), (2, 0, -1)$, $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$;

е) $(1+i, 1-i)$, в стандартном скалярном произведении;

ж) $(-1, 1+i, 0)$, в стандартном скалярном произведении.

Δ а) $1/3(1, -2, 2)$; б) например, $1/2(1, -1, 1, -1)$; в) например, $1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$; г) $1/\sqrt{3}(2, -1)$;

д) $1/\sqrt{7}(1, -1, 1)$; е) $1/2(1+i, -1+i)$; ж) $1/2(1-i, 1, -i)$. ~~⚡~~

18. Применить процесс ортогонализации к линейно-независимой системе векторов вещественного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n:$$

- а) $(1, -3, 1), (4, -5, 3)$; б) $(1, 0, -1, 3), (2, 1, -1, 3)$;
 в) $(2, 0, 1), (4, -5, 3), (1, 7, -3)$; г) $(1, 2, 2), (1, 1, 0), (0, 1, -4)$;
 д) $(2, 1, -2), (4, 1, 0), (0, 1, 0)$; е) $(1, 1, -1, 0), (1, 2, 0, -1), (0, 0, 1, 0)$.
 18. а) $(1, -3, 1), (2, 1, 1)$; б) $(1, 0, -1, 2), (1, 2, 1, 0)$; в) $(2, 0, 1), (1, -1, -2), (1, 5, -2)$;
 г) $(1, 2, 2), (2, 1, -2), (2, -2, 1)$; д) $(2, 1, -2), (1, 0, 1), (-1, 4, 1)$;
 е) $(1, 1, -1, 0), (0, 1, 1, -1), (1, 0, 1, 1)$. $\blacktriangle$

19. Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова или унитарного пространства своими координатами. Пользуясь процессом ортогонализации Штурма, построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов:

- а) $(1, 2, 1), (4, 4, 1), (-1, -3, -1)$; б) $(1, 1, -1), (-4, 0, 5), (-8, 2, 0)$;
 в) $(3, -1, -2), (4, 0, -1), (5, 1, 0)$; г) $(1, 2, -1, 1), (-5, -5, 4, -2), (-3, 6, 2, 0)$;
 д) $(1, 0, 1, -1), (6, 0, 4, -5), (3, 2, -5, 4)$;
 е) $(1, -3, 2, 1), (-1, 7, -3, -2), (2, -2, 3, 1)$;
 ж) $(1, -1, 1, -1), (4, -2, 4, -2), (-2, 7, -4, 7), (2, 7, 2, 5)$;
 з) $(i, 1, -i), (2, 0, -1), (0, 2, -i)$;
 и) $(1, -1, 1 + i), (1, -i, -2 + i), (1 + 2i, 4 - i, -1)$.
 Δ а) $1/\sqrt{6}(1, 2, 1), 1/\sqrt{2}(1, 0, -1), 1/\sqrt{3}(1, -1, 1)$; б) $1/\sqrt{3}(1, 1, -1), 1/\sqrt{14}(-1, 3, 2), 1/\sqrt{42}(-5, 1, -4)$; в) $1/\sqrt{14}(3, -1, -2), 1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$; г) $1/\sqrt{7}(1, 2, -1, 1), 1/\sqrt{7}(-2, 1, 1, 1), 1/\sqrt{14}(0, 2, 1, -3)$; д) $1/\sqrt{3}(1, 0, 1, -1), 1/\sqrt{2}(1, 0, -1, 0), 1/\sqrt{10}(1, 2, 1, 2)$; е) $1/\sqrt{15}(1, -3, 2, 1), 1/\sqrt{3}(1, 1, 1, 0)$; ж) $1/2(1, -1, 1, -1), 1/2(1, 1, 1, 1), 1/\sqrt{2}(1, 0, -1, 0), 1/\sqrt{2}(0, 1, 0, -1)$;
 з) $1/\sqrt{3}(i, 1, -i), 1/\sqrt{2}(1, i, 0)$; и) $1/2(1, -1, 1 + i), 1/\sqrt{3}(1 - i, 0, -1), \sqrt{3}/6(1, 3, 1 + i)$. $\blacktriangle$

20. Исходя из системы векторов f_1, f_2, f_3 арифметического пространства с заданным скалярным произведением с помощью процесса ортогонализации и нормировки построить ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 , если:

- а) $f_1(1, 0, 0), f_2(0, 1, 0), f_3(0, 0, 1)$;
 $\alpha) (x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$;
 $\beta) (x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 7x_3y_3$;
 б) $f_1(1, 0, -2), f_2(0, 1, -2), f_3(4, 0, 0)$;
 $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$;
 в) $f_1(0, 1, -1), f_2(2, 0, 1), f_3(-2, 4, 0)$;
 $(x, y) = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_3y_3$.
 Δ а. $\alpha) (1/2, 0, 0), (-1/2, 1, 0), 1/2\sqrt{2}(-1, 2, 2)$; а. $\beta) (1, 0, 0), (-2, 1, 0), 1/\sqrt{3}(-4, 2, 1)$,
 б) $1/4(1, 0, -2), 1/\sqrt{2}(-1, 1, 0), 1/4(-1, 4, 2)$, в) $1/\sqrt{5}(0, 1, -1), 1/2\sqrt{3}(-2, -2, 1), 1/2\sqrt{5}(0, 4, 1)$. $\blacktriangle$

21. Пусть e_1, e_2, e_3 – ортонормированная система базисных векторов трехмерного унитарного пространства. Показать, что система векторов: $a_1 = 1/3(2e_1 + 2e_2 - e_3)$; $a_2 = 1/3(2e_1 - e_2 + 2e_3)$; $a_3 = 1/3(e_1 - 2e_2 - 2e_3)$ также образует ортонормированную систему базисных векторов этого пространства.

22. Ортонормировать базис: $i - j, i + 2j, i + j - k$.

Δ $1/\sqrt{2}(i - j), 1/\sqrt{2}(i + j), -k$. ~~⚡~~

23. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:

а) $(1, 2, 1, 3), (4, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 0)$;

б) $(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$;

в) $(2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8)$.

Δ а) $(1, 2, 1, 3), (10, -1, 1, -3), (19, -87, -61, 72)$; б) $(1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)$; в) $(2, 1, 3, -1), (3, 2, -3, -1), (1, 5, 1, 10)$. ~~⚡~~

24. В ортонормированном базисе V_4 дополнить пару векторов до ортогонального базиса:

а) $(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, -1)$; б) $(1, -1, 2, 0), (-1, 1, 1, 3)$;

в) $(1, 2, 1, 2), (1, 1, -1, -1)$; г) $(4, 0, -1, 0), (1, -6, 1, 2)$.

Δ а) $(-1, 0, 1, 0), (1, -6, 1, 2)$; б) $(1, 1, 0, 0), (1, -1, -1, 1)$; в) $(1, -1, -1, 1), (2, -1, 2, -1)$; г) $(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, -1)$. ~~⚡~~

25. Построить ортонормированный базис пространства, приняв за два вектора этого базиса векторы $e_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2), e_2(1/6, 1/6, 1/2, -5/6)$.

Δ $e_1, e_2, e_3 = 1/\sqrt{26}(0, -4, 3, 1), e_4 = 1/3\sqrt{26}(-13, 5, 6, 2)$. ~~⚡~~

3) Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны и дополнить их до ортогональных базисов:

а) $(1, -2, 2, -3), (2, -3, 2, 4)$; б) $(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3)$.

Δ а) $(2, 2, 1, 0), (5, -2, -6, -1)$; б) $(1, -2, 1, 0), (25, 4, -17, -6)$. ~~⚡~~

4) Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

а) $(2/3, 1/3, 2/3), (1/3, 2/3, -2/3)$; б) $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.

Δ а) $(2/3, -2/3, -1/3)$; б) $(1/2, -1/2, 1/2, -1/2), (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)$. ~~⚡~~

5) В пространстве всех многочленов степени не выше 2 на интервале $(0, 1)$ скалярное

произведение определено так: $(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$. Показать, что это будет

унитарное пространство размерности 3. Показать, что если в этом пространстве

ортонормировать последовательность $1, x, x^2$, то получим $1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)$).

- 6) Доказать, что полиномы вида $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ образуют ортонормированную систему в пространстве со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \text{ Эти полиномы называются полиномами Чебышева I-го рода.}$$

- 7) Многочлены, определенные формулами:

$$L_0(x) = 1, L_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k], \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

называются **многочленами Лежандра**. Доказать, что многочлены Лежандра $L_0, L_1, \dots, L_n$ образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве P_n многочленов степени не выше n со

скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Найти норму этих многочленов.

$$\Delta \quad \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \quad \blacktriangle$$

- 8) В пространстве полиномов от x степени не выше 3 функции $1, x, x^2, x^3$ образуют базис. Ортогонализировать этот базис, если скалярное произведение, задано формулой:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 P(x)\overline{Q(x)}dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{P(x)\overline{Q(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P(x)\overline{Q(x)}dx.$$

В результате ортогонализации системы векторов $1, x, x^2, x^3$ с помощью указанных скалярных произведений, получим первые четыре а) полинома Лежандра; б) полинома Чебышева I-го рода; в) полинома Эрмита.

$$\Delta \text{ а) } 1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x; \quad \text{б) } 1, x, x^2 - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{3}{4}x; \quad \text{в) } 1, x, x^2 - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{3}{2}x. \quad \blacktriangle$$

- 9) Пусть V – пространство непрерывных функций на интервале $(0, +\infty)$, в котором определено скалярное произведение

$$(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)\overline{Q(x)}dx.$$

Дан базис этого пространства $\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}, \dots\}$. Проверить, будет

ли этот базис ортогональным и, если он не ортогонален, то найти первые четыре элемента ортогонального базиса.

Δ Не ортогонален; $e_1 = \sqrt{3}e^{-x}$, $e_2 = \sqrt{3}e^{-x}(3x-1)$, $e_3 = \sqrt{3}e^{-x}\left(\frac{9}{2}x^2 - 6x + 1\right)$,
 $e_4 = \frac{1}{\sqrt{11}}e^{-x}\left(\frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - 3x - 1\right)$. ~~⚡~~

10) Найти базис ортогонального дополнения $L^\perp$ подпространства L , натянутого на векторы:
 $a_1(1, 0, 2, 1)$, $a_2(0, 1, -2, 1)$.

Δ Например, $b_1(2, -2, -1, 0)$, $b_2(1, 1, 0, -1)$. ~~⚡~~

11) В трехмерном пространстве векторов построить ортогональное дополнение к подпространству векторов: $\alpha(i-j)$. Δ $\beta(i+j) + \gamma k$. ~~⚡~~

12) Найти базис ортогонального дополнения $L^\perp$ подпространства L , если L задано системой уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
.

Δ Например, $(1, 0, 6, 0)$, $(3, 2, 0, -2)$. ~~⚡~~

13) В пространстве полиномов степени не выше 3 построить ортогональное дополнение к подпространству полиномов, обращающихся в нуль при $x = 0$. За скалярное произведение принять:

а) $\int_{-1}^1 P(x)\overline{Q(x)}dx$; б) $\int_{-1}^1 P(x)\overline{Q(x)}x^2dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}P(x)\overline{Q(x)}dx$.

Δ а) $\alpha\left(x^2 - \frac{3}{5}\right)$; б) $\alpha\left(x^2 - \frac{5}{7}\right)$; в) $\alpha\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)$. ~~⚡~~

14) В ортогональном базисе $1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x$ евклидова пространства со скалярным произведением

$(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$ найти координаты вектора:

а) x^3 ; б) x^2 ; в) $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Δ а) $(0, 3/5, 0, 1)$; б) $(1/3, 0, 1, 0)$; в) $(a_0 + a_2/3, a_1 + (3/5)a_3, a_2, a_3)$. ~~⚡~~

15) Найти ортогональную проекцию вектора $x^3 - x + 1$ на $\Pi(1, x)$, если скалярное произведение задано в виде:

а) $(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)\overline{Q(x)}dx$; б) $(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)\overline{Q(x)}x^2dx$.

Δ а) $1 - (2/5)x$; б) $x - (2/7)x$. ~~⚡~~

16) Найти проекцию вектора $x^3 - ix + 1$ на $\mathcal{L}(1, x)$ со скалярным произведением $(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x) \overline{Q(x)} x^2 dx$. Δ $1 + (5/7 + i)x$. ~~Δ~~

17) Подпространство L евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства своими координатами. Найти ортогональную проекцию на L и ортогональную составляющую относительно L вектора x , заданного в этом же базисе своими координатами:

- а) $a(10, -20, 10)$, $x(0, 1, 0)$; б) $a_1(1, 1, 1)$, $a_2(4, 0, 5)$, $x(7, -3, -1)$;
 в) $a(4, 3, 2, 1)$, $x(1, -1, 1, -1)$; г) $a_1(1, -1, 1, 0)$, $a_2(2, -1, 0, 1)$, $x(1, 0, 2, -2)$;
 д) $a_1(1, -1, 1, 1)$, $a_2(1, 4, -1, 0)$, $x(2, 1, 1, 0)$;
 е) $a_1(1, 0, -1, 1)$, $a_2(3, 3, -2, 1)$, $a_3(-1, 6, 3, -5)$, $x(1, 4, 0, 2)$;
 ж) $a_1(2, 0, -1, -1)$, $a_2(1, -1, 1, -1)$, $a_3(1, 1, -1, -1)$, $x(1, 2, 0, -1)$;
 з) $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(5, 1, 1, 3)$, $a_3(3, -1, 1, 0)$, $x(5, 4, -3, -2)$.

- Δ а) $1/3(-1, 2, -1)$, $1/3(1, 1, 1)$; б) $(2, -2, 3)$, $(5, -1, -4)$; в) $1/15(4, 3, 2, 1)$, $1/15(11, -18, 13, -16)$;
 г) $(0, -1, 2, -1)$, $(1, 1, 0, -1)$; д) $1/2(3, 2, 1, 2)$, $1/2(1, 0, 1, -2)$; е) $(2, 3, -1, 0)$, $(-1, 1, 1, 2)$;
 ж) $1/2(1, 3, -1, -3)$, $1/2(1, 1, 1, 1)$; з) $(3, 0, -1, 2)$, $(2, 4, -2, -4)$. ~~Δ~~

18) Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_k)$:

- а) $x(4, -1, -3, 4)$, $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 2, 2, -1)$, $a_3(1, 0, 0, 3)$;
 б) $x(5, 2, -2, 2)$, $a_1(2, 1, 1, -1)$, $a_2(1, 1, 3, 0)$, $a_3(1, 2, 8, 1)$;

в) $x(7, -4, -1, 2)$, а L задано уравнениями:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

- Δ а) $y = 3a_1 - 2a_2 = (1, -1, -1, 5)$; $z = (3, 0, -2, -1)$; б) $y = 2a_1 - a_2 = (3, 1, -1, -2)$; $z = (2, 1, -1, 4)$;
 в) $y = (5, -5, -2, -1)$; $z = (2, 1, 1, 3)$. ~~Δ~~

19) Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на подпространство L натянутое на векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$:

- а) $x(5, 2, -2, 2)$, $a_1(2, 1, 1, -1)$, $a_2(1, 1, 3, 0)$;
 б) $x(-3, 5, 9, 3)$, $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(2, -1, 1, 1)$, $a_3(2, -7, -1, 1)$.

- Δ а) $y(3, 1, -1, -2)$, $z(2, 1, -1, 4)$; б) $y(1, 7, 3, 3)$, $z(-4, -2, 6, 0)$. ~~Δ~~

20) Линейное подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением натянуто на векторы $f_1, f_2, \dots, f_m$. Найти угол между вектором x и подпространством L :

- а) $x(0, 1, 1)$, $f_1(1, 0, 1)$, $f_2(0, 1, 0)$; б) $x(5, 1, -2)$, $f_1(1, -1, 2)$, $f_2(1, 1, 3)$;

- в) $x(1, -1, 0), f_1(0, 2, 1), f_2(1, 3, 0)$; г) $x(-1, 1, 2), f_1(1, 2, 1), f_2(2, 1, -1)$;
 д) $x(-2, 2, 1, 0), f_1(1, 2, 3, 0), f_2(1, 0, 1, -2)$;
 е) $x(1, 0, 2, 1), f_1(3, 3, -1, -1), f_2(2, 1, 0, -2)$;
 ж) $x(1, 1, 0, 1), f_1(1, -1, 1, -1), f_2(1, 1, 3, 3), f_3(3, -2, 4, -1)$;
 з) $x(1, 1, 1, 3), f_1(1, -1, 1, -2), f_2(1, 0, 1, -1), f_3(3, 1, 2, -1)$;

Δ а) $\pi/6$; б) $\pi/2$; в) $\arccos \sqrt{3/7}$; г) 0; д) $\arccos 1/\sqrt{3}$; е) $\pi/2$; ж) $\pi/4$; з) $\pi/6$. ~~А~~

21) Найти угол между $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ и вектором x :

- а) $x(1, 3, -1, 3), a_1(1, -1, 1, 1), a_2(5, 1, -3, 3)$;
 б) $x(2, 2, -1, 1), a_1(1, -1, 1, 1), a_2(-1, 2, 3, 1), a_3(1, 0, 5, 3)$;
 в) $x(2, 2, 1, 1), a_1(3, 4, -4, -1), a_2(0, 1, -1, 2)$.

Δ а) $\pi/4$; б) $\pi/2$; в) $\pi/3$. ~~А~~

22) Определить расстояние от точки x до линейного многообразия $a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m$:

- а) $x(1, 2, -1, 1), a_0(0, -1, 1, 1), a_1(0, -3, -1, 5), a_2(4, -1, -3, 3)$;
 б) $x(0, 0, 0, 0), a_0(1, 1, 1, 1), a_1(1, 2, 3, 4)$.

Δ а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{2/3}$. ~~А~~

23) Найти расстояние от точки, заданной вектором x до линейного многообразия, заданного системой уравнений:

а) $x(4, 2, -5, 1)$;

б) $x(4, -1, 3, 7)$;

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}.$$

Δ а) 5; б) 7. ~~А~~

24) Рассматривается пространство полиномов, степени не выше n .

Скалярное произведение: $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Определить

расстояние от начала координат до линейного многообразия состоящего из полиномов: $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Δ $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. ~~А~~

25) Доказать, что определитель Грамма не изменится при применении к векторам $a_1, a_2, \dots, a_k$ процесса ортогонализации, т.е. в результате ортогонализации векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ перейдут в векторы $b_1, b_2, \dots, b_k$ и $G(a_1, a_2, \dots, a_k) = G(b_1, b_2, \dots, b_k) = (b_1, b_1)(b_2, b_2)\dots(b_k, b_k)$. Пользуясь этим выяснить

геометрический смысл $G(a_1, a_2)$ и $G(b_1, b_2)$, предполагая векторы линейно-независимыми.

19. $G(a_1, a_2)$ = квадрату площади параллелограмма на векторах a_1, a_2 ;

$G(a_1, a_2, a_3)$ = квадрату объема параллелепипеда на векторах a_1, a_2, a_3 . $\triangleleft$

26) Пусть есть система линейно-независимых векторов $g_1, g_2, \dots, g_n$. Доказать, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ полученные из $g_1, g_2, \dots, g_n$ процессом ортогонализации имеют вид:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}} \begin{vmatrix} (g_1 g_1) & (g_1 g_2) & \dots & (g_1 g_{k-1}) & g_1 \\ (g_2 g_1) & (g_2 g_2) & \dots & (g_2 g_{k-1}) & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_k g_1) & (g_k g_2) & \dots & (g_k g_{k-1}) & g_k \end{vmatrix},$$

где $G_0 = 1$, $G_k = G(g_1, g_2, \dots, g_k)$ и $|e_k|^2 = \frac{G(g_1 \dots g_k)}{G(g_1 \dots g_{k-1})}$.

27) С помощью процесса ортогонализации Грамма (см. зад. 48), ортогонализировать следующие системы векторов:

а) $(1, 2, 1), (4, 4, 1), (-1, -3, -1)$;

б) $(1, 1, -1), (-4, 0, 5), (-8, 2, 0)$;

в) $(3, -1, -2), (4, 0, -1), (5, 1, 0)$.

Δ а) $1/\sqrt{6}(1, 2, 1), 1/\sqrt{2}(1, 0, -1), 1/\sqrt{3}(1, -1, 1)$; б) $1/\sqrt{3}(1, 1, -1), 1/\sqrt{14}(-1, 3, 2), 1/\sqrt{42}(-5, 1, -4)$; в) $1/\sqrt{14}(3, -1, -2), 1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$. $\triangleleft$

ЛИТЕРАТУРА

9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
10. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
11. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.
12. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1973.
13. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.
14. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.
15. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2001.
16. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.

ЧАСТЬ 3

РАЗДЕЛ 1

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

§ 1. Основные понятия и теоремы

Def: Пусть задана квадратная матрица A $n^{\text{го}}$ порядка с элементами a_{ij} , где i определяет номер строки, j – номер столбца и при этом через x_j

обозначены столбцы матрицы A , т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и $x_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Определителем ($\det A$) квадратной матрицы A со столбцами x_j называется функционал $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно столбцов этой матрицы который:

а) линеен по каждому аргументу (полилинеен):

$$\varphi(x_1, \dots, \alpha x_{i1} + \beta x_{i2}, \dots, x_n) = \alpha \varphi(x_1, \dots, x_{i1}, \dots, x_n) + \beta \varphi(x_1, \dots, x_{i2}, \dots, x_n);$$

б) абсолютно антисимметричен (антисимметричен по любой паре аргументов): $\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$;

в) подчиняется условию нормировки: $\varphi(e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Тогда, учитывая общий вид полилинейного антисимметричного функционала, имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \\ j_k \neq j_p}} (-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \quad (1)$$

где $N(j_1 j_2 \dots j_n)$ – количество беспорядков в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$

.

Говорят, что в перестановке имеется беспорядок, если $j_k > j_m$ и $k < m$.

Из формулы (1) для определителя второго порядка получаем

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Определитель третьего порядка равен сумме шести ($3! = 6$) слагаемых.

Для их составления удобно использовать **правило треугольников**.

Произведение элементов, стоящих на главной диагонали а также произведения элементов, являющихся вершинами двух треугольников на

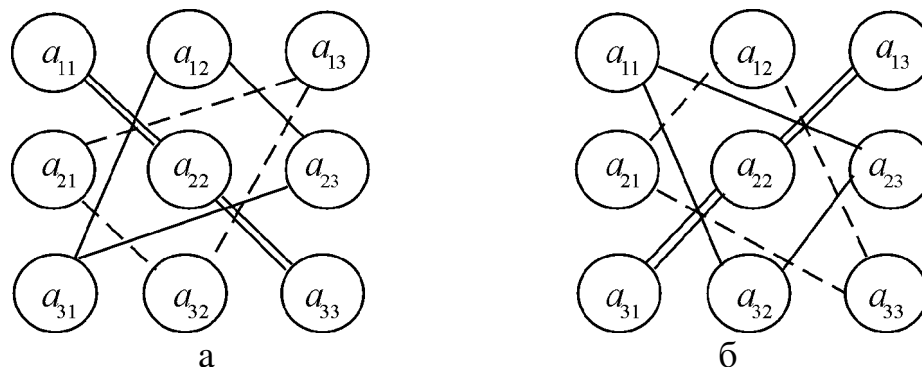


Рис. 1

рис. 1.а, берутся со множителем $+1$, а произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, а также произведения элементов, являющихся вершинами двух треугольников на рис. 1. б, берутся со множителем -1 , т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Свойства определителей:

1°. $\det A = \det A^T$. Из этого свойства следует, что строки и столбцы определителя равноправны. В силу этого все свойства, сформулированные для столбцов, могут быть аналогично сформулированы и для строк определителя.

2°. Если один из столбцов определителя равен нулю, то определитель равен нулю.

3°. Общий множитель в столбце определителя можно выносить за знак определителя.

4°. Если в определителе поменять два столбца местами, то определитель поменяет знак.

5°. Определитель, имеющий два равных столбца, равен нулю.

6°. Если столбцы определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю.

$$7°. \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{1k} + a''_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a'_{2k} + a''_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a'_{nk} + a''_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a'_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a'_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a''_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a''_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8°. Определитель не изменится, если к столбцу определителя добавить линейную комбинацию других столбцов.

9°. Определитель произведения двух квадратных матриц $n^{\text{го}}$ порядка равен произведению определителей этих матриц.

Def. Если у матрицы A порядка n вычеркнуть i строку и j столбец, то оставшиеся элементы образуют матрицу $(n - 1)^{\text{го}}$ порядка. Ее определитель называется минором $(n - 1)^{\text{го}}$ порядка, дополнительным к элементу a_{ij} матрицы A и обозначается M_{ij} , а величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} матрицы A .

10°. $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$. (Раскрытие определителя по элементам $j^{\text{го}}$ столбца и по элементам $i^{\text{ой}}$ строки).

$$11°. \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ji} A_{ki} = \delta_{jk} \det A.$$

12°. (Теорема Лапласа).

$$\det A = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k}} M_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k}} A_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k}} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k}} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+j_1+\cdots+j_k} \overline{M}_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k}}.$$

Здесь $M_{\substack{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k \\ j_1 \ j_2 \ \dots \ j_k}}$ – минор составленный из элементов матрицы A , стоящих на пересечении строк $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$, а $A_{\substack{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k \\ j_1 \ j_2 \ \dots \ j_k}}$ – алгебраическое дополнение к этому минору.

13°. (О изменении элементов определителя).

Если $D = |a_{ij}|$, а $D' = |a_{ij} + x|$, то $D' = D + x \cdot \sum_{i,j=1}^n A_{ij}$.

§ 2. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение беспорядка в данной перестановке чисел: 1, 2, 3, ..., n . Чему равно число беспорядков в перестановке: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$?
2. Сколько слагаемых содержит формула для вычисления определителя $n^{\text{го}}$ порядка?
3. Известно, что A – матрица 4×4 и $\det A = 3$. Чему равен $\det(5A)$?
4. Дайте определение минора элемента a_{ij} и алгебраического дополнения элемента a_{ij} . Чем они отличаются?
5. Запишите формулы разложения определителя $5^{\text{го}}$ порядка по $3^{\text{му}}$ столбцу и по $2^{\text{ой}}$ строке.
6. Запишите формулы разложения определителя $4^{\text{го}}$ порядка по минорам, стоящим в $1^{\text{й}}$ и $2^{\text{й}}$ строках.
7. Устно вычислите определители: $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

§3. Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. I способ. Вычислим определитель разложением по третьей (например) строке (свойство 10°):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}(-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \\ + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-9) + 2(-3) + 3(-2) = -3.$$

Входящие сюда определители третьего порядка вычислены по правилу треугольников.

II способ. Вычислим определитель разложением по минорам 2^{го} порядка (например, стоящим в 1^й и 2^й строках исходного определителя, свойство 12°). Всего таких миноров будет шесть (1, 2 столбцы; 1, 3 столбцы; 1, 4 столбцы; 2, 3 столбцы; 2, 4 столбцы; 3, 4 столбцы). Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - (-6) \cdot (-3) + \\ + (-13) \cdot (-1) = -3.$$

III способ. Вычислим определитель методом приведения определителя к треугольному виду. Для этого воспользуемся свойством 8°.

а) 1^ю строку прибавим к 3^й строке;

б) 1^ю строку, умноженную на (-2) прибавим к 4^й строке.

При этом определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -3 \end{vmatrix}$$

Далее: в) из 1^й строки вычтем 2^ю строку;

г) 2^ю строку, умноженную на 3, прибавим к 4^й строке, умноженной на

2. При этом определитель увеличится вдвое за счет умножения 4^й строки на 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix};$$

д) В последнем определителе 3^ю строку умножим на 2 и прибавим к 4^й строке. Определитель не изменится. Получим:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Определитель треугольного вида вычисляется как произведение диагональных элементов. Приходим к выводу, что исходный определитель равен -3 .

Задача 2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & x & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & x/2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & x/3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x/4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Для вычисления определителя воспользуемся методом выделения линейных множителей. Прежде всего, отметим, что исходный определитель является многочленом 4^й степени относительно x . Кроме того, при $x=2$ первая и вторая строки совпадают, т.е. определитель равен нулю. Следовательно, $x = 2$ является корнем многочлена. Далее

замечаем, что при $x = 6$, $x = 12$, $x = 20$ первая строка совпадает с третьей, четвертой и пятой строкой соответственно. Значит, мы установили все четыре корня полинома, т.е.

$$\det A = C(x-2)(x-6)(x-12)(x-20).$$

Для нахождения C , заметим, что в определитель x^4 входит с коэффициентом равным $1/24$, а в многочлен, стоящий в правой части с коэффициентом равным 1 . Тогда $C = 1/24$. Таким образом:

$$\det A = \frac{1}{24}(x-2)(x-6)(x-12)(x-20).$$

Задача 3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение. Ясно, что исходный определитель получится, если ко всем

элементам определителя $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ прибавить $x = 4$. Тогда воспользуемся

методом изменения элементов определителя (свойство 13°). Получаем:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 4 \sum_{i,j=1}^5 A_{ij}.$$

Определитель диагонального вида равен произведению диагональных элементов ($5! = 120$). Алгебраические дополнения равны: $A_{11} = 5! = 120$; $A_{22} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$; $A_{33} = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$; $A_{44} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ и $A_{55} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Все остальные $A_{ij} = 0$. Получаем:

$$\det A = 120 + 4(120 + 60 + 40 + 30 + 24) = 120 + 4 \cdot 274 = 1216.$$

Задача 4. Вычислить определитель $n^{\text{го}}$ порядка $\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$

Решение. Раскроем определитель по 1^й строке:

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}, \text{ и последний определитель раскроем по 1}^{\text{м}} \text{ столбцу.}$$

Получаем:

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 4\Delta_{n-2}.$$

(*)

Записанное соотношение называется **рекуррентным соотношением** и позволяет выразить Δ_n через такие же определители более низкого порядка.

Из (*) получаем:

$$\begin{aligned} 20. \Delta_n - \Delta_{n-1} &= 4(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}) = 4^2(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3}) = \dots = 4^{n-2}(\Delta_2 - \Delta_1) = \\ &= 4^{n-2}(21 - 5) = 4^n. \end{aligned}$$

$$21. \Delta_n - 4\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - 4\Delta_{n-2} = \Delta_{n-2} - 4\Delta_{n-3} = \dots = \Delta_2 - 4\Delta_1 = 21 - 4 \cdot 5 = 1.$$

Имеем систему уравнений: $\begin{cases} \Delta_n - \Delta_{n-1} = 4^n \\ \Delta_n - 4\Delta_{n-1} = 1 \end{cases}$. Вычитая из 1^{го} уравнения

$$2^{\text{е}}, \text{ получаем: } 3\Delta_{n-1} = 4^n - 1. \text{ Таким образом: } \Delta_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

25. Определить число беспорядков в перестановках (за исходное расположение всегда, если нет особых указаний, применяется расположение 1, 2, 3, ... в возрастающем порядке):

- а) 2, 1, 5, 4, 3; б) 6, 3, 2, 5, 1, 4; в) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2;
 г) 2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4; д) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
 Δ а) 4; б) 10; в) 18; г) 18; д) 36. ~~А~~

26. Выяснить какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и, если входят, то с каким знаком:

- а) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$; б) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$;
 в) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; г) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$;
 д) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$; е) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$;
 ж) $a_{12}a_{23}a_{34} \dots a_{n-1n}a_{25}a_{kk} \ (1 \leq k \leq n)$; з) $a_{12}a_{23}a_{34} \dots a_{n-1n}a_{n1n}$.

Δ а) –; б) не входит в определитель; в) +; г) +; д) не входит в определитель; е) +; ж) не входит в определитель; з) $(-1)^n$. ~~А~~

27. Выбрать значения i и k так, чтобы следующие произведения входили бы в определители соответствующего порядка с указанным знаком:

- а) $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ с « + »; б) $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ с « – »;
 в) $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ с « + ».

Δ а) $i = 1, k = 4$; б) $i = 5, k = 1$; в) $i = 6, k = 2$. ~~А~~

28. Пользуясь только определением, найти члены определителей

содержащие x^4 и x^3 : а) $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$; б)

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } 2x^4, -x^3; \quad \text{б) } 10x^4, -5x^3. \quad \nabla$$

29. Найти члены определителя $4^{\text{го}}$ порядка а) содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком « + »; б) содержащие элемент a_{23} и входящие в определитель со знаком « - ».

$$\Delta \quad \text{а) } a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}, a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}, a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}; \quad \text{б) } a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, \\ a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}. \quad \nabla$$

30. Выписать все члены определителя $5^{\text{го}}$ порядка имеющие вид $a_{14}a_{23}a_{3p3}a_{4p4}a_{5p5}$. Что получится, если из их суммы вынести $a_{14}a_{23}$ за

$$\text{скобки?} \quad \Delta \quad -a_{14}a_{23} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}. \quad \nabla$$

31. Как изменится определитель $n^{\text{го}}$ порядка, если все его столбцы записать в обратном порядке? Δ Определитель умножится на $(-1)^{n(n-1)/2}$. ∇

32. Не раскрывая определителей показать, что:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \\ \text{б) } & \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \\ \text{в) } & \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b); \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Δ а) свойства 7, 3; б) свойства 7, 3, 5; в) свойства 7, 3, 5; г) свойство 5; д) свойство 5. ~~А~~

33. Найти миноры элементов a_{13}, a_{24}, a_{43} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a_{13} & 5 \\ -4 & 1 & -2 & a_{24} \\ 0 & 0 & -7 & 4 \\ 6 & 0 & a_{43} & 3 \end{vmatrix}$.

Δ $M_{13} = 24; \quad M_{24} = -126; \quad M_{43} = 52.$ ~~А~~

34. Найти алгебраические дополнения элементов a_{14}, a_{23}, a_{42} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & a_{14} \\ 0 & 2 & a_{23} & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & a_{42} & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Δ $A_{14} = 8; \quad A_{23} = 0; \quad A_{42} = -12.$ ~~А~~

35. Вычислить определитель, раскрывая его по 3^{ей} строке $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Δ $8a + 15b + 12c - 19d.$ ~~А~~

12. Вычислить определитель, раскрывая его по 2^{му} столбцу $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 1 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

Δ $5a - 5b - 5c + 5d.$ ~~А~~

Вычислить следующие определители, понижая их порядок с помощью разложения по элементам некоторой строки или столбца:

а) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & l & z & 0 & f \\ g & h & k & u & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$

Δ а) $abcd;$ б) $abcd;$ в) $xyzuv.$ ~~А~~

6) Вычислить следующие определители 3^{го} порядка:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Δ а) 0; б) 6; в) 0; г) -2; д) -27; е) -27. ~~Δ~~

7) Вычислить следующие определители 3^{го} порядка:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Δ а) -7; б) 0; в) -1; г) 4; д) 40; е) -3. ~~Δ~~

8) Вычислить следующие определители 3^{го} порядка:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Δ а) 100; б) -5; в) 1; г) 2; д) 4; е) -8. ~~Δ~~

9) Вычислить следующие определители 3^{го} порядка:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ 1 & \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \\ 1 & \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos 2\beta & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & \cos 2\gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } (1 - \varepsilon^3)^2; \quad \text{б) } abc + x(ab + bc + ac); \quad \text{в) } 0; \quad \text{г) } -2(x^3 + y^3); \quad \text{д) } 0; \quad \text{е) } 0. \quad \triangleleft$$

10) Вычислить следующие определители 4^{го} порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } -7; \quad \text{б) } 0; \quad \text{в) } -1; \quad \text{г) } -18. \quad \triangleleft$$

11) Вычислить следующие определители 4^{го} порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{г) }$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } 1; \quad \text{б) } -5; \quad \text{в) } 0; \quad \text{г) } -3. \quad \triangleleft$$

12) Вычислить следующие определители 4^{го} порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a) } 1; \quad \text{б) } 48; \quad \text{в) } 1; \quad \text{г) } abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right). \quad \triangleleft$$

13) Вычислить определители 4^{го} порядка:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{г) }$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a) } -8; \quad \text{б) } -9; \quad \text{в) } -6; \quad \text{г) } -10. \quad \triangleleft$$

14) Вычислить определители 5^{го} порядка:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a) } 52; \quad \text{б) } 5. \quad \triangleleft$$

15) Приведением к треугольному виду вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } n!; \quad \text{б) } 2n+1; \quad \text{в) } x^n(a_0 + a_1 + \dots + a_n); \quad \text{г) } x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right).$$

~~А~~

16) Вычислить определители методом выделения линейных множителей:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}; & \text{б) } & \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & b & c \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}; \\ \text{в) } & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}; & \text{г) } & \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \quad \text{а) } & (x-1)(x-2)\dots(x-n+1); \quad \text{б) } (x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c); \\ & \text{в) } (x^2-1)(x^2-4); \quad \text{г) } x^2 z^2, \text{ указание: определитель не изменится, если 1 столбец поменять местами со 2 столбцом и одновременно 1 строку со второй строкой;} \\ & \text{при } x=0 \text{ определитель равен 0, аналогично по } z. \end{aligned}$$

17) Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix} \quad (x \in \mathbf{R})$$

).

$$\Delta \quad \text{а) } x_i = a_i, i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \text{б) } x_i = a_i, i = 1, 2, \dots, n; \quad \text{в) } x = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad \text{г) } x = 1.$$

~~А~~

18) Используя метод рекуррентных соотношений вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a) } -a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right); \quad \text{б) } 2^{n+1} - 1; \quad \text{в) } \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}. \quad \triangleleft$$

19) Вычислить определители методом представления их в виде суммы определителей:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a) } x^n + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x^{n-1}; \quad \text{б) указание: } x_i \equiv (x_i - a_i + a_i), \\ (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \cdots (x_n - a_n) \left(1 + \frac{a_1}{x_1 - a_1} + \frac{a_2}{x_2 - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n - a_n} \right). \quad \triangleleft$$

20) Вычислить определители методом изменения элементов определителя:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 2 & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta \quad \text{a) } \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} (n^2 + 1); \quad \text{б) } a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right). \quad \triangleleft$$

21) Вычислить определители $n^{\text{го}}$ порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 5 & 3 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

Δ а) 1; б) 3^n ; в) 1; г) x^n ; д) $1-n$; е) $(-2)^{n-1}(5n-2)$. $\triangleleft$

22) Вычислить определители $n^{\text{го}}$ порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

;

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Δ а) $(-2)^{n-2}(1-n)$; б) $n+1$; в) $(-1)^{n-1}(n-1)$; г) 1; д) $(1-(-1)^n)/2$,
указание:

$\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$; е) 0, если $n = 2k+1$; $(-1)^{n/2}$, если $n = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$; указание: $\Delta_n = -\Delta_{n-2}$.

$\triangleleft$

23) Вычислить определители $n^{\text{го}}$ порядка:

$$\Gamma) \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix};$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

РАЗДЕЛ 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

20

При этом

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

матрица системы

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

вектор–столбец правых
частей

$$b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

вектор–столбец
неизвестных

Используя эти обозначения, можно систему записать в матричной форме: $Ax = b$.

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система уравнений называется **однородной**. Если хотя бы одно из b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) отлично от нуля, то система называется **неоднородной**.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Матрица $\tilde{A}$ называется **расширенной матрицей** системы.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**.

При этом система, имеющая единственное решение называется **определенной**, а более одного решения – **неопределенной**.

Если система не имеет решений, то она называется **несовместной**.

При решении систем линейных уравнений предстоит ответить на три вопроса:

- А. Совместна ли система?
- В. Определена ли система?
- С. Как найти решение (или решения) системы.

Правило Крамера. Если система уравнений невырождена (т.е. $\det A \neq 0$), то система определена, т.е. имеет единственное решение, и ее решение

может быть найдено по формулам Крамера: $x_k = \frac{\Delta_k}{\det A}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) где

Δ_k – определитель матрицы, которая получится, если в матрице A системы k -й столбец заменить на столбец свободных членов.

Ранг матрицы. С решением систем непосредственно связано понятие ранга матрицы. **Ранг матрицы** – это наивысший порядок ее минора, отличного от нуля.

При нахождении ранга матрицы важно ориентироваться в том, какие преобразования с матрицей можно делать, не изменяя при этом ее ранг:

- 1°. транспонирование;
- 2°. перестановка двух строк (столбцов);
- 3°. умножение всех элементов строки (или столбца) на число $c \neq 0$;
- 4°. прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца);
- 5°. выбрасывание нулевой строки (столбца);
- 6°. вычеркивание строки (столбца), являющейся линейной комбинацией остальных строк (столбцов).

Однородные системы. Рассматривается однородная система линейных уравнений с n неизвестными: $Ax = 0$.

Если $\text{rang} A = n$ ($\det A \neq 0$), то система определена и имеет только тривиальное решение: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Если $\text{rang} A < n$ ($\det A = 0$), то система имеет и не тривиальные решения. При этом все решения однородной системы уравнений образуют линейное пространство L и $\dim L = n - \text{rang} A$.

Чтобы найти базис пространства решений однородной системы уравнений поступают так:

1. Находят базисный минор матрицы A ;
2. Если строка не входит в базисный минор, то соответствующие ей уравнение является линейной комбинацией остальных уравнений и его можно выбросить.
3. Если столбец не входит в базисный минор, то неизвестная с соответствующим номером назначается свободной. Всего найдется $(n - \text{rang} A)$ свободных неизвестных.
4. Пусть свободные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$. Если дать свободным неизвестным произвольные значения, то получим систему

относительно $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ у которой определитель не равен нулю и, следовательно, система имеет единственное решение.

5. Дадим свободным неизвестным значения $(1, 0, 0, 0, \dots, 0)$, затем $(0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ и т.д. Решая, получившиеся системы, получим соответственно векторы $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_{n-\text{rang} A}$. Эти векторы и образуют базис пространства L решений однородной системы линейных уравнений.
6. Общее решение линейной системы однородных уравнений в этом случае есть линейная комбинация базисных векторов:

$$c_1 \tilde{e}_1 + c_2 \tilde{e}_2 + c_3 \tilde{e}_3 + \dots + c_{n-\text{rang} A} \tilde{e}_{n-\text{rang} A}.$$

Неоднородные системы. Теорема Кронекера – Капелли: Система неоднородных линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда $\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A}$.

При этом, если $\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} = n$, то система имеет единственное решение, и оно может быть найдено по правилу Крамера.

