МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Н.Р. БЕЛЯЕВ

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА
Часть I

Конспект лекций для студентов физико-технического факультета

Харьков-2004

РАЗДЕЛ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. ВВЕДЕНИЕ

Решение многих задач современной математики (и не только) сводится к построению и изучению неких абстрактных структур, являющихся конгломератом неких множеств с заданными на этих множествах операциями. Этот способ заманчив в силу своей общности: множества могут быть разной природы и операции, заданные на этих множествах, могут быть разными, но обладать одинаковыми свойствами. Если получен результат, опираясь на свойства операций, то результат этот имеет место во всех множествах, где операции имеют те же свойства.

§2. ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ

Пусть имеется некоторое множество M. И пусть на множестве M задан внутренний закон композиции, т.е. любой паре элементов из M поставлен в соответствие элемент того же множества M

$$\forall x,y\in M \ \exists \ z\in M \mid x \oplus y = z.$$

В этом случае говорят, что на множестве M корректным образом задана внутренняя операция.

Пусть кроме множества M задано некоторое другое множество P. И пусть на множестве M задан внешний закон композиции, т.е. любому элементу из M в совокупности с произвольным элементом из P поставлен в соответствие элемент из M:

$$\forall x\in M \ \ \alpha\in P \mid \exists \ z\in M \mid \alpha \odot x = z.$$

В этом случае говорят, что на множестве M над множеством P корректным образом задана внешняя операция.

Отметим, что во внутренней операции участвуют два элемента одного и того же множества, а во внешней операции – элементы различных множеств. Корректность операции на M означает, что ее результат принадлежит множеству M, а не корректность - что ее результат не принадлежит множеству M.

§3. ГРУППА

Пусть задано некоторое множество G с элементами, вообще говоря, произвольной природы. Пусть на этом множестве корректным образом задана внутренняя операция, т.е. $\forall x, y\in G \ \exists \ z\in G \mid z \leftrightarrow x \oplus y$ и эта операция удовлетворяет свойствам:

1) $(x \oplus y)\oplus z = x\oplus(y \oplus z)$ – ассоциативность;
2) $\exists\theta\in G \mid x \oplus \theta = x$ – существование нейтрального элемента;
3) $\forall x\in G, \exists y\in G \mid x \oplus y = \theta$ – существование противоположного элемента.

Множество G с так введенной операцией **называется группой** по этой операции.

Если G – группа по сложению, то нейтральный элемент **называется нулевым**, а противоположный – **противоположным**.

Если G – группа по умножению, то нейтральный элемент **называется единичным**, а противоположный – **обратным**.

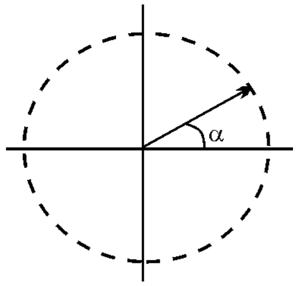
Если, кроме указанных свойств, операция, определенная в G обладает свойством $x \oplus y = y \oplus x$, то группа **называется коммутативной или абелевой группой.**

Примеры

1. Множество вещественных (целых, комплексных, рациональных) чисел является абелевой группой по сложению.

2. Множество вещественных чисел с исключенным нулем является группой по умножению.

3. Рассмотрим множество векторов единичной длины на плоскости, и исходящих из начала координат. Такой вектор характеризуется углом α, который он образует с положительным направлением оси абсцисс.



Пусть имеется Ошибка: источник перёкрестной ссылки не найденпара векторов x и y, характеризующихся углами α_x и α_y. Поставим этой паре в соответствие вектор z, характеризующийся углом $\alpha_x + \alpha_y$. Указанное множество векторов по операции, введенной выше, образует группу. Эта группа называется группой вращения единичного вектора.

§4. ПОЛЕ

Пусть в множестве $\mathbf{K}$ корректным образом определены две внутренние операции, т.е.

1) $\forall a, b \in \mathbf{K} \;\; \exists\; c = a \oplus b \in \mathbf{K}$; 2) $\forall a, b \in \mathbf{K} \;\; \exists\; d = a \otimes b \in \mathbf{K}$;

и эти операции удовлетворяют следующим свойствам:

а^1) $a \oplus b = b \oplus a$ – коммутативность; а^2) $a \otimes b = b \otimes a$;

б^1) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ – ассоциативность; б^2) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;

в^1) $\exists \theta \in \mathbf{K} \;\; a \oplus \theta = a$ – нейтральный; в^2) $\exists e \in \mathbf{K} \;\; a \otimes e = a$;

г^1) $\forall a \in \mathbf{K} \;\; \exists b \in \mathbf{K} \;\; (a \oplus b) = \theta$ – противоположный; г^2) $\forall a \in \mathbf{K} \;\; (a \neq \theta) \;\; \exists b \in \mathbf{K} \;\; a \otimes b = e$,

и, кроме того,

д) $(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c \oplus b \otimes c$ – операция $\otimes$ дистрибутивна по операции $\oplus$.

Множество $\mathbf{K}$, с так введенными операциями, **называется полем**.

Отметим, что поле по операции 1) является абелевой группой (свойства а^1, б^1, в^1, г^1). Кроме того, поле по операции 2) после исключения из множества элемента нейтрального по операции 1), является абелевой группой (свойства а^2,б^2, в^2, г^2) и, кроме того, операции 1) и 2) связаны законом дистрибутивности операции 2) по операции 1). (Так называемый 1-й дистрибутивный закон). Отметим, что операция 1), вообще говоря, не дистрибутивна по операции 2).

Примеры

1. $\mathbf{Q}$ – поле рациональных чисел.
2. $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел.
3. $\mathbf{C}$ – поле комплексных чисел.

§5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Множество V называется линейным (векторным) пространством над числовым полем $\mathbf{K}$, если на множестве V корректным образом заданы две операции: одна - внутренняя, в дальнейшем именуемая сложением и обозначаемая $\oplus$, другая – внешняя над полем $\mathbf{K}$, в дальнейшем именуемая умножением на скаляр и обозначенная $\odot$, удовлетворяющие аксиомам:

I. $\forall x, y \in V \;\; \exists z \in V \mid z = x \oplus y$:

1) $x \oplus y = y \oplus x$; 2) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;

3) $\exists \theta \in V \;\; x \oplus \theta = \theta \oplus x = x$; 4) $\forall x \in V \;\; \exists y \in V \;\; x \oplus y = \theta$.

Эти аксиомы определяют абелеву группу по сложению.

II. $\forall x\in V \ \ \forall\alpha\in \mathbf{K} \ \ \exists z\in V \mid \ z = \alpha \odot x$:

1) $1\in\mathbf{K} \ \ 1 \odot x = x$; 2) $\forall x\in V \ \ \forall\alpha, \beta\in\mathbf{K} \ \ \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \odot \beta) \odot x$.

III. Эти операции связаны соотношениями:

1) $\forall\alpha, \beta\in\mathbf{K} \ \ \forall x\in V \ \ (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$;

2) $\forall\alpha\in\mathbf{K} \ \ \forall x, y\in V \ \ \alpha \odot (x \odot y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

Линейное пространство, заданное над полем вещественных чисел, называется вещественным линейным пространством, а над полем комплексных чисел называется комплексным линейным пространством.

Элементы линейного (векторного) пространства называются **векторами**.

§6. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

1°. Нулевой (нейтральный) элемент пространства единственен.

◀ Пусть имеется два нулевых элемента θ_1 и θ_2. Тогда

1. $x \oplus \theta_1 = x$ (Положим в этом равенстве $x = \theta_2$) . Получим $\theta_2 \oplus \theta_1 = \theta_2$.

2. $x \oplus \theta_2 = x$ (Аналогично положим $x = \theta_1$) . Получим $\theta_1 \oplus \theta_2 = \theta_1$. У равенств полученных в первой и во второй строках левые части равны, следовательно, правые части также равны $\Rightarrow \theta_2 = \theta_1$. ▶

2°. Противоположный вектор к вектору x единственен.

◀ Пусть y и z - элементы противоположные x. Тогда

$y = y \oplus \theta = y \oplus (x \oplus z) = (y \oplus x) \oplus z = \theta \oplus z = z; \ \Rightarrow \ y = z.$ ▶

3°. $0\odot x = \theta$.

◀ $0\odot x \oplus y = 0\odot x \oplus y \oplus \theta = 0\odot x \oplus y \oplus x \oplus(-x) = (0 + 1)\odot x \oplus(-x) \oplus y =$

$= x \oplus (-x) \oplus y = \theta \oplus y = y$, т.е. $0\odot x \oplus y = y \Rightarrow 0\odot x = \theta$. ▶

4°. $\forall x \ \ (-1)\odot x$ – его противоположный элемент.

◀ $x \oplus (-1)\odot x = 1\odot x \oplus (-1)\odot x = (1 - 1)\odot x = 0\odot x = \theta$. ▶

5°. $\alpha\odot\theta = \theta$.

◀ $\alpha\odot\theta = \alpha\odot(\theta \oplus \theta) = \alpha\odot\theta \oplus \alpha\odot\theta$. Прибавим к левой и правой части элемент противоположный $\alpha\odot\theta$, т.е. $(-\alpha\odot\theta)$. Получим в левой части $\alpha\odot\theta \oplus(-\alpha\odot\theta) = \theta$, а в правой части $\alpha\odot\theta \oplus \alpha\odot\theta \oplus(-\alpha\odot\theta) = \alpha\odot\theta \oplus \theta = \alpha\odot\theta$. Следовательно $\alpha\odot\theta = \theta$. ▶

6°. Если $\alpha \odot x = \theta$, то $\alpha = 0$ или $x = \theta$.

◀ Если $\alpha = 0$, то равенство выполнено (см. **3°**).

Если $\alpha \neq 0$, то $x = 1\odot x = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\odot x = \frac{1}{\alpha}\odot(\alpha\odot x) = \frac{1}{\alpha}\odot\theta = \theta$, т.е. $x = \theta$. ▶

Замечание: В дальнейшем, если это не будет приводить к недоразумениям, будем пользоваться знаком + вместо $\oplus$, а знак $\odot$ будем опускать.

§7. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Множество многочленов $P_n(x)$ степени не выше n.

2. Множество n-членных последовательностей (с почленным сложением и умножением на скаляр).

3. Множество функций $C_{[a,\ b]}$ непрерывных на $[a, b]$ и с поточечным сложением и умножением на скаляр.

4. Множество функций, заданных на $[a, b]$ и обращающихся в 0 в некоторой фиксированной внутренней точке c: $f(c) = 0$ и с поточечными операциями сложения и умножения на скаляр.
5. Множество $\mathbf{R}^+$, если $x \oplus y \equiv x \times y$, $\alpha \odot x \equiv x^{\alpha}$.

§8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Пусть множество W является подмножеством линейного пространства V ($W \subset V$) и такое, что

а) $\forall x, y \in W \Rightarrow x \oplus y \in W$;

б) $\forall x \in W$, $\forall \alpha \in \mathbf{K} \Rightarrow \alpha \odot x \in W$.

Операции сложения и умножения здесь те же, что и в пространстве V (они **называются индуцированными пространством** V).

Такое множество W называется подпространством пространства V.

<u>**7°**</u>. Подпространство W само является пространством.

◀ Для доказательства достаточно доказать существование нейтрального элемента и противоположного. Равенства $0 \odot x = \theta$ и $(-1) \odot x = -x$ доказывают необходимое. ▶

Подпространство, состоящее только из нейтрального элемента $\{\theta\}$и подпространство, совпадающее с самим пространством V, **называются тривиальными подпространствами** пространства V.

§9. ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Пусть векторы $e_1, e_2, \dots e_n \in V$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbf{K}$.

Вектор $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ **называется линейной комбинацией векторов** $e_1, e_2, \dots, e_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$.

Если все коэффициенты в линейной комбинации равны нулю, то линейная комбинация **называется тривиальной**.

Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\{e_i\}_1^n$ **называется линейной оболочкой** этой системы векторов и обозначается:

$$\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathcal{L}\{e_i\}_1^n.$$

<u>**8°**</u>. $\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ является линейным пространством.

◀ Корректность операций сложения и умножения на скаляр следует из того, что $\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ – это множество **всевозможных** линейных комбинаций. Нейтральный элемент – это тривиальная линейная комбинация. Для элемента $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ противоположным является элемент $-x = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) e_i$. Аксиомы, которым должны удовлетворять операции, также выполнены. Таким образом, $\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ является линейным пространством.

Любое линейное пространство содержит в себе в, общем случае, бесконечное множество других линейных пространств (подпространств) – линейных оболочек ▶

В дальнейшем мы постараемся ответить на следующие вопросы:

1) Когда линейные оболочки разных систем векторов состоят из одних и тех же векторов

(т.е. совпадают)?

2) Какое минимальное число векторов определяет одну и ту же линейную оболочку?

3) Является ли исходное пространство линейной оболочкой некоторой системы векторов?

§10. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Если в пространстве V существует конечный набор векторов $\{e_i\}_1^n$ такой что, $\mathcal{L}\{e_i\}_1^n \equiv V$, то система векторов $\{e_i\}_1^n$ **называется полной системой в** V, а пространство **называется конечномерным**. Таким образом, система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ **называется полной** в V системой, т.е. если

$$\forall x \in V \ \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbf{K} \text{ такие, что } x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Если в пространстве V не существует конечной полной системы (а полная существует всегда – например, множество всех векторов пространства V), то пространство V **называется бесконечномерным**.

9°. Если $\{e_i\}_1^n$ полная в V система векторов и $y \in V$, то $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, y\}$ – также полная система.

◀ Достаточно в линейных комбинациях коэффициент перед y брать равным 0. ▶

10°. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ полный в V набор векторов, т.е. $\mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \equiv V$ и пусть $\exists$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, такое, что $e_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$. Тогда набор $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, тоже полный, т.е. $\mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \equiv \mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}) \equiv V$.

◀ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – полный $\Rightarrow \forall x \in V\ \exists \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_n$, что $x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n =$

$$= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_{n-1} e_{n-1} + \beta_n(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1}) =$$

$= (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) e_1 + (\beta_2 + \beta_n \alpha_2) e_2 + \ldots + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) e_{n-1}$ что и требовалось доказать. ▶

Используя, основанный на теореме **10°**, процесс «прополки» (выбрасывание векторов, являющихся линейными комбинациями других векторов системы) можно построить минимальный полный набор векторов в пространстве V.

§11. ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ **называется линейно независимой**, если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \theta$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Если, при $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \theta$, хотя бы один из коэффициентов не равен нулю, то система векторов **называется линейно зависимой**.

Можно выделить следующие свойства линейно зависимых систем векторов:

11°. Система, состоящая из одного вектора x, линейно зависима тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

◀ а) Система линейно зависима $\Rightarrow \exists \alpha \neq 0 \mid \alpha \odot x = \theta \Rightarrow x = \theta$ (т. **6°**);

б) $x = \theta$. Возьмем $\alpha = 1 \Rightarrow \alpha x = \alpha\theta = \theta$ (т. 5°). ▶

12°. Набор векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \theta\}$ содержащий θ, линейно зависим.

◀ $0 \odot e_1,\ 0 \odot e_2, \ldots,\ 0 \odot e_n + 1 \odot \theta = \theta$. Так как записанная линейная комбинация содержит коэффициент не равный нулю, то система линейно зависима. ▶

13°. Если хотя бы один вектор из системы выражается как линейная комбинация других, то система векторов линейно зависима (и наоборот).

◀ Пусть есть система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n$ и пусть $e_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$. Тогда либо $e_n = \theta$ и система линейно зависима, либо $e_n \neq \theta$ и тогда набор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ нетривиален, т.е. $1\odot e_n - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_{n-1} e_{n-1} = \theta$ при нетривиальном наборе коэффициен-
тов. Следовательно, система линейно зависима. ▶

14°. Если система векторов линейно зависима, то, по крайней мере, один из векторов может быть представлен как линейная комбинация остальных.

◀ Так как система векторов линейно независима, то существует нетривиальный набор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такой, что $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \theta$. Пусть $\alpha_n \neq 0$. Тогда $e_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} e_2 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}} e_{n-1}$. ▶

15°. Любая часть линейно независимого набора векторов линейно независима.

◀ Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ линейно независима. Рассмотрим равенство $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} + e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \theta$. В силу линейной независимости оно выполнено тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Положив $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ равными 0 получим: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k = = \theta \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Т.е. система $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно независима. ▶

Если пространство V не есть $\{\theta\}$, то в нем есть, по меньшей мере, один ненулевой вектор. Т.е. если $V \neq \{\theta\}$, то в нем существует линейно независимая система векторов.

Используя процесс «посадки» (добавления в линейно независимую систему векторов, других векторов пространства, не нарушающих свойство линейной независимости) можно построить в пространстве максимальный линейно независимый в V набор векторов.

§12. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОЛНЫМИ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫМИ НАБОРАМИ ВЕКТОРОВ

16°. Если $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – линейно независимая, а $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – полная системы векторов, то $m \leq n$.

◀ Доказательство теоремы проведем от противного.

Допустим, что $m > n$ (т.е. в полном наборе меньше векторов, чем в линейно независимом).

1) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – полная система. Тогда $e_1, f_1, f_2, \ldots, f_n$ – полная и линейно зависимая, ибо e_1 выражается через остальные $e_1 = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_n f_n$.

При этом, по меньшей мере, одно из $\beta_i \neq 0$, ибо в противном случае $e_1 = \theta$, что противоречит линейной независимости векторов. Не ограничивая общности можно считать, что $\beta_1 \neq 0$, тогда f_1 выражается через остальные векторы и его можно удалить из полной системы, не нарушая ее полноты.

Получена новая полная система векторов $e_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$.

2) $e_1, f_2, \ldots, f_n$ – полная система. Тогда $e_1, e_2, f_2, \ldots, f_n$ – полная и линейно зависимая, ибо e_2 выражается через полную систему $e_2 = \alpha_1 e_1 + \beta_2 f_2 + \beta_2 f_2 + \ldots + + \beta_n f_n$. При этом, по меньшей мере, одно из $\beta_i \neq 0$, ибо в противном случае вектор e_2 выразится через вектор e_1, что противоречит линейной независимости системы $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Пусть $\beta_2 \neq 0$, тогда f_2 может быть выражено через остальные и его можно «прополоть».

Получится новая полная система векторов $e_1, e_2, f_3, f_4, \ldots, f_n$.

3). Аналогично последовательно построим полные системы векторов

$$e_1, e_2, e_3, f_4, f_5, \ldots, f_n$$

$e_1, e_2, e_3, e_4, f_5, \ldots, f_n$

....

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_n$.

4). Полнота системы $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ противоречит линейной независимости более широкой системы $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_m$. Полученное противоречие доказывает теорему. ▶

§13. БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. ЕГО РАЗМЕРНОСТЬ

Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ **называется базисом пространства** V, если эта система векторов линейно независима и полна в V.

<u>**17°**</u>. Минимальный полный в V набор векторов является базисом.

◀ Докажем линейную независимость $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Если они линейно зависимы, то, по крайней мере, один из векторов может быть записан как линейная комбинация остальных: $e_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$, следовательно, $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, полный набор, что противоречит минимальности исходного набора. ▶

<u>**18°**</u>. Максимальный линейно независимый в V набор является базисом.

◀ Докажем полноту набора $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Допустим, набор не полон. Тогда $\exists x \in V$ который не выражается как линейная комбинация $e_1, e_2, \ldots, e_n$, тогда система $x, e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима, что противоречит максимальности исходного набора. ▶

<u>**19°**</u>. Всякое линейное пространство (кроме $V \equiv \{\theta\}$) имеет базис.

◀ Доказательство можно провести построением: а) минимального полного набора или б) максимального линейно независимого набора. ▶

<u>**20°**</u>. Все базисы линейного пространства содержат одно и то же количество векторов.

◀ Пусть в пространстве V имеется два базиса $\{e_i\}_1^n$ и $\{e_i'\}_1^m$:

1) $\{e_i\}_1^n$ – полный, а $\{e_i'\}_1^m$ – линейно независимый, тогда $m \le n$ (т. 16°);

2) $\{e_i\}_1^n$ – линейно независимый, а $\{e_i'\}_1^m$ – полный, тогда $n \le m$ (т. 16°) Получаем $m = n$. ▶

Количество векторов в базисе называется размерностью пространства V и обозначается $\dim V$.

<u>**21°**</u>. Чтобы линейно независимая система векторов была базисом необходимо и достаточно, чтобы количество векторов в этой системе равнялось размерности пространства $n = \dim V$. *Доказать самостоятельно.*

<u>**22°**</u>. Чтобы полная система векторов была базисом, необходимо и достаточно, чтобы количество векторов в этой системе равнялось размерности пространства $n = \dim V$. *Доказать самостоятельно.*

§14. ПРИМЕРЫ

1. Набор мономов $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ образует базис в пространстве P_n полиномов от t степени не выше n. Линейная независимость набора следует из того, что:

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \ldots + \alpha_{n+1} t^n \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0, \quad \dim P_n = n+1.$$

2. Тройки чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ образуют линейное пространство A_3 с базисом $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\dim A_3 = 3$. Это пространство называется арифметическим линейным пространством и обозначается A_n.

§15. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ЗАДАННОМ БАЗИСЕ

23°. Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$ и $\{e_i\}_1^n$ – базис в V. Тогда $\forall x \in V$ существует единственный набор $\{\alpha_i\}_1^n$, $\alpha_i \in \mathbf{K}$ такой, что $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

◀ Представление $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ следует из полноты $\{e_i\}_1^n$.

Единственность. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ и $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e_i$. Тогда $\theta = x - x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha'_i) e_i$ и, следовательно, в силу линейной независимости $\{e_i\}_1^n$, $\forall i \quad \alpha_i - \alpha'_i = 0$ т.е. $\alpha_i = \alpha'_i$. ▶

Теперь ясно, что если в пространстве V задан базис $\{e_i\}_1^n$, то каждому вектору $x \in V$ можно поставить в соответствие (причем единственным образом) набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{K}$. Это записывают так: $x \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ или $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Величины α_i **называются координатами** вектора x в базисе $\{e_i\}_1^n$. При этом, (что очень важно), если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, то $x \oplus y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ и $\gamma \odot x = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n)$, т.е. операции $\oplus$ и $\odot$ заменены покоординатным сложением и умножением на элемент внешнего поля $\mathbf{K}$.

Другими словами, введение понятия базиса векторного пространства V над полем $\mathbf{K}$ и координат векторов в этом базисе абстрактные операции сложения для элементов линейного пространства и умножения их на скаляры из внешнего поля $\mathbf{K}$ позволяет свести к операциям покоординатного сложения и умножения на скаляр, т. е. к умножению и сложению в поле $\mathbf{K}$.

§16. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Видимая необъятность множества всех n-мерных пространств над данным полем, казалось бы, является препятствием для построения и развития сколько-нибудь общей теории таких пространств.

Оказывается, это не так. Мы сейчас покажем, что над данным полем существует в некотором смысле , лишь одно пространство данной размерности.