Если $\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} < n$, то система имеет бесконечно много решений, которые образуют линейное многообразие. При этом, сдвигаемое подпространство – это пространство L решений однородной системы уравнений и его базис может быть построен, как уже было указано выше. Вектор сдвига – это частное решение неоднородной системы уравнений и он может быть найден, если в неоднородной системе свободные неизвестные положить равными некоторым произвольным значениям (например, нулевым).

Общее решение неоднородной системы – есть общее решение соответствующей однородной системы плюс некоторое частное решение неоднородной системы.

Последнее утверждение можно записать через аббревиатуры соответствующих терминов: О.Р.Н.С. = О.Р.О.С. + Ч.Р.Н.С.

Обратная матрица. Запишем систему в матричном виде $Ax = b$. Если $\det A \neq 0$ (такая матрица A называется **невырожденной**), то для матрицы A существует матрица A^{-1} такая, что $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ и тогда решение системы может быть записано в виде: $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$.

Таким образом, в случае существования обратной матрицы A^{-1} решение системы пишется в виде $x = A^{-1}b$.

Как же найти обратную матрицу A^{-1} к невырожденной матрице A ?

I способ.

Δ Составим матрицу A_{ik} из алгебраических дополнений к элементам a_{ik} матрицы A ;

Δ Транспонируем матрицу из алгебраических дополнений;

Δ Каждый элемент получившейся матрицы делим на $\det A$.

Получившаяся матрица – A^{-1} .

II способ.

- 1) Запишем матрицу A , а справа от нее, через вертикальную черту, запишем единичную матрицу. Получим матрицу n – строк, $2n$ – столбцов;
- 2) В получившейся матрице с помощью применения к строкам (и только) преобразований не изменяющих ранг матрицы образуем на месте матрицы A – единичную матрицу.

На месте единичной матрицы стоит A^{-1} .

III способ. Справа от матрицы припишем единичную матрицу E , а снизу припишем матрицу $(-E)$. В правом нижнем углу поставим нулевую матрицу. Используя операции только над строками, получившейся матрицы, на месте матрицы $(-E)$, образуем нулевую матрицу. Тогда, в правом нижнем углу будет стоять A^{-1} .

IV способ. Для обращения матрицы, имеющей блочную структуру, т.е. матрицы вида: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A – квадратная матрица порядка $n \times n$, а D

– квадратная матрица $q \times q$, справедливы следующие формулы:

- Первая **формула Фробениуса** (если $\det A \neq 0$):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где } H = D - CA^{-1}B.$$

- Вторая **формула Фробениуса** (если $\det D \neq 0$):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & -K^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CK^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CK^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где } K = A - BD^{-1}C.$$

§ 2. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое ранг матрицы и ее базисный минор? Определяются ли они однозначно?
2. Найти ранг и все базисные миноры матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Как связаны ранг матрицы и размерность линейной оболочки ее строк.
4. Чему равна размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений, если в системе: 10 уравнений, 16 неизвестных и ранг матрицы системы равен 6?
5. Образует ли множество решений неоднородной системы линейное пространство? Какое из свойств линейного пространства не выполнено?
6. Вспомните определение линейного многообразия. Что называется его базисом и размерностью?

7. Как определяется вектор сдвига для линейного многообразия, являющегося множеством решений неоднородной системы?

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 9 & 14 & 20 & 26 \\ 5 & 14 & 22 & 31 & 40 \end{pmatrix}$.

Решение. Прежде всего, отметим, что четвертая строка матрицы есть сумма второй и третьей строк и поэтому при отбрасывании этой строки ранг матрицы не изменится.

1. Отбросим четвертую строку;
2. Из второй и третьей строк матрицы вычтем первую строку, умноженную, соответственно, на 2 и 3;
3. В полученной матрице из третьей строки вычтем вторую, умноженную на 2.

Получим цепочку преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 9 & 14 & 20 & 26 \\ 5 & 14 & 22 & 31 & 40 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 9 & 14 & 20 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице, минор, стоящий в первых, трех столбцах отличен от нуля. Следовательно, ранг исходной матрицы равен трем и минор 3^{го} порядка, стоящий в первых, трех столбцах есть базисный минор матрицы A .

Задача 2. Найти матрицу обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix}$. Тогда,

по определению: $AA^{-1} = E$, т.е. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Перемножая матрицы, получим равенства:

$$\begin{cases} a + 3d - 5g = 1 \\ d + 2g = 0; \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b + 3e - 5h = 0 \\ e + 2h = 1; \\ h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c + 3f - 5m = 0 \\ f + 2m = 0 \\ m = 1 \end{cases},$$

из этих соотношений получаем: $g = 0$, $d = 0$, $a = 1$; далее: $h = 0$, $e = 1$, $b = -3$. И наконец: $m = 1$, $f = -2$, $c = 11$. В итоге приходим к выводу, что:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найти матрицу обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Построим матрицу 6×6 приписав справа от A единичную матрицу E , а внизу матрицу $(-E)$, остальные места заполним нулями.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

С помощью операций над строками матрицы A' образуем на месте $(-E)$ нулевую матрицу. Тогда в правом нижнем углу будет стоять матрица A^{-1} .

1. Ко всем строкам матрицы A^{-1} прибавим третью строку с некоторым множителем, добиваясь того, чтобы все элементы первого столбца, кроме a_{31} , равнялись нулю.
2. Первую строку полученной матрицы разделим на (-3) и, прибавляя к остальным строкам матрицы полученную первую строку с некоторыми множителями, добьемся того, чтобы во втором столбце стояли нули, кроме элемента a_{12} .
3. С помощью второй строки образуем нули в третьем столбце, кроме элемента a_{23} .

Получим цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{1.} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2.} \\ & \xrightarrow{2.} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 5/3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & -2 & 5/3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3.} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -7/3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Найти матрицу обратную к $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Для обращения матрицы применим первую формулу Фробениуса. Полагаем: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Находим последовательно:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad CA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = D - CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \\ H^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1}BH^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \\ A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \\ H^{-1}CA^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

И тогда $M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Привлекательность указанного

способа состоит в том, что для обращения матрицы 4^{го} порядка мы имеем дело с обращением матриц лишь 2^{го} порядка, что существенно проще.

Задача 5. С помощью правила Крамера решить систему линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 11 \\ x + 2y - 6z = -13 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$$

Решение. Главная матрица системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как $\det A = \Delta = 18 \neq 0$, то решение системы может быть найдено по правилу Крамера. Для этого составим определители Δ_x , Δ_y , Δ_z , которые отличаются от главного определителя тем, что в нем столбец коэффициентов при x , y и z соответственно, заменен на столбец свободных членов, т.е.:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -13 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 5 \\ 1 & -13 & -6 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 2 & -13 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя их, находим, что $\Delta_x = 18$, $\Delta_y = 36$, $\Delta_z = 54$.

И тогда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3$.

Задача 6. Решить систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 + 5x_6 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 7x_6 = 0 \\ -x_1 + 14x_3 - 7x_4 + 3x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 21x_3 + x_5 + 16x_6 = 0 \end{cases}$$

Решение. Прежде всего, отметим, что система наверняка совместна, ибо однородная система всегда имеет по меньшей мере нулевое решение.

Займемся нахождением общего решения данной системы. Главная

матрица системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 14 & -7 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 21 & 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$.

Найдем ранг матрицы A . Первую строку матрицы с соответствующими множителями прибавим к остальным строкам матрицы так, чтобы первый столбец обратился в ноль, кроме элемента a_{11} . Получится матрица A_1 такая,

что $\text{rang} A_1 = \text{rang} A$ и $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 14 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 21 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Отмечая, что третья и

четвертая строка матрицы пропорциональны второй строке, заключаем, что

$\text{rang} A_1 = \text{rang} A_2$, где $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, умножим вторую строку

матрицы A_2 на (-2) и прибавим к первой строке. Получим матрицу A_3 :

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, такую что $\text{rang} A_3 = \text{rang} A_2 = 2$. В итоге $\text{rang} A = \text{rang} A_3 = 2$.

Тогда получилась система двух уравнений, из которых можно написать:

$x_1 = 14x_3 - 7x_4 + 3x_5 - x_6$, $x_2 = -7x_3 + 2x_4 - x_5 - 2x_6$ и переменные x_3, x_4, x_5, x_6 – любые. Это и есть решение системы.

Однако, можно (и должно) пойти дальше. Множество решений линейной однородной системы образует линейное пространство L размерности $\dim L = n - \text{rang} A = 6 - 2 = 4$. Для нахождения базисных векторов пространства решений дадим свободным неизвестным x_3, x_4, x_5, x_6 значения: а) 1, 0, 0, 0; б) 0, 1, 0, 0; в) 0, 0, 1, 0; г) 0, 0, 0, 1. Получим четыре вектора, образующие базис L : $e_1 = (14, -7, 1, 0, 0, 0)$; $e_2 = (-7, 2, 0, 1, 0, 0)$; $e_3 = (3, -1, 0, 0, 1, 0)$; $e_4 = (-1, -2, 0, 0, 0, 1)$. Таким образом: $L = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ и любое решение исходной системы может быть записано в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е. в виде: $c_1(14, -7, 1, 0, 0, 0) + c_2(-7, 2, 0, 1, 0, 0) + c_3(3, -1, 0, 0, 1, 0) + c_4(-1, -2, 0, 0, 0, 1)$, где c_1, c_2, c_3, c_4 – любые значения. Это и есть общее решение исходной линейной однородной системы уравнений.

Задача 7. Решить систему линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 14x_3 - 7x_4 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 21x_3 + x_5 = 16 \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы уравнений имеет вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 14 & -7 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 21 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right), \text{ причем, до вертикальной черты, записана}$$

матрица системы, а после вертикальной черты – столбец свободных членов. Преобразовывая матрицу $\tilde{A}$, аналогично тому, как преобразовывалась матрица A в решении предыдущей задачи, получим матрицу A_1 , такую, что $\text{rang } \tilde{A} = \text{rang } A_1 = 2$ и $A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -14 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$. Отсюда можно написать общее решение системы в виде: $x_1 = 1 + 14x_3 - 7x_4 - 3x_5$, $x_2 = 2 - 7x_3 + 2x_4 - x_5$, где x_3, x_4, x_5 – любые.

Это и есть общее решение исходной системы уравнений. Однако, с целью прояснить алгебраическую структуру решения системы, мы отметим следующее:

Так как $\text{rang } \tilde{A} = \text{rang } A_1 = 2 < n = 5$, то множество решений системы представляет собой линейное многообразие. Вектором сдвига этого линейного многообразия является частное решение неоднородной системы уравнений, для нахождения которого дадим свободным неизвестным x_3, x_4, x_5 произвольные значения (например, нули) и получим: $f = (1, 2, 0, 0, 0)$. Сдвигаемым подпространством является пространство решений однородной системы с матрицей A_2 , которая совпадает с главной матрицей исходной системы неоднородных уравнений:

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -14 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Отсюда: $x_1 = 14x_3 - 7x_4 - 3x_5$, $x_2 = -7x_3 + 2x_4 - x_5$, где x_3, x_4, x_5 – любые. Давая свободным переменным x_3, x_4, x_5 значения: а) 1, 0, 0; б) 0, 1, 0; в) 0, 0, 1 получим, соответственно, базисные векторы пространства L решений однородной системы уравнений:

$$e_1 = (14, -7, 1, 0, 0), \quad e_2 = (-7, 2, 0, 1, 0), \quad e_3 = (-3, -1, 0, 0, 1).$$

Тогда решения исходной системы образуют линейное многообразие M :

$$M = \{x \mid x = f + c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3\}, \text{ где } c_1, c_2, c_3 - \text{любые.}$$

Итак, любое решение неоднородной системы уравнений представимо в виде:

$$(1, 2, 0, 0, 0) + c_1(14, -7, 1, 0, 0) + c_2(-7, 2, 0, 1, 0) + c_3(-3, -1, 0, 0, 1).$$

§ 4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

7) Найти ранг матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Δ а) 3; б) 2; в) 1; г) 3. ~~Δ~~

8) Найти ранг матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; г)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Δ а) 2; б) 2; в) 3; г) 3. ~~Δ~~

9) Найти ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

д) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$

Δ а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 2; е) 2. ~~Δ~~

10) Найти ранги следующих матриц в зависимости от значений параметра:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 15 \\ 4 & 6 & \lambda \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$

Δ а) 1 для $\lambda = 10$, 2 для любого $\lambda \neq 10$; б) 1 для $\alpha = 1$; 2 для $\alpha \neq 1$; в) 1 для $\omega = 1$;

2 для $\omega = 0$ и $\omega = -2$; 3 для остальных ω ; г) 2 для $\lambda = 3$; 3 для остальных λ . ~~Δ~~

11) Найти матрицы обратные к заданной:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Δ а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Δ

12) Найти матрицы обратные к заданной:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Δ а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Δ

13) Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Δ а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Δ

14) Решить матричные уравнения:

а) $X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $X \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{2+3c_1}{2} & \frac{3+3c_2}{2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} c_1 & \frac{2-3c_1}{4} \\ c_2 & \frac{9-3c_2}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{г) нет решений.}$$

~~А~~

15) Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{б)}$$

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}; \quad \text{г)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 21 & -14 & -10 \\ -10 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

16) Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}^T;$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1-a & 2-b & 4-c \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

17) Решить системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 17 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 5x + 9y = 4 \end{cases};$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \end{cases}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } (-7, 24); \quad \text{б) } (-1, 1); \quad \text{в) } (2, -1, 1); \quad \text{г) } (1, 2, -1). \quad \Delta$$

18) Решить системы уравнений (немного наблюдательности):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 30 \\ 3x + 3y + 4z + 5t = 34 \\ 4x + 4y + 4z + 5t = 41 \\ x + y + z + t = 10 \end{cases} \\ \\ \text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + \quad \quad \quad x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \quad \quad x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + \quad \quad \quad x_4 + x_5 = -2 \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_5 = -1 \\ x_1 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -1 \end{cases} \end{array}$$

Δ а) (1, 3, 0, 1); б) (4, 3, 2, 1); в) (-5, 4, 3, -2, 1); г) (1, 2, 3, -3, -2, -1). ≡

19) Решить системы уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 6 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2 = 0 \end{cases} \\ \\ \text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases} \end{array}$$

Δ а) (1, 1, 1); б) (0, -2, 0); в) (3, 8, 3); г) (1, 2, 4). ≡

20) Решить системы уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \\ \\ \text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \end{array}$$

Δ а) (0, 0, 0, 0); б) (0, 0, 0, 0, 0); в) (1, -1, 1, -1, 1); г) (1, 1, 0, 0, 0). ≡

21) Решить системы линейных однородных уравнений:

$$\text{а) } x - y = 0; \quad \text{б) } x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \quad \text{в) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0.$$

Δ а) (h, h); б) (h₁ - 2h₂, h₁, h₂); в) (-h₁ - h₂ - h₃ - h₄, h₁, h₂, h₃, h₄). ≡

22) Решить системы линейных однородных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - 8y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } (3h, -3h, 2h); \quad \text{б) } (h, h, h); \quad \text{в) } (h, -2h, h); \quad \text{г) } (h_1 + 10h_2, h_1 + 7h_2, h_1, 2h_2).$$

~~A~~

23) Решить системы линейных однородных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 0 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0 \end{cases};$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } (0, h, -h, h); \quad \text{б) } (-2h_1 - 3h_2, h_1, h_2, 0); \quad \text{в) } (h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2 + h_3, 3h_1 + 2h_2 + h_3); \\ \text{г) } (h_1, h_1 + h_2, h_2, -2h_1, -h_2); \quad \text{д) } (h_1, h_1 + h_2, h_2, -2h_1, -h_2). \quad \text{A}$$

24) Найти базис и размерность пространства решений (фундаментальное решение) системы линейных однородных уравнений и выписать общее решение:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } c(2, 1, 0, 0); \quad \text{б) } (0, 0, 0); \quad \text{в) } (0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad \text{г) } c_1(1, 1, 1, 1, 0, 0) + c_2(-1, 0, 0, 0, 1, 0) + \\ + c_3(0, -1, 0, 0, 0, 1) \quad \text{A}$$

25) Решить системы линейных уравнений методом исключения неизвестных:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases} \end{array}$$

Δ а) (1, 3, -2, 2); б) (-2, 1, 4, 3); в) (0, 2, 1/3, -3/2); г) система не определена:

x_1 и x_2 можно выразить через x_3 и x_4 : $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$; $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$. $\triangleleft$

26) Решить системы методом исключения неизвестных:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases} \end{array}$$

Δ а) нет решений; б) нет решений; в) (2, 1, -3, 1); г) (-2, 1, 4, 3). $\triangleleft$

27) Решить неоднородные системы линейных уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x - 3y = 4; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 2x + y + z = 4; \\ 3x + z = 4; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8. \end{cases} \end{array}$$

Δ а) (2, 0) + c(3, 2); б) (1, 0, 0, 0) + c₁(-1, 1, 0, 0) + c₂(-2, 0, 1, 0) + c₃(-3, 0, 0, 1); в) (0, 0, 4) +

+ c(1, 1, -3); г) (6, 8, 0, 0, 0) + c₁(-1, -1, 1, 0, 0) + c₂(-1, -1, 0, 1, 0) + c₃(-1, -1, 0, 0, 1). $\triangleleft$

28) Исследовать на совместность и решить системы:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}.$$

Δ а) (3, 2, 1); б) (1, 1, 1, -1) + c₁(1, 0, -15, 18) + c₂(0, 1, 10, -12); в) (2, 1, 22/5, 8/5) + c₁(5, 0, 34, 16) + c₂(0, 5, -17, -8); г) (1, 1, 8/13, -11/13) + c₁(13, 0, -27, 3) + c₂(0, 13, 9, -1).

⚡

29) Исследовать системы на совместность и, в случае совместности, решить их:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases} \\ \text{в) } & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases} & \text{г) } & \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Δ а) (-1, 1, 0, 1) + c₁(1, -5, 11, 0) + c₂(-9, 1, 0, 11); б) (2, 1, 0, 0) + c₁(1, 0, 22, -16) + c₂(0, 1, -33, 24); в) (-1, 1, 0, 1) + c₁(1, 0, -3, 0) + c₂(0, 1, -4, 0); г) система не совместна.

⚡

30) Решить неоднородные системы уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1; \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2; \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4 \end{cases} \\ \text{в) } & \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ 20x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 11x_5 = 20 \\ 13x_1 + 4x_2 + 12x_3 + x_4 + 6x_5 = 11; \\ 4x_1 + 7x_2 + 46x_3 - 12x_4 - 7x_5 = -12 \\ x_1 - 2x_2 - 16x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7 \end{cases} & \text{г) } & \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Δ а) (1 - h₁, -h₂, 1 + h₁ + 2h₂, -1 + 2h₁ + 3h₂); б) (-1 - 5h, 6h, -1 - 5h, 1 + 7h); в) (2 + 4h₁ - 11h₂ - 14h₃, 1 - 22h₁ + 32h₂ + 23h₃, -1 + 3h₁, -1 + 15h₂, -1 + 15h₃); г) (-2 - h, -h, 2 + h, 1).

⚡

31) Исследовать системы и найти общее решение в зависимости от λ:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda; \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases} \\ \text{в) } & \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases} & \text{г) } & \begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda; \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Δ а) $\lambda \neq 5$ – нет решений; $\lambda = 5$: $x_1 = \frac{4 - x_3 - 6x_4}{5}$; $x_2 = \frac{3 + 3x_3 - 7x_4}{5}$, x_3, x_4 – любые; б) $\lambda = -2$

– нет решений; $\lambda = 1$: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$: $\left(-\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \frac{1}{2+\lambda}, \frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda} \right)$;

в) Если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$ – единственное решение $\left(\frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2} \right)$; если $\lambda = 1$:

$x_1 = 1 - x_2 - x_3$ (x_2, x_3 – любые); если $\lambda = -2$ – нет решений; г) Если $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq -3$

единственное решение: $x_1 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}$; $x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$; $x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$; $\lambda = 0$ или

$\lambda = -3$ система не совместна. Δ

32) Решить системы линейных уравнений с заданными расширенными матрицами:

а) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -1 \end{array} \right)$; б) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 & 2 \end{array} \right)$;

в) $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \end{array} \right)$; г) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 7 & -15 & 17 \\ 1 & -5 & -6 & 11 & -9 \end{array} \right)$.

Δ а) $x_1 = \frac{-31 - x_3 + x_4}{2}$; $x_2 = \frac{15 - x_3 - 3x_4}{2}$, x_3, x_4 – любые; б) $x_1 = -5 - x_3 + 5x_4$, $x_2 = -4 + x_3 + 4x_4$,

x_3, x_4 – любые; в) $x_4 = 1 + \frac{4}{3}x_3$, $x_2 = 2x_1 - 2$, x_3, x_1 – любые; г) $x_1 = 1 + x_3 - x_4$,

$x_2 = 2 - x_3 + 2x_4$, x_3, x_4 – любые. Δ

33) Решить системы линейных уравнений с заданными расширенными матрицами:

а) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -6 & 11 & -9 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 7 & -15 & 17 \end{array} \right)$; б) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array} \right)$;

в) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$; г) $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -5 & -4 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right)$;

д) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & 4 & 11 & -14 \\ 5 & 4 & 7 & 12 & 30 \end{array} \right)$; е) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & -1 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 11 & -4 & 1 \end{array} \right)$.

Δ а) $x_1 = 1 + x_3 - x_4$, $x_2 = 2 - x_3 + 2x_4$, x_3, x_4 – любые; б) $x_1 = -11 + 11x_3 + 5x_4$, $x_2 = 4 - 2x_3 - x_4$, x_3, x_4 – любые; в) $x_1 = 1 - 3x_3 + x_4$, $x_2 = 1 - 4x_3 + 2x_4$, x_3, x_4 – любые;

г) $x_1 = \frac{-5 - 14x_3 + 2x_4}{11}$, $x_2 = \frac{12 - 6x_3 - 7x_4}{11}$, x_3, x_4 – любые; д) $(8, -5, 10, -5)$;

е) $x_1 = -1 - 3x_3 + 3x_4$, $x_2 = 1 + x_3 - 2x_4$, x_3, x_4 – любые. $\triangleleft$

ЛИТЕРАТУРА

- 28) Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
- 29) Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
- 30) Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.
- 31) Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1973.
- 32) Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.
- 33) Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.
- 34) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2001.
- 35) Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.

ЧАСТЬ 4

РАЗДЕЛ 1

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§1. Основные понятия и теоремы

Def : Закон по которому элементам $x \in V_1$ однозначно ставится в соответствие элемент $y \in V_2$, где V_1, V_2 линейные пространства над полем $\mathbf{K}$, называется оператором из V_1 в V_2 ($y = Ax$).

Если $V_1 = V_2 = V$, то оператор A называется оператором заданным на линейном пространстве V .

Оператор A ($y = Ax$), заданный на линейном пространстве V называется линейным, если $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbf{K}$ выполняется:

1°. $A(x + y) = Ax + Ay$ (аддитивность);

2°. $A(\alpha x) = \alpha Ax$ (однородность).

Действия над линейными операторами.

Пусть A и B линейные операторы на V .

1) $A = B \Leftrightarrow \forall x \in V \quad Ax = Bx$ (равенство операторов);

2) $C = A + B \Leftrightarrow Cx = (A + B)x = Ax + Bx$ (сумма);

3) $C = \lambda A \Leftrightarrow Cx = (\lambda A)x = \lambda(Ax)$ (умножение на число);

Свойства 2), 3) определяют пространство линейных операторов, действующих из пространства V в пространство V (обозначается $L(V, V)$).

4) $C = A \cdot B \Leftrightarrow Cx = (AB)x = A(Bx)$ (умножение);

5) $(AB)(\alpha x + \beta y) = \alpha(AB)x + \beta(AB)y$ – произведение линейных операторов

ров – линейный оператор;

$$6) (\lambda AB) = (\lambda A)B; \quad 7) A(BC) = (AB)C;$$

$$8) (A + B)C = A(B + C) = AB + AC.$$

Свойства 4), 5), 6), 7), 8) вводят на множестве линейных операторов вторую внутреннюю операцию, которая совместно с 2) и 3) позволяет говорить, что множество линейных операторов на V образуют алгебру.

Эта алгебра называется алгеброй линейных операторов на V .

Если A – линейный оператор на V и базис $\{e_i\}_1^n$ в V , то $\forall x \in V$:

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i Ae_i = \left\{ Ae_i = y_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j \right\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i a_{ji} e_j.$$

Из этой записи ясно, что действие линейного оператора на любой элемент пространства полностью определяется его действием на базисные векторы, т.е. числами (a_{ji}) , образующими квадратную матрицу. Эта матрица называется **матрицей линейного оператора в заданном базисе**.

Т°. В заданном базисе $\{e_i\}_1^n$, между квадратными матрицами порядка n

и линейными операторами на V ($\dim V = n$) существует взаимно-однозначное соответствие.

Практическое правило. Для получения матрицы линейного оператора в заданном базисе надо подействовать оператором A на $i^{\text{ый}}$ базисный вектор e_i ; получившийся вектор Ae_i разложить в базисе $\{e_i\}_1^n$; полученные координаты вектора Ae_i в базисе $\{e_i\}_1^n$ записать в $i^{\text{ый}}$ столбец матрицы оператора. Прodelать это для $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Матрицы операторов $C_1 = \lambda A$; $C_2 = A + B$; $C_3 = A \cdot B$ получаются соответственно умножением матрицы оператора A на число λ , сложением и умножением матриц операторов A и B .

Множество $M(A) \equiv \{y \in V \mid y = Ax, x \in V\}$ называется **образом линейного оператора**.

Множество $N(A) \equiv \{x \in V \mid Ax = 0\}$ называется **ядром линейного оператора**.

Образ и ядро линейного оператора являются подпространством пространства V .

Если $N(A) = \{0\}$, то оператор A называется **невыврожденным**.

Т°. Если оператор A – невырожденный, то его матрица A имеет делитель не равный нулю ($\det A \neq 0$).

В этом случае линейный оператор A имеет обратный оператор A^{-1} (т.е. такой, что $A^{-1}A = AA^{-1} = E$).

Подпространство V_1 линейного пространства V , такое, что $\forall x \in V_1 \Rightarrow Ax \in V_1$ называется **инвариантным относительно линейного оператора A** .

При этом:

а) Пересечение и сумма подпространств инвариантных относительно A также инвариантно относительно A ;

б) Если $\det A \neq 0$ и V_1 инвариантно относительно A , то V_1 инвариантно и относительно A^{-1} .

Вектор $x \in V$, $x \neq 0$ называется **собственным вектором** линейного оператора A если $\exists \lambda_0 \in \mathbf{K}$ такое, что $Ax = \lambda_0 x$. При этом λ_0 называется **собственным значением** (числом) линейного оператора A , соответствующим собственному вектору x . Совокупность всех собственных чисел оператора A называется его **спектром**.

Если $x_1, x_2, \dots, x_k$ собственные векторы оператора A , то $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ есть подпространство инвариантное относительно оператора A .

Как найти собственные значения и собственные векторы оператора A ?

1) Решается относительно λ характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ характеристического уравнения являются собственными значениями оператора A ;

2) Для каждого собственного значения λ_i ищутся ненулевые решения однородной системы: $(A - \lambda_i E)x = 0$. Это будут собственные векторы соответствующие собственным значениям λ_i .

Т°. Если линейный оператор имеет n различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы образуют базис и в этом базисе матрица линейного оператора имеет диагональный вид, причем, по диагонали стоят соответствующие собственные значения.

§2. Контрольные вопросы и задания

4. Дайте определение и приведите примеры линейных операторов.
5. Какой вид имеет в любом базисе матрица: а) нуль-оператора; б) тождественного оператора; в) оператора подобия с коэффициентом подобия μ ?
6. Какой оператор получится в результате сложения двух операторов подобия с коэффициентами μ_1 и μ_2 ?
7. Какой оператор называется обратным к данному линейному оператору?
8. Какой оператор является обратным: а) к оператору подобия с коэффициентом подобия $\mu \neq 0$; б) к оператору поворота на угол φ в пространстве V_2 ?
9. Для каких линейных операторов существует обратный оператор?
10. Как связаны между собой матрицы операторов A и A^{-1} ?

11. Дайте определение собственного вектора и собственного значения линейного оператора A .
12. Каковы собственные значения и собственные векторы: а) у нуль-оператора; б) у тождественного оператора; в) у оператора подобия с коэффициентом подобия μ ?
13. Всякий ли линейный оператор, действующий, в вещественном линейном пространстве $\mathbf{R}_n$ имеет собственные значения? а в комплексном пространстве?
14. Всякий ли корень характеристического уравнения является собственным значением линейного оператора? А наоборот?
15. Являются ли линейные оболочки $\mathcal{L}\{\sin x\}$ и $\mathcal{L}\{\cos x\}$ инвариантными относительно оператора дифференцирования? А $\mathcal{L}\{\sin x, \cos x\}$?

§3. Примеры решения задач

Задача 1. В пространстве $P_3(x)$ полиномов степени не выше трех задан оператор $Ap(x) = \frac{d^2 p}{dx^2} + 3\frac{dp}{dx}$. Доказать, что оператор A линеен, и найти матрицу этого оператора в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Решение. Сначала проверим, что оператор A – линеен.

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) &= \frac{d^2}{dx^2}(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) + 3\frac{d}{dx}(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1 \frac{d^2}{dx^2} p_1 + \\ &+ \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} p_2 + \alpha_1 \cdot 3\frac{d}{dx} p_1 + \alpha_2 \cdot 3\frac{d}{dx} p_2 = \alpha_1 A p_1 + \alpha_2 A p_2. \end{aligned}$$

Оператор A аддитивен и однороден, следовательно, – линеен.

Найдем матрицу оператора A в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$. Для этого подействуем оператором A на базисные векторы и результат действия разложим по тому же базису:

$$\begin{aligned} A \cdot 1 &= \frac{d^2 1}{dx^2} + 3\frac{d1}{dx} = 0 = (0, 0, 0, 0); \quad Ax = \frac{d^2 x}{dx^2} + 3\frac{dx}{dx} = 3 = (3, 0, 0, 0); \\ Ax^2 &= \frac{d^2 x^2}{dx^2} + 3\frac{dx^2}{dx} = 2 + 6x = (2, 6, 0, 0); \\ Ax^3 &= \frac{d^2 x^3}{dx^2} + 3\frac{dx^3}{dx} = 6x + 9x^2 = (0, 6, 9, 0). \end{aligned}$$

Найдены столбцы матрицы оператора A .

Тогда имеем:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Элементы $f_1, f_2 \in V_2$ имеют в базисе $\{e_1, e_2\}$ координаты $f_1 = (0, 1)$, $f_2 = (1, 0)$. Найти матрицы оператора A в базисах $\{e_1, e_2\}$ и $\{f_1, f_2\}$, если

элементы Af_1 и f_2 в базисе $\{e_1, e_2\}$ имеют координаты $Af_1 = (2, 3)$, $Af_2 = (4, 5)$).

Решение. 1-й способ. Так как в базисе e_1, e_2 координаты элемента f_1 равны $(0, 1)$, а координаты f_2 равны $(1, 0)$, то $f_1 = e_2$, $f_1 = e_1$. Используя эти равенства, а также данные координаты элементов Af_1 и Af_2 , приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} Af_1 = 2e_1 + 3e_2 = 3f_1 + 2f_2, \quad Ae_1 = Af_2 = 4e_1 + 5e_2, \\ Af_2 = 4e_1 + 5e_2 = 5f_1 + 4f_2, \quad Ae_2 = Af_1 = 2e_1 + 3e_2. \end{aligned}$$

Отсюда по практическому правилу построения матрицы оператора

получаем:
$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_f = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2-й способ. Используя столбцы координат элементов f_1 и Af_1 в базисе $\{e_1, e_2\}$, по формуле $A_e x_e = y_e$ получаем $A_e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, где A_e – матрица оператора A в базисе $\{e_1, e_2\}$. Аналогичное соотношение для столбцов координат элементов f_2 и Af_2 имеет вид $A_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Эти два равенства можно записать так: $A_e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Отсюда $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – это матрица оператора, такого что $Ce_i = f_i$. Эта матрица называется матрицей перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{f_1, f_2\}$. Зная матрицу A_e и матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{f_1, f_2\}$, по формуле $A_f = C^{-1}A_e C$, находим матрицу A_f : $A_f = C^{-1}A_e C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Составить матрицу A оператора проектирования в геометрическом линейном пространстве V_3 на подпространство L , параллельно подпространству M и матрицу B оператора проектирования на подпространство M параллельно подпространству L , если подпространство L определяется уравнением: $x = 0$, а подпространство M системой уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}.$$

Решение. Так как подпространство L определено уравнением $x = 0$, то $\forall l \in L \quad l = \alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$ где α, β – некоторые константы.

Рассматривая систему уравнений, определяющих подпространство M , запишем матрицу системы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, т.е. $-3y + 2z = 0$ и

$x + 2y + z = 0$. Отсюда получаем: $y = \frac{2}{3}z$, $x = -2y - z = -2\left(\frac{2}{3}z\right) - z = -\frac{7}{3}z$.

Тогда $\forall m \in M \quad m = \gamma(-7, 2, 3)$. Представим вектор $a \in V_3$ в виде $a = l + m$, где $l \in L, \quad m \in M$. Тогда: $(a_1, a_2, a_3) = \alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) + \gamma(-7, 2, 3)$.

Перейдем к координатной записи:
$$\begin{cases} -7\gamma = a_1 \\ \alpha + 2\gamma = a_2 \\ \beta + 3\gamma = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -a_1/7 \\ \alpha = a_2 - 2\gamma = a_2 + 2a_1/7 \\ \beta = a_3 - 3\gamma = a_3 + 3a_1/7 \end{cases}$$

. Из записанной системы получаем:

- 1) если $a = e_1 = (1, 0, 0) \Rightarrow \alpha = 2/7; \quad \beta = 3/7; \quad \gamma = -1/7$, т.е. $(1, 0, 0) = \frac{2}{7}(0, 1, 0) + \frac{3}{7}(0, 0, 1) - \frac{1}{7}(-7, 2, 3)$;
- 2) если $a = e_2 = (0, 1, 0) \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$, т.е. $(0, 1, 0) = 1 \cdot (0, 1, 0)$;
- 3) если $a = e_3 = (0, 0, 1)$, то $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$, т.е. $(0, 0, 1) = 1 \cdot (0, 0, 1)$.

Для записи матрицы линейного оператора надо последовательно подействовать этим оператором на векторы базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ и координаты получившихся векторов записать в столбцы матрицы линейного оператора.

Учитывая это получим матрицу оператора A – проектирования на подпространство L параллельно подпространству M и матрицу оператора B – проектирования на подпространство M параллельно подпространству L :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. В базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ найти матрицу линейного оператора A переводящего векторы $p_1(1, 2, 3), p_2(0, 1, 2), p_3(0, 0, 1)$ соответственно в векторы $q_1(1, 3, 6), q_2(1, 3, 5), q_3(1, 2, 3)$. Координаты векторов p_i и q_i заданы в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Решение. Так как
$$\begin{matrix} Ap_1 = q_1 \\ Ap_2 = q_2 \\ Ap_3 = q_3 \end{matrix}$$
 то $AP = Q$, где матрица $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ – это

матрица у которой столбцы состоят из координат векторов p_1, p_2, p_3 , а матрица $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, составлена аналогично из координат векторов q_1, q_2, q_3 .

Тогда $A = QP^{-1}$. Обращая матрицу P , получаем: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

И, наконец,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Пусть D – оператор дифференцирования в пространстве L , где $L = \mathcal{L}(\sin x, \cos x)$ – линейная оболочка функций $\sin x$ и $\cos x$. Доказать, что:

- а) $D^4 = E$, где E – тождественный оператор;

б) оператор D имеет обратный оператор D^{-1} ;

в) сумма $D + D^{-1}$ – есть нуль-оператор.

Решение. а) $D^4(\alpha \sin x + \beta \cos x) = (\alpha \sin x + \beta \cos x)^{IV} = (\alpha \cos x - \beta \sin x)''' =$
 $= (-\alpha \sin x - \beta \cos x)'' = (-\alpha \cos x + \beta \sin x)' = \alpha \sin x + \beta \cos x$, т.е. $D^4 f(x) = f(x)$.

б), в) Найдем матрицу оператора D в базисе $\{\sin x, \cos x\}$:

$$\begin{aligned} D \sin x &= \cos x = (0, 1) \\ D \cos x &= -\sin x = (-1, 0) \end{aligned} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и,}$$

следовательно, $D + D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. $D + D^{-1}$ – нуль-оператор.

Задача 6. Найти ядро и образ линейного оператора, заданного в стандартном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Чтобы найти ядро оператора A , надо решить систему $Ax = 0$. То

$$\text{есть} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -\frac{2}{3}x_1 \\ x_3 = -\frac{1}{3}x_1 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = -1.$$

Следовательно, $N(A) = \mathcal{L}((3, -2, -1))$.

Чтобы найти образ оператора A , надо найти результат действия этого оператора на базисные векторы e_1, e_2, e_3 .

Получим: $Ae_1 = (2, 1, 0)$, $Ae_2 = (3, 0, 0)$, $Ae_3 = (0, 3, 0)$.

Векторы Ae_1, Ae_2, Ae_3 – линейно зависимы так как $Ae_1 = \frac{2}{3}Ae_2 + \frac{1}{3}Ae_3$.

Векторы Ae_2, Ae_3 – линейно независимы и образуют базис образа $M(A) = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

Задача 7. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора A , который действует в линейном пространстве V_3 и имеет в

ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрицу $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1/3 - \lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 - \lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^3$, то

характеристическое уравнение оператора A имеет вид $\lambda^2 - \lambda^3 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – собственные значения оператора A . Собственное значение $\lambda = 0$ называется **двукратным собственным значением**.

Чтобы найти координаты собственных векторов, нужно решить систему уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$.

При $\lambda = 1$ система уравнений принимает вид:
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Матрица этой системы будет такой: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Так как сумма первой

и второй строк матрицы, с точностью до знака, совпадает с третьей строкой матрицы, то ранг матрицы системы равен 2. Учитывая, что число неизвестных равно 3, получаем, что размерность пространства решений равна 1. Решая систему, находим фундаментальную систему решений, состоящую из одного вектора $f_1 = (1, 1, 1)$. Вектор f_1 – это собственный вектор оператора A в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$. Множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda = 1$, это линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1)$.

Если $\lambda = 0$, то система уравнений запишется так:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
. В

этой системе уравнений число неизвестных равно 3, а ранг матрицы системы, очевидно, равен 1. Поэтому размерность пространства решений равна 2. Находим фундаментальную систему решений, считая x_2 и x_3 свободными неизвестными. Получаем $f_2 = (-1, 1, 0)$ и $f_3 = (-1, 1, 1)$. Эти векторы являются двумя линейно независимыми собственными векторами оператора A , отвечающих собственному значению $\lambda = 0$ и записаны в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Все множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda = 0$, есть линейная оболочка $\mathcal{L}(f_2, f_3)$.

Замечание. Найденные собственные значения и собственные векторы имеют простую геометрическую интерпретацию. Оператор A есть оператор ортогонального проектирования радиус-векторов на прямую l , проходящую через начало координат. Ясно, что проекцией любого ненулевого радиус-вектора cf_1 , лежащего на прямой l , является сам этот радиус-вектор, т.е. он является собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению $\lambda = 1$. Проекцией на прямую l любого радиус-вектора, лежащего в плоскости P , перпендикулярной прямой l , является нулевой вектор, т.е. любой ненулевой радиус-вектор, лежащий в плоскости P , является собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению $\lambda = 0$. Множество всех таких векторов дает линейная комбинация $c_1 f_2 + c_2 f_3$, где c_1 и c_2 – произвольные числа, одновременно не равные нулю.

Задача 8. В линейном пространстве V_3 действует линейный оператор A , переводящий ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ в элементы f_1, f_2, f_3 такие, что: $f_1 = Ae_1 = 1,5e_1 + 0,5e_2 + 0,5e_3$, $f_2 = Ae_2 = 0,5e_1 + e_2$, $f_3 = Ae_3 =$

$0,5e_1 + e_3$. Найти все подпространства пространства V_3 , инвариантные относительно оператора A .

Решение. Прежде всего, укажем тривиальные инвариантные подпространства $\{0\}$ и V_3 . Для нахождения остальных инвариантных подпространств найдем собственные значения, и собственные векторы оператора A . Характеристический многочлен матрицы A имеет вид:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1,5 - \lambda & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 - \lambda & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2,5\lambda + 1).$$

Его корни $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ являются собственными значениями оператора A .

Чтобы найти собственные векторы, нужно решить систему линейных уравнений $(A - \lambda E)f = 0$ при λ равных собственным значениям оператора A . При $\lambda = 0,5$ система принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 = 0 \\ 0,5x_1 + 0,5x_2 = 0 \\ 0,5x_1 + 0,5x_3 = 0 \end{cases}$$

В этой системе уравнений три неизвестных, а ранг матрицы системы равен 2. Поэтому размерность пространства решений равна 1. Из нее следует, что $x_2 = x_3 = -x_1$ и, следовательно, собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 0,5$ – это вектор $f_1 = (1, -1, -1)$. Одномерное инвариантное относительно оператора A подпространство, соответствующее собственному значению λ_1 , есть линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}((1, -1, -1))$. При $\lambda = 1$ система запишется так:

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 = 0 \\ 0,5x_1 = 0 \\ 0,5x_1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x_1 = 0$, $x_2 = -x_3$ и, следовательно, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$, имеет координаты $f_2 = (0, 1, -1)$. Как и в предыдущем случае, одномерное инвариантное относительно оператора A подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_2 = 1$, есть линейная оболочка $\mathcal{L}(f_2) = \mathcal{L}((0, 1, -1))$. Наконец,

$$\begin{cases} -0,5x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 = 0 \\ 0,5x_1 - x_2 = 0 \\ 0,5x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы системы также равен 2. Поэтому инвариантное относительно оператора A подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_3 = 2$, имеет размерность 1 и представляет собой линейную оболочку $\mathcal{L}(f_3) = \mathcal{L}((2, 1, 1))$, а $f_3 = (2, 1, 1)$ – собственный вектор, отвечающий λ_3 .