***Def*:** Два пространства V и V' называются изоморфными, если между их элементами установлено взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow x'$. Причем такое, что, если $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, то $x + y \leftrightarrow x' + y'$ и $\alpha x \leftrightarrow \alpha x'$.

24°. Два конечномерных линейных пространства над одним и тем же полем $\mathbf{K}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$.

◀ Необходимость.

а) при изоморфизме $\theta \leftrightarrow \theta'$. Пусть $\theta \in V$ нейтральный элемент в V и $x \leftrightarrow x'$, $\theta \leftrightarrow \theta'$. $x = \theta + x \leftrightarrow \theta' + x'$. Учитывая, что $x \leftrightarrow x' \Rightarrow \theta' + x' = x'$, т.е. θ' нейтрален в V'.

б) Если V и V' изоморфны и $\{a_1, \ldots, a_n\} \leftrightarrow \{a'_1, \ldots, a'_n\}$, то из линейной независимости $\{a_i\}$ следует линейная независимость $\{a'_i\}$.

Действительно, пусть $\alpha_1 a'_1 + \ldots + \alpha_n a'_n = \theta' \leftrightarrow \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = \theta \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Итак, максимальное число линейно независимых векторов в изоморфных пространствах совпадает, т.е. $\dim V = \dim V'$.

Достаточность. Пусть $\dim V = \dim V' = n$, $\{e_i\}_1^n$ – базис в V; $\{e'_i\}_1^n$, базис в V', установим соответствие $e_1 \leftrightarrow e'_1$, $e_1 \leftrightarrow e'_2$, …, $e_n \leftrightarrow e'_n$. Тогда $x = \Sigma\, \alpha_i e_i \leftrightarrow x' = \Sigma\, \alpha_i e'_i$; $\alpha x = \Sigma \alpha\alpha_i e_i \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \Sigma\, \alpha\alpha_i\, e'_i = \alpha x'$; $\quad x + y = \Sigma\, (\alpha_i + \beta_i)e_i \leftrightarrow \Sigma\, (\alpha_i + \beta_i)e'_i$. Таким образом, построенное соответствие есть изоморфизм пространств V и V'. ▶

Итак, изучение всех линейных пространств $\dim V = n$ можно свести к изучению A_n – арифметического пространства той же размерности: $x \in A_n \to x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

§17. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА

В **§8** было определено понятие подпространства и установлено, что подпространство в свою очередь является пространством.

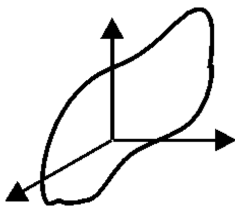
Для подпространства сохраняют смысл понятия полноты, линейной независимости, базиса и размерности.

25°. Если $E \subset V$ (подпространство), то $\dim E \le \dim V$.

◀ Линейно зависимый набор в E будет таковым и в V, поэтому максимальное количество линейно независимых векторов в E не превышает максимального количества линейно независимых векторов в V. ▶

26°. Если $E \subset V$ и $\dim E = \dim V$, то $E \equiv V$. *Доказать самостоятельно.*

Базис подпространства всегда можно дополнить до базиса пространства, но (как иллюстрирует картинка) из данного базиса пространства не всегда можно выделить базис подпространства. Ошибка: источник перёкрестной ссылки не найден



27°. Линейная оболочка $\mathcal{L}\{e_i\}_1^k$ является подпространством и $\dim \mathcal{L} \le k$. *Доказать самостоятельно.*

28°. Линейная оболочка $\mathcal{L}\{e_i\}_1^k$ – подпространство, натянутое на $\{e_i\}_1^k$ – это наименьшее подпространство, содержащее эти векторы. *Доказать самостоятельно.*

§18. ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

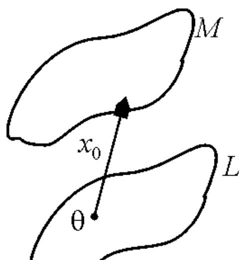
Пусть L – подпространство V, $x_0 \in V$.

Множество $M = \{x \mid x = x_0 + y,\ y \in L\}$ **называется линейным многообразием** в V.

О линейном многообразии M говорят, что оно параллельно подпространству L и обозначают $M = x_0 + L$.

Если $x_0 \in L$, то $M \equiv L$ и M является подпространством. Если $x_0 \in V$, но $x_0 \notin L$ то линейное многообразие подпространством не является.

29°. Линейное многообразие порождается сдвигом единственного L.

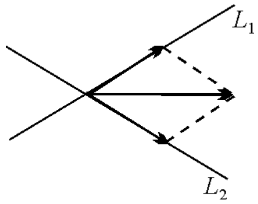


◀ Пусть $M = x_0 + L$ и $M = x'_0 + L'$. Тогда $\forall x \in M$ $x = x_0 + y = x'_0 + y' \Rightarrow y = x'_0 + y'$, где $y \in L$, $y' \in L'$. Так как это верно для $\forall y \in L$, положим $y = \theta$. Получим $y' = x_0 - x'_0$ и т.к. $y' \in L' \Rightarrow x_0 - x'_0 \in L'$. Тогда $y = \underbrace{x'_0 - x_0}_{\in L'} + \underbrace{y'}_{\in L'} \Rightarrow y \in L'$. Итак, если $y \in L \Rightarrow y \in L' \Rightarrow L \subset L'$, аналогично $L \subset L'$, тогда $L = L'$. ▶

Размерность линейного многообразия – это размерность соответствующего подпространства L, базис линейного многообразия – это базис соответствующего подпространства. Забавный нюанс – базис линейного многообразия самому многообразию, вообще говоря, не принадлежит.

1-мерное многообразие называется прямой, k-мерное многообразие называется k-мерной плоскостью, $(n - 1)$-мерное многообразие – называется гиперплоскостью ($n = \dim V$).

§19. ДЕЙСТВИЯ С ПОДПРОСТРАНСТВАМИ



Пусть L_1 и L_2 – подпространства пространства V.

$L = L_1 + L_2 \Leftrightarrow L \equiv \{x \mid x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}$

$N = L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow N \equiv \{x \mid x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$

$\widetilde{L} = L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow \widetilde{L} \equiv \{x \mid x \in L_1 \vee x \in L_2\}$.

Отметим, что теоретико-множественное объединение подпространств подпространством, вообще говоря, не является. Рисунок иллюстрирует, что сумма векторов из $L_1 + L_2$ не всегда принадлежит $L_1 + L_2$.

<u>**30°**</u>. $L = L_1 + L_2$ и $N = L_1 \cap L_2$, где L_1 и L_2 – подпространства также являются подпространствами.

◀ В доказательстве элементы подпространств L_1 и L_2 будем снабжать соответствующими индексами.

1) $L = L_1 + L_2$: $\quad \forall x, y \in L \quad x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$;

$x \in L$: $\quad \alpha x = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$; $\quad \theta_L = \theta_{L_1} = \theta_{L_2} = \theta_V$; $\quad (-x) = (-x)_1 + (-x)_2$.

2) $N = L_1 \cap L_2$: $\quad \underbrace{x}_{\in L_1\cap L_2} + \underbrace{y}_{\in L_1\cap L_2}; \quad \underbrace{\alpha x}_{\in L_1\cap L_2}$. ▶

<u>**31°**</u>. Формула Грасмана $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$.

◀ Пусть $\dim L_1 \cap L_2 = k$, $\dim L_1 = k + l_1$, $\dim L_2 = k + l_2$. Докажем, что $\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2$.

Пусть $\{e_i\}_1^k$ базис в $L_1 \cap L_2$. Дополним его до базиса L_1: $e_1 \dots e_k f_1 \dots f_{e_1}$ и до базиса L_2: $e_1 \dots e_k g_1 \dots g_{e_2}$. Покажем, что $e_1 \dots e_k f_1 \dots f_{e_1}$, $e_1 \dots e_k g_1 \dots g_{e_2}$ базис в $L_1 + L_2$. Полнота:

$$x = x_1 + x_2 = \underbrace{\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i}_{x_1} + \underbrace{\sum \gamma_i e_i + \sum \delta_i f_i}_{x_2} = \sum(\alpha_i + \gamma_i) e_i + \sum \beta_i f_i + \sum \delta_i g_i .$$

Линейная независимость (от противного).

Пусть $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_{e_1} f_{e_1} + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_{e_2} g_{e_2} = \theta$;

$$\underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_{e_1} f_{e_1}}_{\in L_1} = \underbrace{-\gamma_1 g_1 - \dots - \gamma_{e_2} g_{e_2}}_{\in L_2}$$

Из последнего равенства следует, что векторы стоящие в его левой и правой частях принадлежат $L_1 \cap L_2$. Тогда $y \in L_1 \cap L_2$ можно записать в виде: $y = \delta_1 e_1 + \dots + \delta_k e_k$. Сравнивая $y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_{e_1} f_{e_1}$ с $y = \delta_1 e_1 + \dots + \delta_k e_k$, в силу единственности разложения y, заключаем, что $\alpha_1 = \delta_1$, $\alpha_2 = \delta_2$, …, $\alpha_k = \delta_k$; $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{e_1}$. Подставляя $\beta_i = 0$ в (*) получаем $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_{e_2} g_{e_2} = \theta$ и, в силу линейной независимости векторов $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, g_2, \dots, g_{e_k}$ получаем: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_{e_2} = 0$. ▶

§20. ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ

Сумма $L_1 + L_2$ **называется прямой суммой** (и обозначается $L_1 \oplus L_2$), если представление $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in L_1, x_2 \in L_2)$ единственно для любого $x \in V$.

<u>**32°**</u>. Чтобы $L_1 + L_2$ была прямой необходимо и достаточно чтобы:

а) $L_1 \cap L_2 = \theta$ или б) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$.

◀ а) <u>Необходимость</u>. Пусть сумма $L_1 + L_2$ прямая и пусть $\exists z_0 \neq \theta$ и $z_0 \in L_1 \cap L_2$. Тогда $x = x_1 + x_2 = (x_1 + z_0) + (x_2 - z_0) = x'_1 + x'_2$ т.е. разложение x в сумму неоднозначно. Это противоречит тому, что сумма прямая.

Достаточность. $L_1 \cap L_2 = \theta$ пусть $x = x_1 + x_2$ и $x = y_1 + y_2$,

$$x - x = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = \theta \Rightarrow \underbrace{x_1 - y_1}_{\in L_1} = \underbrace{y_2 - x_2}_{\in L_2} \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - y_1 = \theta \text{ и } x_2 - y_2 = \theta, \text{ т.е. } x_1 = y_1 \text{ и } x_2 = y_2.$$

б) Необходимость. $L_1 \oplus L_2 \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \theta$, $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2 = \dim L_1 + \dim L_2$.

Достаточность. Если $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2 \Rightarrow \dim L_1 \cap L_2 = 0$, т.е. $L_1 \cap L_2 = \theta$. ▶

Если $V = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow \forall x \in V$ существует единственное представление: $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in L_1$, $x = L_2$).

x_1 **называется проекцией** x на L_1, параллельно подпространству L_2 ($P_{L_1}^{||L_2}\, x$).

x_2 **называется проекцией** x на L_1, параллельно подпространству L_1 ($P_{L_2}^{||L_1}\, x$).

Подпространство L_2 **называется дополнением** L_1 к V и наоборот.

<u>33°</u>. $\forall L_1 \subset V$ существует L_2 такое, что $L_1 \oplus L_2 = V$. *Доказать самостоятельно.*

<u>34°</u>. Если $L_1 \oplus L_2 = V$ и $\dim V = n$, $\dim L_1 = k$, то $\dim L_2 = n - k$.

Доказать самостоятельно. Величина $\dim V$ - $\dim L_1 = n - k$ **называется коразмерностью подпрострарства** L_1 и обозначается $codim L_1$.

§21.МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ.
ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО МАТРИЦ

Матрицей $n \times m$ **называется прямоугольная таблица** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, где a_{ij} – принадлежат некоторому числовому полю K и называются элементами матрицы A или матричными элементами A. Иногда пишут A_{nm}. Здесь индексы определяют размеры матрицы A (1[й] – количество строк, 2[й] – количество столбцов). Матрицы A и B **называются равными** ($A = B$), если их размеры совпадают и $a_{ij} = b_{ij}$.

На множестве матриц одинаковых размеров можно определить операцию сложения: $C = A + B$ так, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, и операцию умножения на скаляр из внешнего поля **К**: $D = \alpha \cdot A \Leftrightarrow d_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

<u>1°</u>. Множество матриц A_{nm} с так определенными операциями поэлементного сложения и умножения на скаляр образуют линейное пространство K_{nm}. *Доказать самостоятельно.*

При этом $\dim K_{nm} = n \cdot m$, а базис образуют матрицы E_{ij}, у каждой из которых элемент, стоящий на пересечении i-ой строчки и j-ого столбца равен 1, а остальные элементы равны 0. Нейтральным элементом является матрица Θ у которой все элементы равны 0.

Если у матрицы A_{nm} $n = m$,то матрица A **называется квадратной**, а число n **называют порядком этой матрицы**. При этом если для ее элементов $a_{ij} = a_{ji}$ – **матрица называется симметрической** (или симметричной), а если $a_{ij} = -a_{ji}$, то **матрица называется кососимметрической** (или кососимметричной).

<u>2°</u>. Всякая квадратная матрица может быть разложена в сумму симметрической и кососимметрической матрицы.

◀ Пусть матрица A_{nm} задана своими элементами: $A_{nm} = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Построим матрицы S_{nm} и S_{nm}^{-} элементы, которых связаны с a_{ij} следующими соотношениями

$s_{ij} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, $s_{ij}^{-} = \dfrac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$. При этом $s_{ij} = s_{ji}$ и $s_{ij}^{-} = -s_{ij}^{-}$. Т.е. матрицы S_{nm} и S_{nm}^{-} соответственно симметричная и кососимметричная. Кроме того

$$s_{ij} + s_{ij}^{-} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} + \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} = a_{ij}, \text{ т.е. } \quad A = S + S^{-}. \ \blacktriangleright$$

<u>**3°**</u>. Множество симметричных (кососимметричных) матриц порядка n образуют линейное пространство. *Самостоятельно установите базис и размерность этих пространств.*

§22. ЕЩЕ ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

а) Произведение матриц $C_{nk} = A_{nm}B_{mk}$ определим по правилу: $c_{ij} = \sum_{p=1}^{m} a_{ip}b_{pj}$ (это правило в обиходе называется: умножение строка на столбец).

Пример: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, но $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 8 & 9 & 19 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Из определения произведения матриц ясно, что матрицы можно умножать не всегда, а только если количество элементов в строке 1ой матрицы и количество элементов в столбце 2ой матрицы совпадают. Кроме того, видно, что операция умножения матриц, вообще говоря, не коммутативна.

Можно отметить следующие свойства операции умножения матриц:

а1) $A(BC) = (AB)C$ – ассоциативный закон;

а2) $A(B + C) = AB + AC$ – левый и

а3) $(A + B)C = AC + BC$ правый дистрибутивные законы.

<u>***Def:***</u> Если в линейном пространстве V над полем **К**, корректным образом, введена еще одна внутренняя операция, удовлетворяющая свойствам:

1) $\alpha\odot(x\otimes y) = (\alpha\odot x)\otimes y = x\otimes(\alpha\odot y)$;

2) $x\otimes(y\otimes z) = (x\otimes y)\otimes z$; 3) $(x \oplus y)\otimes z = x\otimes z \oplus y\otimes z$,

то линейное пространство над полем **К называется алгеброй**.

Таким образом, определив операцию умножения матриц, удовлетворяющую свойствам а1), а2), а3) мы можем говорить об алгебре матриц (для квадратных матриц).

б) Транспонирование матриц $A^T \Leftrightarrow a_{ij}^T = a_{ji}$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования:

б1) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

б2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

б3) $(A\cdot B)^T = A^T B^T$.

в) Для матриц с комплексными элементами – операция комплексного сопряжения. $\overline{A} \Leftrightarrow a_{ij}^{*}$.

г) Для матриц с комплексными элементами – операция эрмитового сопряжения. $A^{*} = A^{+} \Leftrightarrow a_{ij}^{+} = \overline{a}_{ji}$ (для операции эрмитового сопряжения, математики чаще употребляют значок A^{*}, а физики A^{+}).

Свойства операции эрмитового сопряжения:

г1) $A^* = (\overline{A})^T$; г2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$; г3) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

г4) $(AB)^* = B^* A^*$; г5) $(A^*)^* = A$.

Примеры: $A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ i & 3-i \end{pmatrix}$; $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 2 & 3+i \end{pmatrix}$; $A^+ = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & 3+i \end{pmatrix}$.

Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} – **называются диагональными** (главными диагональными) элементами матрицы.

Если $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$ **матрица называется матрицей нижнего треугольного вида**, если $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$ – **матрицей верхнего треугольного вида**: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

нижний треугольный вид   верхний треугольный вид

Примечание: Если $A^* = A$, то **матрица называется эрмитовой** (самосопряженной).

В вещественном пространстве матрица A, удовлетворяющая условию: $AA^T = A^TA = E$ **называется ортогональной**, а комплексном пространстве – **унитарной**.

РАЗДЕЛ 2. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. ЕВКЛИДОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть V линейное пространство над полем $\mathbf{R}$. Говорят, что в V введено скалярное произведение, если $\forall x, y \in V \ \exists \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}$. такое, что:

а) $(x, y) = (y, x)$; б) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

в) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; г) $(x, x) \geq 0$, при этом $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Примеры скалярных произведений:

1) В арифметическом пространстве A_n с базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ если $x = \sum_1^n \xi_i e_i$, $y = \sum_1^n \eta_i e_i$ скалярное произведение можно вести по правилу: $(x, y) \equiv \sum_1^n \xi_i \eta_i$.

2) В пространстве $C_{[a, b]}$ функций непрерывных на $[a, b]$ по правилу:

$$(f, g) \equiv \int_a^b f(t) g(t) dt .$$

Конечномерное вещественное линейное пространство со скалярным произведением **называется евклидовым пространством**.

§2. СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

а) $(\theta, x) = (0 \cdot x, x) = 0(x, x) = 0$;

б) $(x, \alpha y) = (\alpha y, x) = \alpha(y, x) = \alpha(x, y)$;

в) $(x, y + z) = (y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z)$;

г) $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j (e_i e_j)$.

Последнее свойство говорит о том, что для того чтобы задать скалярное произведение в пространстве V достаточно задать скалярное произведение базисных векторов: $\gamma_{ij} = (e_i, e_j)$.

При этом $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Элементы γ_{ij} образуют матрицу, называемую матрицей Грамма. Матрица Грамма в евклидовом пространстве симметрична.

§3. ДЛИНА ВЕКТОРА. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

а) Неравенство Коши-Буняковского $(x, y)^2 \le (x, x)\cdot(y, y)$.

◀ $(\alpha x - y, \alpha x - y) = \alpha^2(x, x) - 2\alpha(x, y) + (x, y) \ge 0$, т.к. квадратный трехчлен относительно α сохраняет знак, то $D \le 0 \Rightarrow 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \le 0$, $(x, y)^2 \le (x, x)(y, y)$. ▶

Отметим, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского достигается, если $\exists\alpha$ такое, что $\alpha x = y$, т.е. когда x и y коллинеарны.

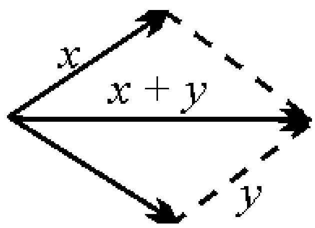
Частные случаи неравенства Коши-Буняковского:

а) $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)dx\cdot\int\limits_a^b g^2(x)dx$, б) $\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \sum\limits_{i=1}^n x_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^n y_i^2$.

Длиной вектора x назовем величину $|x| = \sqrt{(x, x)}$. (Неравенство Коши-Буняковского тогда запишется так: $|(x, y)|^2 \le |x|^2\cdot|y|^2$).

Расстоянием между двумя векторами x и y назовем величину

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$



б) Неравенство треугольника: $|x + y| \le |x| + |y|$.

◀ $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x)^2 + 2(x, y) + (y, y)^2 = |x|^2 + 2(x, y) +$
$+ |y|^2 \le |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$. ▶

Углом между векторами x и y назовем угол $\varphi\in[0, \pi]$ такой, что $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{|x|\cdot|y|}$.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $|\cos\varphi| \le 1$.

§4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Def: Векторы $x, y\in V$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

1°. Если $\forall y\in V$, $(x, y) = 0 \Rightarrow x = \theta$.

◀ Т.к. $(x, y) = 0$ $\forall y$, положим $y = x$. Тогда $(x, x) = 0 \Rightarrow x = \theta$. ▶

Система векторов $\{f_i\}_1^n$ **называется ортогональной**, если $(f_i, f_j) = 0$ для $i \ne j$ (отметим, что $(f_i, f_i) = |f_i|^2$).

Система векторов $\{e_i\}_1^n$ **называется ортонормированной**, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \ne j \\ 1 & i \ne j \end{cases}$.

2°. Ортонормированная система векторов – линейно независима.

◀ $\{e_i\}_1^n$ – ортонормированна. Пусть $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \theta$. Умножим обе части равенства скалярно на e_j и получим: в левой части $\left(\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i\left(e_i, e_j\right)\right) = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i(e_i, e_j) = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i\delta_{ij} = \alpha_j$, а в правой части $(\theta, e_j) = 0$, т.е. $\alpha_j = 0$.

Равенство $\alpha_j = 0$ для любого j означает линейную независимость ортогональной системы векторов. ▶

3°. В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов есть сумма произведений одноименных координат.

◀ $\{e_i\}_1^n$ – ортонормированный базис $\Rightarrow x=\sum_1^n \xi_i e_i$, $y=\sum_1^n \eta_i e_i$. Тогда

$$(x,y)=\left(\sum_i \xi_i e_i, \sum_j \eta_j e_j\right)=\sum_i\sum_j \xi_i\eta_j\left(e_i e_j\right)=\sum_i\sum_j \delta_{ij}\xi_i\eta_j=\sum_i \xi_i\eta_i. \quad ▶$$

Следствие. В ортонормированном базисе $|x|^2=\sum_i \xi_i^2$

4°. В любом (конечномерном) евклидовом пространстве существует ортогональный базис.

◀ Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ базис в V. Покажем, что по указанному базису можно построить ортогональный базис (этот процесс называют **процессом ортогонализации**).

а) $e_1=f_1$;

б) $e_2=f_2+\alpha e_1$ и α найдем из условия $(e_1, f_1)=0$,

$$0=(e_1, e2)=(e_1,f_2)+\alpha(e_1,e_2)\Rightarrow\alpha=-\frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)};$$

в) $e_3=f_3+\alpha e_1+\beta e_2$ и α, β найдем из условий $(e_3,e_1)=(e_3,e_2)=0$,

$$0=(e_1,e_3)=(f_3,e_1)+\alpha(e_1,e_2)\Rightarrow\alpha=-\frac{(f_3,e_1)}{(e_1,e_1)},$$

$$0=(e_2,e_3)=(f_3,e_2)+\beta(e_2,e_2)\Rightarrow\beta=-\frac{(f_3,e_2)}{(e_2,e_2)};$$

………………

………………

г) $e_k=f_k-\frac{(f_k,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1-\frac{(f_k,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2-\ldots-\frac{(f_k,e_{k-1})}{(e_{k-1},e_{k-1})}e_{k-1}$. ▶

Нормируя векторы ортогонального базиса получим ортонормированный базис пространства, т.е.