Далее, линейные оболочки $\mathcal{L}_1(f_1, f_2)$, $\mathcal{L}_2(f_1, f_3)$, $\mathcal{L}_3(f_2, f_3)$ являются двумерными инвариантными относительно оператора A подпространствами. В самом деле, например, для $\mathcal{L}_1$ имеем:

$$A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A f_1 + \alpha_2 A f_2 = \alpha_1 \lambda_1 f_1 + \alpha_2 \lambda_2 f_2 = 0,5\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}_1.$$

Других инвариантных относительно оператора A подпространств нет.

Задача 9. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора A , действующего в линейном пространстве V_4 и имеющего в

базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Доказать, что линейная

оболочка $\mathcal{L}(e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4)$ является подпространством, инвариантным относительно линейного оператора A .

Решение. Составляем характеристическое уравнение для нахождения собственных значений оператора A : $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -(1-\lambda) & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ & = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -(1-\lambda) & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = (1-\lambda)^4, \quad \lambda_{1,2,3,4} = 1. \end{aligned}$$

Данный линейный оператор имеет единственное, четырехкратное собственное значение $\lambda = 1$. Находим собственные векторы этого оператора, т.е. решаем систему $(A - \lambda E)f = \theta$. Находим ранг матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из решения системы с полученной матрицей, находим собственные векторы оператора A : $f_1 = (1/2, 1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 2)$. В силу того, что векторы f_1 и f_2 являются собственными векторами оператора A , линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1, f_2) = \mathcal{L}(e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4)$, является подпространством инвариантным относительно оператора A .

Задача 10. Доказать, что линейный оператор A имеет обратный оператор тогда и только тогда, когда число $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A .

Решение. 1) Пусть $\lambda = 0 \Rightarrow \exists x \neq 0$ такой, что $Ax = 0x = \theta \Rightarrow N(A) = \mathcal{L}(x)$. Тогда $\forall x_1, x_2 \in N(A) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow Ax_1 = Ax_2 = \theta$, т.е. обратный оператор не существует.

2) Пусть существует оператор A^{-1} – обратный к оператору A и $\exists x \neq \theta$ такой, что $Ax = \lambda x$, при некотором λ , следовательно $A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x$. Тогда $x = \lambda A^{-1}x$.

Если в последнем равенстве $\lambda = 0$, то $x = \theta$, что противоречит определению собственного вектора. Следовательно, $\lambda \neq 0$.

§4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Выяснить, какие из следующих векторных функций в трехмерном пространстве векторов являются линейными операторами, если $x(x_1, x_2, x_3)$:

- а) $Ax = (x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$; б) $Ax = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;
в) $Ax = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$; г) $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

Δ а) и г). ~~А~~

2. Доказать, что любой линейный оператор в одномерном пространстве сводится к умножению всех векторов на одно и то же число, т.е. $Ax = \lambda x$, $x \in V$.

3. В бесконечномерном пространстве всех полиномов от t с вещественными коэффициентами заданы операторы A и B : $AP(t) = P'(t)$, $BP(t) = tP(t)$.

а) показать, что оба оператора – линейны;

б) имеет ли место равенство $AB = BA$? в) найти $AB - BA$;

г) показать, что $B^n A - AB^n = -nB^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Δ б) нет; в) $AB - BA = E$. ~~А~~

4. Можно ли рассматривать в пространстве полиномов степени не выше n оператор B такой, что $BP(t) = tP(t)$?

8. нет, потому, что умножение на t повышает степень многочлена и, следовательно, не действует в данном пространстве. ~~А~~

5. В линейном пространстве всех многочленов от t операторы A и B заданы так:

$$A(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = a_1 + a_2 t + \dots + a_n t^{n-1} \quad \text{и}$$

$$B(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = a_0 t + a_1 t^2 + \dots + a_n t^{n+1}$$

Показать, что A и B линейные операторы и, что $AB = E$, $BA \neq E$. Имеет ли оператор A обратный? Δ нет. ~~А~~

6. Пусть $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ произвольный вектор n -мерного арифметического пространства. Будет ли A линейным оператором, если:

а) $n = 2$; $Ax = (x_2, x_1 - x_2)$;

б) $n = 2$; $Ax = (x_2, x_1 x_2)$;

в) $n = 3$; $Ax = (x_2, x_1 - x_3, x_3 + 3)$;

г) $n = 3$; $Ax = (2x_3 + x_1, 2x_3 x_1, x_1 - x_2)$;

д) $Ax = (0, 0, 0, \dots, 0, 0)$;

е) $n = 3$; $Ax = (0, x_1 + 3x_2, x_1, x_2^2)$;

ж) $Ax = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$;

з) $n = 3$; $Ax = (\sin x_1, \cos x_2, x_3)$;

и) $Ax = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

Δ а) да; б), в), г) нет; д) да; е), ж), з) нет; и) да. ~~А~~

7. Пусть $\bar{x}$ – произвольный вектор; $\bar{a}, \bar{n}$ – фиксированные ненулевые векторы геометрического векторного пространства (двумерного или трехмерного). Проверить, что оператор A линеен и выяснить его геометрический смысл, если:

$$\text{а) } A\bar{x} = (\bar{x} \bar{a}) \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|^2};$$

$$\text{б) } A\bar{x} = \frac{(\bar{x} \bar{n})}{(\bar{a} \bar{n})} \bar{a}, \quad ((\bar{a} \bar{n}) \neq 0);$$

$$\text{в) } A\bar{x} = \bar{x} - (\bar{x} \bar{n}) \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|^2};$$

$$\text{г) } A\bar{x} = \bar{x} - \frac{(\bar{x} \bar{n})}{(\bar{a} \bar{n})} \bar{a}, \quad ((\bar{a} \bar{n}) \neq 0);$$

$$\text{д) } A\bar{x} = \bar{x} - 2(\bar{x} \bar{n}) \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|^2};$$

$$\text{е) } A\bar{x} = 2(\bar{a} \bar{x}) \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|^2} - \bar{x}.$$

- Δ а) ортогональное проектирование на прямую $\bar{r} = t\bar{a}$; б) проектирование на подпространство $\bar{r} = t\bar{a}$ параллельно подпространству $(\bar{r}|\bar{n}) = 0$; в) ортогональное проектирование на подпространство $(\bar{r}|\bar{n}) = 0$; г) проектирование на подпространство $(\bar{r}|\bar{n}) = 0$ параллельно вектору $\bar{a}$; д) ортогональное отражение в подпространстве $(\bar{r}|\bar{n}) = 0$; е) ортогональное отражение в прямой $\bar{r} = t\bar{a}$. ~~А~~

8. Доказать, что проектирование трехмерного пространства на координатную ось $e_1 = i$ параллельно координатной плоскости векторов $e_2 = j, e_3 = k$ является линейным оператором и найти матрицу этого оператора в

базисе e_1, e_2, e_3 . Δ
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
. ~~А~~

9. Доказать, что проектирование трехмерного пространства на координатную плоскость векторов e_1, e_2 параллельно оси координат e_3 является линейным оператором и найти его матрицу в базисе:

- а) e_1, e_2, e_3 ; б) $e_1, e_2, e_1 + e_2 + e_3$; в) $e_1 - e_2, e_1 + e_3, -e_1 + e_2 + 2e_3$.

Δ а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. ~~А~~

10. Доказать, что ортогональное проектирование трехмерного пространства на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной системы координат, является линейным оператором, и найти его матрицу в базисе

единичных векторов координатных осей. Δ
$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
. ~~А~~

11. Доказать, что поворот плоскости на угол α вокруг начала координат является линейным оператором и найти матрицу этого оператора в любом ортонормированном базисе, если положительное направление отсчета углов совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего e_1 в e_2 .

Δ
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$
. ~~А~~

12. Доказать, что поворот трехмерного пространства на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг $i + j + k$ является линейным оператором, и найти матрицу этого оператора в базисе $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$.

Δ
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
, если e_1 переходит в e_2 ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, если e_2 переходит в e_1 . ~~А~~

13. Составить матрицу оператора ортогонального проектирования в геометрическом линейном пространстве V_3 на подпространство L , если L есть:

- а) прямая $x = z = 0$; б) прямая $x = y = z$; в) плоскость $x + y + z = 0$;

г) плоскость, натянутая на векторы $a(-1, 1, -1)$, $b(1, -3, 2)$.

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

14. Составить матрицу оператора проектирования в геометрическом линейном пространстве V_3 на подпространство L , параллельно подпространству M : а) $L: x = 0$; $M: 2x = 2y = -z$;

б) $L: -20x = 15y = 12z$; $M: 2x + 3y - z = 0$;

в) $L: \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$; $M: 2x + 3y - 4z = 0$.

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 8 & 12 & -4 \\ 10 & 15 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

15. Линейный оператор A в арифметическом пространстве в стандартном базисе задан матрицей. Найти образы векторов a_1, a_2, a_3 для оператора A :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} a_1(1, 0, -1) \\ a_2(0, 1, 0) \\ a_3(3, 4, 3) \end{matrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} a_1(1, 1, 2) \\ a_2(1, 2, 3) \\ a_3(1, 2, 4) \end{matrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} a_1(0, 1, 1) \\ a_2(1, 0, -1) \\ a_3(2, 1, 0) \end{matrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} a_1(0, 1, 1) \\ a_2(2, 2, 3+i) \\ a_3(2, 2, 3-i) \end{matrix};$$

д)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_1(1, 1, -1), \quad a_2(1+i, 1-i), \quad a_3(1-i, 1, i).$$

$$\Delta \quad \text{а) } -2a_1, a_2, 4a_3; \quad \text{б) } 3a_1, 3a_2, 2a_3; \quad \text{в) } (0, 0, 0), (5, 0, -5), (11, 5, -1);$$

$$\text{г) } a_1, ia_2, -ia_3; \quad \text{д) } -a_1, (1+i)a_2, (1-i)a_3. \quad \triangleleft$$

16. Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(V_n, V_m)$ задан матрицей A . Написать образы указанных векторов:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} a_1(4, -1, -1, 3) \\ a_2(1, 1, 1, -2) \\ a_3(1, -1, 1, -1) \end{matrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} a_1(-1, 1, 1, -1) \\ a_2(-1, 1, -1, 1) \\ a_3(1, 0, 3, 0) \\ a_4(-1, 2, 0, 1) \end{matrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}; \begin{matrix} a_1(-2, 1, 3, -1) \\ a_2(1, 1, 1, 1) \\ a_3(1, 0, -1, 1) \\ a_4(2, 1, -1, 2) \\ a_5(2, -1, 3, -1) \end{matrix}.$$

Δ а) (0, 6, 24), (6, 5, -1), (1, 2, 2); б) (0, 0, 0, 0), (2, 2, 2, 2), (10, 14, 18, 22), (7, 9, 11, 13);

в) (-8, -13, 3, 0, -13), (-1, 5, 0, 8, 11), (3, 8, -1, 4, 0), (4, 14, -1, 11, 20), (-5, -3, -3, -4, 5);

Δ

17. Доказать, что существует единственный линейный оператор в V_n , переводящий данные линейно независимые векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ в данные векторы $b_1, b_2, \dots, b_n$. Как найти матрицу этого оператора в базисе $a_1, a_2, \dots, a_n$?

Δ В $i^{\text{ом}}$ столбце матрицы стоят координаты вектора b_i в базисе $\{a_i\}$. Δ

18. Пусть линейный оператор C в V_n переводит линейно независимые векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ в векторы $b_1, b_2, \dots, b_n$ соответственно. Доказать, что матрицу C этого оператора в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ можно найти из равенства $C = BA^{-1}$, где A и B состоит из координат векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, записанных в столбцы.

19. Составить матрицу оператора A , переводящего в трехмерном линейном пространстве векторы $x_1(0, 0, 1), x_2(0, 1, 1), x_3(1, 1, 1)$ в векторы $y_1(2, 3, 5), y_2(1, 0, 0), y_3(0, 1, -1)$ соответственно, в базисе:

а) $e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)$; б) x_1, x_2, x_3 .

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

20. Составить матрицу оператора A , переводящего векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 в том же базисе в котором заданы координаты всех векторов:

а) $a_1(2, 3, 5), a_2(0, 1, 2), a_3(1, 0, 0) \rightarrow b_1(1, 1, 1), b_2(1, 1, -1), b_3(2, 1, 2)$;

б) $a_1(2, 0, 3), a_2(4, 1, 5), a_3(3, 1, 2) \rightarrow b_1(1, 2, -1), b_2(4, 5, -2), b_3(1, -1, 1)$.

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

21. Доказать, что оператор в трехмерном пространстве $Ax = (x a)a$, где $a(1, 2, 3)$ является линейным оператором, и найти его матрицу:

а) в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 в котором даны координаты векторов;

б) в базисе: $b_1(1, 0, 1), b_2(2, 0, -1), b_3(1, 1, 0)$.

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -16 & 4 & -12 \\ 24 & -6 & 18 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

22. Скорости точек тела, движущегося вокруг неподвижной точки, определяются по формуле $v = [\omega, r]$, где $\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$ – мгновенная угловая скорость, а r – радиус-вектор точки. Доказать, что оператор $Ar = v$ – линейен, и найти его матрицу в базисе: $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$.

$$\Delta \quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

23. Показать, что оператор дифференцирования является линейным оператором в пространстве полиномов степени не выше n от одного переменного с вещественными коэффициентами. Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) $1, x, x^2, \dots, x^n$; б) $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}$;

в) $1, (x-c), \frac{(x-c)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-c)^n}{n!}$, где $c \in \mathbf{R}$.

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б), в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

24. Доказать, что оператор $Af(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-t)f(t)dt$ является линейным и отображает пространство функций интегрируемых с косинусом на $(0, 2\pi)$ в пространство многочленов первой степени от $\sin x$ и $\cos x$. Найти матрицу этого оператора в подпространстве с базисом: $\{\sin x, \cos x\}$. $\Delta \quad \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}. \quad \Delta$

25. Показать, что умножение квадратных матриц второго порядка слева и справа на данную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ являются линейными операторами в пространстве квадратных матриц второго порядка, и найти матрицу этого оператора в базисе: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\Delta \quad \text{при умножении слева } \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}; \quad \text{при умножении справа } \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

26. Линейный оператор в V задан, матрицей A . Найти ядро и образ оператора. Выяснить задает ли данное преобразование изоморфизм или нет, если:

$$\begin{aligned} \text{а)} & \begin{pmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{pmatrix}; & \text{б)} & \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}; & \text{в)} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{д)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; & \text{е)} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. а) $(12, -5)$ и $(5, 12)$; б) $(1, 1, -1)$, $(3, 0, 2)$ и $(1, 1, -1)$; в) $(1, -1, 1)$ и $(1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$; г) $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ и $(1, 1, -3, -3)$, $(1, -1, -1, 1)$; д) $\{\theta\}$ и V ; A – изоморфизм; е) $\{\theta\}$ и V ; A – изоморфизм. ~~A~~

27. Линейное отображение n -мерного пространства в m -мерное пространство задано матрицей A . Найти ядро и образ линейного оператора:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad m=3, n=4, \quad A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}; \\ \text{б)} \quad m=4, n=3, \quad A &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}; \\ \text{в)} \quad m=4, n=3, \quad A &= \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \quad m=2, n=3, \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \\ \text{д)} \quad m=5, n=3, \quad A &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$е) m = 3, n = 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. а) $(0, 2, 0, 1), (0, -3, 1, 0)$ и $(0, 1, 0), (1, 0, -2)$; б) $\{\theta\}$ и $(4, 3, -1, 7), (5, 2, 3, 7), (9, 7, 2, 6)$; в) $(3, 1, 0), (2, 0, -1)$ и $(-2, 1, 7, -3)$; г) $(2, 0, 1, -1, 0), (0, 1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 1)$ и V_2 ; д) $(0, 1, 1)$ и $(-2, -2, -3, 4, 6), (2, 2, 2, 1, -5)$; е) $(1, 1, 0, -3, -6), (-2, 0, 1, 5, 10)$ и V_3 . $\triangleleft$

28. Имеет ли оператор поворота плоскости на фиксированный угол φ нетривиальные инвариантные подпространства?

11. При $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ не имеет; При $\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ каждая прямая плоскости, проходящая через центр вращения является инвариантным подпространством. $\triangleleft$

29. В плоскости задан оператор A – оператор растяжения плоскости в λ_1 раз вдоль оси x и в λ_2 раз вдоль оси y . Определить нетривиальные инвариантные подпространства оператора A , если:

- а) $\lambda_1 = \lambda_2$; б) $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

12. а) любая прямая, проходящая через начало координат; б) оси координат – одномерные инвариантные подпространства. $\triangleleft$

30. В трехмерном пространстве оператор A – поворот вокруг оси, проходящей через начало координат. Определить нетривиальные инвариантные подпространства этого оператора.

Δ ось вращения – одномерное инвариантное подпространство; плоскость перпендикулярная оси вращения и проходящая через начало координат – двухмерное инвариантное подпространство. $\triangleleft$

31. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис в V_n . Оператор P , ставящий в соответствие вектору $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ из V_n вектор $Px = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k$ ($m < n$) называется оператором проектирования на V_m , порожденное векторами $e_1, e_2, \dots, e_m$. Найти нетривиальные инвариантные подпространства оператора P .

13. Подпространство V_m и каждое его подпространство; Подпространство $\mathcal{L}(e_{m+1}, \dots, e_n)$ и каждое его подпространство. $\triangleleft$

32. В пространстве полиномов от x степени не выше n найти нетривиальные подпространства инвариантные относительно оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$.

Δ Подпространство L_k многочленов степени не выше k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). $\triangleleft$

33. Доказать, что в пространстве функций, дифференцируемых на всей оси подпространство, натянутое на функции $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ является инвариантным относительно оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$.

34. Пусть A – линейный оператор в V_n и (a_{ik}) – матрица этого оператора в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Доказать, что:

- а) подпространство натянутое на векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ инвариантно относительно A тогда, и только тогда, когда $a_{ik} = 0$ для $i > m, k \leq m$;
 б) подпространства, натянутое на $e_1, e_2, \dots, e_m$ и $e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_n$ инвариантны относительно A тогда, и только тогда, когда $a_{ik} = 0$ для $i > m, k \leq m$ и $i \leq m, k > m$.

35. Доказать, что множество всех собственных векторов линейного оператора, принадлежащих одному и тому же собственному значению λ_0 , является линейным подпространством инвариантным относительно A .

36. Доказать, что линейное подпространство, натянутое на любую систему собственных векторов оператора A , инвариантно относительно A .

37. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе своими матрицами:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{д)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{е)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{ж)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}; & \text{з)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{и)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{к)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; & \text{л)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{м)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

- Δ а) $\lambda_1 = 1, c(1, -1); \lambda_2 = 3, c(1, 1); c \neq 0$; б) $\lambda_1 = 7, c(1, 1); \lambda_2 = -2, c(4, -5); c \neq 0$;
 в) $\lambda_1 = ai, c(1, i); \lambda_2 = -ai, c(1, -i); c \neq 0$; г) $\lambda = 2, c_1(-2, 1, 0) + c_2(1, 0, 1); c_1^2 + c_2^2 \neq 0$;
 д) $\lambda_1 = -1, c(1, 1, -1); \lambda_2 = 1, c(-2, 0, 1); \lambda_3 = 2, c(1, 0, 0); c \neq 0$; е) $\lambda_1 = 1, c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 0)$;
 ж) $\lambda_1 = 1, c(3, -6, 20); \lambda_2 = -2, c(0, 0, 1); c \neq 0$;
 з) $\lambda_1 = 2, c(1, 0, 0); \lambda_2 = 1, c(1, 0, 1); \lambda_3 = -1, c(0, 1, -1); c \neq 0$; и) $\lambda_1 = -1, c(1, 0, 0); \lambda_2 = 1,$

$c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 1); c \neq 0; c_1^2 + c_2^2 \neq 0$; к) $\lambda = 2, c(1, 0, 0)$; л) $\lambda = 2, c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 0, 1); c_1^2 + c_2^2 \neq 0$; м) $\lambda_1 = -1, c(1, 1, 1); \lambda_2 = 0, c(1, 2, 3); c \neq 0$. Δ

38. В пространстве непрерывных и дифференцируемых на всей оси функций $f(x)$ найти собственные числа и собственные векторы оператора $\frac{d}{dx}$.

Δ $\lambda = \alpha$ – любое число; $f(x) = ce^{\alpha x}, c \neq 0$. Δ

39. Найти собственные числа и собственные векторы операторов, заданных в некотором ортонормированном базисе матрицами:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Собственные значения у s_1, s_2, s_3 – одинаковые: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$;
собственные векторы: у s_1 : $c_1(0, -i, 1), c_2(1, 0, 0), c_3(0, i, 1), c_i \neq 0$;
у s_2 : $c_1(i, 0, 1), c_2(0, 1, 0), c_3(-i, 0, 1), c_i \neq 0$;
у s_3 : $c_1(-i, 1, 0), c_2(0, 0, 1), c_3(i, 1, 0), c_i \neq 0$. Δ

40. Найти собственные числа и собственные векторы операторов, которые в некотором ортонормированном базисе, заданы матрицами:

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Собственные значения операторов s_1, s_2, s_3 – одинаковые: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$;
собственные векторы: для s_1 : $c_1(1, \sqrt{2}, 1), c_2(1, 0, -1), c_3(0, -\sqrt{2}, 1), c_i \neq 0$;
для s_2 : $c_1(1, i\sqrt{2}, -1), c_2(1, 0, 1), c_3(1, -i\sqrt{2}, -1), c_i \neq 0$;
для s_3 : $c_1(1, 0, 0), c_2(0, 1, 0), c_3(0, 0, 1), c_i \neq 0$. Δ

41. Дана матрица оператора A в некотором базисе и полином $f(x)$. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $f(A)$:

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 3x + 10; \\ \text{б) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad f(x) = 2x^2 - 3x + 5; \\ \text{в) } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad f(x) = x^2 + 7x - 9. \end{aligned}$$

- Δ а) $\lambda_1 = 6(1 - i)$, $c(1, i)$; $\lambda_2 = 6(1 - i)$, $c(1, -i)$; $c \neq 0$; б) $\lambda_1 = 14$, $c(1, 2, 2)$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 10$, $c(1, 2, 1)$; $c \neq 0$; в) $\lambda_1 = 9$, $c(1, 0, 0)$; $\lambda_2 = -1$, $c(1, 0, 1)$; $\lambda_3 = -15$, $c(0, 1, -1)$; $c \neq 0$.
- Δ

РАЗДЕЛ 2

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§1. Основные определения и теоремы

Def: Если в линейном вещественном пространстве V задан закон A такой, что $\forall x, y \in V \exists \lambda = A(x, y) \in \mathbf{R}$ и

$$1^\circ. A(\alpha x + \beta y, z) = \alpha A(x, z) + \beta A(y, z);$$

$$2^\circ. A(x, \alpha y + \beta z) = \alpha A(x, y) + \beta A(x, z),$$

то говорят, что в линейном пространстве V над числовым полем $\mathbf{R}$ задан билинейный функционал или билинейная форма $A(x, y)$.

Пусть $\{e_i\}_1^n$ – базис в V . Тогда $\forall x, y \in V$

$$A(x, y) = A\left(\sum_i \xi_i e_i, \sum_j \eta_j e_j\right) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j A(e_i, e_j) = \sum_i \sum_j a_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется **матрицей билинейной формы** $A(x, y)$ в базисе $\{e_i\}_1^n$.

Билинейная форма называется **симметричной**, если $\forall x, y \in V A(x, y) = A(y, x)$, и **антисимметричной**, если $\forall x, y \in V A(x, y) = -A(y, x)$.

Симметричной билинейной форме соответствует симметрическая матрица ($a_{ij} = a_{ji}$), а антисимметричной – кососимметрическая ($a_{ij} = -a_{ji}$).

Т^о. Всякая билинейная форма может быть однозначно представлена в

виде суммы симметричной и антисимметричной билинейных

$$\text{форм: } A^+(x, y) = \frac{A(x, y) + A(y, x)}{2}; \quad A^-(x, y) = \frac{A(x, y) - A(y, x)}{2}.$$

Если в билинейной форме $A(x, y)$ положить $y = x$, то получим частный случай билинейной формы – квадратичную форму $A(x, x)$.

Каждая билинейная форма однозначно порождает квадратичную форму но не наоборот. По заданной квадратичной форме невозможно однозначно восстановить билинейную форму, из которой она получилась. Однако, если известно, что билинейная форма, породившая квадратичную – симметрична, то эта билинейная форма определяется однозначно.

Билинейная симметричная форма, порождающая квадратичную, называется **билинейной формой полярной** к заданной квадратичной форме.

Классификация квадратичных форм.

а) Если определитель матрицы квадратичной формы отличен от нуля, то форма называется **невырожденной**;

б) Форма называется **положительно (отрицательно) определенной**, если $\forall x \neq \theta \quad A(x, x) > 0$ ($A(x, x) < 0$). Положительно и отрицательно определенные формы называются **знакопостоянными**.

в) Если $\forall x \neq \theta \quad A(x, x) \geq 0$ ($A(x, x) \leq 0$), то форма называется **квазизнакопостоянной**;

г) Если $\exists x \neq \theta$ и $\exists y \neq \theta$ такие, что $A(x, x) > 0$ и $A(y, y) < 0$, то форма называется **знакопеременной** (или **знаконеопределенной**).

Для матрицы квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ обозначим: $\Delta_1 = a_{11}$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \dots; \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}; \dots; \Delta_n = \det A. \text{ Величины } \Delta_1,$$

$\Delta_2, \dots, \Delta_n$ называются главными минорами матрицы A .

Критерий Сильвестра.

а) Для того, чтобы $A(x, x)$ была положительно-определенной необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$;

б) Для того, чтобы $A(x, x)$ была отрицательно-определенной необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$ (Главные миноры чередуются по знаку, начиная с «-»).

Т°. Если форма $A(x, y)$ полярна к форме $A(x, x)$ и $A(x, x)$ положительно определенная, то $A(x, y)$ задает в V скалярное произведение.

Если для формы $A(x, x)$ в пространстве V существует базис $\{e_i\}_1^n$ в котором матрица $A(x, x)$ имеет диагональный вид (т.е. $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$) и форма записывается так: $A(x, x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \xi_i^2$, то такой базис называется **каноническим базисом** формы $A(x, x)$ в пространстве V , а запись формы в этом базисе называется **каноническим видом** формы.

Если в каноническом виде формы $A(x, x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \xi_i^2$ коэффициенты $a_{ii} = \pm 1$, то такая запись называется **нормальным видом** формы.

Метод Якоби приведения квадратичной матрицы к каноническому виду. Метод удобен в случае, когда требуется найти канонические коэффициенты и не обязательно знать канонический базис

(канонический базис находится громоздко). Тогда: $A(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2$, где $\lambda_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$ и $\Delta_0 \equiv 1$.

Метод Лагранжа приведения квадратичных форм к каноническому виду (метод выделения полных квадратов).

Пример: $\xi_1^2 + 5\xi_2^2 + 4\xi_3^2 - \xi_4^2 + 6\xi_1\xi_2 - 4\xi_1\xi_3 - 12\xi_2\xi_3 - 4\xi_2\xi_4 - 8\xi_3\xi_4 =$

$$= (\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3)^2 + 5\xi_2^2 + 4\xi_3^2 - 12\xi_2\xi_3 - 4\xi_2\xi_4 - 8\xi_3\xi_4 - 9\xi_2^2 - 4\xi_3^2 + 12\xi_2\xi_3 =$$

$$= \{\eta_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_3\} = \eta_1^2 - 4\xi_2^2 - 4\xi_2\xi_4 - \xi_4^2 - 8\xi_3\xi_4 = \eta_1^2 - (2\xi_2 + \xi_4)^2 -$$

$$- 8\xi_3\xi_4 = \{\eta_2 = 2\xi_2 + \xi_4\} = \eta_1^2 - \eta_2^2 - 8\xi_3\xi_4 = \left\{ \begin{matrix} \xi_3 = \eta_3 + \eta_4 \\ \xi_4 = \eta_3 - \eta_4 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \eta_1^2 - \eta_2^2 - 8\eta_3^2 + 8\eta_4^2.$$

При этом: $\eta_1 = \xi_1 + 2\xi_2 - 2\xi_3$; $\eta_2 = 2\xi_2 + \xi_4$; $\eta_3 = \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4$; $\eta_4 = \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\xi_4$ и

векторы e_1, e_2, e_3, e_4 нового базиса получаются из f_1, f_2, f_3, f_4 – векторов старого базиса с помощью соотношений:

$$e_1 = f_1; \quad e_2 = 3f_1 + 2f_2; \quad e_3 = -2f_1 + f_3/2 + f_4/2; \quad e_4 = f_2 + f_3/2 - f_4/2.$$

Т°. (Закон инерции квадратичных форм). Если форма $A(x, x)$ приведена

к каноническому виду, то количество положительных и количество отрицательных канонических коэффициентов у них не зависит от способа приведения формы к каноническому виду. (Количество положительных и количество отрицательных канонических коэффициентов называются положительным и отрицательным индексами инерции квадратичной формы).

§2. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определения билинейной формы и соответствующей ей квадратичной формы.
2. Запишите выражение для билинейной формы $B(x, y)$ через координаты векторов x и y в некотором базисе.
3. Укажите хотя бы две различные билинейные формы, из которых получается данная квадратичная форма

$$A(x, x) = 5x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 7x_1x_3 - 8x_2x_3, \text{ причем одна из этих би-}$$

линейных форм должна быть симметрична.

8. Какая квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной. Сформулируйте критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности формы.

9. Разложите билинейную форму

$$B(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3 + 4x_1y_2 - 6x_1y_3 + 5x_2y_3 + 9x_3y_2$$

в сумму симметричной и антисимметричной билинейных форм.

6. Может ли положительно определенная квадратичная форма иметь:

- а) отрицательные канонические коэффициенты;
- б) канонические коэффициенты, равные нулю?

Сформулируйте закон инерции квадратичных форм.

§3. Примеры решения задач

Задача 1. В пространстве $P_2(x)$ полиномов степени не выше второй в базисе $\{1, x, x^2\}$ найти матрицу билинейной формы

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 \int_0^1 (s-t)^2 P(s) Q(t) ds dt.$$

Решение. Элементами матрицы билинейной формы $\varphi(x, y)$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ являются числа $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

Пользуясь этим правилом, найдем элементы искомой матрицы. При этом учтем, что $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

$$a_{11} = \varphi(1, 1) = \int_0^1 \int_0^1 (s-t)^2 ds dt = \frac{1}{6}; \quad a_{12} = a_{21} = \varphi(1, x) = \int_0^1 \int_0^1 (s-t)^2 t ds dt = \frac{1}{12};$$

$$a_{13} = a_{31} = \varphi(1, x^2) = \int_0^1 \int_0^1 (s-t)^2 t^2 ds dt = \frac{11}{180}; \quad a_{22} = \varphi(x, x) = \int_0^1 \int_0^1 (s-t)^2 s t ds dt = \frac{1}{36};$$

$$a_{23} = a_{32} = \varphi(x, x^2) = \int_0^1 \int_0^1 (s-t)^2 st^2 ds dt = \frac{1}{60};$$

$$a_{33} = \varphi(x^2, x^2) = \int_0^1 \int_0^1 (s-t)^2 s^2 t^2 ds dt = \frac{1}{60}.$$

Тогда матрица A билинейной формы имеет вид: $A = \frac{1}{180} \begin{pmatrix} 30 & 15 & 11 \\ 15 & 5 & 3 \\ 11 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Билинейную форму $\varphi(x, y) = x_1 y_1 + 5x_1 y_2 + 4x_1 y_3 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 + 6x_3 y_1 + 5x_3 y_2 + 3x_3 y_3$ разложить в сумму симметричной $\varphi_S(x, y)$ и антисимметричной $\varphi_A(x, y)$ билинейных форм. Записать квадратичные формы, порожденные заданной $\varphi(x, y)$ и построенными $\varphi_S(x, y)$, $\varphi_A(x, y)$ билинейными формами.

Решение. Формы $\varphi_S(x, y)$ и $\varphi_A(x, y)$ могут быть получены из соотношений:

$$\varphi_S(x, y) = \frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2}, \quad \varphi_A(x, y) = \frac{\varphi(x, y) - \varphi(y, x)}{2}.$$

Однако, пожалуй, удобнее будет выписать матрицу B билинейной формы и разложить ее в сумму двух матриц: симметричной B_S и антисимметричной B_A .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = B_S + B_A. \text{ При этом элементы матриц } B_S$$

и B_A получены из соотношений:

$$(b_{ij})_S = (b_{ji})_S = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}, \quad (b_{ij})_A = -(b_{ji})_A = \frac{b_{ij} - b_{ji}}{2}.$$

Теперь запишем билинейные формы с матрицами B_S и B_A :

$$\varphi_S(x, y) = x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + 5x_1 y_3 + 5x_3 y_1 + 2x_2 y_3 + 2x_3 y_2 + 3x_3 y_3,$$

$$\varphi_A(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 - 3x_2 y_3 + 3x_3 y_2.$$

Если в этих формулах заменить y на x , то получим квадратичные формы, порожденные билинейными формами $\varphi_S(x, y)$ и $\varphi_A(x, y)$:

$$\varphi_S(x, x) = x_1^2 + 8x_1 x_2 + 2x_2^2 + 10x_1 x_3 + 4x_2 x_3 + 4x_3^2; \quad \varphi_A(x, x) = 0.$$

Тот факт, что квадратичная форма, порожденная $\varphi_A(x, y)$, равна 0, объясняет, почему различные билинейные формы могут порождать одну и ту же квадратичную форму. Чтобы две билинейные формы $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ порождали одну и ту же квадратичную форму необходимо и достаточно чтобы билинейные формы $\varphi_{1S}(x, y)$ и $\varphi_{2S}(x, y)$ совпадали.

Задача 3. Написать билинейную форму $\varphi(x, y)$, полярную к квадратичной форме

$$\varphi(x, x) = 3x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 + 12x_1 x_3 - 7x_2 x_3.$$

Решение. Чтобы по заданной квадратичной форме получить полярную ей билинейную форму, поступим следующим образом: слагаемые вида αx_i^2 заменим на $\alpha x_i y_i$, а слагаемые вида $2\alpha x_i x_j$ заменим на сумму $\alpha x_i y_j + \alpha x_j y_i$. В результате применения указанного алгоритма, получим форму полярную к заданной квадратичной:

$$\varphi(x, y) = 3x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 - 5x_2 y_2 + 6x_1 y_3 + 6x_3 y_1 - 3,5x_2 y_3 - 3,5x_3 y_2 + x_3 y_3.$$

Задача 4. Методом Якоби привести квадратичную форму

$\varphi(x, x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3$ к каноническому виду. Указать канонический базис.

Решение. Билинейная форма, полярная к заданной квадратичной, имеет вид $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 +$

$2x_1y_3 + \frac{3}{2}x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_1 + x_3y_3$. Ее матрица (а, следовательно, и матрица квадратичной формы) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислив главные миноры этой матрицы, получим: $\Delta_1 = 2$; $\Delta_2 = -1/4$; $\Delta_3 = -17/4$, т.е. ни один из них не равен нулю. Таким образом, данную квадратичную форму можно привести к каноническому виду методом Якоби. Для нахождения канонического базиса, положим:

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}f_1 &= (\alpha_{11}, 0, 0); \\ e_2 &= \alpha_{21}f_1 + \alpha_{22}f_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, 0); \\ e_3 &= \alpha_{31}f_1 + \alpha_{32}f_2 + \alpha_{33}f_3 &= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}). \end{aligned}$$

Коэффициент α_{11} находим из условия $\varphi(e_1, f_1) = 1$, т.е. $2\alpha_{11} = 1$ и значит $e_1 = f_1/2 = (1/2, 0, 0)$.

Для коэффициентов α_{21} и α_{22} имеем два уравнения:

$$\begin{cases} \varphi(e_2, f_1) = 0 \\ \varphi(e_2, f_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_{21} + 3\alpha_{22}/2 = 0 \\ 3\alpha_{21}/2 + \alpha_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{21} = 6 \\ \alpha_{22} = -8 \end{cases}.$$

Таким образом: $e_2 = 6f_1 - 8f_2 = (6, -8, 0)$.

Наконец, для α_{31} , α_{32} , α_{33} имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(e_3, f_1) = 0 \\ \varphi(e_3, f_2) = 0 \\ \varphi(e_3, f_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_{31} + 3\alpha_{32}/2 + 2\alpha_{33} = 0 \\ 3\alpha_{31}/2 + \alpha_{32} = 0 \\ 2\alpha_{31} + \alpha_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{31} = 8/17 \\ \alpha_{32} = -12/17 \\ \alpha_{33} = 1/17 \end{cases},$$

и, следовательно, $e_3 = \frac{8}{17}f_1 - \frac{12}{17}f_2 + \frac{1}{17}f_3 = \left(\frac{8}{17}, -\frac{12}{17}, \frac{1}{17}\right)$. Квадратичная

форма в каноническом базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ будет иметь вид:

$$\tilde{\varphi}(x, x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 = \frac{1}{2} y_1^2 - 8 y_2^2 + \frac{1}{17} y_3^2.$$

Задача 5. Методом Лагранжа привести квадратичную форму

$\varphi(x, x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ к каноническому виду. Указать положительный и отрицательный индексы инерции.

Решение. Коэффициент при x_2^2 отличен от нуля (равен 3). Соберем в одну группу все члены

квадратичной формы содержащие x_2 : $3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$. Дополним это выражение до полного

квадрата членами, не содержащими x_2 , и, чтобы квадратичная форма $\varphi(x, x)$ не изменилась, вычтем добавленные члены. Получим:

$$\varphi(x, x) = 3 \left(x_2^2 + \frac{4}{3} x_1 x_2 - \frac{2}{3} x_2 x_3 + \frac{4}{9} x_1^2 + \frac{1}{9} x_3^2 - \frac{4}{9} x_1 x_3 \right) -$$

$$- \frac{1}{3} x_3^2 + \frac{4}{3} x_1 x_3 - \frac{4}{3} x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1 x_3 = 3 \left(\frac{2}{3} x_1 + x_2 - \frac{1}{3} x_3 \right)^2 - \frac{4}{3} x_1^2 + \frac{8}{3} x_3^2 + \frac{16}{3} x_1 x_3.$$

Положим: $y_2 = \frac{2}{3} x_1 + x_2 - \frac{1}{3} x_3$. Тогда в выражении квадратичной формы появляется переменная y_2

и исчезает переменная x_2 . Перепишем квадратичную форму в виде:

$$3y_2^2 + \frac{8}{3} x_3^2 - \frac{4}{3} x_1^2 + \frac{16}{3} x_1 x_3 = 3y_2^2 + \psi(x_1, x_3).$$

К квадратичной форме $\psi(x_1, x_3)$ снова

применим метод выделения полного квадрата. С этой целью соберем в одну группу все члены содержащие x_1 : $-\frac{4}{3} x_1^2 + \frac{16}{3} x_1 x_3$. Дополним это выражение до полного квадрата слагаемым, не содержащими x_1 , и

чтобы квадратичная форма $\psi(x_1, x_3)$ не изменилась, вычтем добавленное слагаемое. Получим:

$$\psi(x_1, x_3) = -\frac{4}{3} (x_1 - 2x_3)^2 + \frac{16}{3} x_3^2 + \frac{8}{3} x_3^2.$$

Положим $y_1 = x_1 - 2x_3$. Приведя подобные члены, перепишем исходную квадратичную форму в виде:

$$3y_2^2 - \frac{4}{3} y_1^2 + 8x_3^2.$$

Вводя обозначение $x_3 = y_3$, получаем следующий канонический вид исходной квадратичной формы:

$$\tilde{\varphi}(x, x) = -\frac{4}{3} y_1^2 + 3y_2^2 + 8y_3^2, \text{ где } y_1 = x_1 - 2x_3, y_2 = \frac{2}{3} x_1 + x_2 - \frac{1}{3} x_3, y_3 = x_3. \text{ Количество}$$

положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется **положительным индексом инерции** и равно 2. Отрицательный индекс инерции (количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы) равно 1.

Преобразование переменных, приводящее исходную квадратичную форму к каноническому виду, можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. В результате применения метода Лагранжа всегда получается невырожденное линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Задача 6. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму

$\varphi(x, x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ к каноническому виду. (Ортогональным называется преобразование осуществляющее переход от одного ортонормированного базиса к другому, тоже ортонормированному базису).

Решение. Составим матрицу данной квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные

значения. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0. \text{ Оно имеет корни } \lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 4.$$

Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{\varphi}(y, y) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2. \text{ Построим теперь матрицу ортогонального преобразования,}$$

приводящего квадратичную форму к этому каноническому виду. С этой целью найдем собственные векторы матрицы A . Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора f , соответствующего собственному значению $\lambda = -2$, являются решением системы уравнений $(A + 2E)f = \Theta$, т.е. системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \text{ у которой ранг } r \text{ матрицы равен 2, а } n - r = 1. \text{ Следовательно,}$$

фундаментальная совокупность решений системы состоит из одного решения, например, такого: $f_1 = (-2, 1, 1)$. Нормируя f_1 , получаем собственный вектор $g_1 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$. Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора f , соответствующего собственному значению $\lambda = 4$, являются решением

$$\text{системы уравнений } (A - 4E)f = \Theta, \text{ т.е. системы: } \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \text{ у которой ранг } r$$

матрицы равен 2, а $n - r = 2$. Поэтому фундаментальная совокупность решений этой системы состоит из двух решений. Чтобы их найти, оставим только первое уравнение системы (второе и третье являются следствием первого). Положив вначале $x_2 = 1, x_3 = 0$, а затем $x_2 = 0, x_3 = 1$ получим, что фундаментальная совокупность решений состоит из решений: $f_2 = (1/2, 1, 0)$ и $f_3 = (1/2, 0, 1)$. Это и есть два линейно независимых собственных вектора матрицы A , соответствующих собственному значению $\lambda = 4$.

Заметим, что собственные векторы f_2 и f_3 матрицы A ортогональны к собственному вектору f_1 , но не ортогональны между собой. Применим к f_2 и f_3 процедуру ортогонализации. С этой целью положим $y_2 = f_2, y_3 = f_3 - ay_2$. Коэффициент a определяется из условия ортогональности y_2 и y_3 : $a = 1/5$.

Итак, мы построили два ортогональных собственных вектора матрицы A , соответствующих собственному значению $\lambda = 4$:

$$y_2 = (1/2, 1, 0); \quad y_3 = (2/5, -1/5, 1).$$

Нормируя их, получаем собственные векторы:

$$g_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0); \quad g_3 = (\sqrt{2/15}, -1/\sqrt{30}, \sqrt{5/6}).$$

Матрица искомого ортогонального преобразования (т.е. преобразования перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису) состоит из координат векторов g_1, g_2, g_3 , записанных в столбцы. Следовательно, искомое преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & \sqrt{2/15} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & \sqrt{5/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Оно приводит квадратичную форму к каноническому виду:

$$\tilde{\varphi}(y, y) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2.$$

Замечание. Отметим, что как канонический вид квадратичной формы, полученный методом Лагранжа, так и канонический вид, полученный ортогональным преобразованием, содержит два положительных

канонических коэффициента и один отрицательный канонический коэффициент, что соответствует закону инерции квадратичных форм.

Задача 7. Найти все значения параметра a , при которых квадратичная форма $\varphi(x, x) = x_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ является положительно определенной.

Решение. Найдем главные миноры матрицы квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Получаем: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, $\Delta_3 = \det A = 3 \cdot (a - 1)$.

Пользуясь критерием Сильвестра, находим, что данная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда когда $\Delta_3 > 0$, т.е. при $a > 1$.

Задача 8. Доказать, что скалярное произведение в евклидовом пространстве представляет собой симметричную, билинейную форму, у которой соответствующая квадратичная форма является положительно определенной.

Решение. Скалярное произведение (x, y) элементов x и y вещественного линейного пространства является числовой функцией аргументов x и y , удовлетворяющей следующим четырем аксиомам скалярного произведения.

$$1^\circ. (x, y) = (y, x). \quad 2^\circ. (x + y, z) = (x, z) + (y, z). \quad 3^\circ. (\alpha x, y) = \alpha(x, y).$$

$$4^\circ. (x, x) > 0, \text{ если } x \neq \theta, \text{ и } (x, x) = 0, \text{ если } x = \theta.$$

Из аксиом 2° и 3° следует, что скалярное произведение (x, y) есть линейная функция по первому аргументу x . Пользуясь аксиомами $1^\circ - 3^\circ$, нетрудно показать, что скалярное произведение является линейной функцией и по второму аргументу. Действительно, в силу аксиом 1° и 2° имеем: $(x, y + z) = (y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z)$, а используя аксиомы 1° и 3° устанавливаем, что справедливы равенства:

$$(x, \alpha y) = (\alpha y, x) = \alpha(y, x) = \alpha(x, y).$$

Таким образом, из аксиом $1^\circ - 3^\circ$ следует, что скалярное произведение (x, y) есть симметричная билинейная форма. Из аксиомы 4° вытекает положительная определенность соответствующей квадратичной формы (x, x) : $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только если $x = \theta$.

Замечание. Отметим, что в любом линейном вещественном пространстве скалярное произведение элементов можно ввести бесконечным числом способов, задавая в некотором базисе различные, симметричные билинейные формы с положительно определенными матрицами.

1. Пусть $P = \sum_{k=0}^3 a_k x^k$, $Q = \sum_{j=0}^3 b_j x^j$ – любые полиномы степени не выше трех и

$A(P, Q) = \sum_{k=0}^3 a_k \cdot \sum_{j=0}^3 b_j$. Доказать, что $A(P, Q)$ – билинейная форма в пространстве полиномов

степени не выше трех и найти ее матрицу в базисе: $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2 - \frac{1}{3}, e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$. Δ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 & 2/5 \\ 1 & 1 & 2/3 & 2/5 \\ 2/3 & 2/3 & 4/9 & 4/15 \\ 2/5 & 2/5 & 4/15 & 4/25 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

2. В пространстве полиномов степени не выше двух задана билинейная форма $A(P, Q)$, где P и Q – любые полиномы из указанного пространства. Найти матрицу этой билинейной формы в базисе e_1, e_2, e_3 и записать $A(P, Q)$ через координаты векторов P и Q в этом базисе:

$$\text{а) } A(P, Q) = \int_0^1 \int_0^1 (s-t) P(s) Q(t) ds dt; \quad e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2;$$

$$\text{б) } A(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx; \quad e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

$$\Delta \text{ а) } \begin{pmatrix} 0 & -1/12 & -1/12 \\ 1/12 & 0 & -1/72 \\ 1/12 & 1/72 & 0 \end{pmatrix}; A(P, Q) = \frac{1}{12} a_1 b_0 - \frac{1}{12} a_0 b_1 + \frac{1}{12} a_2 b_0 - \frac{1}{12} a_0 b_2 + \frac{1}{72} a_2 b_1 - \frac{1}{72} a_1 b_2$$

;

$$a_0, a_1, a_2, \text{ и } b_0, b_1, b_2 - \text{координаты } P \text{ и } Q \text{ в базисе } e_1, e_2, e_3; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 \end{pmatrix};$$

$$A(P, Q) = 2a_0 b_0 + \frac{2}{3} a_1 b_1 + \frac{8}{45} a_2 b_2, \text{ где } a_0, a_1, a_2, \text{ и } b_0, b_1, b_2 - \text{координаты } P \text{ и } Q$$

в базисе e_1, e_2, e_3 . Δ

3. Составить матрицу данной билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в линейном n -мерном пространстве:

$$\text{а) } x_1 y_1 \quad (n=1); \quad \text{б) } x_1 y_1 \quad (n=2);$$

$$\text{в) } 2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - 5x_2 y_2 \quad (n=2);$$

$$\text{г) } x_1 y_2 - 3x_1 y_3 + 7x_2 y_3 + x_2 y_1 - 3x_3 y_1 + 7x_3 y_2 + x_3 y_3 \quad (n=2).$$

$$\Delta \text{ а) } (1); x_1^2; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; x_1^2; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}; 2x_1^2 - 2x_1 x_2 - 5x_2^2; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2x_1 x_2 - 6x_1 x_3 + 14x_2 x_3 + x_3^2. \quad \Delta$$

4. Найти симметричную билинейную форму $A(x, y)$ соответствующую данной квадратичной форме:

$$\text{а) } A(x, x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 2x_2 x_3;$$

$$\text{б) } A(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 + 2x_2 x_3;$$

$$\text{в)} A(x, x) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 18x_1x_2 + 20x_1x_3;$$

$$\text{г)} A(x, x) = x_1^2 - x_2^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

$$16. \text{ а)} A(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2;$$

$$\text{б)} A(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2;$$

$$\text{в)} A(x, y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + 9x_1y_2 + 9x_2y_1 + 10x_1y_3 + 10x_3y_1;$$

$$\text{г)} A(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 + \frac{5}{2}x_1y_2 + \frac{5}{2}x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2. \quad \Delta$$

5. По заданной квадратичной форме в n -мерном линейном пространстве восстановить симметричную билинейную форму:

$$\text{а)} -3x_1^2 \quad (n=1); \quad \text{б)} -18x_1x_2 + 9x_2^2 \quad (n=2);$$

$$\text{в)} x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2 \quad (n=3);$$

$$\text{г)} 2x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_3^2 \quad (n=3).$$

$$17. \text{ а)} -3x_1y_1; \text{ б)} 9(-x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2); \text{ в)} x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2 + 7x_3y_3;$$

$$\text{г)} 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 3x_2y_2. \quad \Delta$$

6. Записать квадратичную форму с заданной матрицей:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а)} 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2; \quad \text{б)} -4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2; \quad \text{в)} 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2;$$

$$\text{г)} 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3; \quad \text{д)} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4);$$

$$\text{е)} 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_3^2 + x_4^2). \quad \Delta$$

7. Данную квадратичную форму привести к каноническому виду методом Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции. Какова определенность форм:

$$\text{а)} 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2; \quad \text{б)} x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2; \quad \text{в)} -x_1x_2;$$

$$\text{г)} 25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2; \quad \text{д)} 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2; \quad \text{е)} 24x_1x_2 - 16x_1^2 - 9x_2^2;$$

$$\text{ж)} x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2; \quad \text{з)} 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2;$$

$$\text{и)} x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2; \quad \text{к)} x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3;$$

$$\text{л)} 8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3; \quad \text{м)} x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4;$$

$$\text{н)} x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4;$$

$$\text{о)} x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_3x_5 + x_4^2 - 2x_4x_6 + x_5^2 + x_6^2;$$

п) $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$; р) $x_1x_2 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

- Δ а) $\xi_1^2 + \xi_2^2$; 2, 2, 0, +; б) $\xi_1^2 - \xi_2^2$; 2, 1, 1, ?; в) $\xi_1^2 - \xi_2^2$; 2, 1, 1, ?; г) ξ_1^2 ; 1, 1, 0, + = ;
 д) $-\xi_1^2 - \xi_2^2$; 2, 0, 2, -; е) $-\xi_1^2$; 1, 0, 1, - =; ж) $\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2$; 3, 2, 1, ?; з) $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$;
 3, 3, 0, +; и) $\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$; 3, 1, 2, ?; к) $\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$; 3, 1, 2, ?; л) $\xi_1^2 + \xi_2^2$; 2, 2, 0, + = ;
 м) $\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2$; 4, 2, 2, ?; н) $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$; 4, 4, 0, +; о) $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_5^2 - \xi_6^2$;
 6, 4, 2, ?; п) ξ_1^2 ; 1, 1, 0, + =; р) $-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$; 3, 0, 3, - . $\triangleleft$

7. Доказать, что квадратичная форма $A(x, x)$, тогда и только тогда является положительно определенной, когда ее матрица представляется в виде $A = C^T C$, где C – невырожденная вещественная матрица.

9. Какими свойствами должна обладать билинейная форма $A(x, y) = \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \eta_k$ для того, чтобы ее

значение от координат любых двух векторов $x(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ вещественного линейного пространства V_n в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ можно было бы принять за скалярное произведение этих векторов, определяющее n -мерное евклидово пространство. Чему равны скалярные произведения векторов выбранного базиса?

- Δ Билинейная форма должна быть симметричной ($a_{ik} = a_{ki}$) и квадратичная форма $A(x, x) = \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k$ – положительно определена ($(e_i, e_k) = a_{ik}$ $i, k = 1, 2, \dots, n$). $\triangleleft$

10. Определить число положительных и отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы:

- а) $A(x, x) = \xi_1^2 - 5\xi_2^2 + \xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 4\xi_2\xi_3$;
 б) $A(x, x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 + 5\xi_3^2$;
 в) $A(x, x) = 4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + 5\xi_3^2 - 4\xi_4^2 + 12\xi_4\xi_5 + \xi_5^2$;
 г) $A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4$; д) $\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_4 + \xi_4\xi_1$.

- Δ а) 1+, 1–; б) 3+; в) 3+, 1–; г) 2+, 2–; д) 1+, 1–. $\triangleleft$

11. Найти нормальный вид следующих квадратичных форм:

- а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
 б) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
 в) $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
 г) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;
 д) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

- Δ а) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; б) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; в) $y_1^2 - y_2^2$; г) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; д) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. $\triangleleft$

12. Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм. (Ввиду неоднозначности преобразования, ответ может, получиться разным):

- а) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$; б) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
 в) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; г) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;
 д) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$; е) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;
 Δ а) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3, x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3, x_3 = \frac{1}{3}y_3$; б) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, x_1 = \frac{1}{2}y_1 + y_2,$
 $x_2 = y_2 + y_3, x_3 = -y_2 + y_3$; в) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, x_1 = y_1 - y_2 - y_3, x_2 = y_1 + y_2 - y_3, x_3 = y_3$;
 г) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 - \frac{5\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_3, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_3, x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_3$;
 д) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, x_1 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}y_3, x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$; е) $y_1^2 - y_2^2,$
 $x_1 = y_1 - y_2 - y_3, x_2 = y_1 + y_2 - y_3, x_3 = y_3, x_4 = y_4.$ **⚡**

13. Какие из приведенных ниже квадратичных форм являются положительно определенными:

- а) $A(x, x) = 5\xi_1^2 + \xi_2^2 + 5\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 8\xi_1\xi_3 - 4\xi_2\xi_3$;
 б) $A(x, x) = 3\xi_1^2 + \xi_2^2 + 5\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 8\xi_1\xi_3 - 4\xi_2\xi_3$;
 в) $A(x, x) = 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 + 4\xi_3^2 - 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_1\xi_3 - 3\xi_2\xi_3$;
 г) $A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 3\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2\xi_3$;
 д) $A(x, x) = \xi_1^2 + 5\xi_2^2 - 4\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_2 - 4\xi_1\xi_3$?

Δ а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет. **⚡**

14. При каких значениях параметра λ , следующие квадратичные формы являются положительно определенными:

- а) $5\xi_1^2 + \xi_2^2 + \lambda\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$;
 б) $2\xi_1^2 + \xi_2^2 + 3\xi_3^2 + 2\lambda\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3$;
 в) $\xi_1^2 + \xi_2^2 + 5\xi_3^2 + 2\lambda\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + 4\xi_2\xi_3$;
 г) $\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\lambda\xi_1\xi_2 + 10\xi_1\xi_3 + 6\xi_2\xi_3$;
 д) $2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\lambda\xi_1\xi_2 + 6\xi_1\xi_3 + 2\xi_2\xi_3$?

Δ а) $\lambda > 2$; б) $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$; в) $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$; г) $\lambda \in \emptyset$; д) $\lambda \in \emptyset$. **⚡**

15. Привести к каноническому виду форму, зависящую от параметра λ :

- а) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + \lambda x_2^2$; б) $8x_1^2 + \lambda x_1x_2 + 2x_2^2$;

При переходе от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{f_i\}$ различные объекты, заданные в линейном пространстве преобразуются по разному:

а) базисные векторы: $Pe_i = f_i; \quad P^{-1}f_i = e_i;$

б) векторы $x_{(e)} = Px_{(f)}; \quad x_{(f)} = P^{-1}x_{(e)};$

в) матрицы линейных операторов: $A_{(f)} = P^{-1}A_{(e)}P;$

г) коэффициенты линейных форм: $h_{(f)} = Ph_{(e)};$

д) матрицы билинейных форм: $A_{(f)} = P^T A_{(e)} P,$

и, кроме того, при последовательных преобразованиях: $T_{e \rightarrow g} = P_{e \rightarrow f} G_{f \rightarrow g}.$

§2. Контрольные вопросы и задания

- 3) Как изменятся координаты вектора, если: а) один из базисных векторов умножить на $\alpha \neq 0$; б) переставить местами два базисных вектора?
- 4) Как изменятся коэффициенты линейной формы, если: а) один из базисных векторов умножить на $\alpha \neq 0$; б) переставить местами два базисных вектора?
- 5) Как изменится матрица линейного оператора, если: а) один из базисных векторов умножить на $\alpha \neq 0$; б) переставить местами два базисных вектора?
- 6) Как изменится матрица билинейной формы, если: а) один из базисных векторов умножить на $\alpha \neq 0$; б) переставить местами два базисных вектора?
- 7) Сохраняется ли свойство положительной определенности квадратичной формы при переходе от одного базиса к другому?

§3. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть i, j – координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Найти разложение вектора $x = i + j$ по базису $\{e_1, e_2\}$, если $e_1 = 7i + 4j, e_2 = 5i + 3j$.

Решение. По определению, матрица перехода от базиса $\{i, j\}$ к базису $\{e_1, e_2\}$ есть матрица

$P = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$. Вектор x в базисе $\{i, j\}$ имеет вид: $x = (1, 1)$. По формуле $x_f = P^{-1}x_e$, находим столбец x_e координат вектора x в базисе $\{e_1, e_2\}$:

$$x_e = P^{-1}x = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = -2e_1 + 3e_2$.

Задача 2. В пространстве V_2 даны три базиса: $\{e_1, e_2\}$, $\{f_1, f_2\}$ и $\{g_1, g_2\}$ причем $f_1 = e_1 - e_2, f_2 = e_1 + e_2; g_1 = 3e_1 + e_2, g_2 = 5e_1 + e_2$. Найти матрицу перехода от базиса $\{f_1, f_2\}$ к базису $\{g_1, g_2\}$.

Решение. По определению матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{f_1, f_2\}$ есть матрица

$P_{e \rightarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, а матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{g_1, g_2\}$ есть матрица

$P_{e \rightarrow g} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $f_i = P_{e \rightarrow f} e_i, g_i = P_{e \rightarrow g} e_i$. Из первого равенства находим $e_i = P_{e \rightarrow f}^{-1} f_i$. Подставляя

во второе равенство, получаем $g_i = P_{e \rightarrow g} P_{e \rightarrow f}^{-1} f_i$.

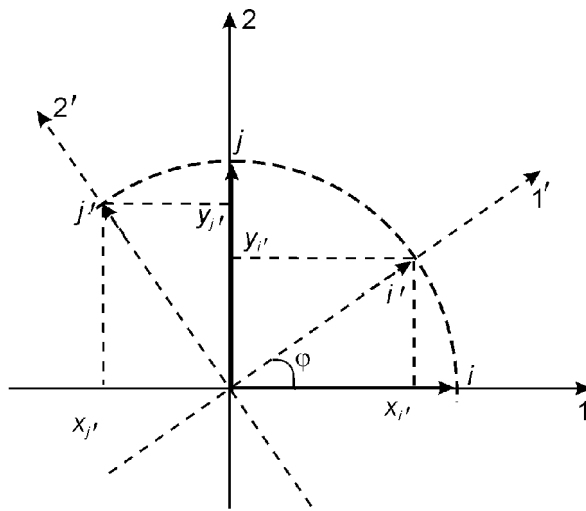
Таким образом, матрицей перехода от базиса $\{f_1, f_2\}$ к базису $\{g_1, g_2\}$ является матрица $P_{e \rightarrow g} P_{e \rightarrow f}^{-1}$. Вычисляем матрицу $P_{e \rightarrow f}^{-1}$: $P_{e \rightarrow f}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а затем находим произведение $P_{e \rightarrow g} P_{e \rightarrow f}^{-1}$:

$$P_{e \rightarrow g} P_{e \rightarrow f}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть i, j – координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Найти матрицу перехода от базиса $\{i, j\}$ к базису $\{i', j'\}$, повернутому на угол φ по отношению к базису $\{i, j\}$ и матрицу обратного перехода.

Решение. Из рис.1 ясно, что координаты векторов i', j' в базисе $\{i, j\}$ имеют вид $i' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$, $j' = \{-\sin\varphi, \cos\varphi\}$. Пользуясь определением, составляем матрицу перехода $A(\varphi)$ переходя от базиса $\{i, j\}$ к базису $\{i', j'\}$:

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \quad (1)$$



Вычисляем матрицу $A^{-1}(\varphi)$ обратного перехода:

$$A^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \text{ Отметим, что обратный переход от базиса } \{i', j'\} \text{ к базису } \{i, j\} \text{ есть}$$

поворот базиса на угол $(-\varphi)$, и поэтому матрицу этого перехода можно найти по формуле (1), заменив φ на $(-\varphi)$:

$$A^{-1}(\varphi) = A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Билинейная форма $\varphi(x, y)$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет вид $\varphi(x, y) = -2x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_1y_3 + 5x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$. Найти выражение этой билинейной формы через координаты элементов в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$, если $f_1 = e_2$, $f_2 = -e_1$, $f_3 = e_2 + e_3$.

Решение. Составим матрицу P перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{f_1, f_2, f_3\}$ (со столбцами из координат элементов f_1, f_2, f_3 в базисе $\{e_i\}_{i=1}^3$):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и воспользуемся формулой $B_f = P^T \cdot B_e \cdot P$ преобразования матрицы билинейной формы при изменении базиса, где B_e и B_f – матрицы билинейной формы $\varphi(x, y)$ в базисах $\{e_1, e_2, e_3\}$ и $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Составим матрицу B_e : $B_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем:

$$B_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

отсюда получаем следующий вид билинейной формы в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$:

$$\varphi(x, y) = -5\xi_1\eta_2 + \xi_1\eta_3 - 3\xi_2\eta_1 - 2\xi_2\eta_2 - 4\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_1 - 5\xi_3\eta_2,$$

где $x = \sum_{i=1}^3 \xi_i f_i$, $x = \sum_{j=1}^3 \eta_j f_j$.

Задача 5. Привести уравнение кривой второго порядка

$11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$ к каноническому виду с помощью поворота осей координат системы Oxy и последующего параллельного переноса.

Решение. Приведем квадратичную форму $11x^2 - 20xy - 4y^2$, связанную с заданным уравнением, ортогональным преобразованием к каноническому виду. С этой целью составим матрицу квадратичной

формы: $A = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$, и запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & -10 \\ -10 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 144 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 16$. Далее находим взаимно ортогональные нормированные

собственные векторы (столбцы) F_1 и F_2 матрицы A : если $\lambda_1 = -9$, то $F_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; если $\lambda_2 = 16$, то

$$F_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое ортогональное преобразование имеет матрицу $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

, у которой $\det P = 1$. Равенство единице определителя ортогонального преобразования обозначает, что происходит поворот системы координат без отражения относительно одной из осей, т.е. без изменения ориентации системы координат. Матрица P является матрицей оператора поворота на угол φ такой, что

$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Повернув оси координат системы Oxy на угол $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ (против

часовой стрелки), получим прямоугольную систему $Ox'y'$. При этом координаты точек преобразуются по формуле $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ или

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y').$$

При таком ортогональном преобразовании квадратичная форма переходит в форму: $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = -9(x')^2 + 16(y')^2$. Запишем в новых координатах линейные члены заданного уравнения:

$$-20x - 8y = -\frac{36}{\sqrt{5}}x' + \frac{32}{\sqrt{5}}y'.$$

В системе координат $Ox'y'$ уравнение кривой принимает вид:

$$-9(x')^2 + 16(y')^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}x' + \frac{32}{\sqrt{5}}y' + 1 = 0.$$

Выделяя полные квадраты по обеим переменным, получаем:

$$-9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5 = 0.$$

Полагая $x'' = x' + \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}$, т.е. производя параллельный перенос осей координат так,

что начало координат, переходит в точку $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, приходим к каноническому уравнению данной кривой

$$\frac{(x'')^2}{5/9} - \frac{(y'')^2}{5/16} = 1.$$

Это – каноническое уравнение гиперболы в системе координат $O'x''y''$.

Задача 6. С помощью поворота осей координат и последующего параллельного переноса привести уравнение кривой второго порядка $4x^2 - 4xy + y^2 - 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{5}y + \frac{129}{20} = 0$ к каноническому виду.

Решение. Составляем матрицу квадратичной формы, связанной с заданным уравнением:

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$. Находим взаимно ортогональные нормированные собственные векторы матрицы A :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Они являются столбцами матрицы P ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, преобразование (как и в предыдущем примере) это поворот на угол $\varphi = \arccos(1/\sqrt{5})$ и координаты точек преобразуются по формулам:

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$. Пользуясь этими формулами, запишем линейные члены заданного уравнения в координатах x', y' :

$$-2\sqrt{5}x + 3\sqrt{5}y = 4x' + 7y'.$$

Итак, уравнение данной кривой в системе координат $Ox'y'$ полученной из системы Oxy поворотом осей на угол $\varphi = \arccos(1/\sqrt{5})$, имеет вид:

$$5(y')^2 + 4x' + 7y' + \frac{129}{20} = 0.$$

В результате выделения полного квадрата по переменной y' получаем уравнение $5(y' + 0,7)^2 + 4(x' + 1) = 0$.

Положим $x'' = x' + 1$, $y'' = y' + 0,7$, т.е. произведем параллельный перенос осей координат системы $Ox'y'$ так, что начало координат перейдет в точку $O'(-1; -0,7)$. В системе координат $O'x''y''$ уравнение кривой имеет канонический вид: $(y'')^2 = -0,8x''$. Это – каноническое уравнение параболы.

Задача 7. Перейти к такой прямоугольной системе координат, в которой уравнение поверхности $3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz - 12\sqrt{30}x - 14\sqrt{30}y + 2\sqrt{30}z + 506 = 0$ имеет канонический вид, и определить тип поверхности.

Решение. Квадратичная форма $3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz$, связанная с заданным уравнением, имеет

матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Собственные значения этой матрицы есть $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 4$, а столбцы (векторы)

$$f_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

являются попарно ортогональными нормированными ее собственными векторами. Определитель матрицы, составленной из этих столбцов, равен -1 . Это означает, что ортогональное преобразование является поворотом с отражением относительно одной из координатных плоскостей. Во избежание этого поменяем местами, первый и второй столбцы в матрице (f_1, f_2, f_3) , получим ортогональную матрицу:

$$P = (f_2, f_1, f_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{30} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix},$$

определитель которой равен единице, т.е. преобразование не будет производить отражения.

Ортогональное преобразование переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ приводит квадратичную форму к

следующему каноническому виду:

$$4(x')^2 - 2(y')^2 + 4(z')^2.$$

С помощью формулы для ортогонального преобразования переменных вычислим в новых координатах линейные члены заданного уравнения:

$$-12\sqrt{30}x - 14\sqrt{30}y + 2\sqrt{30}z = -40\sqrt{6}x' + 12\sqrt{5}y'.$$

Итак, в системе координат $Ox'y'z'$ с координатными векторами i', j', k' уравнение поверхности имеет вид:

$$4(x')^2 - 40\sqrt{6}x' - 2(y')^2 + 12\sqrt{5}y' + 4(z')^2 + 506 = 0.$$

Выделив полные квадраты по переменным x' и y' , получим уравнение

$$4(x' - 5\sqrt{6})^2 - 2(y' - 3\sqrt{5})^2 + 4(z')^2 - 4 = 0. \text{ Положим } x'' = x' - 5\sqrt{6}, y'' = y' - 3\sqrt{5},$$

$z'' = z' - 3\sqrt{5}$, т.е. произведем параллельный перенос осей координат системы $Ox'y'z'$ так, что

начало координат перейдет в точку $O'(5\sqrt{6}, 3\sqrt{5}, 0)$. В новой системе координат $O'x''y''z''$ уравнение

поверхности имеет канонический вид: $(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{2} + (z'')^2 = 1$. Это – уравнение однополостного

гиперболоида.

§4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Найти координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 :

а) $x(1, 2, 1, 1)$; $e_1(1, 1, 1, 1)$, $e_2(1, 1, -1, -1)$, $e_3(1, -1, 1, -1)$, $e_4(1, -1, -1, 1)$;

б) $x(0, 0, 0, 1)$; $e_1(1, 1, 0, 1)$, $e_2(2, 1, 3, 1)$, $e_3(1, 1, 0, 0)$, $e_4(0, 1, -1, -1)$.

$$\Delta \quad \text{а) } \frac{1}{4}(5, 1, -1, -1); \quad \text{б) } (1, 0, -1, 0). \quad \text{А}$$

2. Дан вектор $x(1, 0, -1, 3, 8)$. Найти координаты этого вектора в базисе: $e_1(1, 1, 1, 1, 1)$, $e_2(0, 1, 1, 1, 1)$, $e_3(0, 0, 1, 1, 1)$, $e_4(0, 0, 0, 1, 1)$, $e_5(0, 0, 0, 0, 1)$.

$$\Delta \quad (1, -1, -1, 4, 5). \quad \text{А}$$

3. Вектор $x \in V_n$ в базисе $\{e_i\}_1^n$ имеет координаты $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Как построить базис в V_n , чтобы

координаты вектора x в этом базисе были бы: $(1, 0, 0, \dots, 0)$? $\Delta \quad \{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, e_2, e_2, \dots, e_n\}$. А

4. Составить формулы преобразования координат при переходе от базиса e_1, e_2, e_3, e_4 к базису

e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 . Записать матрицу перехода $P_{e \rightarrow e'}$:

а) $e_1(1, 0, 0, 0)$, $e_2(0, 1, 0, 0)$, $e_3(0, 0, 1, 0)$, $e_4(0, 0, 0, 1)$,

$$e'_1(1, 1, 0, 0), e'_2(1, 0, 1, 0), e'_3(1, 0, 0, 1), e'_4(1, 1, 1, 1);$$

$$б) e_1(1, 2, -1, 0), e_2(1, -1, 1, 1), e_3(-1, 2, 1, 1), e_4(-1, -1, 0, 1),$$

$$e'_1(2, 1, 0, 1), e'_2(0, 1, 2, 2), e'_3(-2, 1, 1, 2), e'_4(1, 3, 1, 2).$$

$$\Delta \text{ а) } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x'_1 = 0,5(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\ x'_2 = 0,5(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ x'_3 = 0,5(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ x'_4 = 0,5(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \end{matrix} ; \text{ б) } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x'_1 = x_2 - x_3 + x_4 \\ x'_2 = -x_1 + x_2 \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{matrix} . \quad \Delta$$

5. Проверить, что каждая из двух систем векторов является базисом и составить формулы преобразования координат при переходе от базиса e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 к e_1, e_2, e_3, e_4 . Записать матрицу перехода $P_{e \rightarrow e'}$:

$$\text{а) } e_1 = (1, 2, 1), e_2(2, 3, 3), e_3(3, 7, 1),$$

$$e'_1(3, 1, 4), e'_2(5, 2, 1), e'_3(1, 1, -6);$$

$$\text{б) } e_1(1, 1, 1, 1), e_2(1, 2, 1, 1), e_3(1, 1, 2, 1), e_4(1, 3, 2, 3),$$

$$e'_1(1, 0, 3, 3), e'_2(-2, -3, -5, -4), e'_3(2, 2, 5, 4), e'_4(-2, -3, -4, -4).$$

$$\Delta \text{ а) } x_1 = -27x'_1 - 71x'_2 - 41x'_3; \quad \text{б) } x_1 = 2x'_2 + x'_3 - x'_4;$$

$$x_2 = 9x'_1 + 20x'_2 + 9x'_3;$$

$$x_2 = -3x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + x'_4;$$

=

$$x_3 = 4x'_1 + 12x'_2 + 8x'_3;$$

$$x_3 = x'_1 - 2x'_2 + 2x'_3 - x'_4;$$

$$x_4 = x'_1 - x'_2 + x'_3 - x'_4;$$

$$P = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

6. Каковы будут координаты векторов $x(2, -3), y(-1, 5)$ в новом базисе, если векторы нового базиса выражаются через векторы старого по формулам: а) $e'_1 = e_2, e'_2 = -e_1$; б) $e'_3 = -e_2, e'_2 = e_1$.

$$\Delta \text{ а) } x(-3, -2), y(5, 1); \quad \text{б) } x(3, 2), y(-5, -1). \quad \Delta$$

7. Найти матрицу перехода от базиса $1, x, x^2, \dots, x^n$ к базису $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \dots, (x - \alpha)^n$ пространства полиномов степени не выше n .

$$\Delta \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \dots & (-1)^n \alpha^n \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \dots & (-1)^{n-1} n\alpha^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \text{ В этой матрице в } (k+1) \text{ столбце стоят числа: } (-\alpha)^k,$$

$$C_k^{k-1}(-\alpha)^{k-1}, C_k^{k-2}(-\alpha)^{k-2} \dots 1, 0, \dots 0 \quad \Delta$$

8. Как изменится матрица линейного оператора, если в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ поменять местами два вектора e_i и e_j ?

$$\Delta \text{ В матрице переставятся } i\text{-я и } j\text{-я строки, а также } i\text{-й и } j\text{-й столбцы. } \Delta$$

9. Линейные операторы A и B в V_4 имеют в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Каковы будут матрицы этих}$$

операторов в базисах:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } e_1, e_3, e_2, e_4; & \text{б) } e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4? \\ \Delta \text{ а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}. \quad \Delta \end{array}$$

10. Линейный оператор A задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1,$

e_2, e_3, e_4 . Найти его матрицу в базисе: $e'_1 = e_1 + e_2 + 3e_3 + e_4, e'_2 = -2e_2 + e_3 + e_4,$

$$e'_3 = e_3 + 5e_4, e'_4 = e_4. \quad \Delta \begin{pmatrix} 2 & 11 & 11 & 2 \\ -17/2 & 15/2 & -3/2 & 0 \\ 1/2 & -87/2 & -65/2 & -6 \\ 6 & 204 & 158 & 29 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

11. Линейный оператор A в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Найти его матрицу в базисе: } f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, f_2$$

$$= 3e_1 + 4e_2 + e_3, f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3. \quad \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

12. Линейный оператор A в базисе $a_1(2, -1, 0), a_2(-1, 1, -1), a_3(0, -1, 1)$

имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе: $b_1(1, 0, 1)$

$$), b_2(0, -1, 2), b_3(1, 1, 0). \quad \Delta \begin{pmatrix} 23 & 19 & 18 \\ -13 & -10 & -11 \\ -16 & -14 & -12 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

13. Доказать, что матрицы одного и того же линейного оператора в двух базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица перехода от одного из этих базисов к другому перестановочна с матрицей этого линейного оператора в одном из заданных базисов.

14. Оператор A в базисе $a_1(1, 2), a_2(2, 3)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Оператор B в базисе $b_1(3, 1), b_2(4, 2)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти

$$\text{матрицу оператора } A + B \text{ в базисе } b_1, b_2. \quad \Delta \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -295 & -25 \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

15. Найти результат последовательного выполнения линейных операций

$$\begin{aligned} x_1 &= 5y_1 - y_2 + 3y_3 & y_1 &= 2z_1 + z_3 \\ x_2 &= y_1 - 2y_2 & \text{и} & \quad y_2 = z_2 - 5z_3. \\ x_3 &= 7y_2 - y_3 & y_3 &= 2z_2 \end{aligned}$$

Δ Матрица преобразования будет $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$

а само преобразование: $\begin{aligned} x_1 &= 10z_1 + 5z_2 + 10z_3 \\ x_2 &= 2z_1 - 2z_2 + 1z_3. \\ x_3 &= 5z_2 - 35z_3 \end{aligned} \quad \Delta$

16. Даны матрицы операторов A и B . Найти матрицу оператора C , если $z = Cx$, $y = Ax$, $z = By$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\Delta \quad C = BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 11 & 11 & 5 \end{pmatrix}. \quad \Delta$

17. Оператор A в базисе $a_1(1, -2)$, $a_2(-1, 3)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а

оператор B в базисе $b_1(2, -3)$, $b_2(1, 2)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Найти

матрицу оператора AB в базисе, в котором заданы координаты всех векторов. $\Delta \quad \begin{pmatrix} -38 & -16 \\ 145 & 61 \end{pmatrix}. \quad \Delta$

18. В базисе e_1, e_2, e_3 линейная форма выражается через координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 вектора x формулой $f(x) = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3$. Какой формулой выражается $f(x)$ через координаты x в базисе $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_3$?

$\Delta \quad f(x) = 4\xi'_1 + 3\xi'_2 + 5\xi'_3. \quad \Delta$

19. В базисе $\{e_i\}$ линейная форма f имеет строку коэффициентов h . Найти ее строку коэффициентов h' , если $e' = Se$:

а) $h(1, -1, 1)$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$; б) $h(-1, 1, 2)$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$;

в) $h(1, 1, 1)$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$; г) $h(1, 1, -1)$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

$\Delta \quad \text{а) } (0, 0, 2); \quad \text{б) } (5, -5, -2); \quad \text{в) } (3, 3, 3); \quad \text{г) } (0, 1, 2). \quad \Delta$

20. Дана билинейная форма $A(x, y)$, записанная через координаты x и y в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Написать эту же билинейную форму через координаты x и y в базисе $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

а) $A(x, y) = \xi_1\eta_1 + 2\xi_1\eta_3 + 4\xi_2\eta_1 + 5\xi_2\eta_2 + 7\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 + 3\xi_3\eta_3,$
 $e'_1 = 2e_1 - e_2, \quad e'_2 = e_1 + e_2 - e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 5e_3;$

б) $A(x, y) = 5\xi_1\eta_1 + 5\xi_2\eta_2 - \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1 + 2\xi_2\eta_3 + 2\xi_3\eta_2 + 5\xi_3\eta_3$,
 $e'_1 = e_1, e'_2 = e_1 + e_2, e'_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$;

в) $A(x, y) = \xi_1\eta_1 + 2\xi_2\eta_2 - \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1 + 3\xi_2\eta_3 + 3\xi_3\eta_2 + 3\xi_3\eta_3 - 2\xi_2\eta_4 - 2\xi_4\eta_2 +$
 $+ \xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3 + 4\xi_4\eta_4, e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = e_3 + e_4, e'_3 = e_2, e'_4 = e_4$.

Δ а) $A(x, y) = \xi'_1\eta'_1 - 4\xi'_1\eta'_2 - 27\xi'_1\eta'_3 + 6\xi'_2\eta'_1 + 3\xi'_2\eta'_2 + 43\xi'_2\eta'_3 + 3\xi'_3\eta'_1 - 7\xi'_3\eta'_2 + 194\xi'_3\eta'_3$;

б) $A(x, y) = 5\xi'_1\eta'_1 + 5\xi'_1\eta'_2 + 5\xi'_2\eta'_1 + 10\xi'_2\eta'_2 + 4\xi'_1\eta'_3 + 4\xi'_3\eta'_1 + 16\xi'_2\eta'_3 + 16\xi'_3\eta'_2 + 36\xi'_3\eta'_3$;

в) $A(x, y) = 3\xi'_1\eta'_1 + 9\xi'_2\eta'_2 + 2\xi'_1\eta'_3 + 2\xi'_3\eta'_1 + \xi'_2\eta'_3 + \xi'_3\eta'_2 + 2\xi'_3\eta'_3 - 2\xi'_1\eta'_4 - 2\xi'_4\eta'_1 + 5\xi'_2\eta'_4 +$
 $+ 5\xi'_4\eta'_2 - 2\xi'_3\eta'_4 - 2\xi'_4\eta'_3 + 4\xi'_4\eta'_4. \triangle$

21. Как изменится матрица билинейной (квадратичной) формы, если изменить базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ следующим образом:

- а) поменять местами $i^{\text{й}}$ и $j^{\text{й}}$ векторы;
 б) умножить $i^{\text{й}}$ базисный вектор на $\lambda \neq 0$;
 в) вектор e_i заменить на $e_i + \lambda e_j$;
 г) векторы базиса расположить в обратном порядке.
- Δ а) поменяются местами $i^{\text{я}}$ и $j^{\text{я}}$ строка, а также $i^{\text{й}}$ и $j^{\text{й}}$ столбцы; б) $i^{\text{я}}$ строка и $j^{\text{й}}$ столбец умножатся на λ (при этом элемент диагонали, стоящий на их пересечении умножится на λ^2); в) к $i^{\text{й}}$ строке прибавится $j^{\text{я}}$ строка, умноженная на λ , а также к $i^{\text{му}}$ столбцу прибавится $j^{\text{й}}$ столбец умноженный на λ (при этом элемент диагонали, стоящий на их пересечении преобразуется по формуле: $b'_{ii} = b_{ii} + 2\lambda b_{ij} + \lambda^2 b_{jj}$); г) матрица отразится симметрично относительно побочной диагонали $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$. $\triangle$

22. Квадратичная форма и линейный оператор в некотором базисе имеют одинаковые матрицы. Какой должна быть матрица P перехода к другому базису для того, чтобы и в другом базисе матрицы совпали?

$\Delta P^T P = E$ – ортогональная матрица. $\triangle$

23. Квадратичная форма в базисе $\{e_i\}$ задана. Записать квадратичную форму в базисе $\{e'_i\}$:

- а) $25x_1^2 - 14x_1x_2 + 2x_2^2$; $e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = -e_1 + e_2$;
 б) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 9x_2^2$; $e'_1 = 2e_1 - e_2, e'_2 = e_1 - e_2$;
 в) $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2$; $e'_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{6}e_2, e'_2 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{6}e_2$;
 г) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$; $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, e'_3 = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$.
18. а) $13x_1'^2 - 46x_1'x_2' + 41x_2'^2$; б) $x_1'^2 + 2x_2'^2$; в) $x_1'^2$;
 г) $8x_1'^2 + 18x_1'x_2' - 8x_1'x_3' + 3x_2'^2 - 6x_2'x_3' - 4x_3'^2$; $\triangle$

24. Упростить уравнение кривой 2^{го} порядка $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$ и написать формулы преобразования координат.

$$\Delta \quad y'^2 = 2x'; \quad \begin{cases} x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \\ y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases} \quad \triangleleft$$

25. Привести уравнение следующих центральных поверхностей 2^{го} порядка к каноническому виду и определить тип поверхности:

а) $8x^2 - 7y^2 + 8z^2 + 8xy - 2xz + 8yz + 1 = 0$;

б) $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz = 27$;

в) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz = 1$;

г) $x^2 - 15y^2 + z^2 + 12xy - 4xz + 12yz = 3$.

Δ а) $9x'^2 + 9y'^2 - 9z'^2 = -1$; двуполостный гиперболоид вращения с осью Oz' ;

б) $2x'^2 + 5y'^2 + 8z'^2 = 27$; трехосный эллипсоид; в) $3x'^2 + 6y'^2 = 1$; эллиптический цилиндр

с образующими параллельными оси Oz' ; г) $3x'^2 + 3y'^2 - 19z'^2 = 3$; однополостный

гиперболоид вращения с осью Oz' . $\triangleleft$

26. Привести уравнения следующих центральных поверхностей 2^{го} порядка к каноническому виду и указать преобразования координат:

а) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = 5$;

б) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz = 1$;

в) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz = 27$;

г) $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 1 = 0$.

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{cases} -2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 = 5 \\ x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ y' = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z \\ z' = \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -2x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2 = 1 \\ x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ z' = y \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 9x'^2 + 9y'^2 = 27 \\ x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ y' = \frac{1}{3\sqrt{2}}x + \frac{4}{3\sqrt{2}}y + \frac{1}{3\sqrt{2}}z \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 4x'^2 + 8y'^2 - 2z'^2 + 1 = 0 \\ x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ z' = y \end{cases} \quad \triangleleft$$

ЛИТЕРАТУРА

- 36) Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
- 37) Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
- 38) Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.
- 39) Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1973.
- 40) Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.
- 41) Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.
- 42) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2001.
- 43) Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.

ЧАСТЬ 5

РАЗДЕЛ 1

БИЛИНЕЙНЫЕ (ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЕ) И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Основные определения и теоремы

Def. Пусть V – комплексное линейное пространство и $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \exists \lambda = B(x, y) \in \mathbb{C}$ такое, что

$$1^\circ. B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z);$$

$$2^\circ. B(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} B(x, y) + \bar{\beta} B(x, z).$$

Тогда говорят, что в комплексном линейном пространстве V задана полуторалинейная форма $B(x, y)$.