5°. В каждом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Процесс построения ортонормированного базиса, примененный в предыдущей теореме **называется процессом ортогонализации Штурма**.

§5. ИЗОМОРФИЗМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Два евклидовых пространства V и V' **называются изоморфными**, если они изоморфны как линейные пространства и, кроме того, $\forall x, y\in V$ и $\forall x', y'\in V'$ $(x, y)=(x', y')$.

6°. Два евклидовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V=\dim V'$.

◀ Необходимость. Пространства изоморфны как линейные и, следовательно, $\dim V=\dim V'$.

Достаточность. $\dim V=\dim V'$. Пусть $\{e_i\}_1^n$ и $\{e_i'\}_1^n$ ортонормированные базисы в V и V'. $\{e_i\}_1^n \leftrightarrow \{e_i'\}_1^n$ $\forall i=1, 2, \ldots, n$, $x=\sum\xi_i e_i\leftrightarrow x'=\sum\xi_i e_i'$, $y=\sum\eta_i e_i\leftrightarrow y'=\sum\eta_i e_i'$, $(x,y)=\sum\xi_i\eta_i=(x',y')$. ▶

§6. УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть V линейное пространство над полем **C**. Говорят, что в V определено скалярное произведение, если $\forall x, y\in V, \exists\alpha = (x, y)\in \mathbf{C}$, такое что:

а) $(x, y) = \overline{(y, x)}$; б) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\lambda\in \mathbf{C}$;

в) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; г) $(x, x) \geq 0$, при этом $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Примеры:

1) В арифметическом пространстве A_n с базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$скалярное произведение можно задать следующим образом: если $x=\sum\xi_i e_i$ и $y=\sum\eta_i e_i$, то $(x,y)=\sum\limits_1^n\xi_i\overline{\eta}_i$.

2) В пространстве непрерывных на $[a, b]$ комплекснозначных функций можно задать скалярное произведение формулой: $(f, g)\equiv\int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$.

Конечномерное комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется **унитарным пространством**.

§7. СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

а) $(\theta, x) = 0$; б) $(x, \alpha y) = \left(\overline{\alpha y,x}\right)=\overline{\alpha}\overline{(y,x)}=\overline{\alpha}\left(\overline{y,x}\right)=\overline{\alpha}(x,y)$;

в) $(x, y + z) = (x, z) + (x, z)$; г) $(x,y)=\sum\limits_i\sum\limits_j\xi_i\overline{\eta}_j(e_ie_j)$ т.е. чтобы задать скалярное произведение достаточно задать матрицу Грамма $\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ системы векторов с элементами $\gamma_{ij} = (e_i, e_j)$ (при этом $\gamma_{ij}=\overline{\gamma}_{ji}$). В унитарном пространстве матрица Грамма будет эрмитовосопряженной.

§8. ДЛИНА ВЕКТОРА

а) Неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)|^2 \leq (x, x)\cdot (y, y)$

◀ $(\alpha x - y, \alpha x - y) = \alpha\overline{\alpha}(x, x) - \alpha(x, y) - \overline{\alpha}(y, x) + (y, y) \geq 0$. Пусть $\alpha=\beta\frac{(y,x)}{|(x,y)|}$, где $\beta\in \mathbf{R}$. $\alpha\overline{\alpha}=\beta^2\frac{(x,y)\cdot(y,x)}{|(x,y)|^2}=\beta^2\frac{(x,y)\cdot\overline{(x,y)}}{|(x,y)|^2}=\beta^2$,

$$\alpha(x,y)+\overline{\alpha}(y,x)=\beta\frac{(x,y)\cdot\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}+\beta\frac{(y,x)\cdot\overline{(y,x)}}{|(x,y)|}=$$

$$=\frac{\beta}{|(x,y)|}\left((x,y)\cdot\overline{(x,y)}+(y,x)\cdot\overline{(y,x)}\right)=\frac{\beta}{|(x,y)|}\left((x,y)\cdot\overline{(x,y)}+(x,y)\cdot\overline{(x,y)}\right)=$$

$$=\frac{\beta}{|(x,y)|}2|(x,y)|^2=2\beta|(x,y)|$$. Тогда: $(\alpha x- y, \alpha x - y) = \beta^2|x|^2- 2\beta|(x, y)| + |y|^2\geq 0$.

Квадратный трехчлен относительно β сохраняет знак и следовательно:

$D\leq 0 \Rightarrow|(x, y)|^2 \leq |x|^2\cdot |y|^2$. ▶

Длиной вектора x в унитарном пространстве V **называется величина** $|x|=\sqrt{(x,x)}$.

В унитарном пространстве нет содержательного понятия угла, однако, есть понятие ортогональности векторов и понятий с ним связанных, т.к. скалярное произведение является величиной, вообще говоря, комплекснозначной.

§9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Векторы $x, y \in V$ унитарного пространства **называются ортогональными**, если $(x,y) = 0$. Аналогично евклидовому пространству вводятся понятие ортогональных и ортонормированных систем векторов.

В ортонормированном базисе унитарного пространства:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} \;; \qquad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\xi_i}$$

Кроме того:

В любом унитарном пространстве существует ортонормированный базис. Для его построения достаточно применить процесс ортогонализации Штурма к произвольному базису пространства.

Можно сформулировать также понятие изоморфности унитарных пространств и теорему о том, что унитарные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = = \dim V'$.

§10. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ К ПОДПРОСТРАНСТВУ

Вектор h **называется перпендикулярным к подпространству** L, если $\forall y \in L$, $(h, y) = 0$.

Если $\{e_i\}_1^k$ базис в L (в подпространстве), то $(h, e_i) = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$.

Множество векторов $h \in L$ перпендикулярных к подпространству L называется ортогональным дополнением к L и обозначается $L^\perp$.

<u>**7°**</u>. $L^\perp$ является подпространством.

◀ $x, y \in L^\perp$, $z \in L$, то $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, x) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, т.е. линейная комбинация элементов $L^\perp$ остается в $L^\perp$. ▶

<u>**8°**</u>. $V = L \oplus L^\perp$.

◀ Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ базис в L. Дополним его до ортогонального базиса V. $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_n\}$. Без ограничения общности можно считать его ортонормированным: $\forall x \in V \Rightarrow x = \sum_1^k \xi_i e_i + \sum_{k+1}^n \xi_i f_i = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^\perp$ и это разложение единственно. ▶

<u>**9°**</u>. $L \cap L^\perp = \theta$.

◀ $x \in L$, $x \in L^\perp \Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = \theta$. ▶

<u>**10°**</u>. $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$. *Доказать самостоятельно.*

§11. СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ДОПОЛНЕНИЯ

а) $(L^\perp)^\perp = L$;

б) $V^\perp = \Theta$;

в) $\Theta^\perp = V$;

г) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$;

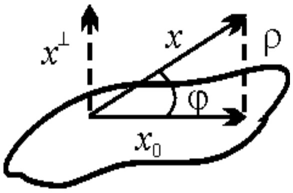
д) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$;

е) $L_1 \subset L_2 \Rightarrow L_1^\perp \supset L_2^\perp$.

§12. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ И ОРТОГОНАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ВЕКТОРА НА ПОДПРОСТРАНСТВО

Пусть L – подпространство евклидового или унитарного пространства V. Тогда $\forall x \in V$ $\exists x_0 \in L \wedge \exists x^\perp \in L^\perp$ (причем единственные), такие что $x = x_0 + x^\perp$, x_0 – **называется ортогональной проекцией вектора** x на подпространство L. $x^\perp$ – **называется ортогональной составляющей вектора** x на подпространство L. **Расстоянием** между двумя множествами M_1 и M_2 **называется кратчайшее из расстояний между элементами** M_1 и M_2: $\rho(M_1, M_2) = \inf\limits_{\substack{x\in M \\ y\in M_2}} \rho(x, y)$.

В частности $\rho(x, M) = \inf\limits_{y\in M}\rho(x, y)$; $\rho^2(x, y) = |x - y|^2 = |\underbrace{x - x_0}_{\in L^\perp} + \underbrace{x_0 - y}_{\in L}|^2 = |x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2 \geq$ $\geq |x - x_0|^2 = |x^\perp|^2$, где $y\in L$, т.е. **расстоянием между вектором и подпространством** является длина его ортогональной составляющей. Для евклидового пространства углом между вектором x и подпространством L **называется угол** $\varphi\in [0, \pi]$ такой, что $\cos\varphi = \dfrac{(x, x_0)}{|x|\cdot|x_0|}$.



Преобразовав $\cos\varphi = \dfrac{(x,x_0)}{|x|\cdot|x_0|} = \dfrac{(x_0 + x^\perp, x_0)}{|x|\cdot|x_0|} = \dfrac{(x_0,x_0)+(x^\perp,x_0)}{|x|\cdot|x_0|} = \dfrac{|x_0|}{|x|}$,

получим, что косинус угла между подпространством и вектором равен отношению длины ортогональной составляющей вектора к длине самого вектора.

Рассмотрим $\{e_i\}_1^k$ – ортогональный базис в подпространстве L:

$$\forall x\in V \quad x = x_0 + x^\perp = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k + x^\perp.$$

Умножим скалярно обе части равенства на e_i:

$$(x,e_i) = \alpha_i(e_i, e_i) + (x^\perp, e_i) = \alpha_i(e_i, e_i) \Rightarrow \alpha_i = \frac{(x,e_i)}{(e_i,e_i)}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{(x,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1 + \dfrac{(x,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2 + \cdots + \dfrac{(x,e_k)}{(e_k,e_k)}e_k \\ x^\perp = x - x_0 \end{cases}$$

– это формулы для нахождения ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора x на подпространство L.

РАЗДЕЛ 3. МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть в некотором множестве M любой паре его элементов ($\forall x, y\in M$) поставлено в соответствии неотрицательное вещественное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

A) $\rho(x, y) = \rho(x,y)$ аксиома симметрии;

B) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ аксиома положительности;

C) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ неравенство треугольника.

В этом случае говорят, что на множестве M задана метрика, функция $\rho(x, y)$ **называется расстоянием**, а множество M **называется метрическом пространством**.

Формально любое множество элементов, в котором определено отношение равенства, можно рассматривать как метрическое пространство, если ввести расстояние так:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{для } x = y \\ 1, & \text{для } x \neq y \end{cases}. \qquad (*)$$

§2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Вектор x_0 метрического пространства X называется пределом последовательности $\{x_n\}$ элементов $x_1, x_2, \ldots$ из X, если последовательность расстояний $\rho(x_0, x_1)$, $\rho(x_0, x_2)$, $\rho(x_0, x_3)$, … , $\rho(x_0, x_n)$, … стремится к нулю. При этом пишут $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ или $\lim x_n = x_0$.

Последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, при этом называется сходящейся в X, или просто сходящейся. Заметим, что $\{x_n\}_1^\infty$, может быть сходящейся и не сходящейся в зависимости от того, в какой метрике рассматривается сходимость.

Например, если есть последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, из разных элементов, которая сходится в некоторой метрике ρ_1, то, введя метрику ρ_2, (определяемую формулой (*) из **§1** мы увидим, что эта последовательность в метрике ρ_2, не сходится.

1°. Если последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, сходится в X, то сходится и имеет тот же предел, любая подпоследовательность $\{x_n\}_1^\infty$, этой последовательности. ◀ ▶

2°. Если последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, имеет предел то этот предел единственный.

◀ Пусть $\{x_n\}$ имеет два предела y_1 и y_2. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists N_1\ \forall n>N_1\ \big|\ \rho(x_n, y_1)<\varepsilon/2$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_2\ \forall n>N_2\ \big|\ \rho(x_n, y_2)<\varepsilon/2.$

Выбрав $N=\max(N_1, N_2)$ получим $\forall n>N\quad \rho(y_1, y_2)\le\rho(y_1, x_n)+\rho(x_n, y_2)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$, т. е. $\rho(y_1, y_2)<\varepsilon$ В силу произвольности ε $\rho(y_1, y_2)=0$ т. е. $y_1=y_2$. ▶

§3. ШАРЫ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

Def: Шаром $S(a, r)$ в метрическом пространстве X с центром в точке а радиуса r **называется множество всех элементов $x\in X$ удовлетворяющих условию** $\rho(a, x)<r$

$$S(a, r)\equiv\{x\in X\ \big|\ \rho(a, x)<r\}.$$

Def: Множество элементов X **называется ограниченным**, если оно целиком принадлежит некоторому шару.

3°. Сходящаяся последовательность ограничена.

◀ Пусть $\lim x_n=x_0$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ \ \forall n>N\quad x_n\in S(x_0, \varepsilon)$. Рассмотрим $S(x_0, r)$, где $r=\max\{\rho(x_1, x_0), \rho(x_2, x_0), \dots, \rho(x_n, x_0), \varepsilon\}+\varepsilon$. Ясно, что $\forall n>N\quad x_n\in S(x_0, r)$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ▶

Def: Если дано $M\subset X$, то элемент $x\in X$ **называется предельной точкой** или **точкой сгущения** множества M, если $\forall S(x, \varepsilon)\ \ \exists x_1\in M$, $x_1\neq x$ такой, что $x_1\in S(x, \varepsilon)$.

Def: Множество M с присоединенными к нему всеми предельными точками **называется замыканием множества** M и обозначается $\overline{M}$.

Def: Множество M **называется замкнутым**, если $M=\overline{M}$.

Рассмотрим предельные точки шара $S(a, r)$ и покажем, что все они удовлетворяют требованию $\rho(a, x)\le r$. Допустим, что x' предельная и $\rho(a, x')>r$. Тогда в окрестности точки x' радиуса $0{,}5[\rho(a, x')-r]$ нет ни одной точки шара $S(a, r)$ т.е. x' не предельная. Множество $\overline{S}(a, r)\equiv\{x\in X\ \big|\ \rho(a, x)\le r\}$ **называется замкнутым шаром**.

§4. ПОЛНОТА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Последовательность $\{x_n\}_1^\infty\in X$ **называется фундаментальной** или сходящейся в себе, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ \big|\ \forall n, m>N\ \rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

4°. Любая фундаментальная последовательность ограничена.

◀ $\varepsilon_0>0\ \ \exists N_0\big|\forall m>N\ \ \rho(x_m, x_N)<\varepsilon_0$. Тогда все элементы последовательности $\{x_n\}_1^\infty$ принадлежат шару с центром x_0 и радиуса $z_0=\max\{\varepsilon_0, \rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\}$. ▶

5°. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.

◀ Пусть $\{x_n\}_1^\infty \to x_0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \rho(x_n, x_0) < \varepsilon/2$. Кроме того, $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \varepsilon \quad \forall\, n, m > N$. ▶

Для множества вещественных чисел справедливо и обратное утверждение: любая фундаментальная последовательность – сходится.

В общем случае это не так. Подтверждением этого служит факт, что последовательность рациональных чисел не обязательно сходится к рациональному числу.

Def: Метрическое пространство **называется полным** если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к элементу этого же метрического пространства.

В каждом метрическом пространстве имеет место теорема – аналогичная теореме о вложенных сегментах для действительных чисел.

6°. Пусть в полном метрическом пространстве X задана последовательность $\bar{S}_n(a_n, \varepsilon_n)$ замкнутых шаров, вложенных друг в друга, т.е. $\bar{S}_{n+1}(a_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset \bar{S}_n(a_n, \varepsilon_n) \ \ \forall n \in N$.

Если последовательность радиусов $\varepsilon_n \to 0$, то существует и единствен элемент $x_0 \in X$, который принадлежит всем этим шарам т.е. $\exists!\, x_0 \in \bar{S}_n(a_n, \varepsilon_n) \ \ \forall n \in N$. ◀ ▶

Полными метрическими пространствами являются множества **R** и **C** (вещественных и комплексных чисел) и не является множество **Q** (рациональных чисел).

§5. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Сосредоточив внимание на таком свойстве множества, как наличие в нем расстояния приходим к понятию метрического пространства.

Сосредоточив внимание на операциях в множестве приходим к понятию линейного пространства.

Если каждое расстояние никак ни связанно с операциями над элементами, то представляется весьма затруднительным построить содержательную теорию части которой соединяли бы вместе алгебраические и метрические понятия.

Поэтому мы будем на метрику, введенную в линейном пространстве накладывать дополнительные условия.

Вещественное или комплексное линейное пространство X **называется нормированным** пространством, если для любого $x \in X$ существует вещественное число $||x||$ **называемое нормой вектора** x такое, что выполняются следующие аксиомы (аксиомы нормы):

A) $||x|| \ge 0$ причем $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (положительность нормы);

B) $||\lambda x|| = |\lambda|\ ||x||$ (абсолютная однородность нормы);

C) $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$ (неравенство треугольника).

Примеры норм. Если вектор x в некотором базисе имеет координаты $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то:

α) $||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$; β) $||x||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$; γ) $||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$; δ) $||x|| = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$.

Норма β) **называется евклидовой нормой**.

§6. СВЯЗЬ НОРМИРОВАННЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

7°. Нормированное пространство легко превратить в метрическое, вводя $\rho(x, y) = \|x - y\|$. В самом деле:

◀ A) $\rho(x, y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = \|y-x\| = |-1|\,\|y-x\| = \|y-x\| = \rho(y, x)$;

B) $\rho(x, y) = \|x-y\| \ge 0$, причем $\|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \theta \Leftrightarrow x = y$;

C) $\rho(x, y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. ▶

Отметим что $\|x\| = \rho(x, \theta)$.

Обратим внимание, что метрика в линейном пространстве обладает свойствами:

A) $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$ – расстояние не меняется при сдвиге;

B) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x, y)$ – расстояние есть абсолютно однородная функция. (**)

8°. Если в метрическом линейном пространстве X метрика удовлетворяет двум последним (**) требованиям, то X можно превратить в нормированное пространство, вводя $\|x\| = \rho(x, \theta)$.

◀ A) $\|x\| = \rho(x, \theta) \ge 0$; $\|x\| = \rho(x, \theta) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

B) $\|\lambda x\| = \rho(\lambda x, \theta) = \rho(\lambda x, \lambda\theta) = |\lambda|\rho(x, \theta) = |\lambda|\,\|x\|$;

C) $\|x-y\| = \rho(x+y, \theta) = \rho(x+y-y, \theta-y) = \rho(x, -y) \le \rho(x, \theta) + \rho(\theta, -y) =$
$= \rho(x, \theta) + |-1|\rho(y, \theta) = \|x\| + \|y\|$.

▶

9°. Линейное пространство со скалярным произведением является нормированным ($\|x\| = \sqrt{(x,x)}$) и метрическим ($\rho(x+y) = \|x-y\|$) пространством. ◀ ▶

§7. ПОКООРДИНАТНАЯ СХОДИМОСТЬ И СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ

Далее рассмотрим нормированное линейное пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Сходимость последовательности векторов в такой метрике называется сходимостью по норме.

В вещественном и комплексном конечномерном пространстве, кроме сходимости по норме можно ввести другое понятие сходимости. Для любой последовательности $\{x_m\}$ векторов из X запишем разложение векторов x_m по базису $\{e_k\}$: $x_m = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k$.

Пусть $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} e_k$.

Def: Если $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место $\lim\limits_{m=\infty} \xi_k^{(m)} = \xi_k^{(0)}$, то говорят, что имеет место покоординатная сходимость последовательности $\{x_m\} \to x_0$.

Координатная сходимость в линейном пространстве является естественной в том смысле, что если два вектора близки, то естественно предположить, что и координаты их близки.

Соответственно, аналогично, естественной сходимостью в нормированном (или метрическом) пространстве является сходимость по норме (или по метрике).

§8. СВЯЗЬ КООРДИНАТНОЙ СХОДИМОСТИ И СХОДИМОСТИ ПО НОРМЕ

Конечномерные нормированные линейные пространства примечательны тем, что в этих пространствах понятие сходимости по норме и координатной сходимости эквивалентны.

10°. Если $\{x_m\}$ сходится покоординатно, то она сходится и по норме.

◄ Пусть $\lim\limits_{m=\infty}\xi_k^{(m)} = \xi_k^{(0)} \Rightarrow \|x_m - x_0\| = \left\|\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(0)}\right)e_k\right\| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\left|\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(0)}\right|\|e_k\| \to 0.$ ►

11°. Если в конечномерном нормированном пространстве последовательность векторов ограничена по норме, то ограничены и числовые последовательности всех координат в разложении векторов по любому базису. ◄►

12°. В конечномерном нормированном пространстве из сходимости по норме следует координатная сходимость. ◄►

§9. ПОЛНОТА НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Конечномерные нормированные пространства являются пространствами, в которых имеют место многие аналоги утверждений, связанных с понятиями предела в числовых множествах.

13°. Из всякой бесконечной ограниченной последовательности векторов конечномерного пространства можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в этом пространстве.

14°. Любое конечномерное нормированное пространство – полное.

15°. Любое конечномерное подпространство X_0 нормированного пространства X, является замкнутым множеством.

РАЗДЕЛ 4. ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

§1. ЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

Пусть V_n – n-мерное линейное пространство. Если для любого $x\in V_n$ существует число $\varphi(x)\in \mathbf{K}$, где $\mathbf{K}$ некоторое числовое поле, то говорят, что на пространстве V_n задан функционал φ со значениями в поле $\mathbf{K}$.

Функционал $\varphi(x)$ **называется линейным функционалом**, если
а) $\forall x, y\in V_n \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ (аддитивность);
б) $\forall x\in V_n \quad \forall\alpha\in K \qquad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ (однородность).

Пусть $\{e_i\}_1^n$ базис в V_n. Тогда $\forall x\in V_n$: $x = \sum\limits_i \xi_i e_i \Rightarrow \varphi(x) = \varphi\left(\sum\limits_i \xi_i e_i\right) = \sum\limits_i \xi_i \varphi(e_i)$. Таким образом, чтобы задать линейный функционал в линейном пространстве, достаточно задать величины $u_i = \varphi(e_i)$, т.е. каждому линейному функционалу можно поставить в соответствие вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ такой, что $\varphi(x) = (x, u) = \sum\limits_i \xi_i u_i$. Действие функционала φ на вектор x можно трактовать и как умножение матриц $\varphi(x) = (u_1, u_2, \dots, u_n)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$.

Запись линейного функционала в некотором базисе в виде $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$ называется линейной формой. Таким образом, линейная форма это запись линейного функционала в некотором базисе.

§2. ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА V_n

Рассмотрим множество возможных линейных функционалов на V_n. Два функционала f и φ будем называть равными, если $\forall x\in V_n \quad f(x) = \varphi(x)$.

Введем операции сложения функционалов и умножение функционалов на скаляр из вещественного поля K так:

α) $g = f + \varphi \Leftrightarrow \forall x \in V_n \quad g(x) = f(x) + \varphi(x)$;
β) $g = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in V_n, \ \forall \lambda \in K \quad g(x) = \lambda f(x)$.

Нетрудно убедится, что множество линейных функционалов с так введенными операциями образуют линейное пространство. В качестве нейтрального функционала θ определим функционал, который $\forall x \in V_n$ $\theta(x) = 0$. Построенное таким образом пространство линейных функционалов заданных на V_n, **называется пространством, сопряженным** к V_n и обозначается V_n^*.

1°. $\dim V_n = \dim V_n^*$. ◀ ▶

§3. БИЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

Пусть V_n – n-мерное линейное пространство. Если любой паре векторов x, $y \in V_n$ поставить в соответствие число $\varphi(x, y) \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ – некоторое числовое поле) такое, что $\forall x, y, z \in V_n$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$ выполнимы требования:

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z); \\ \text{б) } \varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y); \end{array}\right\} \text{ линейность по } 1^{\text{му}} \text{ аргументу}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{в) } \varphi(x, y+z) = \varphi(x,y) + \varphi(x,z); \\ \text{г) } \varphi(x,\lambda y) = \lambda\varphi(x,y); \end{array}\right\} \text{ линейность по } 2^{\text{му}} \text{ аргументу}$$

то говорят, что в V_n задан билинейный функционал (или билинейная форма).

Пусть $\{e_i\}_1^n$ – базис в V_n и x, $y \in V_n$. Тогда $x = \sum_i \xi_i e_i$, $y = \sum_i \eta_i e_i$ и $\varphi(x, y) =$

$= \left(\sum_i \xi_i e_i, \sum_j \eta_j e_j\right) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j u_{ij}$, где $u_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. Задание u_{ij} полностью определяют билинейный функционал. Запись билинейного функционала в некотором базисе в виде $\varphi(x, y) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j u_{ij}$ называется билинейной формой.

§4. СИММЕТРИЧНЫЕ И АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Функционал $\varphi(x, y)$ **называется симметричным**, если $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. (При этом $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i)$ т.е. $u_{ij} = u_{ji}$).

Функционал $\varphi(x, y)$ **называется антисимметричным**, если $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ (При этом $\varphi(e_i, e_j) = -\varphi(e_j, e_i)$ т.е. $u_{ij} = -u_{ji}$).

Если в заданной билинейной форме $\varphi(x, y)$ положить $x = y$, то получим частный случай билинейной формы – квадратичную форму.

2°. Любой билинейный функционал можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного функционалов.

◀ $\varphi_s(x, y) = (\varphi(x, y) + \varphi(y, x))/2$, $\varphi_A(x, y) = (\varphi(x, y) - \varphi(y, x))/2$. ▶

3°. Каждому билинейному симметричному функционалу (билинейной форме) можно поставить в соответствие квадратичную форму и наоборот.

◀ *) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \Leftrightarrow \varphi(x, x)$;

**) $\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) = \varphi(x, x) + 2\varphi(y, x) + \varphi(y, y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x, x) - \varphi(y, y)]. \quad ▶$$

<u>4°.</u> Если билинейный функционал антисимметричен, то соответствующая ему квадратичная форма равна нулю.

◀ $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$. Полагая в данном равенстве $y=x$ получим $\varphi(x, x) = -\varphi(x, x) = 0$. ▶

§5. ПОЛИЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

Если $\forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in V_n$ $\exists \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbf{K}$ и $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ линеен по каждому из аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($k \le \dim V_n$) то говорят, что на V_n задан полилинейный (k – линейный) функционал или полилинейная (k – линейная) форма.

Полилинейный функционал называется симметричным по паре аргументов x_i и x_j, если $\varphi(\ldots x_i, \ldots x_j, \ldots) = \varphi(\ldots x_j, \ldots x_i, \ldots)$ и антисимметричным по паре аргументов x_i и x_j, если $\varphi(\ldots x_i, \ldots x_j, \ldots) = -\varphi(\ldots x_j, \ldots x_i, \ldots)$.

Полилинейный функционал называется абсолютно симметричным, если он симметричен по любой паре своих аргументов и антисимметричным, если он антисимметричен по любой паре своих аргументов.

Рассмотрим $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V_n$. $\{e_i\}_1^n$ – базис в V_n. Тогда $\forall i = 1, 2, \ldots, k$

$$x_i = \sum_j a_{ji} e_j \Rightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_k} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_k,k} u_{j_1 j_2 \cdots j_k},$$

↑ полилинейная форма k-й степени

где $u_{j_1 j_2 \cdots j_k} = \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k})$.

Конструкцию $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ **назовем перестановкой** элементов 1, 2, …, k. Обозначим $N(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ – количество беспорядков в перестановке. Беспорядок это когда большее j_e стоит раньше меньшего j_m.

Например, в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ два беспорядка и $N(2, 1, 4, 3) = 2$, а в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ пять беспорядков $N(4, 3, 1, 2) = 5$.

Если функционал $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ абсолютно антисимметричен, то

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{j_1, j_2, \ldots j_k}^{*} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_k,k} (-1)^{N(j_1, j_2, \ldots, j_k)} \cdot F,$$

где $F = \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_k)$. При этом * у знака Σ означает, что суммирование идет по всем наборам $j_1, j_2, \ldots, j_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_k$ все разные.

§6. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть задана квадратная матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & an_2 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определителем ($\det A$) квадратной матрицы A со столбцами $x_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ **называется функционал** $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно столбцов этой матрицы, которой а

) линеен по каждому аргументу (полилинеен);

б) абсолютно антисимметричен (антисимметричен по любой паре аргументов);

в) выполнено условие нормировки $F=\varphi(e_1,e_2,\dots,e_n)=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1.$

Таким образом:

5°. $$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\underbrace{\sum^{*}_{j_1,j_2,\dots,j_n}(-1)^{N(j_1,j_2,\dots,j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\dots a_{j_n n}}_{\text{всего } n! \text{ слагаемых}}.$$

Например: для определителя $3^{\text{го}}$ порядка $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ в сумму входят 3! слагаемых $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ и $a_{11}a_{23}a_{32}$. Знаки этих слагаемых определяются четностью перестановок: $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$. Количество беспорядков в этих перестановках соответственно равно: 0, 2, 2, 3,1,1. Первые три перестановки четные, последние три нечетные, поэтому получаем уже известную из курса аналитической геометрии формулу:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Аналогично можно выписать непосредственно формулу вычисления определителя $4^{\text{го}}$ порядка (24 слагаемых), $5^{\text{го}}$ порядка (120 слагаемых). Ясно, что с увеличением порядка определителя его вычисление по определению становится чрезвычайно обременительным, если не невозможным.

Изучение свойств определителей позволит нам обойти эту трудность.

§7. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

6°. $\det A=\det A^T$.

◄ $$\det A^T=\sum^{*}_{j_1,j_2,\dots,j_n}(-1)^{N(j_1,j_2,\dots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}.$$ ►

Из этого свойства следует, что строки и столбцы в определителе равноправны. И все свойства для столбцов будут справедливы для строк и наоборот. Все последующие свойства сформулированы для столбцов матрицы, но * у слова столбец означает, что вместо этого слова можно написать слова строка.

7°. Если один из столбцов* определителя равен нулю, то определитель равен нулю.

◄ $\varphi(x_1,\dots,\theta,\dots,x_n)=\varphi(x_1,\dots,0\cdot x_k,\dots,x_n)=0\cdot\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=0.$ ►

8°. $$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&\overset{*}{a_{1k'}+a_{1k}}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k'}+a_{2k}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nk'}+a_{nk}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k'}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k'}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nk'}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nk}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

◄ $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{k'}+x_k,\dots,x_n)=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{k'},\dots,x_n)+\varphi(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n).$ ►

9°. Общий множитель в столбце * определителя можно выносить за знак определителя.

◄ $\varphi(x_1,x_2,\dots,\alpha x_k,\dots,x_n)=\alpha\varphi(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n).$ ►

10°. Если в определителе поменять два столбца * местами определитель поменяет знак.

◄ $\varphi(x_1,\dots,x_e,\dots,x_m,\dots,x_n)=-\varphi(x_1,\dots,x_m,\dots,x_e,\dots,x_n).$ ►

11°. Определитель, имеющий два равных столбца * равен нулю.

◀ Действительно, если поменять местами два столбца, то det*A* не изменится, ибо они одинаковы, а с другой стороны det*A* поменяет знак из-за антисимметричности. Следовательно, det*A* = 0. ▶

12°. Если столбцы* матрицы линейно зависимы, то det*A* = 0.

◀ Пусть $x_1 = \sum\limits_{2}^{n} \alpha_i x_i$. Тогда $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= \varphi\left(\sum_{2}^{n} \alpha_i x_i, \quad x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{2}^{n} \alpha_i \underbrace{\varphi\left(x_i, x_2, \ldots, x_n\right)}_{\Uparrow = 0 \text{ ибо есть два одинаковых столбц}} = 0. \qquad ▶$$

Если в матрице $A_{m\times n}$ зафиксировать к строк и к столбцов ($k \le \min(m, n)$), то определитель k-порядка матрицы из элементов $A_{m\times n}$, стоящих в выбранных строках и столбцах называются минором k-порядка.

Если у det*A* порядка n, вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, то оставшиеся элементы образуют матрицу (n – 1) порядка. Ее определитель – минор $(n-1)^{\text{го}}$ порядка и обозначается M_{ij}, а величина $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ **называется алгебраическим дополнением** к элементу a_{ij}.

13°. $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij}$.

◀
$$\det A = \sum_{j_1,\ldots,j_n} (-1)^{N(j_1,j_2,\ldots,j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} = \begin{matrix}\text{раскроем сумму}\\ \text{по } j_1\end{matrix} =$$

$$= a_{11} \underbrace{\sum_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(1,j_2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}}_{\text{I}} + a_{21} \underbrace{\sum_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(2,j_2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}}_{\text{II}} + \cdots +$$

$$+ a_{n1} \underbrace{\sum_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(n,j_2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}}_{n} = \cdots$$

I. $\sum\limits_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(1,j_2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} = \sum\limits_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(j_2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} = A_{11};$

II. $\sum\limits_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(2,j_2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} = \sum\limits_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{1+N(j_2,2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} =$

$$= (-1)^1 \sum_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(j_2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} = (-1)^1 M_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = A_{21};$$

….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. …..

n. $\sum\limits_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(n,j_2,\ldots,j_n)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} = \sum\limits_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(j_2,2,\ldots,j_n)+(n-1)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} =$

$$= \sum_{j_2,\ldots,j_n} (-1)^{N(j_2,2,\ldots,j_n)+(n-1)} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} = (-1)^{n-1} M_{n1} = (-1)^{n+1} M_{n1} = A_{n1}.$$

Следовательно: detA= … = $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{22} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$. ▶

Это все можно проделать не только для первого столбца, а и для $2^{\text{го}}$, $3^{\text{го}}$, … , $n^{\text{го}}$ столбцов и аналогично для строк.

14°. $\sum\limits_{i} a_{ij} A_{ik} = \sum\limits_{i} a_{ji} A_{ki} = \delta_{jk} \det A$.

◀ $\sum\limits_{i} a_{ij} A_{ik} = \sum\limits_{i} a_{ij} A_{ij} \delta_{jk} = \delta_{jk} \sum\limits_{i} a_{ij} A_{ij} = \delta_{jk} \det A$. ▶

15°. Определитель матрицы не изменится, если к столбцу * добавить линейную комбинацию других столбцов *.

◀ $\varphi(x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\alpha_1\varphi(x_2, \ldots, x_n)+\alpha_3(x_3, x_2, \ldots, x_n)+$
$+\alpha_n(x_n, x_2,\ldots, x_n) = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. ▶

16°. При умножении матрицы на α, ее определитель умножается на α^n : $\det(A\alpha) = \alpha^n\det A$.

◀ $\varphi(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha\cdot\alpha\ \ldots\ \alpha\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha^n\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. ▶

17°. Определитель произведения двух матриц произведению определителей сомножителей $\det A\cdot B = \det C = \det A\cdot\det B$. $\quad (C = A\cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$).

◀ $$\det C = \sum_{i_1,\ldots,i_n}(-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)}c_{i_1 1}c_{i_2 2}\ldots c_{i_n n} = \left\langle c_{ij} = \sum_{k_j}a_{ik_j}b_{k_j j}\right\rangle =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n}(-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\ldots\sum_{k_j}a_{i_1k_1}b_{k_11}a_{i_2k_2}b_{k_22}\ldots a_{i_nk_n}b_{k_nn} =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n}(-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\ldots a_{i_nk_n}\cdot\sum_{k_1,\ldots,k_n}(-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)}b_{k_11}b_{k_22}\ldots b_{k_nn} =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n}(-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\ldots a_{i_nn}\cdot\sum_{i_1,\ldots,i_n}(-1)^{N(k,k_2,\ldots,k_n)}b_{k_11}b_{k_22}\ldots b_{k_nn} = \det A\cdot\det B .$$ ▶

§8. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Вычислить определитель 5$^{\text{го}}$ порядка:

$$\underset{\text{зануляем}}{\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & \underline{3} & 7 & -2\\ 3 & -1 & \underline{0} & 5 & -5\\ 2 & 6 & \underline{-4} & 1 & 2\\ 0 & -3 & \underline{-1} & 2 & 3\end{vmatrix}} = \underset{\text{раскрываем по столбцу}}{\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5\\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10\\ 0 & -3 & \underline{-1} & 2 & 3\end{vmatrix}} = (-1)^{3+5}(-1)\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 18 & -7 & -10\end{vmatrix} =$$

$$= -\underset{\text{зануляем}}{\begin{vmatrix} \underline{-2} & 5 & -1 & 3\\ \underline{1} & -9 & 13 & 7\\ \underline{3} & -1 & 5 & -5\\ \underline{2} & 18 & -7 & -10\end{vmatrix}} = -\underset{\text{раскрываем по 1}^{\text{му}}\text{ столбцу}}{\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17\\ \underline{1} & -9 & 13 & 7\\ 0 & 26 & -34 & -26\\ 0 & 36 & -33 & -24\end{vmatrix}} = -(-1)^{1+2}\underset{\text{из 2}^{\text{стр}}\text{ вынесем множитель 2, из 3}^{\text{ей}}\text{ - 3}}{\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17\\ 26 & -34 & -26\\ 36 & -33 & -24\end{vmatrix}} =$$

$$= 6\underset{\substack{1^{\text{стр}}+2^{\text{стр}}\to 1^{\text{стр}}\\ 2^{\text{стр}}-3^{\text{стр}}\to 2^{\text{стр}}}}{\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17\\ 13 & -17 & -13\\ 12 & -11 & -8\end{vmatrix}} = 6\underset{\text{зануляем}}{\begin{vmatrix} 0 & 8 & 4\\ 1 & -6 & -5\\ \underline{12} & -11 & -8\end{vmatrix}} = 6\underset{\text{раскрываем по 1 столбцу}}{\begin{vmatrix} 0 & 8 & 4\\ \underline{1} & -6 & -5\\ 0 & 61 & 52\end{vmatrix}} = 6(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8 & 4\\ 61 & 52\end{vmatrix} = -6\cdot 4\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 61 & 52\end{vmatrix} =$$

$$-24(104-61) = -24\cdot 43 = -1032.$$

§9. ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Пусть задана квадратная матрица A_{nn}. Выберем в матрице A k-строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и k-столбцов $j_1, j_2, \ldots j_k$**.** Определитель матрицы образованной элементами, стоящими на пересечении выбранных столбцов и строк **называется минором** $k^{\text{го}}$ **порядка** и обозначается $M^{\,i_1,i_2,\ldots,i_k}_{\,j_1,j_2,\ldots,j_k}$. Если из матрицы A вычеркнуть выбранные строки и столбцы то определитель оставшейся матрицы называется минором дополнительным к минору $M^{\,i_1,i_2,\ldots,i_k}_{\,j_1,j_2,\ldots,j_k}$ и обозначается $\overline{M}^{\,i_1,i_2,\ldots,i_k}_{\,j_1,j_2,\ldots,j_k}$.

Величина $(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2,+\ldots+j_k}\overline{M}{}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ **называется алгебраическим дополнением** к минору $M^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ и обозначается $A^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$.

18°. Теорема Лапласа.

$$\det A = \Sigma M^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k} A^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k} = \Sigma(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}\overline{M}{}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}.$$

Суммирование здесь производится по всем минорам $k^{\text{го}}$ порядка, стоящим в выбранных k-строках или в выбранных k–столбцах. ◄ ►

Пример. Вычислить следующий определитель раскрывая его по минорам второго порядка, стоящим во второй и третьей строках определителя:

Существует шесть различных миноров второго порядка, стоящих в указанных строках:

$M_{12}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}$; $M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}$; $M_{14}=\begin{vmatrix}3 & 9\\ 2 & 9\end{vmatrix}$; $M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}$; $M_{24}=\begin{vmatrix}1 & 9\\ 5 & 0\end{vmatrix}$; $M_{34}=\begin{vmatrix}3 & 9\\ 6 & 0\end{vmatrix}$.

Дополнительные к ним миноры:

$$\overline{M}_{12}=M_{34};\quad \overline{M}_{13}=M_{24};\quad \overline{M}_{14}=M_{23};\quad \overline{M}_{23}=M_{14};\quad \overline{M}_{24}=M_{13};\quad \overline{M}_{34}=M_{12}.$$

Найдем соответствующие алгебраические дополнения:

$A_{12}=(-1)^{2+3+3+4}M_{34}=M_{34}$; $A_{13}=(-1)^{2+3+2+4}M_{24}=-M_{24}$; $A_{14}=(-1)^{2+3+2+3}M_{23}=M_{23}$; $A_{23}=(-1)^{2+3+1+4}M_{14}=M_{14}$; $A_{24}=(-1)^{2+3+1+3}M_{13}=-M_{13}$; $A_{34}=(-1)^{2+3+1+2}M_{12}=M_{12}$.

Теперь, используя теорему Лапласа, можно записать:

$\Delta = M_{12}A_{12}+M_{13}A_{13}+M_{14}A_{14}+M_{23}A_{23}+M_{24}A_{24}+M_{34}A_{34}=M_{12}M_{34}-M_{13}M_{24}+M_{14}M_{23}+ + M_{23}M_{14}-M_{24}M_{13}+M_{34}M_{12}=2\,(M_{12}M_{34}-M_{13}M_{24}+M_{14}M_{23})=2\,(-13\cdot 54+12\cdot 45-9\cdot 11)=-522.$

§10. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ $n^{\text{ГО}}$ ПОРЯДКА

1. Метод приведения к треугольному виду.

а) Вычислить определитель: $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix}$.

Вычитая первую строку из всех остальных, получаем определитель, который имеет треугольный вид и, следовательно, равен произведению диагональных элементов:

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}.$$

В итоге $D_n=(-1)^{n-1}$.

б) Вычислить определитель: $D_n=\begin{vmatrix}a_1 & x & x & \cdots & x\\ x & a_2 & x & \cdots & x\\ x & x & a_3 & \cdots & x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & x & x & \cdots & a_n\end{vmatrix}$.

Вычитаем первую строку из всех остальных, а затем, из столбцов определителя выносим: из первого a_1-x; из второго a_2-x; …..; из $n^{\text{го}}$ a_n-x. Получим:

$$D = (a_1 - x)\,(a_2 - x)\dots(a_n - x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Запишем первый элемент первого столбца в виде: $\frac{a_1}{a_1 - x} = 1 + \frac{x}{a_1 - x}$, и все столбцы полученного определителя прибавим к первому столбцу. Получим определитель треугольного вида, который равен произведению диагональных элементов. Следовательно:

$$D = (a_1 - x)\,(a_2 - x)\dots(a_n - x)x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

<u>2.</u> Метод выделения линейных множителей.

а) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

1. Прибавляя к первому столбцу определителя остальные три, обнаружим, что в первом столбце есть общий множитель, который равен $x + y + z$. Следовательно, определитель делится на $x + y + z$.

2. Аналогично, прибавляя к первому столбцу второй и вычитая из него третий и четвертый столбцы, получаем, что определитель делится на $x - y - z$.

3. Если первый столбец сложить с третьим и вычесть второй и четвертый, то получим, что определитель делится на $x - y + z$.

4. Если к первому столбцу прибавить четвертый и вычесть второй и третий столбцы, то обнаружим, что определитель имеет множитель $x - y + z$. Итак:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = V(x + y + z)(x - y - z)(x - y + z)(x + y - z).$$

Ясно, что определитель является многочленом 4^{й} степени по x, по y и по z. Справа тоже многочлен той же степени. Поэтому $V = \text{const}$. В определитель x^4 входит в слагаемом:

$$(-1)^{N\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}} a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} = (-1)^2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4.$$

В правой части старший член по x: Vx^4, т.е. $V = 1$. Получаем результат:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x + y + z)(x - y - z)(x - y + z)(x + y - z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$

б) Вычислить определитель n-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Этот определитель **называется определителем Вандермонда**. Рассматривая его как многочлен $(n-1)^{й}$ степени относительно x_n увидим, что он обращается в 0 при $x_n = x_1, x_n = x_2, \dots x_n = x_{n-1}$. Тогда $D_n = a_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})$, причем $a_{n-1} = = D_{n-1}$. Повторяя эту процедуру, получим: $D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - -x_1)\dots = \prod_{i \geq j}(x_i - x_j)$.

3. Метод представления определителя в виде суммы определителей.

Вычислить определитель: $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

Заметив, что элементы первого столбца представлены как суммы двух чисел, разложим определитель в сумму двух определителей:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_{21} & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Теперь каждый из полученных определителей разложим в сумму двух определителей, воспользовавшись тем, что элементы вторых столбцов у них также представлены в виде сумм, и т.д. Проделав это, получим ($n > 2$), что строки полученных определителей будут такими: $a_{i,}\ a_{i,}\ \ldots,\ a_i$ или $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Строки 1го типа пропорциональны, 2го типа равны и, следовательно, все слагаемые равны нулю. Следовательно: $D_n = 0 \quad (\forall n > 2)$.

Для определителей такого же типа, но первого и второго порядков получим:

$$D_1 = |\, a_1 + b_1 \,| = a_1 + b_1;\ D_2 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 \\ a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 \\ b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2 - a_2b_2 + b_1a_2 - a_1b_1 = (a_1 - a_2)b_2 + (a_2 + a_1)b_1 = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1).$$

4. Метод рекуррентных (возвратных) соотношений.

Вычислить определитель n–го порядка: $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Разлагая определитель по элементам первой строки, получим рекурентное соотношение:

$$D_n = 5D_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель в правой части соотношения по первому столбцу, запишем новое рекурентное соотношение: $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$.

Представляя это соотношение в виде: $D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$ и вводя обозначение: $T_n = D_n - 2D_{n-1}$ получим: $T_n = 3T_{n-1} - 3^2T_{n-2} = \ldots = 3^{n-2}T_2 = 3^n$.