Примечание: В вещественном линейном пространстве полуторалинейная форма становится билинейной.

Пусть в V задан базис $\{e_i\}_1^n$. Тогда $\forall x, y \in V \quad B(x, y) = B\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i \bar{y}_j B(e_i, e_j)$. Матрица B с матричными элементами $b_{ij} = B(e_i, e_j)$ называется **матрицей полуторалинейной формы** и $B(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i \bar{y}_j$.

Примечание: В вещественном пространстве $B(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$.

Т^о. Для любой полуторалинейной формы в унитарном пространстве V существует единственный линейный оператор A_1 и единственный линейный оператор A_2 такие, что: $B(x, y) = (A_1 x, y)$; $B(x, y) = (x, A_2 y)$.

Оператор A_1 называется **оператором, присоединенным к полуторалинейной форме**.

Примечание: Та же теорема справедлива и для билинейных форм в евклидовых пространствах.

В ортонормированном базисе унитарного пространства V матрица полуторалинейной формы совпадает с транспонированной матрицей присоединенного оператора A_1 и с комплексно сопряженной матрицей линейного оператора A_2 (для A_1 : $a_{ij} = b_{ji}$, для A_2 : $a_{ij} = \bar{b}_{ij}$). Здесь также следует отметить, что матрица линейного оператора A_2 является эрмитово сопряженной к матрице линейного оператора A_1 .

Примечание: В евклидовом пространстве: для A_1 : $a_{ij} = b_{ji}$, для A_2 : $a_{ij} = b_{ij}$.

Полуторалинейная форма называется **эрмитовой**, если

$$\forall x, y \in V \quad B(x, y) = \overline{B(y, x)}.$$

Примечание: В евклидовом пространстве билинейная форма, для которой $\forall x, y \in V \quad B(x, y) = B(y, x)$ называется **симметричной**.

Т°. Для того чтобы полуторалинейная форма $B(x, y)$ была эрмитовой необходимо и достаточно, чтобы оператор A , присоединенный к ней, был эрмитовым.

Если в полуторалинейной форме положить $y = x$, то получим частный случай полуторалинейной формы – квадратичную форму $B(x, x)$.

Т°. Для того чтобы $B(x, y)$ была эрмитовой необходимо и достаточно, чтобы $B(x, x)$ была вещественной $\forall x \in V$.

Каждая эрмитова полуторалинейная форма порождает квадратичную форму и каждой квадратичной форме соответствует эрмитова полуторалинейная форма. При этом соответствующая полуторалинейная форма **называется полярной** к заданной квадратичной.

Т°. Если $B(x, y)$ – эрмитова форма в n -мерном унитарном пространстве V , то в V существует ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ и существуют вещественные числа λ_k такие, что в этом базисе: $B(x, x) = \sum_k \lambda_k |\xi_k|^2$,

$$B(x, x) = \sum_k \lambda_k |\xi_k|^2.$$

Этот базис может быть найден как собственный базис присоединенного оператора A , а числа λ_k при этом – собственные значения того же оператора.

Т°. Если $A(x, y)$ и $B(x, y)$ – эрмитовы формы в линейном пространстве V и форме $B(x, y)$ соответствует положительно определенная квадратичная форма $B(x, x)$, то в V существует базис $\{e_k\}_{k=1}^n$, в котором $A(x, x) = \sum_k \lambda_k |\xi_k|^2$; $B(x, x) = \sum_k |\xi_k|^2$.

Для нахождения этого базиса следует сначала найти λ_k из характеристического уравнения $\det(A - \lambda B) = 0$, а затем для каждого λ_k найти x как ненулевое решение системы $(A - \lambda_k B)x = 0$. Полученную систему векторов следует ортонормировать, принимая за скалярное произведение $(x, y) = B(x, y)$.

§ 2. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения полуторалинейной и билинейной форм.
2. Что такое матрица полуторалинейной формы в данном базисе? Изложите метод, которым можно построить такую матрицу.
3. Какая полуторалинейная форма называется эрмитовой?
4. Известно, что матрица полуторалинейной формы эрмитова в некотором базисе. Будет ли она эрмитовой в любом другом базисе?

- Укажите две различные билинейные формы, из которых получается следующая квадратичная форма: $B(x, x) = -x_1^2 + 5x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2$. Какая билинейная форма будет полярной к заданной квадратичной форме?
- Для каких полуторалинейных форм вводится понятие канонического вида и канонического базиса?
- Какие две квадратичные формы можно одновременно привести к каноническому виду невырожденным преобразованием?
- Изложите метод одновременного приведения пары квадратичных форм к каноническому виду.

§ 3. Примеры решения задач

- Составить матрицу полуторалинейной формы:

$$B(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3ix_2\bar{y}_2.$$

Является ли данная полуторалинейная форма эрмитовой?

Решение. Вспомним, что матрица B с матричными элементами $b_{ij} = B(e_i, e_j)$ называется матрицей полуторалинейной формы и $B(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i \bar{y}_j$.

Поэтому, для составления матрицы билинейной формы, элементы b_{ij} положим равными коэффициентам при $x_i \bar{y}_j$. В результате получим матрицу $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & 3i \end{pmatrix}$. Т. к. элементы матрицы формы не связаны соотношением $b_{ij} = \bar{b}_{ji}$, то форма не является эрмитовой.

- Привести квадратичную форму

$$B(x, x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

к каноническому виду. Найти канонический базис и матрицу перехода в этот базис.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

и характеристическое уравнение для присоединенного оператора:

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda) = -(\lambda - 4)^2(\lambda + 2) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = 4$ и $\lambda_3 = -2$. Эти корни являются собственными значениями линейного оператора, присоединенного к квадратичной форме. Найдем соответствующие им собственные векторы. Подставляя в матричное уравнение $(B - \lambda E) X = 0$, вместо λ , собственное значение $\lambda = 4$ и решая получившуюся систему линейных уравнений, находим два линейно независимых собственных вектора, соответствующих собственному значению 4.

$$e_1 = (1, 2, 0), e_2 = (1, 0, 2).$$

Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = -2$. Это вектор $e_3 = (2, -1, -1)$.

Три найденных вектора образуют в пространстве собственный базис линейного оператора.

Следует помнить, что когда мы говорим о собственном базисе линейного оператора, мы имеем в виду базис пространства, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Записывая координаты собственных векторов в столбцы матрицы, получим матрицу перехода из исходного базиса в новый базис.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Используем формулы преобразования матрицы линейного оператора и матрицы квадратичной формы при изменении базиса. Обратим внимание на то, что:

$$\tilde{B} = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

т. е. матрица линейного оператора действительно приводится к диагональному виду. Однако:

$$\tilde{B} = P^T B P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что матрица билинейной формы в новом базисе не имеет диагонального вида, т. е. найденный базис не является каноническим базисом квадратичной формы.

В чем же дело? Для ответа на этот вопрос, перейдем к следующей задаче.

3. Построить матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму $B(x,x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ к каноническому виду.

Решение. При решении предыдущей задачи установлено, что векторы $e_1 = (1, 2, 0)$, $e_2 = (1, 0, 2)$, $e_3 = (2, -1, -1)$ образуют собственный базис линейного оператора, присоединенного к матрице квадратичной формы, причем первые два отвечают одному и тому же собственному значению.

Вектор e_3 ортогонален векторам e_1 и e_2 , которые, однако, не ортогональны друг другу. Т. е. полученный базис не ортогонален. Чтобы получить ортогональный базис, выполним процесс ортогонализации векторов e_1 и e_2 . Это возможно проделать, поскольку оба вектора отвечают одному и тому же собственному значению.

Вектор f_1 нового базиса положим равным e_1 , а вектор f_2 будем искать, как линейную комбинацию векторов e_2 и f_1 : $f_2 = e_2 + \alpha f_1$. Коэффициент α находится из условия ортогональности векторов f_1 и f_2 . Он равен $(-0,2)$ и, таким образом, положив $f_3 = e_3$, получаем ортогональный базис из собственных векторов:

$$f_1 = (1, 2, 0), \quad f_2 = (4/5, -2/5, 2), \quad f_3 = (1, 0, 2).$$

Если нормировать эти векторы, и записать их координаты в столбцы матрицы, мы получим матрицу ортогонального преобразования, приводящего исходную квадратичную форму к каноническому виду.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Прежде всего, отметим, что матрица перехода ортогональна, т. е. $P^T = P^{-1}$ и тогда $\overset{||}{B} = \overset{||}{B} = P^{-1}BP = P^TBP$. Следовательно:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство показывает, что в данном базисе линейный оператор имеет диагональный вид, а квадратичная форма имеет канонический вид.

Это и неудивительно, ибо матрица перехода ортогональна и в новом базисе матрица линейного оператора и матрица квадратичной формы совпадают.

По сути, это и есть ответ на вопрос предыдущей задачи. Будьте осторожны – только в случае ортогонального преобразования матрица линейного оператора и матрица квадратичной формы преобразуются одинаково.

Если же необходимо найти канонический вид и канонический базис квадратичной формы с помощью преобразования, которое не обязательно является ортогональным, то можно воспользоваться одним из ранее изученных методов, например, методом Лагранжа или методом Якоби.

4. Квадратичная форма в некотором базисе имеет вид:

$$B(x, x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Задана также матрица Грамма того же базиса: $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти оператор A такой, что $B(x, y) = (x, Ay)$.

Решение. Прежде всего напомним, как связаны между собой в не ортонормированном базисе матрица полуторалинейной формы $B(x, y)$ и матрицы линейных операторов A_1 и A_2 в представлении $B(x, y) = (A_1x, y) = (x, A_2y)$:

$$A_1 = (\Gamma^{-1})^T B^T, \\ A_2 = \overline{\Gamma^{-1}B}.$$

Также отметим два факта, которые будут весьма полезными для решения данной задачи:

а) в неортогональном базисе с известной матрицей Грамма скалярное произведение векторов может быть вычислено по формуле $(x, y) = (x, \Gamma y)$, где скалярное произведение в правой части находится по правилам, справедливым в ортонормированном базисе.

б) в соотношении $B(x, y) = (x, Ay)$ матрица оператора A совпадает с матрицей билинейной формы B .

Тогда исходное соотношение можно записать в виде $B(x, y) = (x, \Gamma Ay)$. Следовательно, $B = \Gamma A$ и, значит, $A = \Gamma^{-1}B$.

Запишем матрицу квадратичной формы: $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица, обратная к матрице Грамма легко находится уже известными нам методами и равна $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь легко найти матрицу искомого оператора A .

$$A = \Gamma^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Привести пару квадратичных форм $A(x,x)$ и $B(x,x)$ к каноническому виду, если:

$$A(x,x) = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3,$$

$$B(x,x) = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Указать базис, в котором пара форм имеет канонический вид.

Решение. Прежде всего, запишем матрицы заданных квадратичных форм: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$ Вычисляя главные

миноры этих матриц, устанавливаем, что у матрицы A они все положительны, т. е. квадратичная форма $A(x,x)$ положительно определена и, следовательно, характеристическое уравнение имеет вид:

$$|B - \lambda A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-2\lambda & -1+\lambda \\ 2-2\lambda & -15-17\lambda & 3+7\lambda \\ -1+\lambda & 3+7\lambda & -3\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение в виде:

$$(1 - \lambda)(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0,$$

корнями которого, очевидно, являются числа $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$

Теперь, решая матричное уравнение $(B - \lambda A)X = 0$ для каждого из полученных λ , находим соответствующие собственные векторы. В результате получим:

$$\lambda_1 = -3: e_1 = (0, 1, 2); \quad \lambda_2 = 1: e_2 = (1, 0, 0); \quad \lambda_3 = 2: e_3 = (1, 1, 3).$$

Если в качестве скалярного произведения рассматривать билинейную форму $A(x,y) = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$, то нетрудно убедиться в том, что система векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$ является ортонормированной.

Записывая координаты найденных векторов в столбцы матрицы, получаем матрицу перехода из исходного, стандартного базиса в базис $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если мы посмотрим, как изменятся матрицы исходных квадратичных форм при переходе в новый базис, то обнаружим, что:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^T B P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица A в новом базисе является единичной, а матрица B – диагональной, то квадратичная форма $A(x, x)$ в новом базисе имеет нормальный вид (коэффициенты квадратичной формы в каноническом базисе равны по модулю 1), а форма $B(x, x)$ – канонический вид.

Итак, в базисе $\{ e_1(0, 1, 2), e_2(1, 0, 0), e_3(1, 1, 3) \}$ формы имеют следующий вид:

$$A(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad B(x, x) = -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2.$$

§ 4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Составить матрицы данных полуторалинейных форм в n -мерном унитарном пространстве:

а) $-ix_1 \bar{y}_1$ ($n=1$); б) $-ix_1 \bar{y}_1$ ($n=2$);

в) $3x_1 \bar{y}_1 + 4ix_1 \bar{y}_2 - 5x_2 \bar{y}_1 + ix_2 \bar{y}_2$ ($n=2$);

г) $-3ix_1 \bar{y}_1 + 2x_1 \bar{y}_2 + 2x_2 \bar{y}_1 + (1-i)x_2 \bar{y}_2$ ($n=2$);

Δ а) $(-i)$; б) $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 4i \\ -5 & i \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -3i & 2 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$. ▲

2. Составить матрицы данных полуторалинейных форм в n -мерном унитарном пространстве:

а) $(1+i)x_1 \bar{y}_2 + (1+i)x_2 \bar{y}_1 - 5x_2 \bar{y}_2$ ($n=2$);

б) $(1+i)x_1 \bar{y}_2 + (1-i)x_2 \bar{y}_1 - 5x_2 \bar{y}_2$ ($n=2$);

в) $x_1 \bar{y}_1 - 3x_2 \bar{y}_2 + (2+i)x_3 \bar{y}_3 - ix_1 \bar{y}_2 + (4+i)x_3 \bar{y}_1$ ($n=3$).

Δ а) $\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1+i & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & -5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4+i & 0 & 2+i \end{pmatrix}$. ▲

3. Записать эрмитову квадратичную форму с заданной матрицей:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{-i\frac{2\pi}{3}} & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1+2i & -1+2i \\ 3 & 7 & 1-2i & -1-2i \\ 1-2i & 1+2i & 7 & -3 \\ -1-2i & -1+2i & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \quad 5|x_1|^2 - 2x_1 \bar{x}_2 - 2x_2 \bar{x}_1 + 8|x_2|^2; \quad \text{б)} \quad e^{i2\pi/3}(x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_1); \quad \text{в)} \quad 8|x_2|^2 + 2x_1 \bar{x}_2 + 2x_2 \bar{x}_1 + x_1 \bar{x}_3 +$$

$$+ x_3 \bar{x}_1 + 2x_2 \bar{x}_3 + 2x_3 \bar{x}_2; \quad \text{г)} \quad 7(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2) + 3x_1 \bar{x}_2 + 3x_2 \bar{x}_1 + (1+2i)x_1 \bar{x}_3 +$$

$$+ (1-2i)x_3 \bar{x}_1 + (-1+2i)x_1 \bar{x}_4 - (1+2i)x_4 \bar{x}_1 + (1-2i)x_2 \bar{x}_3 + (1+2i)x_3 \bar{x}_2 - (1+2i)x_2 \bar{x}_4 +$$

$$+ (-1+2i)x_4 \bar{x}_2 - 3x_3 \bar{x}_4 - 3x_4 \bar{x}_3. \quad \blacktriangle$$

4. В n -мерном линейном пространстве V_n дана полуторалинейная форма $A(x, y) = \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \bar{\eta}_k$.

Показать, что значения соответствующей квадратичной формы $A(x, x) = \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \bar{\xi}_k$ вещественны.

Если $A(x, x)$ положительно определена, то скалярное произведение в V_n может быть определено формулой: $(x, y) = A(x, y)$.

5. Квадратичная (билинейная) форма записана в ортонормированном базисе двухмерного евклидова пространства. Записать канонический вид формы и матрицу P перехода в базис, в котором матрица формы имеет диагональный вид:

$$\text{a)} \quad -4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2; \quad \text{б)} \quad \frac{4}{3}x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2; \quad \text{в)} \quad 7x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2;$$

$$\text{г)} \quad -x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 9x_2y_2; \quad \text{д)} \quad -x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 - x_2y_2.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad y_1^2 - 9y_2^2; \quad \text{б)} \quad P = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}; \quad \frac{25}{12}y_1^2; \quad \text{в)} \quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$y_1^2 + 9y_2^2; \quad \text{г)} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}; \quad -10x_1'y_1'; \quad \text{д)} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad -\frac{1}{2}x_1'y_1' - \frac{3}{2}x_2'y_2'. \quad \blacktriangle$$

6. Квадратичная (билинейная) форма записана в ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Записать канонический вид формы и матрицу P перехода в базис, в котором матрица формы имеет диагональный вид:

$$\text{a)} \quad 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2;$$

$$\text{б)} \quad x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3;$$

$$\text{в)} \quad 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 4x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 - 3x_3y_3;$$

$$\Delta \quad \text{a)} \quad P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad y_1^2 + 2y_2^2 + 10y_3^2; \quad \text{б)} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad x_1'y_1' + 3x_2'y_2';$$

$$\text{в)} \quad P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \quad x_1'y_1' + 6x_2'y_2' - 6x_3'y_3'. \quad \blacktriangle$$

7. Квадратичная (билинейная) форма записана в ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Записать канонический вид формы и матрицу P перехода в базис, в котором матрица формы имеет диагональный вид:

а) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 7x_2^2 - 8x_2x_3 + 3x_3^2$;

б) $x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 - x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 4x_3y_3$;

в) $x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.

Δ а) $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $9y_1^2 - y_2^2 - 9y_3^2$; б) $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$; $-6x_1y_1'$;

в) $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{1} & \frac{3+\sqrt{3}}{1} & -\frac{\sqrt{3}}{1} \\ \frac{1}{3+\sqrt{3}} & \frac{1}{3-\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; $\sqrt{3}x_1y_1' - \sqrt{3}x_2y_2'$. ▲

8. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду, и записать этот канонический вид (преобразование определено не однозначно).

а) $2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2\xi_3$; б) $\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2 - 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2\xi_3$;

в) $2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 + 2\xi_4^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_4 + 2\xi_2\xi_3 - 4\xi_3\xi_4$;

Δ а) $4\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_3^2$; $\eta_1 = \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3$; $\eta_2 = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3$; $\eta_3 = \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3$;

б) $2\eta_1^2 - \eta_2^2 + 5\eta_3^2$; $\eta_1 = \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3$; $\eta_2 = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3$; $\eta_3 = \frac{1}{3}\xi_1 - \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3$;

в) $\eta_1^2 + 3\eta_2^2 - \eta_3^2 + 5\eta_4^2$; $\eta_1 = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4$; $\eta_2 = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\xi_4$;

$\eta_3 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\xi_4$; $\eta_4 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4$. ▲

9. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду, и написать этот канонический вид (преобразование определено не однозначно).

а) $3\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 5\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2\xi_3$;

б) $7\xi_1^2 + 5\xi_2^2 + 3\xi_3^2 - 8\xi_1\xi_2 + 8\xi_2\xi_3$; в) $2\xi_1\xi_2 + 2\xi_3\xi_4$.

Δ а) $7\eta_1^2 + 4\eta_2^2 + \eta_3^2$; $\eta_1 = \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3$; $\eta_2 = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3$; $\eta_3 = -\frac{2}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3$;

б) $11\eta_1^2 + 5\eta_2^2 - \eta_3^2$; $\eta_1 = \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{2}{3}\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_3$; $\eta_2 = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3$; $\eta_3 = \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3$;

в) $\eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2$; $\eta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_2$; $\eta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_4$; $\eta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_2$;

$\eta_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_4$. ▲

10. Квадратичная форма $B(x, x)$ задана в базисе $\{e_i\}$, для которого матрица Грамма – Γ также задана. Найти матрицу оператора A такого, что

$$B(x, y) = (x, Ay):$$

а) $4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $4x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $2x_1x_2 - x_2^2$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$;

▲ а) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 29 & 0 \\ -18 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 9/2 & -2 \end{pmatrix}$. ▲

11. Квадратичная форма $B(x, x)$ задана в базисе $\{e_i\}$, для которого матрица Грамма – Γ , также задана. Найти матрицу оператора A такого, что

$$B(x, y) = (x, Ay):$$

а) $2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $5x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

▲ а) $\begin{pmatrix} 26 & 44 & -49 \\ -12 & -21 & 24 \\ -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}$; б) $3 \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. ▲

12. Если от одной квадратичной формы можно перейти к другой посредством ортогонального преобразования, то две такие квадратичные формы называются ортогонально эквивалентными. Доказать, что для ортогональной эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы характеристические многочлены их матриц совпадали.

13. Какие из следующих квадратичных форм ортогонально эквивалентны:

а) $A(x, x) = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 16x_2x_3$,

$$B(y, y) = -3y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2 - 12y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3,$$

$$C(z, z) = 11z_1^2 - 47z_2^2 + 11z_3^2 + 8z_1z_2 - 2z_1z_3 + 8z_2z_3;$$

б) $A(x, x) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,

$$B(y, y) = \frac{2}{3}y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2 - \frac{4}{3}y_1y_2 + \frac{4}{3}y_1y_3 + \frac{8}{3}y_2y_3,$$

$$C(z, z) = z_2^2 - z_3^2 + 2\sqrt{2}z_1z_3.$$

▲ а) $A(x, x)$ и $B(y, y)$; б) $A(y, y)$ и $C(z, z)$. ▲

14. Можно ли следующие пары квадратичных форм в вещественном пространстве привести одновременно к каноническому виду:

а) $A(x, x) = \xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - \xi_2^2$, $B(x, x) = \xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2$;

б) $A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 - \xi_2^2$, $B(x, x) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$;

в) $A(x, x) = \xi_1^2 - \xi_2^2$, $B(x, x) = \xi_1\xi_2$.

▲ а) нельзя; б) можно; в) нельзя. ▲

15. Привести одновременно к каноническому виду формы $A(x, x)$ и $B(x, x) > 0$:

а) $A(x, x) = 2x_1^2 - 18x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 28x_1x_3 + 6x_2x_3$,

$B(x, x) = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$;

б) $A(x, x) = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$,

$B(x, x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$;

в) $A(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 + 6x_3^2$,

$B(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 3x_3^2$.

▲ а) $A(x, x) = 3\eta_1^2 - \eta_2^2 - 5\eta_3^2$, $B(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$; б) $A(x, x) = 5\eta_1^2 - \eta_2^2 - 2\eta_3^2$,

$B(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$; в) $A(x, x) = \eta_1^2 + 2\eta_2^2 + 3\eta_3^2$, $B(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$. ▲

16. Не находя замены координат, приводящей положительно определенную форму g к нормальному виду, а форму f – к каноническому, найти этот канонический вид формы f :

а) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $g = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$;

б) $f = 89x_1^2 - 42x_1x_2 + 5x_2^2$, $g = 41x_1^2 - 18x_1x_2 + 2x_2^2$;

в) $f = 7x_1x_2 + 31x_2^2$, $g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$;

г) $f = 8x_1^2 - 5x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$, $g = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$.

▲ а) $5y_1^2$; б) $y_1^2 + 4y_2^2$; в) $\frac{49}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$; г) $9y_1^2 - y_2^2$. ▲

17. Найти преобразование координат, одновременно приводящее одну из двух данных квадратичных форм к нормальному виду, а другую к каноническому виду и записать этот вид:

а) $A(x, x) = -4\xi_1\xi_2$, $B(x, x) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2$;

б) $A(x, x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$, $B(x, x) = 4\xi_1^2 + 16\xi_1\xi_2 + 6\xi_2^2$;

в) $A(x, x) = 2\xi_1^2 - 3\xi_1\xi_2 + \frac{5}{2}\xi_2^2$, $B(x, x) = 2\xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2$;

г) $A(x, x) = 1\xi_1^2 - 6\xi_1\xi_2 + \xi_2^2$, $B(x, x) = 13\xi_1^2 - 10\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$;

$$\Delta \text{ а) } A(x, x) = -2\eta_1^2 + \frac{2}{3}\eta_2^2, \quad B(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad \xi_1 = \eta_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_2, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\eta_2;$$

$$\text{б) } A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad B(x, x) = 5\eta_1^2 - 4\eta_2^2, \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 - \eta_2, \quad \xi_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{2}{3}\eta_2;$$

$$\text{в) } A(x, x) = \frac{29}{2}\eta_1^2 - \frac{1}{2}\eta_2^2, \quad B(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad \xi_1 = \sqrt{5}\eta_1, \quad \xi_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\eta_2;$$

$$\text{г) } A(x, x) = \eta_1^2 + \frac{1}{7}\eta_2^2, \quad B(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{21}}\eta_2, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_1 + \frac{4}{\sqrt{21}}\eta_2 \text{ или}$$

$$A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad B(x, x) = \eta_1^2 + 7\eta_2^2, \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_2, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\eta_2. \quad \blacktriangle$$

18. Найти преобразование координат, одновременно приводящее одну из двух данных квадратичных форм к нормальному виду, а другую – к каноническому виду, и записать этот вид:

$$\text{а) } A(x, x) = 9\xi_1^2 - 1\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2, \quad B(x, x) = 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2;$$

$$\text{б) } A(x, x) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2, \quad B(x, x) = 1\xi_1^2 + 8\xi_1\xi_2 + \xi_2^2;$$

$$\text{в) } A(x, x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2, \quad B(x, x) = 2\xi_1\xi_2 - \frac{7}{2}\xi_1^2 - \xi_2^2;$$

$$\text{г) } A(x, x) = 6\xi_1^2 + 6\xi_1\xi_3 + \xi_2^2 - 6\xi_2\xi_3 + 6\xi_3^2,$$

$$B(x, x) = 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2 - 2\xi_2\xi_3 + 2\xi_3^2.$$

$$\Delta \text{ а) } A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad B(x, x) = \eta_1^2 - \frac{1}{2}\eta_2^2, \quad \xi_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2, \quad \xi_2 = \sqrt{3}\eta_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\eta_2;$$

$$\text{б) } A(x, x) = 26\eta_1^2, \quad B(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad \xi_1 = -\frac{5}{\sqrt{26}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}\eta_2, \quad \xi_2 = \frac{21}{\sqrt{26}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}\eta_2;$$

$$\text{в) } A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad B(x, x) = -5\eta_1^2 - \frac{1}{8}\eta_2^2, \quad \xi_1 = \frac{4}{\sqrt{13}}\eta_1 + \frac{1}{2\sqrt{13}}\eta_2, \quad \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{13}}\eta_1 + \frac{3}{2\sqrt{13}}\eta_2;$$

$$\text{или } A(x, x) = 8\eta_1^2 + 0,2\eta_2^2, \quad B(x, x) = -\eta_1^2 - \eta_2^2, \quad \xi_1 = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{65}}\eta_1 - \frac{4}{\sqrt{65}}\eta_2, \quad \xi_2 = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{65}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{65}}\eta_2;$$

$$\text{г) } A(x, x) = 3\eta_1^2 + 3\eta_2^2 - 3\eta_3^2, \quad B(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2, \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_3, \quad \xi_2 = \sqrt{3}\eta_3;$$

$$\xi_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\eta_2. \quad \blacktriangle$$

19. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический базис:

$$\text{а) } 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3;$$

$$\text{б) } 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3;$$

$$\text{в) } x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$$

$$\text{г) } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

$$\Delta \text{ а) } 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2; \quad x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3; \quad x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3; \quad x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3;$$

$$\text{б) } 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2; \quad x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3; \quad x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3; \quad x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3;$$

$$\text{в) } 3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2; \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2;$$

$$\text{г) } 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2; \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2. \quad \blacktriangle$$

20. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический базис:

$$\text{а) } x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3;$$

$$\text{б) } 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4;$$

$$\text{в) } 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2;$$

$$\text{г) } x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2.$$

$$\Delta \text{ а) } 3y_1^2 - 6y_2^2; \quad x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3; \quad x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y_2; \quad x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_3;$$

$$\text{б) } 2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_4^2; \quad x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4); \quad x_2 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4);$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4); \quad x_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4); \quad \text{в) } 5y_1^2 - 5y_2^2 + 5y_3^2; \quad x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_1 + y_2);$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(y_1 - 2y_2); \quad x_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2y_3 + y_4); \quad x_4 = \frac{\sqrt{5}}{5}(-y_3 + 2y_4); \quad \text{г) } 2y_1^2 - 4y_2^2; \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 + y_3);$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 - y_3); \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_2 + y_4); \quad x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_2 - y_4). \quad \blacktriangle$$

РАЗДЕЛ 2

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ И УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Основные понятия и теоремы

Обозначение: $L(V, V)$ – множество линейных операторов, действующих из V в V .

Def. Оператор $A^* \in L(V, V)$ называется оператором, сопряженным к оператору $A \in L(V, V)$, если $\forall x, y \in V \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$.

Любой линейный оператор имеет единственный сопряженный оператор, который также линейен, и при этом:

$$1^\circ. E^* = E; \quad 2^\circ. (A + B)^* = A^* + B^*;$$

3°. $(\lambda A^*) = \bar{\lambda} A^*$ (В евклидовом пространстве $(\lambda A)^* = \lambda A^*$);

4°. $(A^*)^* = A$;

5°. $(AB)^* = B^*A^*$;

6°. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Если A – матрица линейного оператора в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ унитарного пространства, а Γ – матрица Грамма системы векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$, то матрица сопряженного оператора A^* в том же базисе может быть найдена по формуле: $A^* = \overline{\Gamma^{-1}A^T\Gamma}$.

Def. Оператор $A \in L(V, V)$, где V – унитарное пространство, называется эрмитовым (в евклидовом пространстве – самосопряженным), если $A^* = A$.

Def. Операторы A и B называются коммутирующими, если $AB = BA$.

Выражение $[A, B] = AB - BA$ называется коммутатором двух операторов.

Def. Нормой линейного оператора $A \in L(V, V)$ в нормированном пространстве называется число $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Свойства эрмитовых операторов.

1°. Если A – эрмитов оператор, то $\forall x \in V \quad (Ax, x) \in \mathbf{R}$.

2°. Собственные числа эрмитового оператора A вещественны. При этом собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

3°. Для эрмитового оператора A : $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

4°. Чтобы $A \in L(V, V)$ был эрмитов, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in V \quad \text{Im}(Ax, x) = 0$.

5°. Если A – эрмитов оператор и λ – его собственное значение, то $\exists x \in V, \|x\| = 1 \mid \lambda = (Ax, x)$.

6°. Для эрмитового оператора A его собственные значения λ удовлетворяют таким соотношениям: $\inf_{\|x\|=1} (Ax, x) \leq \lambda \leq \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$, причем оба равенства достигаются для $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$.

7°. Если A – эрмитов и $\forall x \in V \quad (Ax, x) \geq 0$, то $\|A\| = \lambda_{\max}$.

8°. (Теорема о собственном базисе эрмитового оператора). Если $A \in L(V, V)$ – эрмитов, то в V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A . В этом базисе матрица оператора A имеет диагональный вид, причем по диагонали стоят собственные значения оператора A с учетом их кратности.

9°. Произведение двух эрмитовых операторов будет эрмитовым оператором тогда и только тогда, когда операторы коммутируют (т. е. $[A, B] = 0$).

Def. Эрмитов оператор называется положительным ($A \geq 0$), если $\forall x \in V \quad (Ax, x) \geq 0$. Если, кроме того, из $(Ax, x) = 0 \Rightarrow x = \theta$, то оператор A называется положительно определенным ($A > 0$).

10°. Собственные значения положительного (положительно определенного) эрмитового оператора неотрицательны (положительны).

Def. Корнем m -й степени (m – натуральное число) из оператора A называется оператор B такой, что $B^m = A$.

11°. Если A – положительный эрмитов оператор ($A \geq 0$), то $\forall m \in \mathbf{N}$ существует положительный эрмитов оператор $B = \sqrt[m]{A}$. При этом в собственном ортонормированном базисе оператора A матрица оператора B имеет диагональный вид и на диагонали стоят $\sqrt[m]{\lambda_k}$, где λ_k – собственные значения оператора A .

Def. Если $A \in L(V, V)$ и $\forall x, y \in V \quad (Ax, Ay) = (x, y)$, то оператор A называется: а) в унитарном пространстве – унитарным; б) в евклидовом пространстве – ортогональным.

Т°. Для того чтобы оператор $A \in L(V, V)$ был унитарным (ортогональным), необходимо и достаточно, чтобы $A^* = A^{-1}$ ($AA^* = E$).

Def. Оператор $A \in L(V, V)$ называется нормальным, если $A^*A = AA^*$.

Примечание: любой унитарный и ортогональный операторы являются нормальными.

Т°. Если A – нормальный оператор, то для A и A^* в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из общих собственных векторов операторов A и A^* .

Т°. Для нормального оператора A существует ортогональный базис, в котором оператор имеет диагональную матрицу, и наоборот, если $A \in L(V, V)$ имеет ортогональный базис из собственных векторов, то он нормален.

Т°. Ортогональный и унитарный операторы имеют полную ортонормированную систему собственных векторов.

Def. Матрица A , у которой $a_{ij} \in \mathbf{C}$, называется унитарной, если $A^*A = AA^* = E$. Матрица A , у которой $a_{ij} \in \mathbf{R}$, называется ортогональной, если $A^T A = AA^T = E$.

Т°. В ортонормированном базисе матрица унитарного оператора – унитарна, а матрица ортогонального оператора – ортогональна. В базисе, который не является ортонормированным, это, вообще говоря, не верно.

Канонический вид линейного оператора. (Нормальная жорданова форма). К сожалению, не всякий линейный оператор диагонализуем. Но...

Def. Жордановой клеткой $G_k(\lambda)$ называется квадратная матрица $k^{\text{го}}$

порядка:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & L & 0 \\ 0 & L & L & L & L & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & \lambda \end{pmatrix}$$

Def. Жордановой матрицей называется матрица вида:

$$\begin{pmatrix} G_{k_1}(\lambda_1) & 0 & L & 0 \\ 0 & G_{k_2}(\lambda_2) & L & 0 \\ L & L & L & L \\ 0 & 0 & L & G_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}, \text{ где } G_{k_i} - \text{жордановы клетки.}$$

Т°. Произвольный линейный оператор A в комплексном векторном пространстве имеет базис $\{e_k\}_{k=1}^n$, в котором матрица оператора A имеет жорданову форму.

Схема построения жорданового базиса:

- 3) Нахождение собственных векторов и собственных значений оператора A . Если количество собственных линейно независимых векторов равно размерности пространства, то в указанном базисе матрица оператора имеет диагональный вид;
- 4) Если для кратного собственного значения кратности k количество линейно независимых собственных векторов также равно k , то в этом базисе матрица также имеет диагональный вид;
- 5) Для кратных собственных значений λ таких, что количество линейно независимых собственных векторов меньше кратности корня, поиск базисных векторов производится так:
 - а) находим собственные векторы A , т. е. базис $N(A_\lambda)$ ядра оператора $A_\lambda = A - \lambda E$;
 - б) находим $M(A_\lambda)$ – образ оператора A_λ и его базис;
 - в) ищем базис $M(A_\lambda) \cap N(A_\lambda)$;
 - г) для каждого вектора $x_i \in M(A_\lambda) \cap N(A_\lambda)$ находим прообраз 1-го слоя y_{i1} такой, что: $A_\lambda y_{i1} = x_i$, прообраз 2-го слоя y_{i2} такой, что: $A_\lambda y_{i2} = y_{i1}$, и т.д. до тех пор, пока они есть.

Жорданов базис формируется следующим образом:

а) первыми в базис попадают векторы $x_i \in M(A_\lambda) \cap N(A_\lambda)$ вместе со своими прообразами: $x_1, y_{11}, y_{12}, \dots, x_2, y_{21}, y_{22}, \dots, x_p, y_{p1}, y_{p2}, \dots$

б) затем в базис включаются векторы $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_l$, дополняющие базис $M(A_\lambda) \cap N(A_\lambda)$ до базиса ядра оператора A_λ , если такие есть.

* *Замечание:* Процесс проводится для каждого значения λ до тех пор, пока количество векторов, включенных в базис, не станет равным кратности k собственного значения λ . Искомый базис:

$x_1, y_{11}, y_{12}, \dots, x_2, y_{21}, y_{22}, \dots, x_p, y_{p1}, y_{p2}, \dots, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_l$.
(Всего k векторов).

§ 2. Контрольные вопросы и задания

1. Пусть A – оператор поворота векторов на угол φ в евклидовом пространстве V_2 (повороты векторов на плоскости). Какой оператор является сопряженным к нему?
2. Верно ли утверждение о том, что число $1 + i$ является собственным значением некоторого линейного оператора, который имеет симметричную матрицу?
3. Являются ли ортогональными нуль-оператор, тождественный оператор и оператор подобия с коэффициентом подобия μ ?
4. Известно, что линейный оператор A переводит ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в другой ортонормированный базис $\{f_i\}_{i=1}^n$. Следует ли отсюда, что A – ортогональный оператор?
5. Может ли собственное значение ортогонального оператора принимать значение: 2, 0, 1, -1 .
6. Для любого ли линейного оператора, действующего в унитарном пространстве, существует сопряженный оператор? Линеен ли он?
7. Как связаны между собой матрицы линейных операторов A и A^* , заданных в одном и том же ортонормированном базисе?
8. Как связаны между собой собственные значения линейных операторов A и A^* , действующих в унитарном пространстве?
9. Являются ли эрмитовыми нуль-оператор, тождественный оператор, оператор подобия с вещественным коэффициентом подобия μ и оператор подобия с комплексным коэффициентом подобия μ ?
10. Верно ли утверждение о том, что если матрица оператора эрмитова в некотором ортонормированном базисе, то она эрмитова и в любом другом ортонормированном базисе?
11. Может ли для какого-нибудь элемента x быть верным равенство $(Ax, x) = 1 + i$, где A – эрмитов оператор?

12. Может ли число $1 + i$ быть собственным значением некоторого эрмитового оператора?

§ 3. Примеры решения задач

1°. Пусть A – матрица линейного оператора в базисе $\{e_i\}$ евклидова пространства, A^* – матрица сопряженного оператора в том же базисе, а Γ – матрица Грамма базиса $\{e_i\}$. Найти связь A и A^* в случае унитарного пространства. Как связаны A и A^* в ортонормированном базисе?

Решение. Если $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис унитарного пространства, то $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ и, обозначая через a_{ki} элементы матрицы линейного оператора A , а через a_{kj}^* элементы матрицы оператора A^* , сопряженного к оператору A , получим:

$$Ae_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k; \quad A^* e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj}^* e_k.$$

Из определения A^* следует:

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= (x, A^* y) \Rightarrow \left(A \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, A^* \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i A e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j A^* e_j \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j \sum_{k=1}^n a_{kj}^* e_k \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \sum_{k=1}^n a_{ki} (e_k, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \sum_{k=1}^n \overline{a_{kj}^*} (e_i, e_k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \sum_{k=1}^n a_{ki} \gamma_{kj} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \sum_{k=1}^n \overline{a_{kj}^*} \gamma_{ik} \right), \end{aligned}$$

где $\gamma_{mn} = (e_m, e_n)$ – элементы матрицы Грамма.

Из этого равенства делаем заключение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ki} \gamma_{kj} &= \sum_{k=1}^n \overline{a_{kj}^*} \gamma_{ik} \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik}^T \gamma_{kj} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \overline{a_{kj}^*} \Rightarrow \\ A^T \Gamma &= \Gamma \overline{A^*} \Rightarrow \overline{A^*} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma \Rightarrow A^* \equiv \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}. \end{aligned}$$

Этой формулой и выражается искомая связь между A и A^* .

Если базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ ортонормированный, то матрица Γ – единичная матрица и тогда $A^* = \overline{A}^T$.

Δ а) $A^* = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}$ в унитарном пространстве, б) $A^* = \overline{A}^T$ в ортонормированном базисе. **▲**

2°. Оператор A задан матрицей в базисе с матрицей Грамма Γ . Будет ли оператор A эрмитовым:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2i & -1 & 0 \\ 2 & -3i & 2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}?$$

Решение. Воспользуемся формулой, полученной в задаче 1°: $A^* \equiv \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}$. Определитель матрицы Грамма равен единице, поэтому матрица, обратная к матрице Грамма, есть транспонированная матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы Грамма:

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 2 & 2i \\ 1 & -2i & 3 \end{pmatrix}. \text{ Тогда:}$$

$$\begin{aligned} A^* &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 2 & 2i \\ 1 & -2i & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2i & 2 \\ 0 & -1 & -3i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}} = \\ &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 2 & 2i \\ 1 & -2i & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & -2i \\ 0 & 2i & 2 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2i & -1 & 0 \\ 2 & 3i & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2i & -1 & 0 \\ 2 & -3i & 2 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

Оператор A совпадает с оператором A^* , следовательно оператор A – эрмитов.

▲ да. ▲

3°. Задана матрица линейного оператора A в евклидовом пространстве в некотором базисе и Γ – матрица Грамма этого базиса. Найти A^* :

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad \Gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся формулой, полученной в задаче 1: $A^* \equiv \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}$. В евклидовом пространстве в этой формуле отсутствует знак комплексного сопряжения: $A^* \equiv \Gamma^{-1} A^T \Gamma$. Определитель матрицы Грамма равен единице, поэтому матрица, обратная к матрице Грамма, есть транспонированная матрица из алгебраических дополнений к элементам

$$\text{матрицы Грамма: } \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -9 & 4 \\ -9 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Тогда:}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 18 & -9 & 4 \\ -9 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & -9 & 6 \\ -13 & 4 & -3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -3 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

4°. Пусть $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис в унитарном пространстве E_n . Матрица линейного оператора A , заданного в базисе $\{f_1, f_2\}$ пространства E_n , имеет вид: $A \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$. Найти A^* в базисе $\{f_i\}$, если $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = -e_1 - ie_2$.