Аналогично, записав рекурентное соотношение в виде: $D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$ и обозначая: $V_n = D_n - 3D_{n-1}$ получим $V_n = 2V_{n=1} = 2^2V_{n-2} = \ldots = 2^n$.

т.е. $\left.\begin{cases} D_n - 2D_{n-1} = 3^n \\ D_n - 3D_{n-1} = 2^n \end{cases}\right| - \Rightarrow \quad D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

В общем случае, для рекуррентных соотношений типа: $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ можно проделать следующее: пусть α и β корни уравнения $x^2 - px - q = 0$, т.е. $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$. Тогда $D_n = \alpha D_{n-1} + \beta D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$; $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$, т.е. $S_n = \beta S_{n-1}$ или $D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2})$, т.е. $V_n = \beta V_{n-1}$.

Аналогично можно поступить и в более сложных рекуррентных соотношениях.

5. Метод изменения элементов определителя.

<u>19°</u>. Если ко всем элементам определителя D добавить одно и то же число x, то определитель увеличится на произведение числа x на сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя D.

◀ Пусть $D = |\, a_{ij} \,|$; $D' = |\, a_{ij} + x \,|$. Разложим D' в сумму двух определителей относительно первой строки, каждый из них на два относительно второй строки и т.д. Слагаемые, содержащие более одной строки элементов x, равны нулю.

Слагаемые, содержащие одну строку элементов x, разложим по этой строке. Получим $D' = D + x$. ▶

а). $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$. Вычтем из всех элементов определителя число x

$D_n = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix}$. Тогда $D_n = (a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x) + x\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} A_{ij} = (a_1 - x)(a_2 - x)\ldots$

$$\ldots(a_n - x) + x = (a_1 - x)\,(a_2 - x)\,\ldots\,(a_n - x) + x\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = (a_1 - x)(\,a_2 - x\,)\ldots(\,a_n - x\,) +$$

$$+\,x\sum_{i=1}^{n}(a_1 - x)\cdots(a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x)\ldots(a_n - x) =$$

$$= x(a_1 - x)\,(a_2 - x)\,\ldots\,(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 + x} + \frac{1}{a_2 + x} + \cdots + \frac{1}{a_n + x}\right).$$

РАЗДЕЛ 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Требуется найти $x_1, x_2 \ldots x_n$ удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Здесь $a_{ij} \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ \ j = 1, 2, \ldots, n)$ и $b_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – заданные числа.

Введем обозначения: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ – **главная матрица системы** уравнений;

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор-столбец правых частей.

При таких обозначениях система может быть записана в матричной форме: $Ax = b$.

Вектор $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$ **называется решением системы** $Ax = b$, если $Ac \equiv b$.

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система уравнений **называется однородной**.

.

Если хотя бы одно из значений b_i (i = 1, …, m) отлично от нуля система уравнений **называется неоднородной**.

Матрица $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right)$ **называется расширенной матрицей** системы уравнений.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она **называется совместной**. Если система линейных уравнений имеет единственное решение, то она **называется определенной**.

Вопросы, на которые нам предстоит ответить по отношению к системе линейных уравнений:

А. Совместна ли система, т.е. имеет ли она хотя бы одно решение?

В. При положительном ответе на предыдущий вопрос определена ли система, т.е. будет ли ее решение единственным?

С. Как находить решение системы?

В случае однородной системы на вопрос А, можно ответить сразу:

Однородная система уравнений всегда совместна. Набор $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Такое решение **называется тривиальным решением**. Поэтому для однородной системы линейных уравнений вопрос В звучит следующим образом:

Имеет ли система линейных однородных уравнений другие решения, кроме тривиальных?

§ 2. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Рассмотрим систему линейных уравнений с квадратной матрицей (A_{nn}):

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j$ (j = 1, 2, …, n). Умножим обе части этого равенства на $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{jk}$. Получим справа: $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{jk} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} A_{jk}a_{ji}x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ik}a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \delta_{ik}\,\det A = x_k \det A$, и слева: $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{jk}b_j$.

Отсюда получим: $$x_k = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} A_{jk}b_j}{\det A} = \frac{\Delta_k}{\Delta}.$$

Здесь через Δ обозначен $\det A$, **называемый главным определителем** (определитель матрицы системы). Через Δ_k обозначены определитель матрицы A_k, который получается из матрицы системы A заменой $k^{\text{го}}$ столбца на столбец свободных членов.

Доказана теорема Крамера:

Т°. Если $\Delta \neq 0$, то система $Ax = b$ имеет единственное решение, которое задается формулами

Крамера: $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

§ 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Если для квадратной матрицы A существует матрица D, такая что $DA = AD = E$, то матрица D **называется матрицей обратной** к матрице A и обозначается: $D = A^{-1}$.

1°. Если A^{-1} существует, то она единственна.

◀ $$A_1^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1}\left(AA_2^{-1}\right) = \left(A_1^{-1}A\right)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1}.$$ ▶

2°. $(A^{-1})^{-1} = A$. ◀ $A = AE = A(A^{-1}(A^{-1})^{-1}) = (AA^{-1})(A^{-1})^{-1} = E(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}$. ▶

3°. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

◀ $B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}E = B^{-1}A^{-1}((AB)\cdot(AB)^{-1}(AB)) = B^{-1}(A^{-1}A)B\cdot(AB)^{-1} = B^{-1}B(AB)^{-1} = (AB)^{-1}$. ▶

4°. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. ◀ $AA^{-1} = E \Rightarrow \det AA^{-1} = \det A\cdot\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$. ▶

5°. Чтобы квадратная матрица A имела обратную A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A **называется невырожденной**.

◀ Необходимость. $\exists A^{-1} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} \Rightarrow \det A \neq 0$.

Достаточность**.** Возьмем матицу D с элементами

$$d_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det A} \Rightarrow (DA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_{ki}}{\det A}a_{kj} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj} = \frac{1}{\det A}\cdot\delta_{ij}\det A = \delta_{ij} = (E)_{ij}.$$ ▶

Доказательство теоремы одновременно дало и способ построения матрицы, обратной к невырожденной матрице A. Чтобы построить матрицу обратную к A, надо:

1) найдем $\det A$. Если $\det A = 0$, то A^{-1} не существует. Если $\det A \neq 0$, то продолжаем построение обратной матрицы;
2) для элементов a_{ij} матрицы A найдем их алгебраические дополнения A_{ij};
3) разделим матрицу из алгебраических дополнений на $\det A$;
4) транспонировав полученную матрицу, получим матрицу A^{-1}.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: 1. $\det A = 2$. 2. $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В идеологии обратной матрицы решение квадратных систем с невырожденной матрицей становится весьма прозрачным: $Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$.

Есть и **другие способы** нахождения обратной матрицы.

А.

1) Запишем матрицу A, а справа от нее, через вертикальную черту, запишем единичную матрицу. Получим матрицу n – строк, $2n$ – столбцов;
2) В получившейся матрице с помощью применения к строкам (и только) преобразований не изменяющих ранг матрицы образуем на месте матрицы A – единичную матрицу.

На месте единичной матрицы будет стоять A^{-1}.

Б.

1) Справа от матрицы припишем единичную матрицу E, а снизу припишем матрицу $(-E)$. В правом нижнем углу поставим нулевую матрицу.
2) Используя операции только над строками, получившейся матрицы, на месте матрицы ($-E$), образуем нулевую матрицу.

Тогда, в правом нижнем углу будет стоять A^{-1}.

В.

Для обращения матрицы, имеющей блочную структуру, т.е. матрицы вида: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A – квадратная матрица порядка $n\times n$, а D – квадратная матрица $q\times q$, справедливы следующие формулы:

1. Первая **формула Фробениуса** (если $\det A \neq 0$):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \text{где } H = D - CA^{-1}B.$$

2. Вторая **формула Фробениуса** (если $\det D \neq 0$):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & -K^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CK^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CK^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \text{где } K = A - BD^{-1}C.$$

§4. РАНГ МАТРИЦЫ

Имеется матрица A_{mn} порядка $m\times n$ и не все элементы ее равны 0. ($\exists a_{ij} \neq 0$).

Пусть существует минор $r^{\text{го}}$ порядка, который не равен нулю, и при этом любой минор порядка большего r равен нулю, т.е. $\exists M_r \neq 0, \forall M_{r+i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-r)$.

Минор M_r **называется базисным минором** матрицы A (он необязательно единственный), строки и столбцы, выбором которых получен минор **называются базисными строками и столбцами**, число r **называется рангом матрицы** A: $r = \operatorname{rang} A$. Другими словами $\operatorname{rang} A$ – это наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

<u>6°.</u> Теорема о базисном миноре. Строки базисного минора – линейно независимы, и любая строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк.

Примечание: Теорема может быть сформулирована и доказана не только для строк, но и для столбцов.

◀ 1) Пусть $\operatorname{rang} A = r$. Не ограничивая общности можно считать, что первые r строк матрицы $a_1, a_2, \dots, a_r$ – базисные. Докажем их линейную независимость.

Пусть $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r = \theta$ и пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $a_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}a_2 - \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}a_3 - \dots - \dfrac{\alpha_r}{\alpha_1}a_r$,

т.е. первая строка является линейной комбинацией остальных, но тогда $\det M_r = 0$, что противоречит базисности минора M_r.

Значит $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ и, следовательно, базисные строки матрицы линейно независимы.

2) Пусть $\operatorname{rang} A = r$ и базисный минор M_r стоит в левом верхнем углу:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cc|c|cc} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1r}} & a_{1r+1} & \cdots & \underline{a_{1l}} & \cdots & a_{1n} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{21}} & \cdots & \underline{a_{11}} & a_{1r+1} & \cdots & \underline{a_{2l}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{a_{r1}} & \underline{a_{r2}} & \cdots & \underline{a_{rr}} & a_{rr+1} & \cdots & \underline{a_{rl}} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,l} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \underline{a_{k1}} & \underline{a_{k2}} & \cdots & \underline{a_{kr}} & a_{kr+1} & \cdots & \underline{a_{kl}} & \cdots & a_{kn} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{mr+1} & \cdots & \underline{a_{ml}} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right).$$

Рассмотрим определитель $(r+1)^{\text{го}}$ порядка, состоящий из подчеркнутых элементов: A_{r+1}.

По условию базисности минора M_r $\det A_{r+1} = 0$.

Разложим определитель A_{r+1} по последнему столбцу. $a_{1l}A_{1l} + \ldots + a_{rl}A_{rl} + a_{kl}A_{kl} = 0$; При этом $A_{kl} \neq 0$ (это $\det M_r$). Тогда $a_{kl} = a_{1l} - \frac{A_{1l}}{A_{kl}} - a_{2l}\frac{A_{2l}}{A_{kl}} - \cdots - a_{rl}\frac{A_{rl}}{A_{kl}}$.

Обозначим $c_1 = -\frac{A_{1l}}{A_{kl}}$; $c_2 = -\frac{A_{2l}}{A_{kl}}$; $\cdots; c_r = -\frac{A_{rl}}{A_{kl}}$; A_{kl} – это минор M_r и не зависит ни от k, ни от l. A_{il} — не зависит от l (при вычитании выбрасывается). Тогда $c_1, c_2, \ldots\ c_r$ не зависит от l, а зависит только от k. Имеем $a_{kl} = c_1a_{1l} + c_2a_{2l} + \ldots + c_ra_{rl}$. Последнее равенство показывает, что элементы $k^{й}$ строки выражены через элементы первых r строк. ▶

Из этой теоремы следует, что:

__7°.__ $\det A = 0$ тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

__8°.__ $\mathrm{rang}A = \dim\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \dim\mathcal{L}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$; $a_1, a_2, \ldots, a_\mathrm{m}$ – строки; $s_1, s_2, \ldots, s_\mathrm{n}$ – столбцы.

§5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, НЕ ИЗМЕНЯЮЩИЕ РАНГ МАТРИЦЫ

Следующие преобразования не изменяют ранг матрицы:

1) Транспонирование. ◀ При транспонировании определитель не меняется и поэтому, минорам равным нулю будет поставлено в соответствии миноры, равные нулю, а минорам не равным нулю будут соответствовать миноры, не равные нулю ($0 \leftrightarrow 0$ и $\rceil 0 \leftrightarrow \rceil 0$). ▶

2) Перестановка двух строк (столбцов). ◀ Любой минор – это полилинейный антисимметричный функционал $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots, a_r) = -\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots, a_r)$.

Отсюда ясно, что $0 \leftrightarrow 0$ и $\rceil 0 \leftrightarrow \rceil 0$. ▶

3) Умножение всех элементов строки (столбца) на число $C \neq 0$.

◀ $\varphi(a_1, a_2, \ldots, ca_k, \ldots, a_r) = c\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_r) \Rightarrow 0 \leftrightarrow 0$ и $\rceil 0 \leftrightarrow \rceil 0$. ▶

4) Прибавление ко всем элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца). ◀ Не ограничивая общности, можно считать, что к элементам $1^{й}$ строки прибавляются элементы $2^{й}$ строки

$$\varphi(a_1 + a_2, a_2, a_3, \ldots, a_r) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_r) + \varphi(a_1\ a_2, a_3, \ldots, a_r) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_r). \quad ▶$$

5) Вычеркивание нулевой строки (столбца). ◀ Включение в систему векторов нулевого вектора или выбрасывание нулевого вектора не изменяет $\dim\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. ▶

6) Вычеркивание строки (столбца), являющейся линейной комбинацией остальных.

◀ Достаточно воспользоваться свойствами 3), 4) и 5). ▶

§ 6. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается однородная система линейных уравнений с n-неизвестными:

$$Ax = 0 \qquad x(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

__9°.__ Если $\mathrm{rang}A = n$, то система имеет только тривиальное решение ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$);

Если $\mathrm{rang}A < n$, то система кроме тривиальных имеет и не тривиальные решения.

◀ Запишем систему $Ax = 0$ как линейную комбинацию столбцов: $x_1S_1 + x_2S_2 + \ldots + x_nS_n = 0$.

1) $\mathrm{rang}A = n \Rightarrow$ столбцы $S_1, S_2, \ldots, S_n$ линейно независимы $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (как коэффициенты тривиальной линейной комбинации линейно независимых векторов).

2) $\mathrm{rang}A = r < n \Rightarrow S_1, S_2, \ldots, S_n$ – линейно зависимы $\Rightarrow \exists$ ненулевой набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такой что $x_1S_1 + x_2S_2 + \ldots + x_nS_n = 0$. ▶

10°. Если $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$ два различных решения однородной системы $Ax = 0$, то $\forall\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$ $\alpha_1 c^{(1)} + \alpha_2 c^{(2)}$ тоже решение той же системы.

◀ Справедливость этого утверждения следует из известного свойства матриц

$A(\alpha_1 c^{(1)} + \alpha_2 c^{(2)}) = \alpha_1 A c^{(1)} + \alpha_2 A c^{(2)} = 0.$ ▶

По сути дела теперь можно утверждать, что множество решений однородной системы линейных уравнений образует линейное пространство L.

11°. Размерность пространства L решений линейной однородной системы уравнений $Ax = 0$ с n-неизвестными удовлетворяет соотношению: $\dim L = n - \operatorname{rang} A$.

◀ Пусть $\operatorname{rang} A = r$ и $S_1, S_2, \ldots, S_r$ – базисные столбцы матрицы A.

Записав систему $Ax = 0$ в виде $x_1S_1 + x_2S_2 + \ldots + x_rS_r = -x_{r+1}S_{r+1} - x_{r+2}S_{r+2} - \ldots - x_nS_n$, отметим, что по набору $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, всегда, и притом однозначно, находятся $x_1, x_2, \ldots, x_r$ (по теореме Крамера).

Пусть $(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ решение системы $Ax = 0$. Каждому такому вектору из L поставим в соответствие вектор $(c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n)$ из K_{n-r}. Это соответствие взаимно однозначно в силу сделанного выше замечания. Соблюдается это соответствие и при сложении векторов, и при умножении вектора на скаляр. Таким образом пространства L и K_{n-r} изоморфны и, следовательно, $\dim L = \dim K_{n-r} = n - r = n - \operatorname{rang} A$. ▶

Доказанная только что теорема дает и **способ построения базиса** в L.

Записав систему $Ax = 0$ в виде $x_1S_1 + x_2S_2 + \ldots + x_rS_r = -x_{r+1}S_{r+1} - x_{r+2}S_{r+2} - \ldots - x_nS_n$.

1) Положим $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = x_{r+3} = \ldots = x_n = 0$. Найдем $x_1', x_2', \ldots x_r'$ (они существуют и единственны по теореме Крамера). Получим вектор – решение: $e_1(x_1', x_2', \ldots x_r', 1, 0, 0, \ldots, 0)$.

2) Положим: $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = \ldots = x_n = 0$. Найдем $x_1^2, x_2^2, \ldots x_r^2$. Получим:

$e_2(x_1^2, x_2^2, \ldots x_r^2, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

3) Получим:
$$\begin{array}{l} e_1\left(x_1^2, x_2^2, \ldots x_r^2, 1, 0, 0, \ldots, 0\right) \\ e_2\left(x_1^2, x_2^2, \ldots x_r^2, 0, 1, 0, \ldots, 0\right) \\ e_3\left(x_1^2, x_2^2, \ldots x_r^2, 0, 0, 1, \ldots, 0\right) \\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ e_{n-r}\left(x_1^{n-r}, x_2^{n-r}, \ldots x_r^{n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1\right) \end{array}.$$

4) Построенная система векторов линейно независима и образует базис в L.

§7 НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается неоднородная система линейных уравнений $Ax = b$ с n-неизвест-ными.

12°. (Кронекер-Капелли). Система $Ax = b$ совместна тогда, и только тогда, когда ранг главной матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$ ($\tilde{A} = (A|b)$).

◀ 1) Пусть система $Ax = b$ – совместна $\Rightarrow \exists c$ такой, что $Ac = b$ т.е. $c_1S_1 + c_2S_2 + \ldots + c_nS_n = b$. Таким образом, последний столбец матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A $\Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$.

2). Пусть $\operatorname{rang} A = \tilde{A}$. Тогда базисные столбцы общие, т.е. являются столбцами матрицы A $\Rightarrow$ столбец b является линейной комбинацией столбцов $s_1, s_2, \ldots, s_n \Rightarrow \exists c_1, c_2, \ldots, c_n$ такие, что $c_1S_1 + c_2S_2 + \ldots + c_nS_n = b$ т.е. $Ac = b$. Система совместна. ▶

13°. Если неоднородная система линейных уравнений совместна и $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = n$, то она имеет единственное решение (по теореме Крамера).

Пусть теперь $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = r \leq n$.

14°. Разность двух различных решений неоднородной системы линейных уравнений является решением соответствующей однородной системы, т.е. если $c^{(2)}$ и $c^{(1)}$ два решения неоднородной системы $Ax = b$, то $c^{(2)} - c^{(1)}$ решением однородной системы $Ax = 0$.

◀ $A(c^{(2)} - c^{(1)}) = Ac^{(2)} - Ac^{(1)} = b - b = 0$, т.е. $c^{(2)} - c^{(1)} = c^{(0)}$. Здесь через $c^{(0)}$ обозначено некоторое решение однородной системы. ▶

15°. Сумма любого решения однородной системы $c^{(0)}$ и некоторого решения неоднородной системы $c^{(1)}$ есть решение неоднородной системы.

◀ $A(c^{(0)} - c^{(1)}) = Ac^{(0)} + Ac^{(1)} = 0 + b = b.$ ▶

Предыдущие два утверждения доказывают теорему об общем виде решения неоднородной системы и линейных уравнений.

16°. Общее решение неоднородной системы уравнений есть сумма общего решения однородной системы и некоторого частного решения неоднородной системы. Эту фразу можно записать с помощью легко запоминающейся аббревиатуры:

О. Р. Н. С. = О. Р. О. С. + Ч. Р. Н. С.

Способ решения неоднородных систем линейных уравнений таков:

1). Если $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\tilde{A} = n$, то решение единственно и может быть найдено по Крамеру;

2). Если $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\tilde{A} = r < n$ то, записав систему в виде

$$x_1S_1 + x_2S_2 + \ldots + x_rS_r = b - x_{r+1}S_{r+1} - \ldots - x_nS_n.$$

a) положив $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ равными любим фиксированным значениям, получим систему неоднородную (r- уравнений с r-неизвестными) имеющей единственное решение, ибо ее определитель не равен 0. Тем самым будет найдено частное решение неоднородной системы.

b) выбросив вектор b: $x_1S_1 + x_2S_2 + \ldots + x_rS_r = - x_{r+1}S_{r+1} - \ldots - x_nS_n$ и применяя процедуру, описанную в предыдущем параграфе, построим базис в пространстве L решений однородной системы уравнений $\{e_1, e_2, ..., e_{n-r}\}$.

c). Тогда $x^{(\text{неодн.})} = x^{(\text{частн.})} + \sum\limits_{i=1}^{n-r}\alpha_i e_i$.

Система векторов $\{e_1, e_2, ..., e_{n-r}\}$ **называется фундаментальной системой решений** для системы уравнений $Ax = 0$.

Если M – множество решений неоднородной системы уравнений, $x^{(r)}$– некоторое частное решение неоднородной системы уравнений, L– пространство решений соответствующей линейной однородной системы, то $M = x^{(r)} + L$, т.е. M – есть линейное многообразие размерности $n - r$.

§8. МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. (МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ)

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = -5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 16x_5 = 38 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 12x_4 + 15x_5 = 33 \end{cases}.$

Записав расширенную матрицу системы, преобразуем ее с помощью преобразований не изменяющих ранг матрицы. Цель: в первом столбце все элементы, кроме одного, должны стать равными нулю. Это равносильно тому, что из 2$^{\text{го}}$, 3$^{\text{го}}$ и 4$^{\text{го}}$ уравнений будет исключена неизвестная x_1. Для достижения цели первую строку, умноженную на 2, –3 и –1 прибавим, соответственно, к 2$^{\text{ой}}$, 3$^{\text{ей}}$ и 4$^{\text{ой}}$ строке. Получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & \vert & 8 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & \vert & -5 \\ 3 & 3 & 4 & 12 & 16 & \vert & 38 \\ 1 & 2 & 3 & 12 & 15 & \vert & 33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & \vert & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & \vert & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & \vert & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 10 & 12 & \vert & 25 \end{pmatrix}.$$

Примечание: здесь и в дальнейшем знак $\sim$, стоящий между двумя матрицами означает, что справа и слева от этого знака стоят матрицы одинакового ранга и, следовательно, системы линейных уравнений с такими матрицами имеют одинаковые решения.
Далее вторую строку, умноженную на -1 прибавим к $4^{\text{ой}}$ строке, тем самым исключив x_2 из третьего и четвертого уравнений и, наконец исключим x_3 из $4^{\text{го}}$ уравнения, прибавив третью строку, умноженную на -1 к четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & \vert & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & \vert & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & \vert & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 10 & 12 & \vert & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & \vert & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & \vert & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & \vert & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & \vert & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & \vert & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & \vert & 14 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}\tilde{A} = 3$. Система совместна. $n - r = 5 - 3 = 2$, $\dim L = \dim M = 2$. Так как, размерность пространства решений однородной системы равна 2, то в системе имеется две свободных неизвестных. Выберем в качестве свободных переменных x_3, x_4. Отделим в матрице свободные неизвестные вертикальной пунктирной линией: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 & 3 & \vert & 8 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 & 5 & \vert & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & 7 & \vert & 14 \end{pmatrix}$.

Положив $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, получим $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Т.е. частное решение неоднородной системы (1, 1, 1, 1, 1).

Далее рассмотрим однородную систему уравнений с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} &x_3 = -6x_4 - 7x_5 \\ &x_2 = -x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2x_4 + 2x_5 \\ &x_1 = -x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2x_4 + 2x_5 \end{aligned}.$$

Положив $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ $\Rightarrow e_1(2, 2, -6, 1, 0)$. Положив $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ $\Rightarrow e_2(2, 2, -7, 0, 1)$, ($e_1$, e_2 – базис пространства решений). Отсюда $x = (1,1,1,1,1) + \alpha(2,2,-6,1,0) + \beta(2,2,-7,0,1)$, где α, β – любые.

Если положить $x_4 = x_5 = 0$, то получим $x_3 = 14$, $x_2 = -3$, $x_1 = -3$, т.е. (–3, –3, 14, 0, 0) еще одно частное решение данной системы. Следовательно, общее решение исходной системы можно записать и в таком виде: $x = (-3, -3, 14, 0, 0) + \alpha(2, 2, -6, 1, 0) + \beta(2, 2, -7, 0, 1)$, где α, β – любые.

Нужно обратить внимание и на то, что разность двух частных решений неоднородной системы (–3, –3, 14, 0, 0) – (1, 1, 1, 1, 1) есть решение соответствующей однородной системы уравнений.

§9. «АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА»

Для квадратной системы $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} = b_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$):

а) или система имеет решение, притом единственное при любых b_j, если соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение ($\det A \neq 0$),

б) или соответствующая однородная система имеет ненулевые решения ($\det A = 0$) и, следовательно, есть такие b_j, при которых система не имеет решений.

РАЗДЕЛ 6. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§1. БИЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ. ЕГО МАТРИЦА

Пусть V – линейное вещественное пространство. Если имеется закон, по которому $\forall x$, $y\in V$ соответствует некоторое $\alpha\in\mathbf{R}$ (числовое поле). Т.е. $\forall x, y\in V \to \alpha = \varphi(x, y)\in\mathbf{R}$ такое, что выполняются требования:

$$\begin{cases}\varphi(x_1+x_2, y)=\varphi(x_1, y)+\varphi(x_2, y)\\ \varphi(\alpha x, y)=\alpha\varphi(x, y)\end{cases} \text{ – линейность по 1}^{\text{ому}}\text{ аргументу;}$$

$$\begin{cases}\varphi(x, y_1+y_2)=\varphi(x, y_1)+\varphi(x, y_2)\\ \varphi(x, \alpha y)=\alpha\varphi(x, y)\end{cases} \text{ – линейность по 2}^{\text{ому}}\text{ аргументу,}$$

то говорят, что в линейном пространстве V над полем $\mathbf{R}$ задан билинейный функционал или билинейная форма $\varphi(x, y)$.

Пусть $\{e_i\}_i^n$ – базис в V. Тогда $x=\sum\limits_i \xi_i e_i$, $y=\sum\limits_j \eta_j e_j$ и тогда

$\varphi(x, y)=\sum\limits_i\sum\limits_j \eta_j\xi_i\cdot\varphi(x, y)$, т.е. $\varphi(x, y)=\sum\limits_{i,j} a_{ij}\xi_i\eta_j$, где $a_{ij}=\varphi(e_i, e_j)$. Матрица $A=\left(a_{i,j}\right)_{ij=1}^n$ **называется матрицей билинейного функционала** (или билинейной формы) в базисе $\{e_i\}_i^n$.

Билинейный функционал (форма) **называется симметричным**, если $\forall x, y\in V$ $\varphi(x, y)=\varphi(y, x)$ и **антисимметричным**, если $\forall x, y\in V$ $\varphi(x, y)=-\varphi(y, x)$.

Естественно, что симметричной билинейной форме соответствует симметричная матрица (и наоборот), а антисимметричной билинейной форме соответствует кососимметричная матрица (и наоборот).

1°. Всякая билинейная форма может быть представлена в виде суммы симметрической и антисимметрической билинейных форм. Это представление единственно.

◀ $$\varphi^+(x, y)=\frac{\varphi(x, y)+\varphi(y, x)}{2};\qquad \varphi^-(x, y)=\frac{\varphi(x, y)-\varphi(y, x)}{2}.$$ ▶

§2. КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

Если в билинейной форме $\varphi(x, y)$ положить $y=x$, то получим частный случай билинейной формы – квадратичную форму $\varphi(x, x)$.

Представив билинейную форму $\varphi(x, y)$ в виде суммы симметрической и антисимметрической билинейных форм, получим:

$$\varphi(x, y)=\varphi^+(x, y)+\varphi^-(x, y)\xrightarrow{y=x}\varphi(x, x)=\varphi^+(x, x)+\underset{0}{\underset{||}{\varphi^-(x, x)}}.$$

Отсюда, ясно, что каждой билинейной форме однозначно ставится в соответствие квадратичная форма (ее матрица симметричная), но не наоборот. Т.е., в общем случае, по имеющейся квадратичной форме нельзя однозначно восстановить билинейную форму, из которой она получена. НО …

2°. Для каждой квадратичной формы существует, и при том только одна, симметричная билинейная форма, из которой получена данная квадратичная форма. (Эта симметричная билинейная форма **называется полярной** к заданной квадратичной форме).

◀ $\varphi(x+y, x+y)=\varphi(x, x)+\varphi(y, x)+\varphi(x, y)+\varphi(y, y)$ если $\varphi(x, y)=\varphi(y, x)$, то

$\varphi(x+y, x+y)=\varphi(x, x)+2\varphi(x, y)+\varphi(y, y)$, т.е. $\varphi(x, y)=\dfrac{1}{2}\{\varphi(x+y, x+y)-\varphi(x, x)-\varphi(y, y)\}$. ▶

§3. КЛАССИФИКАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

а) Если rang$A = n$ (A – матрица квадратичной формы, n – размерность пространства V), то форма $\varphi(x, x)$ (и форма $\varphi(x, y)$) **называется невырожденной**.

б) Форма **называется положительно** (**отрицательно**) определенной, если $\forall x \neq \theta$ $\varphi(x, x) > 0$ ($\varphi(x, x) < 0$). Такие формы **называются знакопостоянными**.

в) Если $\forall x \neq \theta$ $\varphi(x, x) \geq 0$ (или $\varphi(x, x) \leq 0$) то, форма $\varphi(x, x)$ **называется квазизнакопостоянной**.

г) Если $\exists x \neq 0$ и $\exists y \neq 0$ такое, что $\varphi(x, x) > 0$ и $\varphi(y, y) < 0$, то форма $\varphi(x, x)$ **называется знакопеременной**.

3°. Если форма $\varphi(x, y)$ полярная к форме $\varphi(x, x)$ и $\varphi(x, y)$ положительно определена то $\varphi(x, y)$ – задает в V скалярное произведение.

Доказать самостоятельно.

§4. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Учитывая, что элементы матрицы квадратичной формы $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ мы можем заключить, что элементы матрица квадратичной формы зависят от выбора базиса.

Если для формы $\varphi(x, x)$ в пространстве V существует базис $\{e_i\}_i^n$ в котором матрица $\varphi(x, x)$ имеет диагональный вид (т.е. $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$), и следовательно форма $\varphi(x, x)$ записывается так $\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\xi_i^2$ то такой базис **называется каноническим базисом** $\varphi(x, x)$ в пространстве V а запись формы в этом базисе называется каноническим видом формы.

Постановка задачи: Для формы $\varphi(x, x) \neq 0$ найти базис, в котором форма имеет канонический вид.

Метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) приведения формы к каноническому виду.

Пусть в некотором базисе $\{f_i\}_i^n$ форма имеет вид: $\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$.

1). Пусть $a_{ii} = 0$ ($\forall i$), но $\exists a_{ij} \neq 0$. Не ограничивая общности можно считать, что $a_{12} \neq 0$. Тогда $\xi_1 = \xi_1' + \xi_2'; \xi_2 = \xi_1' - \xi_1'$ и получим $a_{12}\xi_1\xi_2 = a_{12}\xi_1'^2 - a_{12}\xi_2'^2 = a_{11}'\xi_1'^2 - a_{22}\xi_2'^2$ (в записи формы появились члены, содержащие квадраты координат).

2). $\exists a_{ii} \neq 0$. Допустим, что $a_{12} \neq 0$. Тогда:

$$\varphi(x,y) = a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_1\xi_n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j = a_{11}\left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + \ldots + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_n\right)^2 +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}\xi_i\xi_j = a_{11}\eta_1^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}\xi_i\xi_j = \ldots = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2 .$$

$$\text{При этом:} \begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\xi_1\xi_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}\xi_1\xi_3 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_1\xi_n, \\ \eta_2 = \xi_2 + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}}\xi_2\xi_3 + \dfrac{a'_{24}}{a'_{22}}\xi_2\xi_4 + \ldots + \dfrac{a'_{2n}}{a'_{22}}\xi_2\xi_n \\ \eta_3 = \xi_3 + \dfrac{a''_{34}}{a''_{33}}\xi_3\xi_4 + \ldots + \dfrac{a''_{3n}}{a''_{33}}\xi_3\xi_n \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{cases} .$$

Связь между координатами ξ_i и η_i позволяет установить векторы нового базиса $\{e_i\}_i^n$.

Пример:

$$\xi_1^2 + 5\xi_2^2 + 4\xi_3^2 - \xi_4^2 + 6\xi_1\xi_2 - 4\xi_1\xi_3 - 12\xi_2\xi_3 - 4\xi_2\xi_4 - 8\xi_3\xi_4 = (\xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_3)^2 +$$

$$+ 5\xi_2^2 + 4\xi_3^2 - \xi_4^2 - 12\xi_2\xi_3 - 4\xi_2\xi_4 - 8\xi_3\xi_4 - 9\xi_2^2 - 4\xi_3^2 + 12\xi_2\xi_3 = \langle \eta_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_3 \rangle =$$

$$= \eta_1^2 - 4\xi_2^2 - 4\xi_2\xi_4 - \xi_4^2 - 8\xi_3\xi_4 = \eta_1^2 - (2\xi_2 + \xi_4)^2 - 8\xi_3\xi_4 = \left\{ \eta_2 = 2\xi_2 + \xi_4 \right\} =$$

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 - 8\xi_3\xi_4 = \left\{ \begin{matrix} \xi_3 = \eta_3 + \eta_4 \\ \xi_4 = \eta_3 - \eta_4 \end{matrix} \right\} = \eta_1^2 - \eta_2^2 - 8\eta_3^2 + 8\eta_4^2.$$

При этом $\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_3 \\ \eta_2 = 2\xi_2 + \xi_4 \\ \eta_3 = \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4 \\ \eta_3 = \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\xi_4 \end{cases}$, т.е. $\begin{matrix} (1,0,0,0) \to (1,0,0,0) \\ (0,1,0,0) \to (3,2,0,0) \\ (0,0,1,0) \to (-2,0,1/2,1/2) \\ (0,0,0,1) \to (0,1,1/2,-1/2) \end{matrix}$.

Векторы нового базиса e_1, e_2, e_3, e_3, получаются из старых f_1, f_2, f_3, f_4 так:

$$e_1 = f_1; \quad e_2 = 3f_1 + 2f_2; \quad e_3 = -2f_1 + 0{,}5f_3 + 0{,}5f_4; \quad e_4 = 0{,}5f_3 - 0{,}5f_4.$$

Метод Якоби приведения формы к каноническому виду.

Пусть форма $\varphi(x, x)$ в базисе $\{f_i\}_{i=1}^n$ имеет матрицу A, где $a_{ik} = \varphi(f_i, f_k)$; и, при этом, главные миноры матрицы квадратичной формы отличны от нуля: $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$, …, $\Delta_n = \det A \neq 0$. Форма $\varphi(x, x)$ в базисе $\{f_i\}_{i=1}^n$ имеет вид: $\varphi(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$. Требуется найти базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, чтобы $\varphi(e_i, e_k) = 0$ $(i \neq k)$. Векторы канонического базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, ищем из соотношений:

$$\begin{matrix} e_1 = \alpha_{11} f_1 \\ e_2 = \alpha_{21} f_1 + \alpha_{22} f_2 \\ e_3 = \alpha_{31} f_1 + \alpha_{32} f_2 + \alpha_{33} f_3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ e_k = \alpha_{k1} f_1 + \alpha_{k2} f_2 + \dots + \alpha_{kk} f_k \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{matrix} . \qquad (1)$$

При этом, нетрудно заметить, что $\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathcal{L}(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Отметим, что если $\varphi(e_k, f_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, то $\varphi(e_i, e_k) = 0$ $i = 1, 2, \dots, k-1$. В счамом деле

$$\varphi(e_i, e_k) = \varphi(e_k, \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \dots + \alpha_{ii} f_i) = 0.$$

Тогда коэффициенты α_{ij} будем искать из соотношений:

$$\begin{matrix} \varphi(e_k, f_i) = 0 \quad (j < k) \\ \varphi(e_k, f_k) = 1. \end{matrix} \qquad (*)$$

Тогда для коэффициентов разложения: $e_k = \alpha_{k1} f_1 + \alpha_{k2} f_2 + \alpha_{k3} f_3 + \dots + \alpha_{kn} f_n$ из условий (*), получим систему уравнений :

$\varphi(e_k, f_1) = \alpha_{k1}\varphi(f_1, f_1) + \alpha_{k2}\varphi(f_2, f_1) + \alpha_{k3}\varphi(f_3, f_1) + \dots \dots \dots + \alpha_{kk}\varphi(f_k, f_1) = 0$

$\varphi(e_k, f_2) = \alpha_{k1}\varphi(f_1, f_2) + \alpha_{k2}\varphi(f_2, f_2) + \alpha_{k3}\varphi(f_3, f_2) + \dots \dots \dots + \alpha_{kk}\varphi(f_k, f_2) = 0$

… …

$\varphi(e_k, f_{k-1}) = \alpha_{k1}\varphi(f_1, f_{k-1}) + \alpha_{k2}\varphi(f_2, f_{k-1}) + \alpha_{k3}\varphi(f_3, f_{k-1}) + \dots \dots + \alpha_{kk}\varphi(f_k, f_{k-1}) = 0$

$\varphi(e_k, f_k) = \alpha_{k1}\varphi(f_1, f_k) + \alpha_{k2}\varphi(f_2, f_k) + \alpha_{k3}\varphi(f_3, f_k) + \dots \dots \dots \dots + \alpha_{kk}\varphi(f_k, f_k) = 1$

Полученная система линейных уравнений имеет единственное решение, ибо ее определитель $\Delta_k \neq 0$. При этом получим, что: $\varphi(e_k, e_i) = 0$ $(k < i)$, и $\varphi(e_k, e_k) \neq 0$.

Запишем:

$$\varphi(e_k, e_k) = \alpha_{k1}\varphi(e_k, f_1) + \alpha_{k2}\varphi(e_k, f_2) + \alpha_{k3}\varphi(e_k, f_3) + \dots + \alpha_{kk-1}\varphi(e_k, f_{k-1}) + \alpha_{kk}\varphi(e_k, f_k) = \alpha_{kk}.$$

Найти α_{kk} можем из системы уравнений, которая записана выше, по правилу Крамера: $\alpha_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$. Таким образом, форма $\varphi(x, x)$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ имеет канонический вид:

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\eta_i^2, \text{ где } \alpha_{11} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}, \ \alpha_{22} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \ \alpha_{33} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \ \ldots, \ \alpha_{nn} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}. \quad \text{Здесь } \Delta_0 = 1.$$

Пример приведения квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.

Пусть форма: $\varphi(x, x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^3 + x_3^2$ задана в базисе $f_1(2, 0, 0)$, $f_2(0, 1, 0)$, $f_3(0, 0, 1)$, а полярная ей билинейная форма имеет вид:

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + \frac{3}{2}x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Матрица билинейной формы и соответствующей ей квадратичной формы равна: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и ее главные миноры: $\Delta_1 = 2$; $\Delta_2 = -1/4$; $\Delta_3 = -17/4$. Векторы e_1, e_2, e_3 ищем в виде:

$e_1 = \alpha_{11}f_1 = (\alpha_{11}, 0, 0)$, $e_2 = \alpha_{21}f_1 + \alpha_{22}f_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, 0)$, $e_3 = \alpha_{31}f_1 + \alpha_{32}f_2 + \alpha_{33}f = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$.

Получаем:

а) $\varphi(e_1, f_1) = 1 \Rightarrow 2\alpha_{11} = 1 \rightarrow \alpha_{11} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow e_1\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$;

б) $\begin{cases} \varphi(e_2, f_1) = 0 \\ \varphi(e_2, f_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2\alpha_{21} + \frac{3}{2}\alpha_{22} = 0 \\ \frac{3}{2}\alpha_{21} + \alpha_{22} = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_{21} = 6 \\ \alpha_{22} = -8 \end{matrix} \Rightarrow e_2(6, -8, 0)$;

в) $\begin{cases} \varphi(e_3, f_1) = 0 \\ \varphi(e_3, f_2) = 0 \\ \varphi(e_3, f_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2\alpha_{31} + \frac{3}{2}\alpha_{32} + 2\alpha_{33} = 0 \\ \frac{3}{2}\alpha_{31} + \alpha_{32} \qquad = 0 \\ 2\alpha_{31} \qquad + \alpha_{33} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha_{31} = \dfrac{8}{17};\ \alpha_{32} = -\dfrac{12}{17};\ \alpha_{33} = \dfrac{1}{17} \Rightarrow$

$$e_3 = \frac{1}{17}(8, -12, 1).$$

Получены векторы канонического базиса:

$$e_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \frac{1}{2}f_1; \quad e_2(6, -8, 0) = 6f_1 - 8f_2; \quad e_3 = \frac{1}{17}(8, -12, 1) = \frac{1}{17}(8f_1 - 12f_2 + f_3)$$

и в этом базисе форма $\varphi(x, x)$ имеет канонический вид:

$$\varphi(x, x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\xi_3^2 = \frac{1}{2}\xi_1^2 - 8\xi_2^2 + \frac{1}{17}\xi_3^2.$$

§5. КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА

__4°.__ Для того чтобы форма $\varphi(x, x)$ была положительно определена необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_i > 0$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)$.

◀ <u>Достаточность.</u> Если $\Delta_i > 0$, то $\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i^2$, где $\lambda_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ т.е. $\lambda_i > 0$ и тогда форма $\varphi(x, x) > 0$.

<u>Необходимость</u>: $\varphi(x, x) > 0$. Покажем, что $\Delta_k > 0$. От противного:

а) Предположим, что $\Delta_k > 0$, $\Delta_i < 0$ и нет $\Delta_j = 0$ по Якоби $\exists \lambda_i$ тогда $\varphi(x, x) < 0$ если: $x\left(0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0\right)$, что противоречит положительной определенности квадратичной формы.

б). Пусть $\Delta_k = 0$, $\begin{vmatrix} \varphi(f_1, f_1) & \dots & \varphi(f_1, f_k) \\ \varphi(f_2, f_1) & \dots & \varphi(f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(f_k, f_1) & \dots & \varphi(f_k, f_k) \end{vmatrix} = 0$, т.е. одна из строк минора есть линейная комбинация остальных:

$$\mu_1\varphi(f_1, f_i) + \ldots + \mu_k\varphi(f_k, f_i) = 0, \quad \mu_k \neq 0, \; i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$\varphi(\mu_1 f_1 + \ldots + \mu_k f_k, f_i) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum_j \mu_j f_j,\, f_i\right) = 0 \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi\left(\sum_j \mu_j f_j,\, \sum_i \mu_i f_i\right) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x, x) = 0,\; x \neq 0.$ Вновь получено противоречие с положительной определенностью формы. ▶

5°. Для того чтобы форма $\varphi(x, x)$ была отрицательно определена необходимо и достаточно чтобы: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ … (главные миноры чередуются по знаку, начиная с “–”).

◀ Если форма $\varphi(x, x)$ отрицательно определена, то форма $\varphi^{-}(x, x) = -\varphi(x, x)$ положительно определена. Тогда матрицы формы $\varphi(x, x)$ отличаются на множитель (-1) а, следовательно, миноры Δ_k отличаются на множитель $(-1)^k$. ▶

§6. ЗАКОН ИНЕРЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Следующую теорему называют законом инерции квадратичных форм.

6°. Если форма приведена к каноническому виду двумя различными способами, то число положительных и отрицательных канонических коэффициентов одинаково.

◀ Пусть в базисе $\{e_i\}$ форма $\varphi(x,x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_n^2$ и в базисе $\{f_i\}$ форма $\varphi(x,x) = \tilde{\xi}_1^2 + \ldots + \tilde{\xi}_{p'}^2 - \tilde{\xi}_{p'+1}^2 - \ldots - \tilde{\xi}_n^2$ и пусть $p' > p$. Из второго соотношения следует, что размерность пространства векторов, на которых форма положительна равна p' : $\dim L^+ = p'$, а из первого, что $\dim L^- = n - p$. Так, как $p' + n - p > n$ следует, что $\dim(L^+ \cap L^-) \neq 0$ т.е. $\exists x \neq \theta \mid x \in L^+, x \in L^-$ но тогда $\begin{matrix} \varphi(x,x) > 0 & (x \in L^+) \\ \varphi(x,x) < 0 & (x \in L^-) \end{matrix}$. Противоречие. ▶

Количество положительных и отрицательных канонических коэффициентов **называется положительным и отрицательным индексом инерции**.

РАЗДЕЛ 7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Закон, по которому элементам $x \in V_1$ ставятся в соответствие элементы пространства $y \in V_2$ $(y = Ax)$ – **называется оператором из пространства** V_1 в пространство V_2.

Если $V_1 = V_2 = V$ то оператор A **называется оператором в пространстве** V.

Оператор $y = Ax$ **называется линейным** если:

а) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$, $\forall x_1, x_2 \in V$.

б) $\alpha A(x) = \alpha Ax$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$.

Примеры линейных операторов:

1) $\Theta x = 0$ (нулевой оператор);
2) $Ex = x$ (единичный оператор);
3) $Ax = \lambda x$ (оператор подобия);
4) $\dfrac{d}{dt} P_n(t) = P_{n-1}(t)$ (оператор дифференцирования).

§2. ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть A и B линейные операторы на V.

1) $A = B \Rightarrow \forall x \in V \quad Ax = Bx$ (равенство операторов);
2) $C = A + B \iff Cx = (A + B)x \equiv Ax + Bx$ (сумма операторов);
3) $C = \lambda A \iff Cx = (\lambda A)x = \lambda \cdot Ax$ (умножение оператора на скаляр);

свойства 2) и 3) определяют пространство линейных операторов, заданных на V.