Решение. Составим матрицу Грамма для системы векторов $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = -e_1 - ie_2$ и найдем к ней обратную:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{pmatrix}. \quad \Gamma^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся формулой $A^* \equiv \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}$.

$$\begin{aligned} A^* &\equiv \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} = \frac{1}{2} \overline{\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \overline{\begin{pmatrix} 3 & -1-2i \\ 2+2i & 1-2i \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 5+3i & -5+2i \\ 1+5i & -2-4i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5-3i & -5-2i \\ 1-5i & -2+4i \end{pmatrix}. \\ \Delta \quad &\begin{pmatrix} 5-3i & -5-2i \\ 1-5i & -2+4i \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

5°. Линейный оператор A в некотором базисе задан своей матрицей. Скалярное произведение (x, y) задано в том же базисе. Найти матрицу A^* ,

$$\text{если: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3.$$

Решение. По заданному скалярному произведению (x, y) составим матрицу Грамма, учитывая, что ее элементы γ_{ij} совпадают с коэффициентами при $x_i y_j$, а также найдем обратную к ней матрицу.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Тогда:}$$

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

6°. Линейный оператор A евклидова пространства задан в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$ матрицей A ; $\{e_1, e_2, e_3\}$ – ортонормированный базис. Является ли оператор A ортогональным, если: $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Записывая координаты векторов f_1, f_2, f_3 в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ в столбцы матрицы P , получим матрицу перехода из базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ в базис $\{f_1, f_2, f_3\}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу оператора A в ортонормированном базисе. Это удобно, потому что в таком матрица ортогонального оператора должна быть ортогональной и, следовательно, удовлетворять условию $AA^T = E$.

$$\begin{aligned} A_e = PA_f P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для матрицы (и оператора) A_e не выполнено условие $AA^T = E$. Оператор A не ортогональный.

Δ нет. $\blacktriangle$

7°. Линейный оператор A переводит векторы a_1, a_2 в векторы b_1, b_2 , которые заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе. Является ли оператор A ортогональным, если $a_1(3, 4)$, $a_2(1, 3)$, $b_1(5, 0)$, $b_2(3, 1)$?

Решение. Записывая координаты векторов $a_1(3, 4)$, $a_2(1, 3)$, а также векторов $b_1(5, 0)$, $b_2(3, 1)$ в столбцы матриц, получим матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ такие, что $A\tilde{A} = \tilde{B} \Rightarrow A = \tilde{B}\tilde{A}^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе матрица ортогонального оператора должна удовлетворять условию $AA^T = E$, т. е. столбцы и строки матрицы должны образовывать ортонормированные системы векторов. Для полученной матрицы оператора A это условие выполнено. Оператор A ортогонален.

▲ да. ▲

8°. Является ли унитарным оператор A , действующий на векторы ортонормированного базиса по формулам:

$$Ae_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2), \quad Ae_2 = \frac{1}{3}(2ie_1 + e_2 - 2ie_3), \quad Ae_3 = \frac{1}{3}(e_1 - 2ie_2 + 2e_3).$$

Решение. Построим матрицу оператора A , записывая координаты векторов Ae_1, Ae_2, Ae_3 в столбцы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2i/3 & 1/3 \\ -i/\sqrt{2} & 1/3 & -2i/3 \\ 0 & -2i/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда } A^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ -2i/3 & 1/3 & 2i/3 \\ 1/3 & 2i/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе матрица оператора A^* может быть получена из матрицы оператора A , если матрицу A транспонировать и к ее элементам взять комплексно сопряженные. Именно так мы и поступили.

Условие унитарности оператора (и матрицы) имеет такой вид: $AA^* = E$.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2i/3 & 1/3 \\ -i/\sqrt{2} & 1/3 & -2i/3 \\ 0 & -2i/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ -2i/3 & 1/3 & 2i/3 \\ 1/3 & 2i/3 & 2/3 \end{pmatrix} \neq E.$$

Для этой матрицы не выполнено условие унитарности. Оператор не унитарен.

▲ нет. ▲

9°. Линейный оператор A в унитарном пространстве со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы M_1 в столбцы

матрицы M_2 . Является ли оператор унитарным, если $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 5/3 & 5/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}?$$

Решение. По условию задачи $AM_1 = M_2$ т. е.

$$\begin{aligned}
 A = M_2 M_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 5/3 & 5/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \\
 &= \begin{pmatrix} 5/3 & 5/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 & -4/3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Найдена матрица оператора A в ортонормированном базисе. Условие унитарности оператора (и его матрицы в ортонормированном базисе) имеет вид: $AA^* = E$ и в данном случае оно не выполнено. Оператор не унитарен.

▲ нет. ▲

10°. Найти собственные значения и какую-либо максимальную ортонормированную систему собственных векторов ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова

пространства матрицей: $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения собственных значений оператора составим и решим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Чтобы найти собственные (их может быть несколько, т. к. собственное значение $\lambda = 1$ кратное) векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$. Составим систему уравнений $(A - \lambda E)X = 0$ и решим ее. Решения системы как раз и являются собственными векторами.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Множество решений этой системы образует линейное пространство размерности 1 ($\dim L = n - \text{rang} A = 3 - 2 = 1$). Базис этого пространства образует, например, вектор $(1, 1, 0)$. Нормируя его, получаем максимальную ортонормированную систему собственных

векторов линейного оператора, состоящую из одного вектора

$e = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$. Δ з) $\lambda_1 =$

$$1, f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0). \quad \blacktriangle$$

11°. Найти нормальную жорданову форму матрицы линейного оператора A

$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и базис, в котором матрица оператора имеет}$$

жорданову форму.

Решение. Для матрицы линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

составим и решим характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$.

Получим:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Тогда: $(\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$ и, следовательно, $\lambda_{1,2} = -1$; $\lambda_{3,4} = 1$.

а) Рассмотрим оператор $A_{-1} = A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ищем собственные векторы оператора A при $\lambda = -1$, т. е. ядро оператора A_{-1} . Для этого решим систему четырех линейных однородных уравнений с матрицей A_{-1} . Из третьего и четвертого уравнений системы видно, что $x_3 = x_4 = 0$. Тогда можно легко установить, что $x_1 = x_2 = 1$. Вектор $f_1(1, 1, 0, 0)$ – единственный собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению $\lambda = -1$ и образует базис ядра оператора A_{-1} . Далее ищем базис образа оператора A_{-1} :

$$M(A_{-1}): \left. \begin{aligned} A_1 e_1 &= (4, 4, 0, 0) \\ A_1 e_2 &= (-4, -4, 0, 0) \\ A_1 e_3 &= (0, -2, 2, 2) \\ A_1 e_4 &= (2, 4, -2, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f_2(1, 1, 0, 0) \\ f_3(0, -1, 1, 1) \\ f_4(1, 2, -1, 0) \end{aligned}.$$

Отметив, что для векторов f_2, f_3, f_4 существует соотношение: $f_3 + f_4 - f_2 = (0, 0, 0, 1)$, находим базис образа оператора A_{-1} :

$$\{\varphi_1(1, 1, 0, 0), \varphi_2(0, -1, 1, 1), \varphi_3(0, 0, 0, 1)\}.$$

Отметив, что векторы f_1 и φ_1 совпадают, делаем вывод о том, что этот вектор образует базис пересечения образа и ядра оператора A_{-1} .

Кратность корня $\lambda = -1$ равна двум, а собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, только один. Поэтому, полагаем g_1 равным вектору $\varphi_1(1, 1, 0, 0)$, а еще один вектор жорданового базиса ищем, как прообраз первого слоя для $\varphi_1(1, 1, 0, 0)$. Решаем неоднородную систему линейных уравнений $A_{-1}y = \varphi_1$ и находим второй вектор $g_2(1, 3/4, 0, 0)$ жорданового базиса, соответствующего собственному значению $\lambda = -1$ кратности два. При этом, что характерно, у вектора $\varphi_1(1, 1, 0, 0)$ нет прообраза второго слоя, ибо система $A_{-1}y = g_2$ с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

решений не имеет. Это и не случайно, потому что собственному значению $\lambda = -1$ кратности 2 должно соответствовать два вектора жорданового базиса оператора A :

$$g_1(1, 1, 0, 0); \quad g_2(1, 3/4, 0, 0).$$

При этом отметим, что:

$$Ag_1 = -g_1, \quad Ag_2 = g_1 - g_2.$$

б) Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda = 1$ и, соответственно, оператор $A_1 = A + E$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем ядро этого оператора, т.е. собственные векторы оператора A при $\lambda = 1$.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = x_4 = 1 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{matrix}.$$

Вектор $f_1(1, 1, 1, 1)$ образует базис ядра оператора A_1 и является единственным собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению $\lambda = 1$.

Ищем базис образа $M(A_1)$ оператора A_1 .

$$\begin{array}{l} A_1 e_1 = (2, 4, 0, 0) \\ A_1 e_2 = (2, 3, 0, 0) \\ A_1 e_3 = (0, -1, 1, 1) \\ A_1 e_4 = (1, 2, -1, -1) \end{array} \begin{array}{l} \text{базис, } M(A_1) \end{array} \begin{array}{l} (0, 1, 0, 0) f_2 \\ (1, 0, 0, 0) f_3 \\ (0, 0, 1, 1) f_4 \end{array}$$

Отмечая, что $f_1 = f_2 + f_3 + f_4$, заключаем: базисом пересечения ядра и образа оператора A_1 является вектор f_1 .

Так как собственный вектор только один, а собственное значение имеет кратность 2, требуется найти еще один вектор жорданового базиса. Поэтому полагаем g_3 равным вектору $\psi_1(1, 1, 1, 1)$, а еще один вектор жорданового базиса ищем как прообраз первого слоя для $\psi_1(1, 1, 1, 1)$. Для этого решаем неоднородную систему линейных уравнений $A_1 g_4 = \phi_1$ и находим вектор $g_4(0, 1/2, 0, 1/2)$ жорданового базиса, соответствующего собственному значению $\lambda = 1$ кратности два. При этом у вектора $\psi_1(1, 1, 1, 1)$ нет прообраза второго слоя, ибо система $A_1 u = g_4$ с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

решений не имеет. И вновь это не случайно, потому что собственному значению $\lambda = 1$ кратности 2 должно соответствовать два вектора жорданового базиса, а они уже найдены:

$$g_3(1, 1, 1, 1); \quad g_4(0, 1/2, 0, 1/2).$$

При этом отметим, что: $Ag_3 = g_1$, $Ag_4 = g_3 + g_4$. Для оператора A

$$\begin{array}{l} g_1(1, 1, 0, 0) \\ g_2(1, 3/4, 0, 0) \\ g_3(1, 1, 1, 1) \\ g_4(0, 1/2, 0, 1/2) \end{array} \text{ найден жорданов базис: } \begin{array}{l} Ag_1 = -g_1 \\ Ag_2 = g_1 - g_2 \\ Ag_3 = g_3 \\ Ag_4 = g_3 + g_4 \end{array} \text{ . При этом}$$

$$A_G = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Delta \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \begin{array}{l} g_1(1, 1, 0, 0) \\ g_2(1, 3/4, 0, 0) \\ g_3(1, 1, 1, 1) \\ g_4(0, 1/2, 0, 1/2) \end{array} \blacktriangle$$

§ 4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. В прямоугольной системе координат xOy оператор A – оператор проектирования плоскости на ось Ox параллельно биссектрисе первой и третьей координатных четвертей. Найти A^* .

Δ A^* – проектирование на биссектрису второй и четвертой координатных четвертей параллельно оси Oy . $\blacktriangle$

2. В пространстве дифференцируемых, периодических с периодом 2π функций $f(x)$ найти A^* , если $Af = \frac{d}{dx}f$ и $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

Δ $A^* = -A$. $\blacktriangle$

3. В евклидовом пространстве полиномов степени не выше 2 со скалярным произведением, определяемым формулой $(p, q) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$, где $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1t + \alpha_2t^2$, $q(t) = \beta_0 + \beta_1t + \beta_2t^2$, задан оператор $Ap(t) = \frac{d}{dt}p(t)$. Найти A^* в базисе:

а) $1, t, t^2$; б) $1, t, 3t^2 - 1$.

Δ а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

4. В евклидовом пространстве полиномов степени не выше двух со скалярным произведением $(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ задан линейный оператор

$Ap(x) = \frac{d}{dx}p(x)$. Найти матрицу A^* в базисе:

а) $1, x, x^2$; б) $1, x, 3x^2 - 1$.

Δ а) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

5. В евклидовом пространстве тригонометрических полиномов степени не выше n со скалярным произведением $(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(x)dx$ задан линейный

оператор $Ap(x) = \frac{d}{dx}p(x)$. Найти формулу для A^* и его матрицу в базисе

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$.

Δ $A^* = -A$; $a_{2k, 2k+1}^* = k$, $a_{2k+1, k}^* = -k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), остальные элементы матрицы A^* равны 0. $\blacktriangle$

6. Найти оператор A^* , сопряженный к оператору $A = x \frac{d}{dx}$ в пространстве дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$, если скалярное произведение задано формулой:

$$\text{а) } (f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx; \quad \text{б) } (f, g) = \int_0^1 \overline{g(x)} f(x) dx.$$

$$\Delta \quad \text{а) } A^* f = -\frac{d}{dx}(xf); \quad \text{б) } A^* f = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx}(x^2 f). \quad \blacktriangle$$

7. Задана матрица линейного оператора A в евклидовом пространстве в некотором базисе и Γ – матрица Грамма этого базиса. Найти A^* :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

8. Пусть $\{e_1, e_2\}$ ортонормированный базис плоскости, а линейный оператор A в базисе $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^* в базисе $\{f_1, f_2\}$.

$$\Delta \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

9. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ортонормированный базис в евклидовом или унитарном пространстве E_n . Матрица A – матрица линейного оператора, заданного в базисе $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ пространства E_n . Найти A^* в базисе $\{f_i\}$, если:

$$\text{а) } f_1 = e_1, f_2 = -e_1 + e_2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } f_1 = e_1, f_2 = 2e_1 + e_2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1 = e_1 + e_2 + e_3, f_2 = e_2 + e_3, f_3 = e_2 - e_3; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

10. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис в евклидовом или унитарном пространстве E_n . Матрица A – матрица линейного оператора, заданного в базисе $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ пространства E_n . Найти A^* в базисе $\{f_i\}$, если:

$$\text{а) } f_1 = e_1 - e_2 - e_3, f_2 = e_1 + e_2 + e_3, f_3 = e_3; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_3; \quad A \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1 = e_1, \quad f_2 = ie_1 + e_2, \quad f_3 = -ie_1 + ie_2 + e_3; \quad A \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 4-i \\ 2i & -1 & 1+2i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

11. Линейный оператор A евклидова пространства в базисе из векторов $f_1(1, 2, 1), f_2(1, 1, 2), f_3(1, 1, 0)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу

сопряженного оператора A^* в том же базисе, считая что координаты векторов f_1, f_2, f_3 заданы в некотором ортонормированном базисе.

$$\Delta \quad \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

12. Линейный оператор в E_2 переводит векторы a_1, a_2 в векторы b_1, b_2 соответственно. Базис, в котором заданы a_i и b_i , – ортонормирован. Найти A^* в этом базисе:

а) $a_1(0, 1), a_2(1, 3), b_1(3, 1), b_2(2, 3)$; б) $a_1(1, 1), a_2(1, 4), b_1(0, -2), b_2(-3, 7)$.

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

13. Найти матрицу линейного оператора A^* , сопряженного оператору A в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$, если A переводит векторы $a_1(0, 0, 1), a_2(0, 1, 1), a_3(1, 1, 1)$ в векторы $b_1(1, 2, 1), b_2(3, 1, 2), b_3(7, -1, 4)$ соответственно. Координаты всех векторов даны в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$.

$$\Delta \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

14. Линейный оператор A в некотором базисе задан своей матрицей. Скалярное произведение (x, y) задано в том же базисе. Найти матрицу A^* , если:

$$\text{а) } A \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2;$$

$$\text{б) } A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2;$$

$$\text{в) } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (x, y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_1 - \\ - x_3y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_3.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 128 & 413 & 514 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

15. Скалярное произведение (x, y) и линейный оператор A заданы в некотором базисе евклидового (унитарного) пространства. Найти матрицу A^* в том же базисе:

$$\text{а) } (x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2; \quad A \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } (x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2; \quad A \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } (x, y) = x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2; \quad A \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} -2+4i & 2+9i \\ -2-i & 2-4i \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

16. Скалярное произведение (x, y) и линейный оператор A заданы в некотором базисе евклидового (унитарного) пространства. Найти матрицу A^* в том же базисе:

$$\text{а) } (x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - \\ - x_2y_3 - x_3y_2; \quad A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } (x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + \\ + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2; \quad A \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } (x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + 5x_3\bar{y}_3 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + \\ + (1-i)x_2\bar{y}_3 + (1+i)x_3\bar{y}_2; \quad A \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -14 & 32 \\ 0 & 7 & -14 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 17 & -17 & 9 \\ 5 & -4 & 3 \\ -19 & 21 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 11 & 2-3i & 10 \\ -20 & -5-4i & 20 \\ 4+4i & 2 & -4+5i \end{pmatrix}.$$

▲

17. Пусть A – матрица линейного оператора в некотором базисе, Γ – матрица Грамма этого базиса. Найти необходимое и достаточное условие самосопряженности оператора A :

а) в евклидовом пространстве; б) в унитарном пространстве.

То же в ортонормированном базисе.

$$\Delta \quad \text{а) } A^T \Gamma = \Gamma A; \quad \text{б) } \overline{A^T} \Gamma = \bar{\Gamma} A; \quad \text{в ортонормированном базисе а) } A^T = A; \quad \text{б) } \overline{A^T} = A. \quad \blacktriangle$$

18. Оператор A задан матрицей в базисе с матрицей Грамма G . Будет ли A самосопряженным:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{б) } A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } A \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; & \text{г) } A \begin{pmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

▲ а) нет; б) да; в) да; г) да. ▲

19. Оператор A задан матрицей в базисе с матрицей Грамма G . Будет ли A самосопряженным:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{б) } A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

▲ а) да; б) нет; в) нет. ▲

20. Доказать, что сумма двух эрмитовых операторов есть эрмитов оператор.

21. Доказать, что произведение двух эрмитовых операторов тогда и только тогда будет эрмитовым, когда операторы коммутируют.

22. Доказать, что если A и B эрмитовы, то эрмитовы будут и операторы $AB + BA$ и $i(AB - BA)$.

23. Доказать, что если A – эрмитов оператор унитарного пространства, то оператор $B = iA$ является кососимметрическим. Обратно, если A – кососимметрический, то $B = iA$ – эрмитов оператор.

24. Доказать, что если A – эрмитов оператор унитарного пространства, то оператор $B = (A - iE)^{-1}(A + iE)$ является унитарным.

25. Пусть в унитарном пространстве дифференцируемых периодических с периодом 2π функций скалярное произведение задано, как $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$. Доказать, что $A = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ – эрмитов оператор.

26. В пространстве дважды дифференцируемых функций $f(x)$ ($x \in [0, 1]$) и удовлетворяющих условию: $f(0) = f(1) = 0$ скалярное произведение задано формулой: $(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \varphi(x) dx$, где $\varphi(x)$ – неотрицательная весовая

функция. Как следует выбрать $\varphi(x)$, чтобы оператор $Af = \frac{d}{dx} \left(x \frac{df}{dx} \right)$ был эрмитовым? Будет ли A эрмитовым, если отбросить условие $f(0) = 0$?
 ▲ $\varphi(x) = 1$. Да. ▲

27. Показать, что любой матрицы B с комплексными или вещественными элементами матрица $A = BB^*$ является эрмитовой.

28. Показать, что произведение двух симметрических матриц тогда и только тогда будет симметрической, когда данные матрицы перестановочны.

29. Показать, что произведение двух кососимметрических матриц тогда и только тогда будет симметрической, когда данные матрицы перестановочны.

30. Показать, что произведение двух кососимметрических матриц A и B тогда и только тогда будет кососимметрической матрицей, когда $AB = -BA$.

31. Доказать, что произведение любой матрицы на свою транспонированную – симметрическая матрица.

32. Доказать, что если A и B – симметричные квадратные матрицы одного порядка, то $C = ABABA \dots ABA$ – также симметрическая матрица.

33. Доказать, что матрица обратная к неособенной симметрической – симметрическая.

34. Доказать, что матрица обратная к неособенной кососимметрической матрице четного порядка – кососимметрическая.

35. Линейный оператор A евклидова пространства задан в базисе $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ матрицей A ; $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис. Является ли оператор A ортогональным, если:

а) $f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_2; A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix};$

б) $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2; A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

в) $f_1 = 3e_1 + e_2, f_2 = 2e_1 + e_2; A = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix};$

г) $f_1 = e_2 + e_3, f_2 = e_1 + e_3, f_3 = e_1 + e_2; A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Δ а) да; б) нет; в) да; г) да. ▲

36. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ – ортонормированный базис в унитарном пространстве. Найти матрицы унитарных операторов, переводящих векторы e_1 и e_2 в векторы $\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3, \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3$.

Δ $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$ ▲

37. Является ли ортогональным оператор, действующий на векторы ортонормированного базиса по формулам:

а) $Ae_1 = e_1 + e_2, Ae_2 = e_2;$ б) $Ae_1 = e_1 + e_2, Ae_2 = e_1 - e_2;$

в) $Ae_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), Ae_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2);$

$$\text{г) } Ae_1 = \frac{1}{13}(5e_1 - 12e_2), \quad Ae_2 = \frac{1}{13}(12e_1 + 12e_2).$$

Δ а) нет; б) нет; в) да; г) да. ▲

38. Является ли ортогональным оператор, действующий на векторы ортонормированного базиса по таким формулам:

$$\text{а) } Ae_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad Ae_2 = 2e_1 + e_2 - 2e_3, \quad Ae_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3;$$

$$\text{б) } Ae_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3), \quad Ae_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), \quad Ae_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-e_1 + 4e_2 + e_3);$$

$$\text{в) } Ae_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \quad Ae_2 = \frac{1}{2}(e_2 + \sqrt{3}e_3), \quad Ae_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_3);$$

$$\text{г) } Ae_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad Ae_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4),$$

$$Ae_3 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4), \quad Ae_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4).$$

Δ а) нет; б) да; в) нет; г) да. ▲

39. Является ли унитарным оператор A , действующий на векторы ортонормированного базиса по формулам:

$$\text{а) } Ae_1 = e_1 + ie_2, \quad Ae_2 = ie_1; \quad \text{б) } Ae_1 = e_1 + ie_2, \quad Ae_2 = ie_1 + e_2;$$

$$\text{в) } Ae_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + ie_2), \quad Ae_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(ie_1 + 2e_2);$$

$$\text{г) } Ae_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + (1 + 2i)e_2), \quad Ae_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(5e_1 - 2(1 + 2i)e_2);$$

$$\text{д) } Ae_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + (1 + 2i)e_2), \quad Ae_2 = \frac{1}{3}((1 + 2i)e_1 - 2e_2).$$

Δ а) нет; б) нет; в) да; г) да; д) нет. ▲

40. Линейный оператор A переводит векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ в векторы $b_1, b_2, \dots, b_n$, которые заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе. Является ли оператор A ортогональным?

$$\text{а) } a_1(3, 4), \quad a_2(1, 3), \quad b_1(5, 0), \quad b_2(3, 1);$$

$$\text{б) } a_1(2, -1), \quad a_2(-1, 1), \quad b_1(1, 2), \quad b_2(1, 1);$$

$$\text{в) } a_1(1, 2, 2), \quad a_2(1, 1, 0), \quad a_3(0, 1, -1), \quad b_1(2, 2, 1), \quad b_2(0, 1, 1), \quad b_3(-1, 1, 0).$$

Δ а) да; б) нет; в) да. ▲

41. Линейный оператор A в унитарном пространстве со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы M_1 в столбцы матрицы M_2 . Является ли оператор унитарным?

$$\text{а) } M_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } M_1 \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 \begin{pmatrix} 2/\sqrt{10} & 5i/\sqrt{10} \\ 4i/\sqrt{10} & -5/\sqrt{10} \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } M_1 \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 \begin{pmatrix} i & i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▲ а) да; б) да; в) да. ▲

42. Является ли линейный оператор ортогональным, если он задан в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства следующей матрицей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{б) } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; & \text{г) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

▲ а) да; б) нет; в) да; г) да. ▲

43. Является ли унитарным линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицей:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}; & \text{б) } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}; & \text{в) } \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}; \\ \text{г) } \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; & \text{д) } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}; & \text{е) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -1 & -i \\ -1 & 1 & -i \\ -i & -1 & i \end{pmatrix}. \end{array}$$

▲ а) нет; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) да. ▲

44. а) Показать, что сумма двух ортогональных (унитарных) операторов в общем случае не является ортогональным (унитарным) оператором.

б) Привести пример, когда сумма двух ортогональных операторов все же будет ортогональным оператором.

▲ б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ в некотором ортонормированном базисе

$A + B$ – ортогональный. ▲

45. Найти ортонормированный базис из собственных векторов для оператора с матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а)} \quad e_1(2/3, 2/3, 1/3), \quad e_2(2/3, -1/3, -2/3), \quad e_3(1/3, -2/3, 2/3); \quad \text{б)} \quad e_1(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0),$$

$$e_2(1/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18}, -4/\sqrt{18}), \quad e_3(2/3, -2/3, 1/3); \quad \text{в)} \quad e_1(1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2}, 0),$$

$$e_2(1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}, 0), \quad e_3(0, 0, 1); \quad \text{г)} \quad e_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2), \quad e_2(1/2, 1/2, -1/2, -1/2),$$

$$e_3(1/2, -1/2, 1/2, -1/2), \quad e_4(1/2, -1/2, -1/2, 1/2). \quad \blacktriangle$$

46. Найти собственные значения и ортонормированный базис самосопряженного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а)} \quad \lambda_1 = -5, \lambda_2 = 5, f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1); \quad \text{б)} \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5, f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2),$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1); \quad \text{в)} \quad \lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}, f_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1+\sqrt{2}, -1),$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1, 1+\sqrt{2}); \quad \text{г)} \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, 1), f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, \sqrt{2});$$

$$\text{д)} \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i), f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i); \quad \text{е)} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1+i),$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-i, 1). \quad \blacktriangle$$

47. Найти собственные значения и ортонормированный базис самосопряженного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а)} \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2), f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1),$$

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0); \text{ б) } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6, f_1 = \frac{1}{3}(2, 1, -2), f_2 = \frac{1}{3}(1, 2, 2), f_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1);$$

$$\text{в) } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4, f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1), f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1);$$

$$\text{г) } \lambda_1 = -\sqrt{2},$$

$$\lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{2}, f_1 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1), f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), f_3 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1); \text{ д) } \lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 3,$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, i), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -i). \quad \blacktriangle$$

48. Найти собственные значения и какую-либо максимальную ортонормированную систему собственных векторов ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \text{ а) нет собственных векторов; б) } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,$$

1); в) при $\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ нет собственных векторов, при $\alpha = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, при $\alpha = \pi, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, любой ортонормированный базис – базис из

собственных векторов; г) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, f_1 = \left(\sin \frac{\alpha}{2}, -\cos \frac{\alpha}{2}\right), f_2 = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}\right)$

$$; \text{ д) } \lambda_1 = 1, f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1); \text{ э) } \lambda_1 = 1, f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0). \quad \blacktriangle$$

49. Найти собственные значения и ортонормированный собственный базис для унитарного оператора, заданного в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \text{ а) } \lambda_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \lambda_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha, f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i), f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i); \text{ б) } \lambda_1 =$$

$$i, \lambda_2 = -i,$$

$f_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} ((1+\sqrt{2})i, 1), f_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} (1, (1+\sqrt{2})i);$ в) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1), f_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, -2), f_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}, -2);$ г) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \lambda_3 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i, 0), f_2 = \frac{1}{2} (1, -i, -\sqrt{2}), f_3 = \frac{1}{2} (1, -i, \sqrt{2})$.

50. Какие из следующих матриц ортогональны?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ б) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$ в) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.

а) нет; б) нет; в) да.

51. Доказать, что элементы определителя 3^{го} порядка, равного единице, образуют ортогональную матрицу, если каждый из элементов равен своему алгебраическому дополнению.

52. Доказать, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1 .

53. В матрице A подобрать α, β и γ так, чтобы матрица стала

ортогональной и чтобы ее определитель равнялся 1: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1/9 & 4/9 & 8/9 \\ 7/9 & -4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

$\alpha = 4/9, \beta = 7/9, \gamma = -4/9$.

54. Доказать, что произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.

55. Доказать, что определитель унитарной матрицы по модулю равен единице.

56. Определить, какая из матриц унитарна, а какая – эрмитова:

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$

A_1 – унитарна, A_2 – эрмитова.

57. Доказать, что матрица, обратная к унитарной, унитарна, и произведение унитарных матриц – унитарно.

58. Доказать, что если линейный оператор A унитарного (евклидова) пространства сохраняет длины всех векторов, то он унитарен (ортогонален).

59. Доказать, что произведение двух унитарных операторов унитарно.

60. Доказать, что если линейный оператор A унитарного (евклидова) пространства обладает любыми двумя из следующих трех свойств:

- 1) A – эрмитов (самосопряжен);
- 2) A – унитарен (ортогонален);
- 3) $A^2 = E$, то он обладает и третьим свойством.

61. Показать, что если матрица A обладает двумя из трех свойств: симметрическая; ортогональная и $A^2 = E$, то она обладает и третьим свойством.

62. Доказать, что если матрица обладает двумя из трех свойств: вещественная; унитарная; ортогональная, то она обладает и третьим свойством.

63. Доказать, что если произвольный оператор A в унитарном пространстве сохраняет скалярное произведение, то A линейен и, следовательно, унитарен. Показать на примере, что сохранение скалярных квадратов недостаточно для линейности.

Δ Указание: рассмотреть $(A(\alpha x + \beta y) - \alpha Ax - \beta Ay, A(\alpha x + \beta y) - \alpha Ax - \beta Ay)$.

$Ax = (|x_1|, x_2, x_3, \dots, x_n)$ – не линейен. **▲**

64. Доказать, что любую вещественную симметрическую матрицу A можно представить в виде: $A = Q^{-1}BQ$, где Q – ортогональная, а B – вещественная диагональная (A ортогонально подобна диагональной).

65. Доказать, что любую эрмитову матрицу A можно представить в виде: $A = C^{-1}BC$, где C – унитарная, а B – вещественная диагональная (A унитарно подобна диагональной).

66. Для данной матрицы A найти ортогональную Q и диагональную B , такие, что $A = Q^{-1}BQ$:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \text{ а) } Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 100 \\ 040 \\ 007 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 & 0 & \sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/15 & -\sqrt{5}/3 & -4\sqrt{5}/15 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

▲

67. Для данной матрицы A найти унитарную C и диагональную B , такие, что $B = C^{-1}AC$:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \text{ а) } C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+i/\sqrt{3} & 1+i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 20 \\ 08 \end{pmatrix}.$$

▲

68. Для унитарной матрицы A найти унитарную Q и диагональную B такие,

что $B = Q^{-1}AQ$: $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$

$$\Delta \quad Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -i/3 \\ -2i/3 & i/3 & 2/3 \\ i/3 & -2i/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

69. Найти $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}^{28}$. $\Delta \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{28} + 2 & \sqrt{2}(2^{28} - 1) \\ \sqrt{2}(2^{28} - 1) & 2^{29} + 1 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

70. Найти A^{17} , если $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\Delta \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^{16} & 2^{16+1} & 2^{16} & 2^{16-1} \\ 2^{16+1} & 2^{16} & 2^{16-1} & 2^{16} \\ 2^{16} & 2^{16-1} & 2^{16} & 2^{16+1} \\ 2^{16-1} & 2^{16} & 2^{16+1} & 2^{16} \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

71. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}^{10}$. $\Delta \quad 9^{10} \begin{pmatrix} 2^{13} + 3 & 6 - 2^{12} & -2^{13} \\ 6 - 2^{12} & 2^{11} & 6 + 2^{12} \\ -2^{13} & 6 + 2^{12} & 2^{13} - 3 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

72. Найти A^{81} , если $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3+i & 4i & -3+i \\ 4i & -2i & 4i \\ -3+i & 4i & 3+i \end{pmatrix}$. $\Delta \quad A^{81} = A$. $\blacktriangle$

73. Дана матрица A . Найти $\sqrt{A}$:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0,15 & -0,09 \\ -0,25 & 0,15 \end{pmatrix}$.

Δ а) $\pm \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\pm \begin{pmatrix} \sqrt{0,3}/2 & -0,09/\sqrt{0,3} \\ -1/4\sqrt{0,3} & \sqrt{0,3}/2 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

74. Дана матрица A : $A = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 4 \\ 4 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$. Найти $\sqrt{A}$. $\Delta \quad \pm \begin{pmatrix} 320 \\ 242 \\ 025 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

75. Найти функции от матриц:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$; в) $\sqrt{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}$; г) $\sqrt{\begin{pmatrix} 62 \\ 37 \end{pmatrix}}$;

д) $\exp \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$; е) $\exp \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Δ а) $\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$; в) $\pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$;

г) $\pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ всего четыре матрицы; д) $\begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$; е)

$\begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

76. Диагонализуются ли следующие матрицы:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \quad \text{в поле} \quad \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad \text{в поле} \quad \mathbf{R} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \quad \text{в поле} \quad \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix};$$

г) не подобна диагональной. $\blacktriangle$

77. Какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду переходом к новому базису? Найти этот базис и диагональную матрицу:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \quad \begin{matrix} a_1(1,1,1) \\ a_2(1,1,0) \\ a_3(1,0,-3) \end{matrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad \text{матрица к диагональному виду не приводится};$$

$$\text{в)} \quad \begin{matrix} a_1(1,1,0,0) \\ a_2(1,0,1,0) \\ a_3(1,0,0,1) \\ a_4(1,-1,-1,-1) \end{matrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \quad \text{матрица к диагональному виду не приводится.} \quad \blacktriangle$$

78. Найти жорданову форму матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

79. Найти жорданову форму матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

80. В некотором базисе $\{e_i\}$ линейный оператор задан своей матрицей. Найти базис $\{f_i\}$ в котором матрица имеет жорданову форму и найти эту жорданову форму:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad \text{а) } \begin{matrix} f_1(1,4,3) \\ f_2(1,0,0) \\ f_3(3,0,1) \end{matrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{matrix} f_1(6,6,-8) \\ f_2(3,1,0) \\ f_3(5,0,1) \end{matrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{matrix} f_1(3,1,1) \\ f_2(1,0,0) \\ f_3(5,0,1) \end{matrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$



ЛИТЕРАТУРА

- 8) Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
- 9) Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
- 10) Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.
- 11) Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1973.
- 12) Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.
- 13) Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.
- 14) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2001.
- 15) Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.

ЧАСТЬ 6

РАЗДЕЛ I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

§ 1. Основные теоремы и определения

Def. Множество G элементов $x, y, z \dots$ произвольной природы называется группой, если в нем корректным образом введена внутренняя операция (закон композиции), т. е. $\forall x, y \in G \exists z \in G$ такое, что $z = x \oplus y$ (или $z = x \odot y$), удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

- | | |
|---|---|
| 1) $x \oplus y(y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$; | 1) $x \odot y(y \odot z) = (x \odot y) \odot z$; |
| 2) $\exists \theta \in G \mid \forall x \in G \ x \oplus \theta = x$; | 2) $\exists e \in G \mid \forall x \in G \ x \odot e = x$; |
| 3) $\forall x \in G \exists y \in G \mid x \oplus y = \theta; (y = -x)$. | 3) $\forall x \in G \exists y \in G \mid x \odot y = e; (y = x^{-1})$. |

В столбике слева приводится аддитивная форма записи аксиом групповой операции, а в столбике справа – мультипликативная форма записи тех же аксиом.

Если групповая операция есть операция сложения (есть, а не называется), то группа называется аддитивной. Если групповая операция есть операция умножения, то группа называется мультипликативной.

Первая аксиома выражает свойство ассоциативности операции и позволяет операцию, определенную для двух элементов множества, определить для любого конечного числа таких элементов. Вторая аксиома постулирует существование в множестве элемента нейтрального по данной операции. И, наконец, третья аксиома требует, чтобы для любого элемента множества существовал элемент этого же множества, который, взаимодействуя с заданным, дает нейтральный. В аддитивной группе такой элемент называется противоположным, в мультипликативной группе и в произвольной группе – обратным.

Если введенная операция еще и коммутативна, т. е.

$$4) \quad x \oplus y = y \oplus x$$

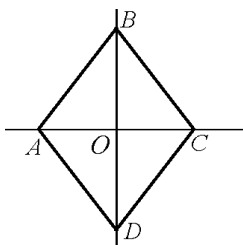
$$4) \quad x \odot y = y \odot x$$

то группа **называется абелевой**.

Def. Подмножество G_1 элементов G называется подгруппой, если:

- 1) $\forall x, y \in G_1 \quad x \oplus y \in G_1$; 2) $\theta \in G_1$; 3) $\forall x \in G_1 \quad (-x) \in G_1$.

Если группа содержит конечное число элементов, то группа **называется конечной**, а количество ее элементов **называется порядком группы**. Группа из элементов $a^0 = e, a, a^2, \dots, a^k = e$ **называется циклической группой**, порождаемой элементом a . Порядок группы – k .



Примеры групп.
ромба.

1°. Группа симметрий

Рассмотрим множество преобразований ромба, в которое входят:

E – тождественное преобразование;

S_{BD} – симметричное отражение относительно оси BD ;

S_{AC} – симметричное отражение относительно оси AC ;

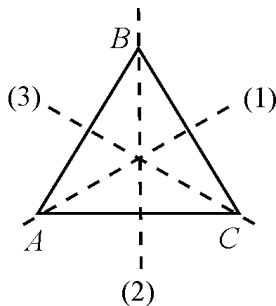
S_O – симметричное отражение относительно точки O .

Закон композиции в множестве определим таблицей Кэли:

	E	S_{BD}	S_{AC}	S_O
E	E	S_{BD}	S_{AC}	S_O
S_{BD}	S_{BD}	E	S_O	S_{AC}
S_{AC}	S_{AC}	S_O	E	S_{BD}
S_O	S_O	S_{AC}	S_{BD}	E

Множество рассмотренных преобразований с операцией, определенной приведенной таблицей Кэли, образует абелеву группу, которая называется **группой симметрий ромба**.

2°. Группа самосовмещений правильного треугольника.



Для заданного равностороннего треугольника $\triangle ABC$ рассмотрим преобразования, отображающие треугольник сам на себя:

1) E – тождественное преобразование;

2) α – поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$ против часовой стрелки;

3) β – поворот на угол $\frac{4\pi}{3}$ против часовой стрелки;

4) S_1 – симметрия относительно оси (1) ($B \leftrightarrow C$);

5) S_2 – симметрия относительно оси (2) ($A \leftrightarrow C$);

6) S_3 – симметрия относительно оси (3) ($A \leftrightarrow B$).

Закон композиции определим таблицей:

$I \setminus II$	E	α	β	S_1	S_2	S_3
E	E	α	β	S_1	S_2	S_3
α	α	β	E	S_2	S_3	S_1
β	β	E	α	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_2	S_3	E	α	β

S_2	S_2	S_3	S_1	β	E	α
S_3	S_3	S_1	S_2	α	β	E

Такой закон не коммутативен. В частности, $S_1 \circ S_2 \neq S_2 \circ S_1$. Группа не абелева. Подмножество $\{E, \alpha, \beta\}$ элементов данной группы образуют подгруппу (притом абелеву) группы самосовмещений, которая называется **группой поворотов равностороннего треугольника**.

3°. Группа перестановок. **Перестановкой** назовем закон, по которому элементам $a, b, c, d, \dots$ взаимно однозначно ставится в соответствие элементы того же множества, но, возможно, в другом порядке:

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \dots \\ f(a) & f(b) & f(c) & f(d) & \dots \end{pmatrix}.$$

Композицией двух перестановок $f_2 \circ f_1$ назовем последовательное применение этих двух перестановок: сначала f_1 , а затем f_2 .

Для конечного множества E из n элементов перестановки (или подстановки, как их иногда называют) образуют группу (не абелеву) порядка $n!$, которая называется симметрической группой и обозначается S_n .

Иллюстрация. В группе S_4 :

$$\begin{aligned} \text{а) } f_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; & f_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; & f_2 \circ f_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Равенство говорит о том, что перестановки f_1 и f_2 – взаимно обратные.

$$\text{б) } f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad f_3 \circ f_4 = f_4 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad f_5 \circ f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad f_6 \circ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перестановки f_3 и f_4 коммутируют, а перестановки f_5 и f_6 не коммутируют.

Группу самосовмещений правильного треугольника можно представить как группу перестановок из трех элементов: $E = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$;

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}; \quad S_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & A \end{pmatrix}; \quad S_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}; \quad S_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

Две группы G_1 и G_2 называются **изоморфными**, если существует взаимно однозначное соответствие f между элементами G_1 и G_2 :

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \text{ такое, что если } \begin{matrix} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \end{matrix}, \text{ то } x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2.$$

Из определения изоморфных групп легко понять, что группа перестановок из трех элементов и группа самосовмещений правильного треугольника – изоморфны.

Изоморфное отображение группы G самой на себя называется **автоморфизмом**.

Def. Если H_1 и H_2 – подмножества группы G , то произведением H_3 подмножеств H_1 и H_2 называется: $H_3 = H_1 \cdot H_2 = \{h_3 \mid h_3 = h_1 \cdot h_2, h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$. Отметим, что если H_1 и H_2 – подгруппы, то H_3 , вообще говоря, не подгруппа.

Если H подгруппа G и $a \in G$, то aH и Ha , рассматриваемые как произведение множества H и одноэлементного множества $\{a\}$, называются **левым и правым смежными классами** подгруппы H в G .

Свойства смежных классов (сформулированы для левых, но справедливы и для правых):

$$1^\circ. a \in H \Leftrightarrow aH \equiv H.$$

$2^\circ. a^{-1}b \in H \Leftrightarrow aH = bH$ (элементы a и b порождают один и тот же смежный класс, если $a^{-1}b \in H$). Такие элементы a и b называются **эквивалентными** относительно подгруппы H .

3° . Два смежных класса одной подгруппы H либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

$$4^\circ. a \in aH.$$

Подгруппа H , для которой все левые смежные классы являются одновременно и правыми смежными классами, называется **нормальным делителем** группы G .