4) $C = A \cdot B \iff Cx = (AB)x = A\cdot (Bx)$ (умножение операторов);
5) $C(\alpha x + \beta y) = \alpha Cx + \beta Cy$ (линейность оператора $C = A\cdot B$);
6) $\lambda(A\cdot B) = (\lambda A)B$;
7) $A(B\cdot C) = (A\cdot B)C$;
8) $(A + B)C = AC + BC$; $\quad A(B + C) = AB + AC$.

Свойства 4), 5), 6), 7), 8) вводят на множестве линейных операторов вторую внутреннюю операцию, коротая совместно с 2), 3) позволяет говорить о алгебре линейных операторов на V.

§3. СВЯЗЬ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МАТРИЦАМИ

Пусть A – линейный оператор на V, а $\{e_i\}_i^n$ базис V. Тогда $\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$.

$$Ax = A\left(\sum_i \xi_i e_i\right) = \sum_i \xi_i Ae_i = \left\langle Ae_i = y_i = \sum a_{ij} e_j \right\rangle = \sum_i \xi_i \sum_j a_{ij} e_j = \sum_i \sum_j \xi_i a_{ij} e_j .$$

Таким образом действие оператора A на $\forall x \in V$ полностью определяется числами (a_{ij}) образующими матрицу которая называется матрицей линейного оператора A.

Преобразование, проведенное выше, указывает и способ построения матрицы линейного оператора в заданном базисе. Подействуем линейным оператором на векторы базиса, получившиеся векторы разложим в том же базисе и коэффициенты разложения запишем в соответствующие столбцы матрицы линейного оператора.

<u>**1°.**</u> В заданном базисе $\{e_i\}_i^n$ между квадратичными матрицами и линейными операторами существует взаимно однозначное соответствие.

<u>**Пример**</u>. Найти матрицу линейного оператора $A = \dfrac{d}{dx}$ в пространстве функций вида $\{A\cos(t + \alpha)\}$ в базисе $e_1 = \cos t$, $e_2 = \sin t$.

Подействуем оператором A на e_i , полученный вектор разложим в базисе $\{\cos t, \ \sin t\}$ и координаты этого вектора запишем в i-й столбец: $\begin{array}{l} Ae_1 = \dfrac{d}{dt}\cos t = -\sin t = 0\cdot e_1 - 1\cdot e_2 \\ Ae_2 = \dfrac{d}{dt}\sin t = \cos t = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 \end{array}$.

Тогда $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Это и есть матрица линейного оператора $\dfrac{d}{dt}$.

В самом деле: $(3\cos(t + 5))' = ?$

$$3\cos(t+ 5) = 3\cos 5\cos t - 3\sin 5\sin t = 3\cos 5 e_1 - 3\sin 5 e_2.$$

Тогда $\quad Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\cos 5 \\ -3\sin 5 \end{pmatrix} = y$.

$y = -3\sin 5 e_1 - 3\cos 5 e_2 = -3\sin 5\cos t - 3\cos 5\sin t = -3\sin(t+ 5)$.

§4. ЗАКОН УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Рассмотрим линейный оператор A, который действует из пространства R_n в пространство R_m, а оператор B действует из пространства R_m в пространство R_p. Тогда оператор $C = BA$ действует из пространства R_n в пространство. Пусть $\{e_i\}_1^n$, $\{f_i\}_1^m$ и $\{g_i\}_1^p$ – базисы пространств R_n, R_m и R_p соответственно, т.е.

$$\begin{array}{ccccc} R_n & \xrightarrow{A} & R_m & \xrightarrow{B} & R_p \\ \{e_i\}_1^n & & \{f_i\}_1^m & & \{g_i\}_1^p \end{array}.$$

Тогда $Ae_i = y_i(\in R_m) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} f_j$; $Bf_j = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{jk} g_k$; $Ce_i = \sum\limits_{1}^{p} c_{ik} g_k = \sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{m} b_{jk} a_{ji} g_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_{ki} = \sum_{j=1}^{p} b_{kj} a_{ji}\text{, т.е.}$$

2°. Матрица оператора $C = B{\cdot}A$ есть произведение матриц оператора B и оператора A.

§5. ЯДРО И ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть в линейном пространстве V задан линейный оператор $\boldsymbol{A}$.

Множество $M(A) \equiv \{y \in V \,|\, y = Ax,\ x \in V\}$ **называется образом линейного оператора** A.

Множество $N(A) \equiv \{x \in V \,|\, Ax = 0\}$ **называется ядром линейного оператора** A.

Пример. Если в трехмерном геометрическом пространстве рассмотреть оператор A проектирования векторов на плоскость xOy , то сама плоскость xOy будет образом линейного оператора, а ось Oz будет ядром этого же оператора.

3°. Образ линейного оператора A есть подпространство.

◀1) Пусть $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2 \Rightarrow A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$, т.е. если $y_1, y_2 \in M(A) \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in V$.

2) $y = Ax = A(x + \theta_x) = Ax + A\theta_x = y + \theta_y \Rightarrow \theta_y = \theta$ т.е. нейтральный элемент переходит в нейтральный. ▶

4°. Ядро линейного оператора A есть подпространство. ◀ ▶

Если $N(A) = \{\theta\}$ то оператор A **называется невырожденным**.

5°. $\dim M(A) = \operatorname{rang} A = r$; $\dim N(A) = n - r$; $\dim V = \dim M(A) + \dim N(A)$.

Доказать самостоятельно

Величина $(n - r)$ т.е. размерность ядра линейного оператора **называется дефектом линейного оператора**.

§6 НЕВЫРОЖДЕННЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР

Линейный оператор A **называется невырожденным** если $N(A) \equiv \{\theta\}$ т.е. $Ax = \theta \Rightarrow x = \theta$. (в нейтральный переходит только нейтральный).

6°. Если оператор A невырожденный, то $\det A \neq 0$ для любого базиса.

◀ В самом деле, если a_{ij} – элементы матрицы оператора A в некотором базисе и S_j ее столбцы, то требование $Ax = \theta \Rightarrow x = \theta$ можно записать в виде:

$$S_1x_1 + S_2x_2 + \ldots + S_nx_n = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

но это равносильно требованию линейной независимости столбцов матрицы оператора что (в свою очередь) равносильно требованию, что $\det A \neq 0$. ▶

7°. Если оператор A невырожденный, то существует и обратный ему линейный оператор A^{-1}.

◀ Это следует из того что для невырожденной матрицы A существует обратная матрица и из взаимно однозначного соответствия между матрицами и линейными операторами. ▶

8°. Если к A существует обратный A^{-1}, то $\det A \neq 0$.

◀ $Ax = 0$ (применим A^{-1}), то: $\left.\begin{aligned} A^{-1}(Ax) = A^{-1}\theta = \theta \\ A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = x \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \theta.$ ▶

Если $\dim V = n$ и A невырожденный оператор то $\operatorname{rang} A = n$, дефект оператора A равен нулю.

′ 8°. Невырожденный оператор осуществляет взаимно однозначные соответствие **R** на **R**.

◀ $Ax = Ay \Rightarrow Ax - Ay = A(x - y) = \theta \Rightarrow x - y = \theta \Rightarrow x = y.$ ▶

9°. Если $\det A \neq 0$ то линейно независимые векторы переходят в линейно-независимые векторы.

◀ Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимые. Под действием A они переходят в $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$. Пусть $\alpha_1Ae_1 + \alpha_2Ae_2 + \ldots + \alpha_nAe_n = \theta \Rightarrow A(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \ldots + \alpha_ne_n) = \theta \Rightarrow$

$$(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \ldots + \alpha_ne_n) = \theta \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0. \quad ▶$$

§7 ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Подпространство V_1 пространства V **называется инвариантным** относительно линейного оператора A если $\forall x \in V_1 \Rightarrow Ax \in V_1$.

Примеры:

1) A – поворот вокруг оси Oz обычного трехмерного пространства: Инвариантные подпространства: плоскость xOy и ось Oz.

2) A – ортогональное проектирование того же трехмерного пространства на плоскость xOy. Инвариантные подпространства: плоскость xOy, все плоскости проходящие через ось Oz, сама ось Oz, все прямые в плоскости xOy и проходящее через начало координат.

3) В пространстве P_n многочленов степени не выше n, подпространства P_k $\forall k$, $0 \leq k \leq n$ инвариантны относительно оператора дифференцирования.

4) В любом пространстве V каждое подпространство инвариантно относительно тождественного и нулевого операторов.

5) В любом пространстве V само пространство V и подпространство, состоящее только из нулевого вектора $\{\theta\}$ инвариантны относительно любого линейного оператора.

10°. Пересечение и сумма подпространств инвариантных относительно A также инвариантны относительно A.

◀ Пусть V_1 и V_2 – инвариантны относительно A.

Пусть $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x \in V_1, x \in V_2 \Rightarrow Ax \in V_1, Ax \in V_2 \Rightarrow Ax \in V_1 \cap V_2$.

Пусть $x \in V_1 + V_2 \Rightarrow x = u + v$, $u \in V_1, v \in V_2 \Rightarrow Ax = Au\big|_{\in V_1} + Av\big|_{\in V_2} \Rightarrow Ax \in V_1 + V_2$. ▶

11°. Если $\det A \neq 0$ и V_1 инвариантно относительно оператора A, то V_1 инвариантно и относительно оператора A^{-1}.

◀ Пусть $e_1, e_2, \ldots e_n$ – базис $V_1 \Rightarrow Ae_1, Ae_2, \ldots Ae_n$ – принадлежат V_1 (из инвариантности), линейно независимы и, следовательно, образуют базис в $V_1 \Rightarrow \forall Ax \in V_1$

$$x = \alpha_1Ae_1 + \alpha_2Ae_2 + \ldots + \alpha_rAe_r \Rightarrow A^{-1}x = A^{-1}(\alpha_1Ae_1 + \alpha_2Ae_2 + \ldots + \alpha_rAe_r) =$$
$$= \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \ldots + \alpha_re_r \in V_1. \quad ▶$$

12°. Пусть A произвольный линейный оператор в V, $(\dim V = n)$ и пусть $V = V_1 \oplus V_2$, где V_1 и V_2 – инвариантные подпространства оператора A. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_r$ – базис в V_1, $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n$ – базис в V_2. Тогда в силу инвариантности V_1 и V_2 относительно A:

$$Ae_i = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \ldots + \alpha_{ri}e_r, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$Ae_i = \alpha_{r+1,\,i}\,e_{r+1} + \ldots + \alpha_{n\,i}\,e_n, \quad i = r+1, r+2, \ldots, n.$$

И, следовательно, матрица линейного оператора A имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{r+1\,r+1} & a_{r+1r+2} & \ldots & a_{r+1n} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{r+2\,r+1} & a_{r+2\,r+2} & \ldots & a_{r+2\,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n\,r+1} & a_{n\,r+2} & \ldots & a_{n\,n}
\end{array}\right).$$

Говорят, что матрица A имеет блочную структуру (распадается на клетки): $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

§8 СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Def: Вектор $x \neq \theta$ линейного пространства V называется **собственным вектором линейного оператора** A если $\exists \lambda_0 \in \mathbf{K}$ такое что $Ax = \lambda_0 x$. Число λ_0 **называется собственным значением** соответствующим собственному вектору x .

13°. Если V_1 – одномерное инвариантное подпространство оператора A то каждый $x \neq \theta$ и $x \in V_1$ является собственным вектором оператора A и, притом, с одним и тем же собственным значением.

14°(обратное). Если x собственный вектор A то $\mathcal{L}(x)$ инвариантно относительно оператора A.

◀ $1)_{13}$ V_1 – одномерное подпространство с базисом $\{e\}$:

$\forall x \in V_1 \Rightarrow x = \alpha e \Rightarrow Ax\big|_{\in V_1} = Ae\alpha = \alpha Ae = \alpha\widetilde{e} = \lambda x \in V_1$ (любой x из V_1 собственный) $\Rightarrow Ax = \lambda x$.

$2)_{13}$ Если $Ax_1 = \lambda x_1 \Rightarrow$ Пусть $x_2 = \alpha x_1 \Rightarrow Ax_2 = A(\alpha x_1) = \alpha Ax_1 = \alpha\lambda x_1 = \lambda\alpha x_1 = \lambda x_2$ (для всех x одно и тоже собственное значение).

$3)_{14}$ Пусть $Ax = \lambda x$. Рассмотрим $\mathcal{L}(x)$:

$\forall y \in \mathcal{L}(x) \Rightarrow y = \alpha x \Rightarrow Ay = A\alpha x = \alpha Ax = \alpha\lambda x = \beta x \in \mathcal{L}(x)$. ▶

Задача. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A.

Пусть $x \neq \theta$ и $Ax = \lambda_0 x$, т.е. x – собственный вектор оператора A, а λ_0 – соответствующее ему собственное значение. $Ax = \lambda_0 x$ тогда $Ax = \lambda_0 x = (A - \lambda_0 E)x = 0$ имеем однородную систему n линейных уравнений с n неизвестными. Т.к. $x \neq \theta$, то чтобы система имела нетривиальные решения необходимо, чтобы $\det(A - \lambda_0 E) = 0$:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda_0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} - \lambda_0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} - \lambda_0
\end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим многочлен $n^й$ степени относительно λ, который **называется характеристическим многочленом оператора** A: $\varphi(\lambda)$.

′ 13°. Характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ оператора A не зависит от выбора базиса. ◀ ▶

Итак: Каждое собственное значение линейного оператора A является корнем его характеристического многочлена. Обратное утверждение справедливо в комплексном линейном пространстве и не справедливо в вещественном линейном пространстве для комплексных корней характеристического полинома.

Нахождение собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0 сводится к решению (нахождению ненулевых решений) системы $(A - \lambda_0 E)x = 0$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен: $\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$, тогда собственные значения оператора A: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$. Найдем собственные векторы:

1) $\lambda_1 = 6$; $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{2}{5}x_2 \Rightarrow e_1 = (2,\ 5) = e_1$;

2) $\lambda_2 = -1$; $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow (1,\ -1) = e_2$.

′ 14°. Если линейный оператор A имеет n линейно-независимых собственных векторов e_1, e_2, …, e_n с собственными значениями λ_1, λ_2, …, λ_n то матрица оператора A будет в этом базисе иметь вид: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ и наоборот: если в некотором базисе матрица имеет диагональный вид то векторы этого базиса являются собственными векторами оператора A.

15°. Собственные векторы линейного оператора A, отвечающие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

◀ Доказательство проведем методом математической индукции. Если собственный вектор только один, то утверждение теоремы, очевидно, справедливо.

Пусть утверждение справедливо для $k - 1$ векторов, т.е. что $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ собственные векторы соответствующие $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ (различным) линейно независимы. И пусть x_k вектор собственный с собственными значениями $\lambda_k \neq \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, k - 1$). Пусть

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + \alpha_k x_k = 0, \qquad (*)$$

тогда применим к (*) оператор A: $\alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_k Ax_k = \alpha_1\lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1}x_{k-1} + + \alpha_k\lambda_k x_k = 0$, теперь умножим (*) на λ_k: $\alpha_1\lambda_k x_1 + \dots + \alpha_{k-1}\lambda_k x_{k-1} + \alpha_k\lambda_k x_k = 0$ и вычтем из первого полученного равенства второе $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)x_2 + \dots + + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0$, т.к. x_1, x_2, …, x_{k-1} линейно независимы и $\lambda_k \neq \lambda_i$ получаем: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$, подставляя в (*) получим $\lambda_k = 0$, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ и следовательно $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ – линейно независимы. ▶

Таким образом:

16°. Если линейный оператор имеет n различных собственных значений, то, отвечающие им собственные векторы образуют базис и в этом базисе матрица оператора имеет диагональный вид.

§9. СПЕКТР ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Множество всех собственных значений линейного оператора **называется его спектром**.

Спектр линейного оператора зависит от того каковы корни характеристического многочлена.

<u>17°</u>. В комплексном векторном пространстве V каждый линейный оператор A имеет, по крайней мере, хотя бы один собственный вектор и следовательно в V существует, по крайней мере, одно одномерное инвариантное относительно A подпространство.

◀ Справедливость этого следует из «основной теоремы алгебры». ▶

Более того $\varphi(\lambda) = 0$ в комплексном пространстве V имеет ровно n корней, с учетом их кратности: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)=(-1)^n\left[\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\ldots\right]$. С другой стороны

$$\varphi(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_n)=(-1)^n\left[\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\ldots\right]$$

<u>18°</u>. $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n = a_{11}+a_{11}+\ldots+a_{nn} = \mathrm{tr}A = \mathrm{Sp}A$.

(trace) (Spur)
англ. нем.

◀ Величина $a_{11}+a_{11}+\ldots+a_{nn}$ **называется следом матрицы** A, но т.к. характеристический полином не зависит от выбора базиса то и $\mathrm{Sp}A$ не зависит от базиса и **называется следом линейного оператора**. ▶

<u>19°</u>. Для всякого линейного оператора A в вещественном пространстве размерности $n>2$ существует одномерное или двухмерное инвариантное подпространство.

◀ Если $\varphi(\lambda) = 0$ имеет хотя бы один вещественный корень λ_0 то оператор A имеет собственный вектор и, следовательно, одномерное инвариантное относительно A подпространство.

Если $\varphi(\lambda) = 0$ не имеет вещественных корней, то существует комплексный корень $\lambda = \alpha + \beta i$. Решая относительно этого λ систему $Az = \lambda z$, найдем комплексное решение $z = x + iy$. Т.е.

$$A(x+iy) = (\alpha+i\beta)(x+iy) = (\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y).$$

Приравнивая, вещественные и мнимые части правой и левой части равенства получим: $\begin{matrix} Ax=\alpha x-\beta y \\ Ay=\beta x+\alpha y \end{matrix}$. Отсюда ясно, что $\mathcal{L}(x, y)$ есть подпространство, инвариантное относительно оператора A. ▶

И, наконец, еще два утверждения о спектре линейного оператора.

<u>20°</u>. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – все собственные значения оператора A, с учетом их кратностей и $f(t)$ произвольный многочлен, то $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, …, $f(\lambda_n)$ **–** это все собственные значения оператора $f(A)$, причем кратность $f(\lambda_i)$ такая же как и кратность λ_i (собственные векторы при это не меняются).

Доказать самостоятельно.

<u>21°</u>. Если $Ax = \lambda_0 x$ и $\det A \neq 0$, то существует A^{-1} и кроме того $A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda_0}x$.

◀ $Ax = \lambda_0 x$. Действуем оператором A^{-1}. $A^{-1}Ax = \lambda_0 A^{-1} \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_0}x = A^{-1}x$. ▶

РАЗДЕЛ 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ БАЗИСА

§1. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА

Пусть в линейном пространстве V задан базис $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ и другой базис $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}$. Разложим векторы f_k по базису $\{e_i\}$: $\begin{cases} f_1 = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n \\ f_2 = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_n = p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n \end{cases}$, т.е. $f_k = \sum_i p_{ik}e_i$.

Если координаты векторов нового базиса в старом записать в столбцы, получим матрицу линейного оператора P который переводит векторы e_i в f_i (т.е. $Pe_i = f_i$). Этот оператор **называется оператором перехода** от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{f_i\}$, а его матрица называется **матрицей соответствующего перехода**.

Этот оператор невырожденный ибо $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ линейно независимы и, следовательно, имеет обратный оператор P^{-1}, который является оператором перехода от базиса $\{f_i\}$ к базису $\{e_i\}$. Таким образом, базисные векторы преобразуются с помощью оператора перехода $P_{e\to f}$:

$$Pe_i = f_i \quad \text{и} \quad P^{-1}f_i = e_i.$$

§2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА

Пусть $x = \sum_i \xi_i e_i$ (разложение в базисе $\{e_i\}$) и $x = \sum_k \eta_k f_k$ (разложение в базисе $\{f_i\}$), тогда $x = \sum_k \eta_k f_k = \sum_k \eta_k \sum_i p_{ik}e_i = \sum_k \sum_i \eta_k p_{ik} e_i = \sum_i \left(\sum_k \eta_k p_{ik} \right) e_i$. Получены два разложения вектора x в базисе $\{e_i\}$ отсюда $\xi_i = \sum_i p_{ik}\eta_k$, т.е. $x_{(e)} = Px_{(f)}$ или $x_{(f)} = P^{-1}x_{(e)}$.

§3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть A линейный оператор и $A_{(e)}$ и $A_{(f)}$ – его матрицы в соответствующих базисах.

$$y_{(e)} = A_{(e)}x_{(e)} \Rightarrow Py_{(f)} = A_{(e)}Px_{(f)} \Rightarrow y_{(f)} = P^{-1}A_{(e)}Px_{(f)} \Rightarrow A_{(f)} = P^{-1}A_{(e)}P.$$

§4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Пусть $L(x)$ линейная форма на V. Тогда $L(x) = L\left(\sum_i \xi_i e_i \right) = \sum_i \xi_i L(x) = \sum_i \xi_i e_i$,

$$\widetilde{e_i} = L(f_i) = L\left(\sum_j p_{ji}e_j \right) = L = \sum_j p_{ji}L(e_j) = \sum_j p_{ji}e_j \text{ т.е. } \widetilde{e_i} = \sum_j p_{ji}e_i \text{ или } e_{(f)} = Pe_{(e)}.$$

Коэффициенты линейной формы при изменении базиса изменяются как базисные векторы.

§5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Пусть $\varphi(x, y)$ – билинейная форма на V. Т.е. $\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_i \xi_i e_i, \sum_j \eta_j e_j \right) =$

$= \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \varphi(e_i e_j) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j a_{ij}$ где a_{ij} – матрица билинейной формы в базисе $\{e_i\}$.

$$\varphi(f_i, f_j) = \varphi\left(\sum p_{k\,i} e_k, \sum p_{e\,j} e_e\right) = \sum_k \sum_e p_{k\,i} p_{e\,j} \varphi(e_k, e_k) = \sum_k \sum_e p_{k\,i} p_{e\,j} a_{k\,e} =$$

$= \sum_k \sum_e p_{k\,i} a_{k\,e} p_{e\,j} = \sum_k \sum_e p^T{}_{i\,k} a_{k\,e} p_{e\,j}$, а это значит, что $A_{(f)} = P^T A_{(e)} P$.

§6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть $P_{e\to f}$ матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{f_i\}$; Пусть $G_{f\to g}$ матрица перехода от базиса $\{f_i\}$ к базису $\{g_i\}$. Тогда: $f_j = \sum_i p_{i\,j} e_i$; $g_k = \sum_j g_{j\,k} f_j$.

Значит $g_k = \sum_j g_{i\,k} \left(\sum_i p_{i\,j} e_i \right) = \sum_i \left(\sum_j p_{i\,j} g_{j\,k} \right) e_i$, где $\sum_j p_{i\,j} g_{j\,k}$ элементы матрицы перехода от $\{e_i\}$ к $\{g_i\}$ т.е.