Если H нормальный делитель группы G , то произведение смежных классов есть смежный класс.

Def. Пусть G – группа с элементами $a, b, c, \dots$ и $\bar{G}$ – некоторое множество с элементами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, в котором введена операция: $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{G} \quad \exists \bar{c} \in \bar{G} \mid \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

Отображение f группы G на множество $\bar{G}$: $f: G \rightarrow \bar{G}$ называется **гомоморфизмом**, если $\forall a, b \in G$ выполнено $f(ab) = f(a)f(b)$.

$\bar{G}$ при этом называется **гомоморфным образом** группы G .

Если задано гомоморфное отображение G на $\bar{G}$, то все элементы группы G разбиваются на непересекающиеся классы; в классы объединяются все элементы G , которые отображаются в один и тот же элемент множества $\bar{G}$.

Т°. Гомоморфный образ группы есть группа.

Т°. Отображение f группы G на смежные классы по нормальному делителю H при определении операции умножения классов смежности как подмножеств группы G , представляет собой гомоморфизм.

Т°. Множество смежных классов группы G по нормальному делителю H с операцией умножения этих классов как подмножеств группы G образуют группу.

Эта группа называется **фактор-группой** группы G по нормальному делителю H и обозначается: G/H .

Группы линейных преобразований. Очень важными являются группы различных линейных преобразований. Назовем важнейшие из таких групп:

1°. $GL(n)$ – группа невырожденных линейных преобразований n -мерного линейного пространства V .

2°. $O(n)$ – ортогональная группа или группа всех ортогональных преобразований евклидова пространства E_n .

3°. $SO(n)$ – группа всех собственных ортогональных преобразований евклидова пространства E_n .

4°. $U(n)$ – унитарная группа или группа всех унитарных преобразований унитарного пространства размерности n .

§2. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение и приведите примеры групп.
2. Чем отличаются аддитивные и мультипликативные группы?
3. Является ли абелевой группой группа поворотов правильного треугольника?
4. Имеет ли группа перестановок трех элементов, абелевы подгруппы?
5. Дайте определение и приведите пример изоморфных групп.
6. Могут ли смежные классы одной подгруппы иметь непустое пересечение, но не совпадать?
7. Возведите перестановку в степень $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.
8. Перечислите основные группы линейных преобразований.

§3. Примеры решения задач

Задача 1. Образуется ли множество $\mathbb{Z}_5$ целых чисел, делящихся на пять без остатка, подгруппу группы целых чисел $\mathbb{Z}$ по сложению? А по умножению?

Решение. а) Проверим, является ли групповая операция сложения корректной в $\mathbb{Z}_5$. Для этого рассмотрим $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_5$. Тогда $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что $z_1 = 5k_1$ и $z_2 = 5k_2$. Рассматривая $z_1 + z_2 = 5k_1 + 5k_2 = 5(k_1 + k_2)$, заключаем что $z_1 + z_2$ делится на 5 и, следовательно, $z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}_5$. Операция сложения корректна в $\mathbb{Z}_5$.

б) Принадлежит ли нейтральный элемент группы $\mathbb{Z}$ множеству $\mathbb{Z}_5$? Поскольку элементом, нейтральным по сложению в $\mathbb{Z}$, является число 0 и 0 делится на 5, делаем вывод о том, что $\theta = 0 \in \mathbb{Z}_5$.

в) Выберем произвольное число $z \in \mathbb{Z}_5$, т. е. $z = 5k, k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что элементом, противоположным к элементу z , является элемент $\frac{z}{5} = 5l, l \in \mathbb{Z}, l = -k$ т. е. $z + \frac{z}{5} = 5(k + l) = 5(k - k) = 5 \cdot 0 = \theta$. Значит, каждый элемент $\mathbb{Z}_5$ имеет противоположный, принадлежащий $\mathbb{Z}_5$.

Из свойств а), б), в) следует, что $\mathbb{Z}_5$ образует аддитивную подгруппу группы $\mathbb{Z}$ по сложению.

г) Для той же задачи с групповой операцией – операцией умножения вопрос о подгруппе $\mathbb{Z}_5$ не возникает, ибо множество $\mathbb{Z}$ не является мультипликативной группой (элемент 0 обратного элемента не имеет).

Задача 2. Является ли подгруппа по сложению $\mathbb{Z}_5$ нормальным делителем $\mathbb{Z}$? Построить левые и правые смежные классы $\mathbb{Z}_5$ в $\mathbb{Z}$.

Решение. Ответ на вопрос задачи очень прост: в силу коммутативности операции сложения в группе левые и правые смежные классы совпадают и, следовательно, подгруппа $\mathbb{Z}_5$ является нормальным делителем группы $\mathbb{Z}$. А с построением смежных классов дело обстоит не так тривиально.

Подгруппа $\mathbb{Z}_5$ состоит из элементов вида $z = 5k, k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}_5 = \{ \dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots \}.$$

Построим правые смежные классы группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $\mathbb{Z}_5$. Для построения смежного класса $n\mathbb{Z}_5$, где $n \in \mathbb{Z}$, надо ко всем элементам подгруппы $\mathbb{Z}_5$ прибавить n . Тогда:

$$\mathbb{Z}_5^0 = 0 \cdot \mathbb{Z}_5$$

$$= \{ \dots, -10 + 0, -5 + 0, 0 + 0, 5 + 0, 10 + 0, \dots \} = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots \} = \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_5^1 = 1 \cdot \mathbb{Z}_5 = \{ \dots, -10 + 1, -5 + 1, 0 + 1, 5 + 1, 10 + 1, \dots \} = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots \},$$

$$\mathbb{Z}_5^2 = 2 \cdot \mathbb{Z}_5 = \{ \dots, -10 + 2, -5 + 2, 0 + 2, 5 + 2, 10 + 2, \dots \} = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots \}$$

,

$$\mathbb{Z}_5^3 = 3 \cdot \mathbb{Z}_5 = \{ \dots, -10 + 3, -5 + 3, 0 + 3, 5 + 3, 10 + 3, \dots \} = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots \}$$

,

$$\mathbb{Z}_5^4 = 4 \cdot \mathbb{Z}_5$$

$$= \{ \dots, -10 + 4, -5 + 4, 0 + 4, 5 + 4, 10 + 4, \dots \} = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots \}.$$

Таким образом, смежные классы $\mathbb{Z}_5^1, \mathbb{Z}_5^2, \mathbb{Z}_5^3, \mathbb{Z}_5^4$ – это множества целых чисел, которые при делении на 5 дают положительный остаток 1, 2, 3 или 4 соответственно. Теперь заметим, что:

$$\mathbb{Z}_5^5 = 5 \cdot \mathbb{Z}_5 = \{ \dots, -10 + 5, -5 + 5, 0 + 5, 5 + 5, 10 + 5, \dots \} = \{ \dots, -5, 0, 5, 10, \dots \} = \mathbb{Z}_5^0 = \mathbb{Z}_5.$$

Следовательно, $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_5^n = n\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$. Что, впрочем, ясно не только из непосредственного счета, но и из свойств смежных классов. Далее укажем, что:

$$\forall n = 5k + 1, k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_5^n = \mathbb{Z}_5^{5k+1} = \mathbb{Z}_5^1,$$

$$\forall n = 5k + 2, k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_5^n = \mathbb{Z}_5^{5k+2} = \mathbb{Z}_5^2,$$

$$\forall n = 5k + 3, k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_5^n = \mathbb{Z}_5^{5k+3} = \mathbb{Z}_5^3,$$

$$\forall n = 5k + 4, k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_5^n = \mathbb{Z}_5^{5k+4} = \mathbb{Z}_5^4.$$

Итак, обнаружено что различных смежных классов группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $\mathbb{Z}_5$ всего пять: $\mathbb{Z}_5^0 = \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_5^1, \mathbb{Z}_5^2, \mathbb{Z}_5^3, \mathbb{Z}_5^4$. При этом эти смежные классы не имеют общих элементов, что также подтверждается свойствами смежных классов.

Как отмечалось, в силу коммутативности групповой операции левые смежные классы $\mathbb{Z}_5^n$ совпадают с соответствующими правыми смежными классами $n\mathbb{Z}_5$, и, следовательно, подгруппа $\mathbb{Z}_5$ является нормальным делителем группы $\mathbb{Z}$.

Задача 3. Построить фактор-группу для аддитивной группы $\mathbb{Z}$ по нормальному делителю $\mathbb{Z}_5$.

Решение. Рассмотрим множество смежных классов группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $\mathbb{Z}_5$.

$$G \equiv \{ \mathbb{Z}_5^0, \mathbb{Z}_5^1, \mathbb{Z}_5^2, \mathbb{Z}_5^3, \mathbb{Z}_5^4 \}.$$

Введем на множестве G групповую операцию, определяемую таблицей Кэли:

$\odot$	$\mathbb{Z}_5^0$	$\mathbb{Z}_5^1$	$\mathbb{Z}_5^2$	$\mathbb{Z}_5^3$	$\mathbb{Z}_5^4$
$\mathbb{Z}_5^0$	$\mathbb{Z}_5^0$	$\mathbb{Z}_5^1$	$\mathbb{Z}_5^2$	$\mathbb{Z}_5^3$	$\mathbb{Z}_5^4$
$\mathbb{Z}_5^1$	$\mathbb{Z}_5^1$	$\mathbb{Z}_5^2$	$\mathbb{Z}_5^3$	$\mathbb{Z}_5^4$	$\mathbb{Z}_5^0$
$\mathbb{Z}_5^2$	$\mathbb{Z}_5^2$	$\mathbb{Z}_5^3$	$\mathbb{Z}_5^4$	$\mathbb{Z}_5^0$	$\mathbb{Z}_5^1$
$\mathbb{Z}_5^3$	$\mathbb{Z}_5^3$	$\mathbb{Z}_5^4$	$\mathbb{Z}_5^0$	$\mathbb{Z}_5^1$	$\mathbb{Z}_5^2$
$\mathbb{Z}_5^4$	$\mathbb{Z}_5^4$	$\mathbb{Z}_5^0$	$\mathbb{Z}_5^1$	$\mathbb{Z}_5^2$	$\mathbb{Z}_5^3$

$\mathbb{Z}_5^4$	$\mathbb{Z}_5^4$	$\mathbb{Z}_5^0$	$\mathbb{Z}_5^1$	$\mathbb{Z}_5^2$	$\mathbb{Z}_5^3$
------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

Приведенная таблица Кэли построена следующим образом: чтобы найти результат операции $\mathbb{Z}_5^m \odot \mathbb{Z}_5^n$ ($m, n = 0, 1, 2, 3, 4$) следует найти сумму $m + n$ и положительный остаток s от деления этой суммы на 5. Тогда $\mathbb{Z}_5^m \odot \mathbb{Z}_5^n = \mathbb{Z}_5^s$.

При этом элемент $\mathbb{Z}_5^0 = \mathbb{Z}_5$ является элементом нейтральным по введенной операции, а элементы $\mathbb{Z}_5^k$ и $\mathbb{Z}_5^{5-k}$, где $k = 1, 2, 3, 4$ – взаимно обратными.

Множество G с так введенной групповой операцией образует группу (конечную и абелеву). Это и есть фактор-группа группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $5\mathbb{Z}$.

Задача 4. Доказать, что группа комплексных чисел по сложению и группа параллельных переносов по умножению изоморфны.

Решение. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ по сложению образует абелеву группу.

Пусть P_a^r – оператор параллельного переноса на вектор $\vec{a}$. Операция умножения параллельных переносов вводится как последовательное применение операторов переноса: $P_a^r \odot P_b^r = P_{a+b}^r$. Множество всех операторов параллельного переноса V_P со стандартно введенной операцией умножения операторов также является абелевой группой.

Взаимно однозначное соответствие между элементами $\mathbb{C}$ и V_P установим следующим образом: $\forall z \in \mathbb{C} \quad P_z^r \in V_P$. При таком отображении нейтральному элементу одной группы соответствует нейтральный элемент другой группы:

$$\theta_{\mathbb{C}} = 0 \quad ? \quad \theta_{V_P} = P_0^r = E.$$

Кроме того, если $z_1 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \in \mathbb{C}$, то:

$$\Delta \quad \text{с одной стороны} - z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \quad P_{z_1}^r \odot P_{z_2}^r = P_{z_1+z_2}^r;$$

$$\Delta \quad \text{с другой стороны} - z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \quad P_{z_1+z_2}^r.$$

Эти соотношения показывают, что образ суммы совпадает с произведением образов. Это и есть изоморфизм аддитивной группы $\mathbb{C}$ и мультипликативной группы V_P .

Задача 5. Найти с точностью до изоморфизма фактор-группу G/H , если G – группа ненулевых комплексных чисел по умножению, H – группа комплексных чисел по модулю равных единице, по умножению.

Решение. Прежде всего, отметим, что H есть подгруппа группы G и, кроме того, в силу коммутативности групповой операции, является нормальным делителем группы. Для того чтобы построить фактор-группу

G/H необходимо, прежде всего, найти смежные классы группы G по подгруппе H .

Геометрическим местом точек на плоскости, которые соответствуют комплексным числам с модулем равным единице (подгруппа H), есть окружность единичного радиуса с центром в начале координат. И еще вспомним, что при умножении комплексных чисел аргументы комплексных чисел суммируются, а модули – перемножаются. Тогда при построении смежного класса z_0H все элементы H умножатся на z_0 и, следовательно:

- а) произойдет поворот окружности вокруг начала координат на угол $\arg z_0$ (окружность при этом повороте перейдет в ту же окружность) и
- б) умножение ее радиуса на величину $|z_0|$.

В результате смежным классом z_0H будет множество комплексных чисел, лежащих на окружности радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат.

Таким образом, множество смежных классов группы G по подгруппе H есть множество концентрических окружностей с центром в начале координат и ненулевого радиуса. Обозначим смежные классы: $H_{r=r_0}$, где r – радиус соответствующей окружности.

Групповую операцию определим следующим образом: $H_{r=r_1} \odot H_{r=r_2} = H_{r=r_1 r_2}$.

Нейтральным элементом по этой операции является сама подгруппа $H = H_{r=1}$, а элементы $H_{r=r_0}$ и $H_{r=1/r_0}$ являются взаимно обратными по введенной операции.

Множество всех смежных классов $H_{r=r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{R}^+$) с так введенной операцией и есть фактор-группа G/H .

Если каждому смежному классу $H_{r=r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{R}^+$) поставить в соответствие вещественное положительное число $r_0 \in \mathbb{R}^+$, а групповой операции в G/H – операцию умножения в $\mathbb{R}^+$, то нетрудно убедиться (как в предыдущей задаче) в том, что факторгруппа G/H изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{R}^+$.

Задача 6. Перестановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ разложить в произведение независимых циклов.

Решение. а) При последовательном применении данной перестановки элемент 1 переходит в 5, а затем элемент 5 переходит в 1 $(1 \ 5 \ 1)$. Следовательно, после двукратного применения элементы 1 и 5 займут исходные места. Это явление носит название независимого цикла длины два в заданной перестановке и обозначается $(1, 5)$.

б) В исходной перестановке нетрудно заметить еще два независимых цикла. Один – длины три $(3, 9, 7)$, а другой – длины четыре $(2, 8, 6, 4)$.

в) Полученные результаты можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1, 5)(3, 9, 7)(2, 8, 6, 4).$$

Такая запись называется разложением перестановки в произведение независимых циклов.

г) Отметим одно полезное следствие из полученного результата. Число 12 является наименьшим общим кратным длин циклов 2, 3 и 4, поэтому:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}^{12n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Возведение перестановки в любую степень, кратную 12, не изменяет перестановку. Этот факт упрощает возведение перестановки в произвольную степень.

§ 4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Образуют ли мультипликативные группы следующие множества:

- а) множество всех вещественных чисел;
- б) множество всех ненулевых вещественных чисел;
- в) множество всех положительных вещественных чисел;
- г) множество всех отрицательных вещественных чисел;
- д) множество всех положительных рациональных чисел;
- е) множество всех целых положительных чисел;
- ж) множество всех ненулевых комплексных чисел;
- з) множество всех комплексных чисел;
- и) множество всех комплексных чисел, по модулю равных 1;
- к) множество всех ненулевых чисто мнимых комплексных чисел;
- л) множество, состоящее из двух элементов 1 и -1 ;
- м) комплексных корней n -й степени из 1 ($n \in \mathbb{N}$).

▲ Δ а) нет; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) нет; ж) да; з) нет; и) да; к) нет; л) да; м) да



2. Образуют ли аддитивные группы следующие множества:

- а) множество всех действительных чисел;
- б) множество всех положительных действительных чисел;
- в) множество всех неотрицательных действительных чисел;
- г) множество всех рациональных чисел;
- д) множество всех целых чисел;
- е) множество всех целых положительных чисел;
- ж) множество всех четных чисел;
- з) множество всех нечетных чисел;
- и) множество всех чисел, делящихся на 3 нацело;
- к) множество всех комплексных чисел;
- л) множество всех чисто мнимых комплексных чисел;
- м) множество, состоящее из одного числа 0.

▲ а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) нет; ж) да; з) нет; и) да; к) да; л) да; м) да ▲

3. Образует ли группу множество:

- а) всех векторов плоскости относительно операции сложения;
- б) всех векторов пространства относительно операции сложения;
- в) всех векторов пространства относительно операции векторного

про-

изведения;

г) всех ненулевых векторов пространства относительно операции векторного произведения.

▲ а) да; б) да; в) нет; г) нет ▲

4. Образует ли группу относительно операции умножения данное множество преобразований плоскости:

- а) множество всех параллельных переносов;
- б) множество всех параллельных переносов плоскости на векторы, коллинеарные данному;
- в) множество всех параллельных переносов на ненулевые векторы;
- г) множество всех параллельных переносов на векторы с началом в фиксированной точке A и концами которые лежат на данной прямой l ;
- д) множество всех поворотов плоскости;
- е) множество всех поворотов плоскости вокруг фиксированной точки;
- ж) множество всех ортогональных преобразований линейного пространства;
- з) множество всех ортогональных преобразований линейного пространства с положительным определителем;
- и) множество всех ортогональных преобразований линейного пространства с отрицательным определителем;
- к) множество, состоящее из двух преобразований: тождественного и симметрии относительно данной прямой.

▲ а) да; б) да; в) нет; г) да, если $A \in l$; нет, если $A \notin l$; д) нет; е) да; ж) да; з) да; и) нет; к) да

▲
5. Образует ли группу относительно операции умножения множество преобразований плоскости, заданных формулами:

- а) $x^* = \lambda x, y^* = \lambda y$; б) $x^* = \lambda x, y^* = \lambda y, \lambda \neq 0$;
- в) $x^* = \lambda x, y^* = \lambda y, \lambda > 0$; г) $x^* = \lambda x, y^* = \lambda y, \lambda < 0$;
- д) $x^* = \lambda x, y^* = \frac{1}{\lambda} y, \lambda \neq 0$; е) $x^* = \lambda x, y^* = \frac{1}{\lambda} x, \lambda \neq 0$;
- ж) $x^* = \lambda x, y^* = y, \lambda \neq 0$; з) $x^* = x, y^* = \lambda x + y$;
- и) $x^* = ax + by, y^* = cx + dy$; к) $x^* = ax + by, y^* = cx + dy, ad - bc$;
- л) $x^* = ax + by, y^* = bx + cy, ac - b^2 \neq 0$;
- м) $x^* = ax - by, y^* = bx + ay, a^2 + b^2 \neq 0$.

▲ а) нет; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) нет; ж) да; з) да; и) нет; к) да; л) нет; м) да ▲

6. Образуется ли группа каждое из следующих множеств относительно указанной операции над элементами:

- а) множество степеней данного числа $a \neq 0$ с целыми показателями относительно операции умножения;
- б) множество целых чисел относительно операции вычитания;
- в) множество квадратных матриц порядка n с вещественными элементами относительно операции умножения;
- г) множество невырожденных матриц порядка n с вещественными элементами относительно операции умножения;
- д) множество квадратных матриц порядка n с целочисленными элементами относительно операции умножения;
- е) множество квадратных матриц порядка n с целочисленными элементами и определителем, равным ± 1 относительно операции умножения;
- ж) множество квадратных матриц порядка n с целочисленными элементами и определителем, равным 1 относительно операции умножения;
- з) множество корней всех целых степеней из 1 относительно операции умножения.

▲ а) да; б) нет; в) нет, вырожденные матрицы не имеют обратных; г) да; д) нет, не любая матрица имеет обратную того же вида; е) да; ж) да; з) да ▲

7. Доказать, что если квадрат любого элемента группы равен единичному элементу, то группа абелева.

8. Доказать, что следующие пары групп изоморфны:

- а) группа действительных чисел по сложению и группа параллельных переносов на векторы, коллинеарные данному вектору по умножению;
- б) группа комплексных чисел по модулю, равных единице по умножению, и группа поворотов плоскости вокруг фиксированной точки по умножению;
- в) группа комплексных чисел по сложению и группа параллельных переносов плоскости по умножению;
- г) группа ненулевых действительных чисел по умножению и группа гомотетий с центром в данной точке по умножению (коэффициент гомотетии $\neq 0$);
- д) группа ненулевых комплексных чисел по умножению и группа преобразований плоскости, заданных формулами: $x^* = ax - by$, $y^* = bx + ay$, $a^2 + b^2 > 0$ по умножению;
- е) группа действительных чисел по сложению и группа положительных вещественных чисел по умножению;
- ж) группа целых чисел и группа четных чисел – обе по сложению;
- з) группа вращения правильного n -угольника по умножению и группа комплексных корней n -й степени из единицы по умножению;

и) любые две группы, содержащие два элемента;

к) любые две группы, содержащие три элемента.

9. Показать, что существуют только две различные (с точностью до изоморфизма) группы, содержащие четыре элемента. Привести примеры для обоих случаев.

Δ Группа поворотов плоскости вокруг центра квадрата, совмещающих этот квадрат с самим собой (или изоморфная ей группа комплексных корней 4-й степени из 1 относительно операции умножения); группа симметрии ромба состоящая из тождественного преобразования и симметрии относительно диагоналей ▲

10. Доказать, что следующие четыре группы изоморфны между собой:

1) группа целых чисел по сложению;

2) группа четных чисел по сложению;

3) группа целых чисел кратных данному натуральному n по сложению;

4) группа степеней с целыми показателями данного числа $a \neq 0$ по умножению.

11. Доказать, что все бесконечные циклические группы изоморфны и все конечные циклические группы данного порядка изоморфны.

12. Доказать, что группа рациональных чисел по сложению не изоморфна группе положительных рациональных чисел по умножению.

13. Доказать, что следующие группы являются циклическими, и найти их образующие элементы:

а) группа всех целых чисел по сложению;

б) группа $n \in \mathbb{Z}$ целых чисел, кратных данному натуральному числу n по сложению;

в) группа комплексных корней n -й степени из единицы по умножению;

г) группа вращений правильного n -угольника.

Δ а) ± 1 ; б) $\pm n$; в) $\frac{2\pi i k}{n}$, где $1 \leq k \leq n-1$, k – взаимно просто с n ;

г) повороты на $\frac{2\pi k}{n}$ где k – взаимно просто с n ▲

14. Доказать, что все степени элемента a группы G образуют подгруппу $\{a\}$ (циклическая группа с образующим элементом a).

15. Найти все образующие элементы конечной циклической группы.

Δ Если a – один из образующих элементов циклической группы порядка n , то a^k будет образующим элементом тогда и только тогда, когда k и n взаимно простые. ▲

16. Показать, что:

а) группа всех ортогональных преобразований, сохраняющих данный правильный n -угольник (называем его группой симметрии), содержит $2n$ преобразований;

б) группа вращений правильного n -угольника является ее нормальной подгруппой.

Δ Указание: показать, что если a – поворот, b – осевая симметрия, то $b^{-1}ab$ – также поворот ▲

17. Пусть G группа порядка $2n$, а H – подгруппа группы G порядка n .

Доказать, что H – нормальная подгруппа.

18. Доказать, что:

а) порядок конечной группы делится на порядок любой ее подгруппы (теорема Лагранжа);

б) группа простого порядка – циклическая.

19. Пусть H – подгруппа группы G . Доказать, что:

а) два элемента a и b группы G тогда и только тогда принадлежат одному левому смежному классу по подгруппе H , когда $a^{-1}b \in H$;

б) группа G является объединением попарно непересекающихся левых (правых) смежных классов H ;

в) между любыми двумя смежными классами по H существует взаимно однозначное соответствие.

20. Пусть G – группа симметрий правильного треугольника, а H – ее подгруппа, состоящая из тождественного преобразования и симметрии относительно одной из высот треугольника. Проверить, что H не является нормальной подгруппой в G и найти разбиение группы G на левые и правые смежные классы по H .

Δ Пусть a – поворот треугольника на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг его центра, b – симметрия относительно одной из высот. Тогда $G = \{e, a, a^2 = a^{-1}b, ab, a^{-1}b\}$, $H = \{e, b\}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ левые классы по H : $H, aH = \{a, ab\}$, $a^{-1}H = \{a^{-1}, a^{-1}b\}$; правые смежные классы по H :

$Ha = \{a, ba = a^{-1}b\}$, $Ha^{-1} = \{a^{-1}, ab\}$ ▲

21. Найти (с точностью до изоморфизма) факторгруппу G/H , если:

а) G – группа всех комплексных чисел по сложению; H – группа всех вещественных чисел по сложению;

б) G – группа ненулевых комплексных чисел по умножению; H – группа положительных вещественных чисел по умножению;

в) G – группа ненулевых комплексных чисел по умножению; H – группа комплексных чисел по модулю равных единице по умножению;

г) G – группа всех вещественных чисел по сложению; H – группа целых чисел по сложению;

д) $G = \mathbb{Z}$ – группа целых чисел по сложению; $H = n\mathbb{Z}$ – группа чисел, кратных натуральному числу n по сложению;

е) G – группа всех ортогональных операторов с положительным определителем; H – группа параллельных переносов.

Δ а) группа всех вещественных чисел по сложению; б), г), е) группа комплексных чисел по модулю, равных 1, по умножению; в) группа положительных вещественных чисел по умножению; д) циклическая группа порядка n ▲

22. Доказать, что факторгруппа аддитивной группы векторов n -мерного про-

странства по подгруппе векторов k -мерного подпространства изоморфна

группе векторов $(n - k)$ -мерного пространства.

23. Пусть G – группа всех движений трехмерного пространства, H – подгруппа

параллельных переносов, K – подгруппа вращений около данной точки O .

Показать, что H является нормальным делителем группы G , а K – нет. Далее

показать, что G/H изоморфна K .

24. Доказать, что факторгруппа аддитивной группы целых чисел по подгруппе

чисел, кратных $n > 0$, изоморфна группе вращений правильного n -угольни-

ка около центра, совмещающих многоугольник с самим собой.

25. Пусть C_n – группа корней n -й степени из 1. Сколько существует гомомор-

физмов групп: а) C_2 в C_4 ; б) C_6 в C_3 ; в) C_5 в C_5 ; г) C_3 в C_5 .

Δ а) 3; б) 3; в) 4; г) 1 ▲

26. Если S_n группа перестановок n -й степени, то найти:

а) все подгруппы в S_3 ; б) все нормальные подгруппы в S_4 .

Δ а) e ; три группы второго порядка с образующими элементами $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) помимо e и всей группы S_4 подгруппа четных перестановок (порядка 12) и не-циклическая

подгруппа H из четырех элементов: e , $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ▲

27. Доказать, что все четные перестановки образуют нормальную подгруппу A_n

в группе всех перестановок S_n n -й степени, и найти ее порядок.

Δ $n!/2$ ▲

28. Доказать, что группа четных перестановок 4-й степени не имеет подгрупп

порядка 6 (т. е. теорема обратная теореме Лагранжа из задачи 18а – неверна).

29. Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов.

Определить четность подстановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

$$\begin{array}{ll} \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}; & \text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}; & \text{е)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. & & \end{array}$$

- ▲ а) (1, 4, 2)(3, 5), нечетная; б) (1, 6, 3)(2, 5)(4), нечетная; в) (1, 8, 2)(3)(4, 6, 7)(5), четная;
г) (1, 5)(2, 8, 6, 4)(3, 9, 7), четная; д) (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), четная; е) (1, 4)(2, 5)(3, 6),
нечетная ▲

31. В следующих перестановках перейти от записи в циклах к записи двумя

строками:

- а) (1, 5)(2, 3, 4); б) (1, 3)(2, 5)(4); в) (7, 5, 3, 1)(2, 4, 6)(8)(9);
г) (1, 2)(3, 4) ... (2n-1, 2n); д) (1, 2, 3, ..., 2n-1, 2n);
е) (3, 2, 1)(6, 5, 4) ... (3n, 3n-1, 2n-2).

▲ а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$;
д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & \dots & 3n & 3n-2 & 3n-1 \end{pmatrix}$ ▲

32. Произвести действия с перестановками:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

▲ а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ▲

33. Доказать, что среди всех степеней перестановки, равных единице, наимень-

ший показатель равен наименьшему общему кратному длин циклов, входя-

щих в разложение перестановки.

34. Возвести перестановки в степень:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $A^{100} = ?$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{150} = ?$

▲ а) A; б) E ▲

35. Найти X из равенства $AXB = C$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \blacktriangle$$

36. Найти все перестановки, коммутирующие с перестановками:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δ а) Решение: Пусть X – перестановка, коммутирующая с S . Тогда $SX = XS \Rightarrow X^{-1}SX = S$. Разложим S на циклы $S = (1, 2)(3, 4) = X^{-1}(1, 2)XX^{-1}(3, 4)X$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что $X^{-1}(1, 2)X$ есть снова цикл длины 2, полученный из цикла $(1, 2)$ заменой чисел 1 и 2 теми, которые им соответствуют в подстановке X . Это же верно и для цикла $(3, 4)$. Таким образом, перестановка X должна переводить циклы из S в циклы той же длины, а в силу единственности разложения S на циклы, циклы переходят либо каждый в себя, либо один в другой. Так как каждый цикл длины 2 можно записать двумя способами $(1, 2) = (2, 1)$, $(3, 4) = (4, 3)$, то все перестановки, коммутирующие с S , будут: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\blacktriangle$

РАЗДЕЛ II ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТЕНЗОРОВ

§ 1. Основные теоремы и определения

Пусть E_n – евклидово пространство и пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ – два базиса в E_n .

Def. Два базиса $\{e_i\}$ и $\{e^j\}$ называются взаимными, если $(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

Т°. Любой базис из E_n имеет единственный взаимный базис.

Т°. Если базис ортонормирован, то он совпадает со своим взаимным базисом.

Пусть $\{e_i\}$ и $\{e^j\}$ – взаимные базисы в E_n . Тогда:

$$\forall x \in E_n \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad \text{и} \quad x = x^1 e^1 + x^2 e^2 + \dots + x^n e^n.$$

Величины $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются **ковариантными**, а величины $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ **контравариантными** координатами вектора x .

Соглашение. Пусть имеется выражение, составленное из сомножителей, которые снабжены индексами (т. е. каждый сомножитель имеет конечное число верхних и нижних индексов). При этом договоримся, что все верхние индексы обозначаются разными символами (аналогично нижние). Если в таком выражении встречаются два одинаковых индекса (один

верхний, а другой нижний), то считается, что по такому индексу производится суммирование от 1 до n ($n = \dim E_n$). Такой индекс называется «немым», потому что после суммирования этот индекс будет отсутствовать.

Например: $x_i e^i = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3 + \dots + x_n e^n$; $\delta_i^j = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 + \dots + \delta_n^n$.

Используя это соглашение, запишем формулы для нахождения ковариантных и контравариантных координат вектора x , называемые формулами Гиббса:

$$x = x_i e^i = (x e_i) e^i; \quad x = x^i e_i = (x e^i) e_i.$$

Из формул Гиббса следует, что:

$$e_j = (e_j e_i) e^i = g_{ji} e^i, \quad e^j = (e^j e_i) e_i = g^{ji} e_i. \quad \text{Здесь } g_{ji} = (e_j e_i); \quad g^{ji} = (e^j e^i).$$

С помощью этих формул можно легко строить взаимные базисы. Важно отметить, что при этом матрицы (g_{ji}) и (g^{ji}) – взаимнообратные.

Для перехода от пары взаимных базисов $\{e_i, e^i\}$ к другой паре взаимных базисов $\{e_{i'}, e^{i'}\}$ достаточно знать матрицу перехода $P_i^{i'}$ от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$. При этом:

- а) базисные векторы преобразуются по формулам:
$$\begin{aligned} e_{i'} &= P_{i'}^i e_i; & e_i &= P_i^{i'} e_{i'}, \\ e^i &= P_i^{i'} e^{i'}; & e^{i'} &= P_{i'}^i e^i, \end{aligned}$$
- б) не базисные векторы преобразуются по формулам:
$$\begin{aligned} x_{i'} &= P_{i'}^i x_i; & x_i &= P_i^{i'} x_{i'}, \\ x^{i'} &= P_i^{i'} x^i; & x^i &= P_{i'}^i x^{i'}. \end{aligned}$$

Def. Тензором A типа (p, q) называется объект, который:

1) в любом базисе $\{e_i\}$ линейного пространства V_n определяется n^{p+q} координатами $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$ (индексы принимают значения 1, 2, 3, ..., n каждый).

2) его координаты $A_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}^{k'_1 k'_2 \dots k'_q}$ в базисе $\{e_{i'}\}$ связаны с координатами в базисе $\{e_i\}$ соотношением:

$$A_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}^{k'_1 k'_2 \dots k'_q} = P_{i'_1}^{i_1} P_{i'_2}^{i_2} \dots P_{i'_p}^{i_p} P_{k_1}^{k'_1} P_{k_2}^{k'_2} \dots P_{k_q}^{k'_q} A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}.$$

(*)

Здесь $(P_{i'}^i)$ – матрица перехода от старого базиса к новому ($e_i \rightarrow e_{i'}$), а $(P_i^{i'})$ – матрица обратного перехода. Число $r = p + q$ называется **рангом** тензора.

Примеры тензоров: скаляр – тензор нулевого ранга; вектор – тензор первого ранга типа (1, 0) или (0, 1) в зависимости от выбора базиса; матрица билинейной формы представляет тензор второго ранга типа (2, 0); матрица линейного оператора представляет тензор второго ранга типа (1, 1).

Операции над тензорами.

1. Умножение тензора на число, сложение и вычитание тензоров для тензоров одинакового типа выполняются покомпонентно.

2. Умножение тензоров. Для тензоров $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$ и $B_{e_1 e_2 \dots e_r}^{m_1 m_2 \dots m_s}$ произведение определяется по формуле: $D_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_{q+s}} = A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} \cdot B_{e_1 e_2 \dots e_{p+r}}^{m_1 m_2 \dots m_{q+s}}$.
3. Свертка тензора по паре индексов (один индекс верхний, один нижний). Для тензоров, у которых $p \neq 0, q \neq 0$, свертка по верхнему индексу k_s и нижнему индексу i_l производится по правилу: $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_s k_q} \delta_{k_s}^{i_l}$. Свертка переводит тензор типа (p, q) в тензор типа $(p-1, q-1)$.
4. Симметрирование по паре нижних индексов i_m и i_n производится так:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} \rightarrow \frac{1}{2} \left(A_{i_1 i_2 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} + A_{i_1 i_2 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} \right).$$

Полученный тензор будет симметрическим по указанной паре индексов.

Аналогично производится симметрирование по паре верхних индексов.

5. Альтернирование по паре нижних индексов i_m и i_n :

$$A_{i_1 i_2 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} \rightarrow \frac{1}{2} \left(A_{i_1 i_2 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} - A_{i_1 i_2 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} \right),$$

дает тензор кососимметричный по указанной паре индексов. Аналогично определяется альтернирование по паре верхних индексов.

Аффинные ортогональные тензоры. Отметим, что ортонормированный базис $\{e_i\}$ совпадает со своим взаимным $\{e^i\}$, т. е. $e_i = e^i$, и тогда $x^i = x_i$ т. е. верхние и нижние индексы эквивалентны.

Формула Гиббса для нахождения координат вектора x в ортонормированном базисе $\{e_i\}$: $x = x_i e_i = (x e_i) e_i$.

При переходе от ортонормированного базиса $\{e_i\}$ к ортонормированному базису $\{e_{i'}\}$ базисные векторы преобразуются по формулам:

$$e_{i'} = p_{i' i} e_i; \quad e_i = p_{i i'} e_{i'},$$

где $(p_{i' i})$ – матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{e_{i'}\}$, а $(p_{i i'})$ – матрица обратного перехода.

Для не базисных векторов: $x_{i'} = p_{i' i} x_i$; и $x_i = p_{i i'} x_{i'}$, т. е. те же формулы, что и для базисных векторов.

При ортогональных преобразованиях матрица перехода от одного базиса к другому является ортогональной, т. е. $P^{-1} = P^T$ или $PP^T = P^T P = E$.

В силу этого, при ортогональных преобразованиях все координаты будут ковариантные и все индексы нижние.

Def. Аффинным ортогональным тензором A ранга r называется объект, который:

1) в каждом ортонормированном базисе $\{e_i\}$ евклидова пространства E_n определяется n^r координатами $A_{i_1 i_2 \dots i_r}$ (индексы принимают значения 1, 2, ..., n каждый);

2) при переходе от одного ортонормированного базиса $\{e_i\}$ к другому ортонормированному базису $\{e_{i'}\}$ его координаты изменяются по правилу:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_r} = p_{i_1 i'_1} p_{i_2 i'_2} \dots p_{i_r i'_r} A_{i'_1 i'_2 \dots i'_r},$$

где $(p_{i i'})$ – матрица перехода от $\{e_i\}$ базиса к базису $\{e_{i'}\}$.

Операции над аффинными тензорами производятся аналогично операциям над тензорами общего типа. Отношение равенства тензоров, сложение и вычитание тензоров, умножение тензора на число определяются как операции покоординатного равенства, сложения, вычитания и умножения на число в некотором базисе.

Умножение и свертка тензоров производится, как и в случае тензоров общего вида, но при свертке отмечается не один верхний и один нижний индексы а, естественно, два нижних. Свертка тензора $A_{i_1 k i_k i_m k i_r}$ по индексам i_k и i_m – это, фактически, умножение на $\delta_{i_k i_m}$: $A_{i_1 k i_k i_m k i_r} \delta_{i_k i_m}$.

Комбинация операции умножения тензоров с последующей сверткой по паре индексов называется **скалярным или внутренним произведением** тензоров.

Имеют место и операции симметрирования и альтернирования тензоров.

Def. Псевдотензор – это величина, координаты которой при ортогональных преобразованиях преобразуются по закону:

$$\Pi_{i_1 i_2 \dots i_r} = \Delta \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_r} p_{i_1 i'_1} p_{i_2 i'_2} \dots p_{i_r i'_r} \Pi_{i'_1 i'_2 \dots i'_r},$$

где $\Delta = \det P$ (Для ортогональных преобразований $\det P = \pm 1$). При этом:

- 1°. Сумма двух псевдотензоров – псевдотензор;
- 2°. Произведение двух псевдотензоров – тензор;
- 3°. Произведение тензора и псевдотензора – псевдотензор;
- 4°. Свертка псевдотензора – псевдотензор.

Рассмотрев величины $\epsilon_{ikl} = (e_i \times e_k) e_l$, где e_i, e_k, e_l – орты ортогональной, правой системы координат в E_3 , получим, что: $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$; $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$, а остальные ϵ_{ikl} равны нулю.

Величины ϵ_{ikl} образуют абсолютно антисимметричный псевдотензор третьего ранга. Он называется **алгебраическим символом Леви-Чивита**.

Для символа Леви-Чивита:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{abc} = \begin{vmatrix} \delta_{ia} & \delta_{ib} & \delta_{ic} \\ \delta_{ka} & \delta_{kb} & \delta_{kc} \\ \delta_{la} & \delta_{lb} & \delta_{lc} \end{vmatrix}; \quad \epsilon_{ikl} \epsilon_{abl} = \begin{vmatrix} \delta_{ia} & \delta_{ib} \\ \delta_{ka} & \delta_{kb} \end{vmatrix}; \quad \begin{matrix} \epsilon_{ikl} \epsilon_{akl} = \delta_{ia} \\ \epsilon_{ikl} \epsilon_{ikl} = 6 \end{matrix}.$$

С помощью тензора δ_{ik} (символ Кронекера) и псевдотензора ε_{ikl} (символ Леви–Чивита) операции скалярного и векторного произведения векторов a и b можно записать в виде: $(a \cdot b) = \delta_{ik} a_i b_k$; $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l$.

Def. Тензорным полем ранга r называется совокупность 3^r функций $T_{i_1 i_2 \dots i_r}(x_1, x_2, x_3)$, которые в любой точке пространства образуют тензор ранга r .

1°. Если $T_{i_1 i_2 \dots i_r}(r)$ – тензорное поле ранга r , то величины $\frac{T_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\square x_j}(x_1, x_2, x_3)$ образуют тензорное поле ранга $(r + 1)$. Оно называется градиентом тензорного поля $T_{i_1 i_2 \dots i_r}$.

2°. Для тензорного поля ранга r можно построить r тензорных полей $(r - 1)$ -го ранга «типа дивергенции» в зависимости от того, какой из индексов исходного поля сворачивается с индексом дифференцирования:

$$\frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x_{i_1}}; \quad \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x_{i_2}}; \quad \dots; \quad \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x_{i_r}}.$$

3°. Для тензорного поля ранга r можно получить r различных тензорных полей ранга r «типа ротор»:

$$\varepsilon_{iki_1} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{i_1 i_2 \dots i_r}; \quad \varepsilon_{iki_2} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{i_1 i_2 \dots i_r}; \quad \dots; \quad \varepsilon_{iki_r} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{i_1 i_2 \dots i_r}.$$

Схематически операции градиента, дивергенции и ротора тензорного поля можно записать так:

$$(\text{grad} T)_i = \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x_{i_1}}; \quad (\text{div} T_{\dots i \dots}) = \delta_k \frac{\partial T_{\dots i \dots}}{\partial x_k} = \frac{\partial T_{\dots i \dots}}{\partial x_i}; \quad (\text{rot} T_{\text{KIK}})_i = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{\text{KIK}}.$$

Известные формулы математического анализа: формула Стокса и формула Гаусса–Остроградского в записи для тензорных полей имеют вид:

формула «типа Гаусса–Остроградского»:

$$\oint_V \frac{\partial T_{\text{KIK}}}{\partial x_i} dV = \oint_S T_{\text{KIK}} dS_i = \oint_S n_i T_{\text{KIK}} dS$$

(справа и слева «немой» индекс должен быть один и тот же);

$$\text{формула «типа Стокса»}: \oint_S \frac{\partial T_{\text{KIK}}}{\partial x_k} dS_i = \oint_l T_{\text{KIK}} dl_i.$$

§ 2. Контрольные вопросы и упражнения

12. Дайте определение взаимных базисов.
13. Какое соглашение о суммировании принимается в тензорной алгебре?
14. Запишите формулы Гиббса.
15. Как вычислить элементы матрицы, которая определяет связь между базисными векторами взаимных базисов?

16. Сколько матриц перехода необходимо знать, чтобы полностью определить прямой и обратный переходы для взаимных базисов при преобразовании координат? Как вычисляются элементы этих матриц?
17. Дайте определение ковариантных и контравариантных координат вектора.
18. Дайте определение тензора.
19. Можно ли два тензора перемножить и что является результатом умножения тензоров?
20. Какой базис является взаимным к ортонормированному?
21. Как и почему записываются ковариантные и контравариантные индексы тензоров при работе в ортонормированных базисах?
22. Сколько независимых координат имеет симметричный тензор 2-го ранга в трёхмерном евклидовом пространстве?
23. Сколько независимых координат имеет антисимметричный тензор 2-го ранга в трёхмерном евклидовом пространстве?
24. Приведите примеры псевдотензоров.
25. Что такое алгебраический символ Леви–Чивита?
26. Сколько компонент имеет алгебраический символ Леви–Чивита и сколько из них отличны от 0?
27. Чему равна величина δ_{ii} в n -мерном евклидовом пространстве?
28. Как изменяют ранг тензорного поля операции нахождения градиента, дивергенции, ротора и лапласиана тензора? Лапласиан тензора $T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k \dots i_n}$ определяется следующим образом: $\Delta T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k \dots i_n} = \frac{\partial^2 T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k \dots i_n}}{\partial x_{i_k}^2}$.
29. Сколько различных операций типа «градиент», «дивергенция», «ротор» и «лапласиан» можно выполнить над тензорным полем ранга r ?
30. Как записать формулу Остроградского – Гаусса в тензорной форме? Сколько таких формул можно записать для тензора ранга r ?
31. Как записать формулу Стокса в тензорной форме? Сколько таких формул можно записать для тензора ранга r ?

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Найти базис, взаимный к базису

$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (0, 1, 1), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Решение. Запишем формулы, которыми связаны базисные векторы двух взаимных базисов $\{e_i\}_{i=1}^3$ и $\{e^i\}_{i=1}^3$:

$$e_i = (e_i, e_j) e^j = g_{ij} e^j, \quad e^i = (e^i, e^j) e_j = g^{ij} e_j \quad (1)$$

Сначала определим, какой из этих формул проще воспользоваться. Поскольку у нас заданы базисные векторы $\{e_i\}_1^3$, то удобнее воспользоваться первой из формул и определить элементы матрицы (g_{ij}) :

$$G_H = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решаем матричное уравнение (1) относительно $\{e^i\}_1^3$: $e^j = g_{ij}^{-1} e_i$,
(2)

и находим матрицу, обратную к матрице G_H :

$$G_H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (2) следует понимать как

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда:

$$e^1 = 1 \diamond_1 - 1 \diamond_2 + 0 \diamond_3 = \{1, 0, 0\}, \\ e^2 = -1 \diamond_1 + 2 \diamond_2 - 1 \diamond_3 = \{-1, 1, 0\}, \quad e^3 = 0 \diamond_1 - 1 \diamond_2 + 2 \diamond_3 = \{0, -1, 1\}.$$

Задача 2. Пусть вектор x в некотором базисе имеет координаты $x = (5, 2, 1)$. Базисные векторы двух взаимных базисов $\{e_i\}_{i=1}^3$ и $\{e^i\}_{i=1}^3$ в том же базисе имеют координаты:

$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (0, 1, 1), \quad e_3 = (0, 0, 1), \\ e^1 = (1, 0, 0), \quad e^2 = (-1, 1, 0), \quad e^3 = (0, -1, 1).$$

Найти ковариантные и контравариантные координаты вектора x в базисах $\{e_i\}_{i=1}^3$ и $\{e^i\}_{i=1}^3$.

Решение. Запишем формулы Гиббса для вектора x :

$$x = x_i e^i = (x, e_i) e^i, \quad x = x^i e_i = (x, e^i) e_i,$$

где x_i — ковариантные координаты вектора x и x^i — контравариантные координаты того же вектора. Тогда:

$$x_1 = (x, e_1) = 8, \quad x_2 = (x, e_2) = 3, \quad x_3 = (x, e_3) = 1 \quad \text{и} \\ x^1 = (x, e^1) = 5, \quad x^2 = (x, e^2) = -3, \quad x^3 = (x, e^3) = -1.$$

Таким образом, для вектора x найдены ковариантные $x = (8, 3, 1)$ и контравариантные $x = (5, -3, -1)$ координаты.

Задача 3. Пусть в евклидовом пространстве E^3 заданы два базиса: $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ и $e_{1'} = (1, 1, 0)$, $e_{2'} = (1, 0, 1)$, $e_{3'} = (0, 1, 1)$. Построить матрицы перехода $\{e_i\}_1^3 \rightarrow \{e_{i'}\}_1^3$ и $\{e_{i'}\}_1^3 \rightarrow \{e_i\}_1^3$ и найти взаимные базисы $\{e^i\}_1^3$ и $\{e^{i'}\}_1^3$.

Решение. Запишем формулы, задающие связь между базисными векторами старых и новых базисов:

$$\begin{aligned} e_i &= b_i^{i'} e_{i'}, & e^i &= b_i^i e^i, \\ e_{i'} &= b_i^{i'} e_i, & e^{i'} &= b_i^{i'} e^i. \end{aligned} \quad (1)$$

На самом деле все четыре перехода однозначно задаются с помощью одной матрицы, поскольку матрицы $b_i^{i'}$ и b_i^i взаимнообратные. Сами же матрицы перехода вычисляются по формулам:

$$b_i^{i'} = (e^{i'}, e_i), \quad b_i^i = (e^i, e_{i'}). \quad (2)$$

Тогда формулы (1) можно рассматривать как умножение матриц, выполненное согласно правилу умножения матриц:

$$\begin{aligned} e_i &= e_{i'} b_i^{i'}, & e^i &= b_i^i e^i, \\ e_{i'} &= e_i b_i^{i'}, & e^{i'} &= b_i^{i'} e^i. \end{aligned} \quad (3)$$

Итак, чтобы определить $b_i^{i'}$ или b_i^i из (2), необходимо знать, соответственно, $\{e^{i'}\}_1^3$ или $\{e^i\}_1^3$, однако у нас заданы только $\{e_i\}_1^3$ и $\{e_{i'}\}_1^3$.

Способ 1. Тогда $b_i^{i'}$ можно определить из первого уравнения в (3), которое следует понимать как

$$(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} b_1^{1'} & b_2^{1'} & b_3^{1'} \\ b_1^{2'} & b_2^{2'} & b_3^{2'} \\ b_1^{3'} & b_2^{3'} & b_3^{3'} \end{pmatrix}$$

откуда

$$\begin{cases} e_1 = b_1^{1'} e_{1'} + b_1^{2'} e_{2'} + b_1^{3'} e_{3'}, \\ e_2 = b_2^{1'} e_{1'} + b_2^{2'} e_{2'} + b_2^{3'} e_{3'}, \\ e_3 = b_3^{1'} e_{1'} + b_3^{2'} e_{2'} + b_3^{3'} e_{3'}. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили три неоднородных системы линейных уравнений относительно неизвестных $b_i^{i'}$. Матрицы всех трёх систем совпадают и состоят из координат базисных векторов $\{e_{i'}\}_1^3$, записанных в столбцы, а столбцы правой части задаются координатами соответствующих векторов $\{e_i\}_1^3$. Все три системы уравнений могут быть записаны одним матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{1'} & b_2^{1'} & b_3^{1'} \\ b_1^{2'} & b_2^{2'} & b_3^{2'} \\ b_1^{3'} & b_2^{3'} & b_3^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Решая матричное уравнение (4), находим матрицу $b_i^{i'}$:

$$b_i^{i'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы $b_i^{i'}$ и b_i^i взаимнообратные, то

$$b_i^i = (b_i^{i'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось найти базисы $\{e^i\}_1^3$ и $\{e^{i'}\}_1^3$. Для нахождения базиса $\{e^i\}_1^3$ можно воспользоваться второй формулой из (2). Ее следует понимать как произведение матрицы, в которой строчками записаны координаты векторов $\{e^i\}_1^3$, на матрицу, в которой столбцами записаны координаты векторов $\{e_{i'}\}_1^3$:

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая матричное уравнение, находим:

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (-1, 1, 0)$, $e^3 = (0, -1, 1)$.

И, наконец, с помощью четвёртого уравнения в (3) находим $\{e^{i'}\}_1^3$:

$$\begin{pmatrix} e^{1'} \\ e^{2'} \\ e^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} e^{1'} &= \frac{1}{2}e^1 + 0e^2 - \frac{1}{2}e^3 = \{1/2, 1/2, -1/2\} \\ e^{2'} &= \frac{1}{2}e^1 + 0e^2 + \frac{1}{2}e^3 = \{1/2, -1/2, 1/2\} \\ e^{3'} &= \frac{1}{2}e^1 + e^2 + \frac{1}{2}e^3 = \{-1/2, 1/2, 1/2\} \end{aligned}$$

.

Способ 2. В задаче 1 мы уже определили базис $\{e^i\}_1^3$, взаимный базису $\{e_i\}_1^3$:

$$e^1 = (1, 0, 0), \quad e^2 = (-1, 1, 0), \quad e^3 = (0, -1, 1).$$

Тогда

$$b_i^j = \begin{pmatrix} (e^1, e_1) & (e^1, e_2) & (e^1, e_3) \\ (e^2, e_1) & (e^2, e_2) & (e^2, e_3) \\ (e^3, e_1) & (e^3, e_2) & (e^3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица $b_i^{i'}$ обратна к матрице b_i^j :
$$b_i^{i'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Осталось только найти базис $\{e^{i'}\}_1^3$, что можно сделать точно так же, как и в способе 1.

Задача 4. Вектор x в некотором базисе имеет координаты $(5, 2, 1)$. Как было показано в задаче 2, ковариантные и контравариантные координаты этого вектора в базисах $\{e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (0, 0, 1)\}$ и $\{e^1 = (1, 0, 0), e^2 = (-1, 1, 0), e^3 = (0, -1, 1)\}$ равны, соответственно, $(8, 3, 1)$ и $(5, -3, -1)$.

Найти координаты вектора x в базисах $\{e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (0, 1, 1)\}$ и $\{e^{1\Box} = (1/2, 1/2, -1/2), e^{2\Box} = (1/2, -1/2, 1/2), e^{3\Box} = (-1/2, 1/2, 1/2)\}$.

Решение. В задаче 3 мы уже вычисляли матрицы прямого и обратного перехода при преобразовании от базисов $\{e_i\}, \{e^i\}$ к базисам $\{e_{i\Box}\}, \{e^{i\Box}\}$. Воспользуемся полученными там результатами:

$$b_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } b_i^{i'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Вспоминаем, что ковариантные координаты вектора преобразуются «согласованно» с базисными векторами, т. е. $x_{i\Box} = b_i^{i'} x_{i'}$, а контравариантные координаты вектора – «несогласованно», то есть $x^{i'} = b_i^{i'} x^i$. Последние два уравнения можно рассматривать как матричные, вспоминая, что в определении матриц $b_i^{i'}$ и b_i^j , верхний индекс задаёт номер строки. Тогда вектор-строку x_i следует умножать на матрицу b_i^j слева, а вектор-столбец $x^{i'}$ – на матрицу $b_i^{i'}$ справа:

$$x_{i\Box} = x_i b_i^{i'} = (8, 3, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (7, 6, 3),$$

$$x^{i'} = b_i^{i'} x^i = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

То есть $x_{i\Box} = (7, 6, 3)$ и $x^{i'} = (3, 2, -1)$.

Задача 5. Даны два ортонормированных базиса:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \\ \text{и} \quad e'_1 &= (1, 0, 0), \quad e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1). \end{aligned}$$

Найти матрицу перехода $\{e_i\} \rightarrow \{e'_i\}$.

Решение. Способ 1. Матрицу перехода из базиса $\{e_i\}$ в базис $\{e'_i\}$ (обозначим $P_{e \rightarrow e'}$) можно посчитать через матрицы перехода из базиса $\{e_i\}$ в стандартный базис (обозначим $P_{e \rightarrow s}$) и из стандартного базиса в базис $\{e'_i\}$ (обозначим $P_{s \rightarrow e'}$):

$$P_{e \rightarrow e'} = P_{e \rightarrow s} P_{s \rightarrow e'} = P_{s \rightarrow e'}^{-1} P_{s \rightarrow e'}.$$

Из условия сразу записываем:

$$P_{s \rightarrow e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad P_{s \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

и находим $P_{s \rightarrow e}^{-1}$:

$$P_{s \rightarrow e}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$P_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Задача 6. Показать, что произведение скаляра на тензор 2-го ранга является тензором 2-го ранга.

Решение. Пусть α – произвольный скаляр (тензор нулевого ранга), а T_{ik} – произвольный тензор второго ранга. Из определения тензора соответствующего ранга величины α и T_{ik} при переходе от базиса $\{e_i\}_1^n$ к базису $\{e'_i\}_1^n$ преобразуются по законам $\alpha' = \alpha$ и $T'_{ij} = P_{ii'} P_{jj'} T_{ij'}$, где $P_{ii'}$ – матрица перехода из базиса $\{e_i\}_1^n$ в базис $\{e'_i\}_1^n$. Посмотрим, как

преобразуется при переходе из базиса $\{e_i\}_1^n$ в базис $\{e'_i\}_1^n$ величина V , которая является произведением величин α и T_{ik} :

$$V' = \alpha_{i'j'} P_{ii'} P_{jj'} T_{ij} = (P_{ii'} P_{jj'} T_{ij}) P_{ii'} P_{jj'} V.$$

Величина V , которая преобразуется по закону $V' = P_{ii'} P_{jj'} V$, по определению является тензором 2-го ранга.

Задача 7. Компоненты тензора 2-го ранга T_{ik} в некотором

ортонормированном базисе образуют матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, и в том же базисе

вектор B_i имеет координаты $(1, 2, 3)$. Разложить тензор T_{ik} в сумму симметричного S_{ik} и антисимметричного A_{ik} тензоров. Найти $T_{ik} B_i$ и $T_{ik} B_i B_k$.

Решение. Компоненты симметричного и антисимметричного тензоров 2-го ранга будут задаваться, соответственно, симметрической и кососимметрической матрицами, полученными в результате разложения матрицы T_{ik} :

$$S_{ik} = \frac{T_{ik} + T_{ki}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 13/2 \\ 6 & 2 & 7 \\ 3/2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{ik} = \frac{T_{ik} - T_{ki}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1/2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1/2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь определим величины $T_{ik} B_i$ и $T_{ik} B_i B_k$.

Способ 1. Результатом произведения $T_{ik} B_i$ будет тензор первого ранга C_k , который в трёхмерном пространстве будет задаваться тремя числами:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{i=1}^3 T_{i1} B_i = T_{11} B_1 + T_{21} B_2 + T_{31} B_3 = 1 + 16 + 18 = 35, \\ C_2 &= \sum_{i=1}^3 T_{i2} B_i = T_{12} B_1 + T_{22} B_2 + T_{32} B_3 = 4 + 4 + 27 = 35, \\ C_3 &= \sum_{i=1}^3 T_{i3} B_i = T_{13} B_1 + T_{23} B_2 + T_{33} B_3 = 7 + 10 + 9 = 26. \end{aligned}$$

Тогда величина $T_{ik} B_i B_k$ равняется $C_k B_k$:

$$T_{ik} B_i B_k = C_k B_k = \sum_{k=1}^3 C_k B_k = C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3 = 35 + 70 + 78 = 183.$$

Способ 2. Поскольку всякий тензор 2-го ранга можно рассматривать как матрицу некоторого линейного оператора, а всякий тензор 1-го ранга как координаты некоторого вектора, будем рассматривать произведение $T_{ik} B_i$ как произведение матриц, которое должно выполняться по правилу умножения матриц «строка на столбец». То есть:

$$T_{ik} B_i = B_i T_{ik} = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = (35, 35, 26)$$

и

$$T_{ik} B_l B_k = B_l T_{ik} B_k = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 & 35 & 26 \end{pmatrix} = 183.$$

Задача 8. Пользуясь аппаратом тензорной алгебры, проверить тождество:

$$\left(\overset{1}{A} \otimes \overset{1}{B} - \left(\overset{1}{A} \otimes \overset{1}{B} \right)^{\sim} \right) \left(\overset{1}{A} \otimes \overset{1}{C} \right) \left(\overset{1}{B} \otimes \overset{1}{D} \right) \left(\overset{1}{D} \otimes \overset{1}{A} \right) \left(\overset{1}{B} \otimes \overset{1}{C} \right).$$

Решение. Переходим к тензорной записи выражения (скобками для удобства выделены компоненты векторного произведения и скалярное произведение векторов):

$$\begin{aligned} & \left(\overset{1}{A} \otimes \overset{1}{B} - \left(\overset{1}{A} \otimes \overset{1}{B} \right)^{\sim} \right) \left(\overset{1}{A} \otimes \overset{1}{C} \right) \left(\overset{1}{B} \otimes \overset{1}{D} \right) \left(\overset{1}{D} \otimes \overset{1}{A} \right) \left(\overset{1}{B} \otimes \overset{1}{C} \right) \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} A_j B_k C_m D_n = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) A_j B_k C_m D_n = (\delta_{jm} A_j C_m) (\delta_{kn} B_k D_n) - \\ & - (\delta_{jn} A_j D_n) (\delta_{km} B_k C_m) = \left(\overset{1}{A} \otimes \overset{1}{C} \right) \left(\overset{1}{B} \otimes \overset{1}{D} \right) - \left(\overset{1}{D} \otimes \overset{1}{A} \right) \left(\overset{1}{B} \otimes \overset{1}{C} \right) \end{aligned}$$

Задача 9. Пользуясь аппаратом тензорного анализа, вычислить $\text{div } \overset{1}{r}$, где $\overset{1}{r}$ — радиус-вектор.

Решение. Тензорное поле задается в трехмерном пространстве, поэтому:

$$\text{div } \overset{1}{r} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3.$$

Задача 10. Пользуясь аппаратом тензорного анализа, проверить тождество:

$$\text{div}(\varphi \overset{1}{a}) = \varphi \text{div } \overset{1}{a} + \overset{1}{a} \otimes \text{grad } \varphi.$$

Решение. Используя тензорную форму записи дифференциальных операций первого порядка над тензорными полями, получаем:

$$\begin{aligned} \text{div}(\varphi \overset{1}{a}) &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi \overset{1}{a})_j = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi a_j = \delta_{ij} a_j \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi + \delta_{ij} \varphi \frac{\partial}{\partial x_i} a_j = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi + \varphi \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j = \\ &= \overset{1}{a} \otimes \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \overset{1}{a}. \end{aligned}$$

Задача 11. Найти дивергенцию и ротор вектора $(\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r}) \overset{1}{b}$, где $\overset{1}{r}$ — радиус-вектор, $\overset{1}{a}$ и $\overset{1}{b}$ — постоянные векторы.

Решение. Используя тензорную форму записи операций дивергенции и ротора, получаем:

$$\begin{aligned} \text{div}(\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r}) \overset{1}{b} &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} ((\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r}) \overset{1}{b})_j = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r})_j b_j = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_{kl} a_k x_l b_j = \delta_{ij} \delta_{kl} a_k b_j \frac{\partial}{\partial x_i} x_l = \\ &= \delta_{ij} \delta_{kl} a_k b_j \delta_{il} = \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{il} a_k b_j = \delta_{kj} a_k b_j = a_k b_k = (\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{b}) \\ (\text{rot}(\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r}) \overset{1}{b})_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} ((\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r}) \overset{1}{b})_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r})_k b_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{lm} a_l x_m b_k = \\ &= \varepsilon_{ijk} \delta_{lm} a_l b_k \frac{\partial}{\partial x_j} x_m = \varepsilon_{ijk} \delta_{lm} a_l b_k \delta_{jm} = \varepsilon_{ijk} \delta_{lm} \delta_{jm} a_l b_k = \varepsilon_{ilk} a_l b_k = \left(\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{b} \right)_i \end{aligned}$$

То есть $\text{div}(\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r}) \overset{1}{b} = (\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{b})$ и $\text{rot}(\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{r}) \overset{1}{b} = \left(\overset{1}{a} \otimes \overset{1}{b} \right)$.

Задача 12. Вычислить интеграл $\oint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор,

$\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S , которая ограничивает объем V .

Решение. Интеграл по замкнутой поверхности связан с интегралом по объему, ею ограниченному, с помощью формулы Гаусса – Остроградского:

$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \text{div} \vec{F} dV.$$

В приведенной формуле в левой части стоит поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности, посредине – равный ему поверхностный интеграл первого рода по той же поверхности и, наконец, в правой части – интеграл по объему, ограниченному данной поверхностью.

Однако применить эту формулу непосредственно не удастся, ибо интеграл

$\oint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$ не является ни поверхностным интегралом первого рода (под знаком интеграла должна стоять скалярная функция и скалярный dS), ни поверхностным интегралом второго рода (под знаком интеграла должна стоять векторная функция и векторный $d\vec{S}$). У нас же, под знаком интеграла стоит векторная функция и скалярный dS .

Чтобы устранить эту неприятность, найдем $\oint_S (\vec{c} \cdot \vec{n}) dS$, где $\vec{c}$ – произвольный постоянный вектор. Тогда:

$$\oint_S (\vec{c} \cdot \vec{n}) dS = \oint_S (\vec{c} \cdot \vec{n}) dS = \oint_S (\vec{c} \cdot \vec{n}) dS = \oint_S (\vec{c} \cdot \vec{n}) dS.$$

Полученный интеграл – поверхностный интеграл второго рода и к нему может быть применена формула Гаусса – Остроградского:

$$\oint_S (\vec{c} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \text{div} (\vec{c} \cdot \vec{n}) dV.$$

Для нахождения $\text{div} (\vec{c} \cdot \vec{n})$ воспользуемся тензорной формой записи:

$$\begin{aligned} \text{div} (\vec{c} \cdot \vec{n}) &= \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} a_k (\delta_{mn} c_m x_n) = \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} a_k (c_n x_n) = \\ &= \delta_{ik} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} a_k c_n = \delta_{ik} \delta_{in} a_k c_n = \delta_{kn} a_k c_n = a_k c_k = (\vec{c} \cdot \vec{a}). \end{aligned}$$

Используя полученный результат, имеем:

$$\int_V (\vec{c} \cdot \vec{n}) dV = \int_V (\vec{c} \cdot \vec{a}) dV = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \int_V dV = (\vec{c} \cdot \vec{a}) V = (\vec{c} \cdot \vec{a}) V.$$

Следовательно: $\oint_S (\vec{c} \cdot \vec{n}) dS = (\vec{c} \cdot \vec{a}) V$. Учитывая что $\vec{c}$ –

произвольный постоянный вектор, делаем вывод: $\oint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \vec{a} \cdot \vec{a} V$.

§ 4. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

16) Для данного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением найти взаимный базис $e^1, e^2, \dots, e^n$.

- а) $(1, 0), (100, 1)$; б) $(1, 0), (0, 3)$; в) $(1, 3), (1, 5)$;
 г) $(1, 0, 0), (3, 1, 0), (-2, -5, 1)$; д) $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 4, 9)$;
 е) $(1, 0, \frac{1}{10}), (\frac{1}{10}, 1, 0), (0, \frac{1}{10}, 1)$; ж) $(1, 0, i), (1, i, 0), (0, 1, 1+i)$;
 з) $(1, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 0), (-1, 1, -1, 1)$;
 и) $(-2, 1, 1, 1), (1, -2, 1, 1), (1, 1, -2, 1), (1, 1, 1, -2)$.

Δ а) $(1, -100), (0, 1)$; б) $(0, \frac{1}{3}), (0, 3)$; в) $\frac{1}{2}(5, 1), \frac{1}{2}(3, 1)$; г) $(1, -3, -13), (0, 1, 5), (0, 0, 1)$;

д) $(3, -3, 1), \frac{1}{2}(-5, 8, -3), \frac{1}{2}(1, -2, 1)$; е) $a(1, -10^{-1}, 10^{-2}), a(10^{-2}, 1, 10^{-1}), a(-10^{-1}, 10^{-2}, 1)$, где

$a = (1 + 10^{-3})^{-1}$; ж) $\frac{1}{5}(3 - i, -1 - 3i, -1 + 2i), \frac{1}{5}(2 + i, 1 + 3i, 1 - 2i), \frac{1}{5}(1 - 2i, 2 + i, 2 + i)$; з) $(1, 1, 0, 0),$

$(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)$; и) $\frac{1}{3}(0, 1, 1, 1), \frac{1}{3}(1, 0, 1, 1), \frac{1}{3}(1, 1, 0, 1), \frac{1}{3}(1, 1, 1, 0)$ ▲

17) В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением построить взаимную систему векторов и принадлежащую их линейной оболочке:

- а) $(1, -3, 2), (1, -1, 0)$; б) $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)$;
 в) $(1, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0), (0, 0, -1, 1)$.

Δ а) $\frac{1}{6}(-1, -1, 2), \frac{1}{6}(5, -1, -4)$; б) $(0, 0, 0, 1), \frac{1}{3}(1, 1, 1, -3)$;

в) $\frac{1}{7}(2, 3, 2, 2), \frac{1}{7}(4, -1, -3, -3), \frac{1}{7}(-3, -1, -3, 4)$ ▲

18) В евклидовом пространстве полиномов степени не выше трех со скалярным

произведением $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$:

а) построить систему векторов, взаимную системе $1, t, t^2$ и принадлежащую

линейной оболочке этих векторов;

б) построить базис пространства, взаимный базису $1, t, t^2, t^3$.

Δ а) $\frac{3}{8}(3 - 5t^2), \frac{3}{2}t, -\frac{15}{8}(1 - 3t^2)$; б) $\frac{3}{8}(3 - 5t^2), \frac{3}{2}t, \frac{15}{8}(5t - 7t^2), -\frac{15}{8}(1 - 3t^2), -\frac{85}{8}(3t - 5t^3)$

▲

19) В некотором ортонормированном базисе заданы координаты двух взаимных базисов: $e_1(1, 0, 0, 0), e_2(-1, 1, 0, 0), e_3(1, -1, 1, 0), e_4(-1, 1, -1, 1)$ и $e^1(1, 1, 0, 0), e^2(0, 1, 1, 0), e^3(0, 0, 1, 1), e^4(0, 0, 0, 1)$. Найти

ковариантные и контравариантные координаты вектора x в базисе $\{e_i, e^i\}$, если вектор x задан своими координатами в том же базисе, в котором заданы координаты векторов e_i и e^i

а) $x = (2, 3, 5, 1)$; б) $x = (1, 2, 0, -1)$; в) $x = (3, 2, 7, 0)$; г) $x = (1, 0, 1, 0)$.

Δ а) $(2, 1, 4, -3), (5, 8, 6, 1)$; б) $(1, 3, -1, 0), (3, 2, -1, -1)$; в) $(3, -1, 8, -8), (5, 9, 7, 0)$;

г) $(1, -1, 2, -2), (1, 1, 1, 0)$ ▲

20) В некотором ортонормированном базисе заданы координаты векторов

базиса $\{e_i\}$: $e_1(1, 1, 1), e_2(1, 2, 3), e_3(1, 4, 9)$. Вектор x задан своими координатами в том же базисе, в котором заданы векторы e_i . Найти ковариантные и контравариантные координаты вектора x в базисе $\{e_i, e^i\}$.

а) $(1, 0, 0)$; б) $(1, -1, 0)$; в) $(1, 0, 1)$; г) $(1, 1, 1)$.

Δ а) $(1, 1, 1), (3, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$; б) $(0, -1, -3), (6, \frac{13}{2}, \frac{3}{2})$; в) $(2, 4, 10), (4, -4, 1)$; г) $(3, 6, 14), (1, 0,$

0) ▲

21) В некотором ортонормированном базисе заданы координаты векторов базиса $\{e^i\}$: $e^1(1, -3, -13), e^2(0, 1, 5), e^3(0, 0, 1)$. Вектор x задан своими координатами в том же базисе, в котором заданы векторы e^i . Найти ковариантные и контравариантные координаты вектора x в базисе $\{e_i, e^i\}$:

а) $(1, 0, 0)$; б) $(1, -1, 0)$; в) $(1, 0, 1)$; г) $(1, 1, 1)$.

Δ а) $(1, 3, -2), (1, 0, 0)$; б) $(1, 2, 3), (4, -1, 3)$; в) $(1, 3, -1), (-12, 5, 1)$; г) $(1, 4, -6), (-15, 6, 1)$

▲

22) Показать, что произведение скаляра на тензор 2-го ранга является тензором 2-го ранга.

23) Показать, что произведение тензоров 2-го и 3-го рангов является тензором

5-го ранга.

24) Показать, что величина $A_{ikl}B_{ik}$, где A_{ikl} – тензор 3-го ранга, B_{ik} – тензор 2-го ранга является вектором.

25) Доказать инвариантность свойства антисимметрии антисимметричного тензора 2-го ранга A_{ik} .

26) Показать, что если $A_i B_k C_l T_{ikl}$ – скаляр при произвольных векторах A_i, B_k, C_l , то T_{ikl} – тензор 3-го ранга (признак тензорности величины для тензора 3-го ранга).

27) Компоненты тензора 2-го ранга T_{ik} в некотором базисе трехмерного пространства представляют собой следующую таблицу:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ а вектор } \bar{B} \text{ в том же базисе имеет координаты } (1, 2, 3)$$

г). Разложить тензор T_{ik} в сумму симметричного S_{ik} и антисимметричного A_{ik} тензоров. Найти: а) $T_{ik}B_k$; $T_{ik}B_i$; $T_{ik}B_iB_k$; б) $A_{ik}T_{ik}$; $S_{ik}A_{ik}$; $A_{ik}B_i$; $A_{ik}B_iB_k$; в) $T_{ik}\delta_{ik}$; $A_{ik}\delta_{ik}$; $S_{ik}\delta_{ik}$.

$$\Delta \quad S_{ik} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad A_{ik} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{a) } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; (30, 36, 42); 228; \text{ б) } 12; 0; (8, 2, -4), \text{ в) } 15; 0;$$

15 ▲

13. Используя тензорную форму записи, доказать тождества:

$$\text{a) } \bar{A}(\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{C}(\bar{A} \times \bar{B}); \quad \text{б)}$$

$$(\overline{A} \times \overline{B})(\overline{C} \times \overline{D}) = (\overline{A} \cdot \overline{C})(\overline{B} \cdot \overline{D}) - (\overline{D} \cdot \overline{A})(\overline{B} \cdot \overline{C});$$

$$\text{B) } (\bar{A} \times \bar{B}) \times (\bar{C} \times \bar{D}) = (\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{D})) \bar{C} - (\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})) \bar{D};$$

$$\Gamma) \quad (\overline{A} \times \overline{B}) \times (\overline{C} \times \overline{D}) = (\overline{A} \cdot (\overline{B} \times \overline{D})) \overline{C} - \overline{A} (\overline{B} \cdot (\overline{C} \times \overline{D})).$$

14. Записать в векторной форме выражения:

$$\text{a) } \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{nps} \varepsilon_{imn} a_k a_p b_n c_s; \quad \text{б) } \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{ntz} \varepsilon_{mps} \delta_{ik} a_p a_z b_s c_z.$$

$$\Delta \quad \text{a) } \bar{a} \times (\bar{b} \times (\bar{a} \times c)); \quad \text{б) } \bar{c} \times ((\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{a})) \quad \blacktriangle$$

15. Пользуясь аппаратом тензорного анализа и учитывая, что r – радиус-вектор и a – постоянный вектор, вычислить:

а) $\operatorname{div} r$; б) $\operatorname{rot} r$; в) $\operatorname{grad}(ar)$; г) $(a\nabla)r$.

Δ а) 3; б) 0; в) a ; г) a

16. Используя тензорную форму записи, доказать тождества:

$$\text{a) } \operatorname{div}(\phi a) = \phi \operatorname{div} a + a \cdot \operatorname{grad} \phi; \quad \text{б) } \operatorname{rot}(\phi a) = \phi \operatorname{rot} a - (a \times \operatorname{grad} \phi);$$

$$\text{B) } \begin{aligned} \operatorname{div}(a \times b) &= b \cdot \operatorname{rota} - a \cdot \operatorname{rot} b ; & \text{r) } & \operatorname{rot} \\ (a \times b) &= a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a + (b \cdot \nabla) a - (a \cdot \nabla) b . \end{aligned}$$

(Здесь φ – скалярное поле, a, b – векторные поля).

17. В предположении, что r – радиус-вектор, а a и b – постоянные векторы, найти дивергенцию и ротор следующих векторов:

а) $(a \cdot r)b$; б) $(a \cdot r)r$; в) $(a \times r)$; г) $r \times (a \times b)$.

$$\Delta \quad \text{a) } (a \cdot b), (a \times b); \quad \text{б) } 4(a \cdot r), (a \times r); \quad \text{в) } 0, 2a; \quad \text{г) } 0, -2(a \times b) \quad \blacktriangle$$

18. Вычислить интеграл $\oint_S (c \cdot r)(a \cdot n) dS$, где a и $\dot{c}$ – постоянные векторы, $\dot{n}$ – орт нормали к поверхности S , которая ограничивает объем V .

$$\Delta \left(\frac{\mathbf{r}}{c} \boxplus \frac{\mathbf{r}}{a} \right) V \quad \blacktriangle$$

19. Следующие интегралы по замкнутой поверхности S преобразовать в интегралы по объему V , заключенному внутри поверхности S :

$$a) \int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \phi(r) dS; \quad b) \int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \frac{r}{a} dS; \quad B) \int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \frac{r}{a} b dS.$$

$$\Delta \quad \text{a)} \quad \text{b)} \quad \text{c)} \quad \text{d)} \quad \text{e)} \quad \text{f)} \quad \text{g)} \quad \text{h)} \quad \text{i)} \quad \text{j)} \quad \text{k)} \quad \text{l)} \quad \text{m)} \quad \text{n)} \quad \text{o)} \quad \text{p)} \quad \text{q)} \quad \text{r)} \quad \text{s)} \quad \text{t)} \quad \text{u)} \quad \text{v)} \quad \text{w)} \quad \text{x)} \quad \text{y)} \quad \text{z)}$$

20. Пользуясь аппаратом тензорной алгебры, проверить тождества:

а) $A \times (B \times C) = B \cdot (A \cdot C) - C \cdot (A \cdot B)$; б) $(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) = (A \cdot B \times C)^2$.

44) Пользуясь аппаратом тензорного анализа, проверить тождества:

а) $(\vec{A} \otimes \vec{A}) = \text{grad} |\vec{A}|^2 - \vec{A} \otimes \text{rot} \vec{A}$;

б) $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \otimes \vec{A}) + (\vec{A} \otimes \vec{B}) + \vec{B} \otimes \text{rot} \vec{A} + \vec{A} \otimes \text{rot} \vec{B}$;

в) $\text{rot}(\text{grad} \varphi) = 0$; г) $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$; д) $\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$.

Δ Вычислить дивергенцию и ротор поля ($\vec{r}$ — радиус-вектор, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы):

а) $r^n \vec{a}$; б) $\vec{a} \otimes (\vec{b} \otimes \vec{r})$; в) $\vec{r} \otimes (\vec{r} \otimes \vec{a})$.

Δ а) $nr^{n-2}(\vec{r} \cdot \vec{a})$ и $nr^{n-2}(\vec{r} \times \vec{a})$; б) $-2(a \cdot b)$ и $(a \times b)$, в) $2(a \cdot r)$ и $3(a \times r)$ ▲

Δ Вычислить градиент поля $\vec{a} \otimes (\vec{b} \otimes \vec{r})$ ($\vec{r}$ — радиус-вектор, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы). Δ $(\vec{a} \otimes \vec{b})$ ▲

Δ Вычислить дивергенцию следующих векторных полей ($\vec{r}$ — радиус-вектор, $\vec{c}$ — постоянный вектор, $\varphi(\vec{r})$ — скалярное поле):

а) $r^n \vec{r}$; б) $(\vec{c} \cdot \vec{r})^n \vec{r}$; в) $\varphi(\vec{r}) \vec{r}$.

Δ а) $(3+n)r^n$, б) $(3+n)(\vec{c} \cdot \vec{r})^n$, в) $3\varphi + r \cdot \text{grad} \varphi$. ▲

Δ Вычислить роторы следующих полей ($\varphi(\vec{r})$ — скалярное поле, $\vec{G}(\vec{r})$ и $\vec{H}(\vec{r})$ — векторные поля):

а) $\varphi(\vec{r}) \vec{G}(\vec{r})$; б) $\vec{G}(\vec{r}) \otimes \vec{H}(\vec{r})$.

Δ а) $\varphi \cdot \text{rot} \vec{G} - \vec{G} \times \text{grad} \varphi$, б) $\vec{G} \text{div} \vec{H} - \vec{H} \text{div} \vec{G}$ ▲

Δ Вычислить ($\vec{r}$ — радиус-вектор, $\vec{a}$ — постоянный вектор):

а) $(\vec{a} \otimes \vec{r}) r^3 \vec{r}$; б) $(\vec{a} \otimes \vec{r}) r^2 \vec{a}$; в) $(\vec{a} \otimes \vec{a})(\vec{a} \otimes \vec{r}) \vec{r}$; г) $(\vec{a} \otimes \vec{a}) \frac{\vec{a}}{r^3}$.

Δ а) $r^3 \vec{a} + 3r(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$, б) $2(a \cdot r) \vec{a}$, в) $a^2 \vec{r} + (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{a}$, г) $-3 \frac{(a \cdot r)}{r^5} \vec{a}$ ▲

Δ Упростить выражения и выполнить суммирование в E_n :

а) $\varepsilon_{ijk} \delta_{kn}$; б) $\varepsilon_{ijk} \delta_{is} \delta_{jm}$; в) $\varepsilon_{ijk} \delta_{is} \delta_{jm} \delta_{kn}$;

г) $a_{ij} \delta_{in}$; д) $\delta_{ij} \delta_{jn}$; е) $\delta_{ij} \delta_{jn} \delta_{ni}$.

Δ а) ε_{ijn} ; б) ε_{smk} ; в) ε_{smn} ; г) a_{nj} ; д) δ_{in} ; е) 3 ▲

Δ Упростить выражения и выполнить суммирование в E_n :

а) δ_{ii} ; б) $\delta_{ij} \delta_{ij}$; в) $\varepsilon_{ijk} A_i A_j A_k$; г) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk}$;

Δ а) 3; б) 3; в) 0; г) 6 ▲

Δ Упростить выражения:

а) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jik}$; б) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jki}$; в) $\varepsilon_{ijk} \delta_{jk}$; г) $A_i B_j \delta_{ji} - B_m A_n \delta_{mn}$.

Δ а) -6; б) 6; в) 0; г) 0 ▲

Δ Для векторов $\vec{A} = (1, -1, 0)$ и $\vec{B} = (4, -3, 2)$ вычислить следующие выражения и определить, что они собой представляют:

а) $C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$; б) $A_i B_i$. Δ а) $\vec{C} = (-2, -2, 1)$, б) 7 ▲

Δ Пусть $a_{11} = 3$, $a_{12} = 4$, $a_{21} = 5$ и $a_{22} = 6$. Вычислить величину $C = a_{ij} a_{ij}$, если $i, j = 1, 2$. Δ 86 ▲

Δ Без подстановки величин для $i, l = 1, 2, 3$ вычислить все девять значений следующих величин: а) $B^{il} = (\delta_j^i A_k + \delta_k^i A_j) \varepsilon^{jkl}$; б)

$$A_{il} = (\delta_i^m B^k + \delta_i^k B^m) \varepsilon_{mlk}.$$

Δ а) 0; б) 0 ▲

Δ Пусть $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить $C = a_{ij} a_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Δ 33 ▲

Δ Пусть $a_{111} = -1$; $a_{112} = 3$; $a_{121} = 4$; $a_{122} = 2$; $a_{211} = 1$; $a_{212} = 5$; $a_{221} = 2$; $a_{222} = -2$. Вычислить величину $C = a_{ijk} a_{ijk}$, $i, j, k = 1, 2$. Δ 64 ▲

Δ Пусть $a_{1111} = 2$, $a_{1112} = 1$, $a_{1121} = 3$, $a_{1122} = 1$, $a_{1211} = 5$, $a_{1212} = -2$, $a_{1221} = 4$, $a_{1222} = -2$, $a_{2111} = 1$, $a_{2112} = 0$, $a_{2121} = -2$, $a_{2122} = -1$, $a_{2211} = -2$, $a_{2212} = 1$, $a_{2221} = 2$, $a_{2222} = 2$. Вычислить величину $C = a_{ijkl} a_{ijkl}$, $i, j, k, l = 1, 2$. Δ 83 ▲

Δ Упростить выражения:

а) $(A_{ijkl} + A_{jkli} + A_{klij} + A_{lijk}) x_i x_j x_k x_l$; б) $(P_{ijk} + P_{jki} + P_{kij}) x^i x^j x^k$;

в) $\frac{x^i}{x^j}$;

г) $a_{ij} \frac{x^i}{x^t} \frac{x^j}{x^s} \frac{x^k}{x^r} - a_{mi} \frac{x^m}{x^s} \frac{x^k}{x^t} \frac{x^l}{x^r}$.

Δ а) $4A_{ijkl} x^i x^j x^k x^l$; б) $3A_{ijk} x^i x^j x^k$; в) δ^{ij} ; г) 0 ▲

ЛИТЕРАТУРА

22. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
23. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
24. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.
25. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1973.
26. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.
27. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.
28. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2001.
29. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.