T°. Матрица перехода $T_{e\to g} = P_{e\to f} \cdot G_{f\to g}$.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Н. КАРАЗИНА

Н.Р. БЕЛЯЕВ

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА
Часть II

Конспект лекций для студентов физико-технического факультета

Харьков-2004

ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Пусть V – унитарное пространство. Пусть $\forall x\in V \to f(x)\in C$, такое что:

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Тогда говорят, что из V в C задан линейный функционал f или линейная форма f ($f\in L(V, C)$).

<u>T°.</u> Пусть $f\in L(V, C)$, т. е. f – линейная форма, тогда существует единственный $h\in V$ такой, что $f(x) = (x, h)$.

◀ Пусть $\{e_i\}$ – ортонормированный базис V

$$\forall x\in V;\quad f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{h_i} = (x,h),$$

↑ базис ортонорм

т.е. вектор h имеет координаты $h_i = \overline{f(e_i)}$.

<u>Единственность:</u> Пусть $f(x) = (x, h^1) = (x, h^2) \Rightarrow (x, h^1 - h^2) = 0$; $\forall x\in V$. Возьмем $x = h^1 - h^2$ $\Rightarrow (h^1 - h^2, h^1 - h^2) = 0$, т.е. $h^1 = h^2$ ▶

***Примечание*:** в вещественном пространстве теорема и ее доказательство также справедливы, но в доказательстве не ставится знак комплексного сопряжения.

§2. СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Пусть $\forall x, y\in V \to B(x, y)\in C$ такое, что

$$\left.\begin{aligned}&1)\ B(x_1+x_2,y)=B(x_1,y)+B(x_2,y)\\&2)\ B(\alpha x,y)=\alpha B(x,y)\end{aligned}\right\}\ \text{линейность по } 1^{\text{му}} \text{ аргумен};$$

$$\left.\begin{aligned}&3)\ B(x,y_1+y_2)=B(x,y_1)+B(x,y_2)\\&4)\ B(x,\alpha y)=\overline{\alpha}B(x,y)\end{aligned}\right\}\ \textbf{полулинейность по } \mathbf{2^{му}} \textbf{ аргумен}.$$

Тогда говорят, что в унитарном пространстве задана полуторалинейная форма $B(x, y)$.

(В евклидовом пространстве полуторалинейная форма становится билинейной).

Выберем в V базис $\{e_i\}$.

$$\forall y\in V\quad B(x,y)=B\left(\sum_i x_i e_i, \sum_i y_i e_i\right)=\sum_i\sum_j x_i\bar{y}_j \underbrace{B(e_i,e_j)}_{b_{ij}}=\sum_{i,j} b_{ij}x_i\bar{y}_j.$$

Действие формы $B(x, y)$ однозначно определенно если известны элементы b_{ij}. Матрица B с элементами b_{ij}, называется матрицей полуторалинейной формы.

<u>T°</u>. Пусть B – полуторалинейная форма в V. Тогда существует единственный линейный оператор $A\in L(V, V)$ такой, что $B(x, y) = (x, Ay)$.

◀ $\forall y\in V;\quad B(x,y)=B(\sum_i x_i e_i, y)=\sum_i x_i \underbrace{B(e_i,y)}_{\bar{h}_i} = \underset{\uparrow \text{в ортонорм. базисе}}{(x,\bar{h}(y))}$. Оказывается $\forall y\in V\quad \exists \bar{h}_i = B(e_i, y)$, т.е. $\forall y\in V \to h\in V$. Таким образом, определен оператор $h = Ay$.

Линейность:

$(x, A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 B(x, y_1) + \bar{\alpha}_2 B(x, y_2) = \bar{\alpha}_1 (x, Ay_1) + \bar{\alpha}_2 (x, Ay_2) =$
$= (x, \alpha_1 Ay_1)\ (x, \alpha_2 Ay_2) = (x, \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2)$, т.е. $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2$.

Единственность:

Пусть $B(x, y) = (x, A_1 y) = (x, A_2 y)$, тогда $(x, A_1 y - A_2 y) = 0 \Rightarrow A_1 y = A_2 y\quad \forall y\in V$, т.е. $A_1 = A_2$ ▶

Т°. Пусть B – полуторалинейная форма в V. Тогда существует единственный линейный оператор $\forall A\in L(V, V)$ такой, что $B(x, y) = (Ax, y)$.

◀ $\forall x\in V\quad B(x,y)=B(x,\sum_j y_j e_j)=\sum_j \underbrace{B(x,e_j)}_{h_j}\bar{y}_i = (h(x),y)$ или, что тоже определен оператор A такой, что $h = Ax$. При этом $(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y) = B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y)$ + + $\alpha_2 B(x_2, y) = \alpha_1(Ax_1, y) + \alpha_2(Ax_2, y) = (\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2, y) = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2$ т.е. оператор A линейный.

Его единственность доказывается как в предыдущей теореме ▶

Примечание: в вещественном пространстве теорема и ее доказательство также справедливы, но в доказательстве не ставится знак комплексного сопряжения.

Т°. Если $B(x, y)$ – полуторалинейная форма с матрицей B и A – линейный оператор такой, что $B(x, y) = A(x, y)$, то в ортонормированном базисе матрица B совпадает с матрицей линейного оператора A.

◀ Пусть $\{e_i\}$ ортонормированный базис V. Тогда

$$b_{ij} = B(e_i, e_j) = (Ae_i, e_j) = \left(\sum_k a_{ki} e_k, e_j\right) = \sum_k a_{ki}(e_k, e_j) = \sum_k a_{ki}\delta_{kj} = a_{ji} \qquad ▶$$

Т°. Если $B(x, y)$ – полуторалинейная форма с матрицей B и A – линейный оператор такой, что $B(x, y) = (x, Ay)$, то в ортонормированном базисе $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$. *Доказать самостоятельно.*

Примечание: Если A_1 – оператор из 1й теоремы о спец. представлении и A_2 – из второй, то $A_1 = \bar{A}_2^T$.

СОПРЯЖЕННЫЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Def: Оператор $A^*\in L(V, V)$ называется оператором, сопряженным к оператору $\forall A\in L(V, V)$, если $\forall x, y\in V$; $(Ax, y) = (x, A^* y)$.

Т°. Оператор, сопряженный к линейному – линеен.

◀ $(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 (Ax, y_1) + \bar{\alpha}_2 (Ax, y_2) =$

$= \overline{\alpha}_1(x,\ A^*y_1) + \overline{\alpha}_2(x,\ A^*y_2) = (x,\ \alpha_1 A^*y_1) + (x,\ \alpha_2 A^*y_2) = (x,\ \alpha_1 A^*y_1 + \alpha_2 A^*y_2)$ ▶

<u>T°.</u> Любой линейный оператор имеет сопряженный и при этом только один.

◀ Так как (Ax, y) – скалярное произведение в унитарном пространстве, то оно является полуторалинейной формой, которую мы обозначим - $B(x, y)$. Из теоремы о специальном представлении полуторалинейной формы следует утверждение теоремы $(Ax, y) = B(x, y) = (x, A^*y)$ ▶

Свойства сопряженных операторов.

1° $E^* = E$. ◀ $(Ex, y) = (x, y) = (x, Ey)$ ▶

2° $(A + B)^* = A^* + B^*$.

◀ $((A + B)x, y) = (Ax + Bx, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^* y) + (x, B^* y) = (x, (A^* + B^*)y)$ ▶

3° $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$. ◀ $(\lambda Ax, y) = \lambda(Ax, y) = \lambda(x, A^*y) = \left(x, \overline{\lambda}A^*y\right)$ ▶

4° $(A^*)^* = A$. ◀ $(A^*x, y) = \overline{(y, A^*x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$ ▶

5° $(AB)^* = B^*A^*$. ◀ $(ABx, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*(A^*)y) = (x, B^*A^*y)$ ▶

6° $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Примечание: в евклидовом пространстве также справедливо все то, что сказано о сопряженном операторе, но свойство **3°** имеет вид: $(\lambda A)^* = \lambda A^*$

Примечание: физики очень часто обозначают A^* как A^+ (читается A – крест) и операцию **называют эрмитовым сопряжением**.

§2. ЭРМИТОВЫ (САМОСОПРЯЖЕННЫЕ) ОПЕРАТОРЫ

Def: Оператор $\forall A \in L(V, V)$ действующий в унитарном пространстве **называется эрмитовым (самосопряженным) оператором**, если $A^* = A$.

Примечание: в евклидовом пространстве такой оператор называется самосопряженным.

Пусть A – произвольный линейный опреатор из $L(V, V)$. Введем операторы A_R и A_I по правилу $A_R = \dfrac{A + A^*}{2}$; $A_I = \dfrac{A - A^*}{2i}$, тогда $A = A_R + iA_I$ и кроме того:

а) $(A_R x, y) = (\dfrac{A + A^*}{2}x, y) = (x, (\dfrac{A + A^*}{2})^* y) = (x, \dfrac{A + A^*}{2}y) = (x, A_R y)$;

б) $(A_I x, y) = ((\dfrac{A - A^*}{2i})x, y) = (x, (\dfrac{A - A^*}{2i})^* y) = (x, \dfrac{A^* - A}{2i^*}y) = (x, A_I y)$;

т.е . A_R и A_I эрмитовы.

Отсюда :

<u>T°</u>. (о специальном представлении линейного оператора) $\forall A \in L(V, V)$ существуют эрмитовы операторы A_R и A_I такие, что $A = A_R + iA_I$ (при этом операторы A_R и A_I называются вещественной и мнимой частью оператора A)

Def: Операторы $A,\ B \in L(V, V)$ называются коммутирующими операторами если $AB = BA$.

Оператор $[AB] = AB - BA$ **называется коммутатором** операторов A и B, и при этом $[AB] = 0$ – это необходимое и достаточное условие коммутируемости операторов A и B.

<u>**Т°**</u>. Произведение эрмитовых операторов A и B будет эрмитовым оператором тогда и только тогда когда операторы A и B коммутируют (т. е. $AB = BA$).

◀ Так как операторы A и B эрмитовы, то:

$$(AB)^* = B^* A^* = BA \qquad (ф)$$

тогда:

а) Если $AB = BA$, то из (ф) $(AB)^* = AB$, т. е. оператор AB – эрмитов.

б) Если AB эрмитов, то $(AB)^* = AB$ и из (ф) $AB = BA$ т.е. операторы коммутируют ▶

<u>**Т°**</u>. Если A – эрмитов оператор, то $\forall x \in V$; $(Ax,\ x) \in R$ (здесь R - множество вещественных чисел).

◀ $(Ax, x) = \overline{(x, Ax)}$ из свойств скалярного произведения $(Ax,\ x) = (x,\ Ax)$ из эрмитовости оператора. Тогда $\overline{(x, Ax)} = (x, Ax)$, т.е. $(Ax,\ x) \in R$ ▶

<u>**Т°**</u>. Собственные числа эрмитового оператора вещественны.

◀ Пусть $\exists x \in V$, $x \neq 0$ и $\exists \lambda \in C$ такие, что $Ax = \lambda x$. Тогда:

$$\underbrace{(Ax, x)}_{\substack{\text{веществ.}\\ \text{по пред.}\\ \text{теореме}}} = (\lambda x,\ x) = \lambda \underbrace{(x,\ x)}_{\substack{\text{вещест.}\\ \text{из св-в}\\ \text{скал.}\\ \text{произ}}};$$

$(x,\ x) \geq 0$, λ – вещественно ▶

<u>**Т°**</u>. Собственные векторы эрмитового оператора, отвечающие различным собственным значениям – ортогональны.

◀ Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ и $\begin{matrix} x_1, x_2 \neq 0 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{matrix}$.

Тогда $(Ax_1,\ x_2) = (\lambda_1 x_1,\ x_2) = \lambda_1 (x_1,\ x_2)$ равны как эрмитовы $(x_1,\ Ax_2) = (x_1,\ \lambda_2 x_2) = \underset{\text{вещ}}{\overline{\lambda_2}} (x_1,\ x_2) =$
$= \lambda_2 (x_1,\ x_2)$ и получено $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1,\ x_2) = 0 \Rightarrow (x_1,\ x_2) = 0$ ▶

§3. НОРМА ОПЕРАТОРА

Def: Нормой линейного оператора $A \in L(V,\ V)$ называется число $\|A\|$ определяемое равенством $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Из определения нормы линейного оператора возникает очевидное и очень полезное неравенство $\|A\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

<u>**Т°**</u>. Для эрмитового оператора A: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

◀ Обозначим $\mu = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

1) Вспомним неравенство Коши-Буняковского $(x,\ y)^2 \leq (x,\ x)(y,\ y)$ запишем $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |(Ax,\ x)| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \cdot \|x\| = \|A\| \cdot \|x\|^2$, т.е. $|(Ax,\ x)| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2$ и пусть $\|x\| = 1$.

$$|(Ax,\ x)| \leq \|A\|$$

т.е.

$$\mu \leq \|A\| \qquad (*)$$

2) Отметим: $|(Az, z)| \le |(Az/\|z\|,\ z/\|z\|)| \cdot \|z\|^2 \le \|z\|^2 \cdot \sup|(Az/\|z\|,\ z/\|z\|)|$,

т.е. $|(Az, z)| \le \mu\|z\|^2$ и теперь рассмотрим разность:

$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y) - (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) - (Ay, y) = 2(Ax, y) + 2(Ay, x) = 2((Ax, y) + (y, Ax)) = 2((Ax, y) + \overline{(Ax, y)}) = 4\mathrm{Re}(Ax, y)$,

т. е. $4\mathrm{Re}(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)$.

Тогда:

$4|\mathrm{Re}(Ax, y)| = |(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| \le |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \le$

$\le \mu((x+y, x+y) + (x-y, x-y)) = \mu((x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) + (x, x) + (y, y) - (x, y) - (y, x)) =$

$= 2\mu((x, x) + (y, y)) = 2\mu(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Отсюда, при $\|x\| = \|y\| = 1$

$$4|\mathrm{Re}(Ax, y)| \le 4\mu \Rightarrow |\mathrm{Re}(Ax, y)| \le \mu.$$

Положим теперь $y = \dfrac{Ax}{\|Ax\|}$ (очевидно $\|y\| = 1$):

$$\left|\mathrm{Re}\left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right)\right| = \frac{1}{\|Ax\|}\left|\mathrm{Re}\underbrace{(Ax, Ax)}_{\text{вещ}}\right| = \frac{1}{\|Ax\|}(Ax, Ax) = \frac{\|Ax\|^2}{\|Ax\|} = \|Ax\| \le \mu.$$

Тогда $\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| \le \mu$, т.е. $\|A\| \le \mu$.

В 1) и 2) доказано, что $\|A\| \ge \mu$ и $\|A\| \le \mu$, т.е. $\|A\| = \mu = \sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax, x)|$ ▶

§4. ЕЩЕ О СВОЙСТВАХ ЭРМИТОВОГО ОПЕРАТОРА

<u>Т°</u>. Чтобы линейный оператор $A \in L(V, V)$ был эрмитов необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Im}(Ax, x) = 0$.

◀ Прежде всего, отметим, что $\forall A \in L(V, V)$ $\exists A_R, A_I \in L(V, V)$ такие что $A = A_R + iA_I$ и, кроме того A_R и A_I – эрмитовы. Следовательно, $(A_Rx, x) \in R$ и $(A_Ix, x) \in R$, т.е. $(Ax, x) = = \left(\underbrace{A_Rx, x}_{\text{вещчвсть}}\right) + i\left(\underbrace{A_Ix, x}_{\text{мним.часть}}\right)$.

Теперь:

<u>Необходимость.</u> Пусть $A = A^* \Rightarrow (Ax, x) \in R \Rightarrow \mathrm{Im}(Ax, x) = 0$.

<u>Достаточность.</u> Пусть $\mathrm{Im}(Ax, x) = 0 \Rightarrow (A_Ix, x) = 0 \Rightarrow \sup\limits_{\|x\|=1}(A_Ix, x) = 0 \Rightarrow \|A_I\| = 0 \Rightarrow A_I = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow A = A_R \Rightarrow A_R$ – эрмитов ▶

<u>Т°</u>. Если A – эрмитов оператор и λ – его собственное значение, то $\exists x \in V$, $\|x\| = 1$, и $\lambda = (Ax, x)$.

◀ Пусть z - собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ:

$$Az = \lambda z \Rightarrow A\frac{z}{\|z\|} = \lambda\frac{z}{\|z\|} \Rightarrow \left(A\frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right) = \lambda\left(\frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right) \Rightarrow \lambda = (Ax, x),$$

где x – собственный вектор и $\|x\| = 1$ ▶

Следствие: Пусть A – эрмитов оператор и $m = \inf\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$, $M = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$. Тогда для собственных значений λ оператора A справедливо $m \le \lambda \le M$.

<u>Т°</u>. Если A – самосопряженный (эрмитов) оператор и $\forall x\in V$; $(Ax, x) \geq 0$, то

$$\|A\| = \lambda_{max}$$

◀ $\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)| \underset{(Ax,x)\geq 0}{=} \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x) = \underset{\text{достигается}}{(Ax_0,x_0)}$. Обозначим $\lambda = (Ax_0, x_0) = \|A\|$.

Рассмотрим

$\|(A-\lambda E)x_0\|^2 = (Ax_0 - \lambda x_0, Ax_0 - \lambda x_0) = (Ax_0, Ax_0) - \lambda(x_0, Ax_0) - \bar{\lambda}(Ax_0, x_0) + \lambda\bar{\lambda}(x_0, x_0) =$

$= \left\langle \begin{matrix} A - \textbf{эрмитов} \\ \lambda - \textit{вещест.} \end{matrix} \right\rangle = (Ax_0, Ax_0) - \lambda(Ax_0, x_0) - \lambda(Ax_0, x_0) + \lambda^2(x_0, x_0) = \left\langle \begin{matrix} \|x_0\| = 1; \quad \lambda = \|A\| \\ \|A\| = \sup\|Ax\| = \|Ax_0\| \end{matrix} \right\rangle =$

$= \|Ax_0\|^2 - 2\|A\|^2 + \|A\|^2 = 0$, т.е. $\|(A-\lambda E)x_0\| = 0 \Rightarrow (A-\lambda E)x_0 = 0 \Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0$, т.е. λ – собственное значение ▶

Продолжаем изучение спектральных свойств эрмитовых операторов.

<u>Т°</u>. Пусть для эрмитового оператора A $m = \inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$, $M = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$; тогда m и M – наименьшее и наибольшее собственное значение оператора A.

◀ Достаточно доказать, что m и M – собственные значения оператора A.

1) Рассмотрим оператор $B = A - mE \Rightarrow B$ – эрмитов $\Rightarrow (Bx, x) = (A(x), x) - m(x, x) \geq 0$. Т.е. B – эрмитов, $(Bx, x) \geq 0 \Rightarrow \|B\| = \lambda_{max}$, но $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx,x) = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x) - m = M - m$, т.е. для B: $\lambda_{max} = M - m \Rightarrow \exists x_0$ $Bx_0 = (M-m)x_0 \Rightarrow (A - mE)x_0 = Mx_0 - mx_0 \Rightarrow Ax_0 - mx_0 = = Mx_0 - mx_0 \Rightarrow Ax_0 = mx_0 \Rightarrow Mx_0$ – собственное значение оператора A.

2) Рассмотрим $B = -A \Rightarrow B$ – эрмитов. $\Rightarrow \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx,x) = -m \Rightarrow -m$ – собственное значение B $\Rightarrow \exists x$ $Bx = -m \Rightarrow -Ax = -mx \Rightarrow Ax = mx$, т.е. m – собственные значения A ▶

<u>Т°</u> (о собственном базисе эрмитового оператора). Если A – эрмитов оператор: $A\in L(V, V)$ в n-мерном унитарном пространстве, то в V существует n-линейно-независимых, попарно ортогональных и единичных собственных векторах.

◀ 1) A – эрмитов, $A\in L(V, V) = \lambda_{max} = \lambda_1 = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$ и $\exists e_1$ – единичный собственный вектор с собственным значениям λ_1: $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Обозначим $V_1 = \mathcal{L}^{\perp}(e_1)$. При этом $V = V_1 \oplus \mathcal{L}(e_1)$. Оказывается V_1 – инвариантно относительно A. В самом деле

$\forall x\in V_1$: $(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = \lambda_1(x, e_1) \underset{x\perp e_1}{=} 0$, т.е. $(Ax, e_1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} Ax \perp e_1 \\ Ax \in V_1 \end{matrix}$.

2) Теперь можем рассмотреть A в V_1: $A\in L(V_1, V_1)$, A – эрмитов $\Rightarrow \lambda_{max} = \lambda_2 = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x\perp e_1}}(Ax,x)$

и $\exists e_2$ – единичный вектор, такой, что $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ и $e_2 \perp e_1$.

Рассмотрим $V_2 = \mathcal{L}^{\perp}(e_1, e_2)$. Тогда $V = V_1 \oplus \mathcal{L}(e_1)$, V_2 – инвариантно относительно A.

$\forall x\in V_2$: $(Ax, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (x, A(\alpha_1 e_1) + A(\alpha_2 e_2)) = \bar{\alpha}_1\lambda_1(x e_1) + \bar{\alpha}_2\lambda_3(x e_2) \underset{x\perp e_1 e_2}{=} 0$,

$Ax \perp \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \Rightarrow \forall x\in V_2$.

3) …

4) …

Итак, $\exists e_1, \ldots, e_n$ – единичные, взаимно ортогональные и собственные векторы, т.е. в V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A ▶

Примечание: Договоримся, в дальнейшем, нумеровать собственные значения в порядке их убывания с учетом кратности, т.е. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ и соответствующие им векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ обладают свойством $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Примечание: Из доказанной выше теоремы следует: $\lambda_{m+1} = \max\limits_{\substack{x \perp e_k \\ k=1,2,\ldots,m}} \dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}$, или

$$\lambda_{m+1} = \max_{x \perp E_m} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \quad \text{где} \quad E_m = \mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_m).$$

<u>T°</u> (минимаксное свойство собственных значений). Пусть A – эрмитов оператор и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ его собственные значения, тогда $\lambda_{m+1} = \min\limits_{E \in \mathcal{E}_m} \max\limits_{x \perp E} \dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}$ где $\mathcal{E}_m$ – множество всех m-мерных подпространств пространства V.

Доказать самостоятельно.

§5. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭРМИТОВОГО ОПЕРАТОРА. ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА – КЭЛИ

Пусть A – эрмитов оператор; $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ собственные значения этого оператора и $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ – соответствующий им ортонормированный собственный базис. Тогда $\forall x \in V$ $x = \sum\limits_k \alpha_k e_k = \sum\limits_k (x, e_k) e_k$; $Ax = A\left(\sum\limits_k (x, e_k) e_k\right) = \sum\limits_k (x, e_k) A e_k = \sum\limits_k \lambda_k (x, e_k) e_k$.

Def: Оператор P_k: $P_k x = (x, e_k) e_k$, называется оператором-проектором или просто проектором на одномерное пространство, порожденное вектором $\{e_k\}$.

Свойства проекторов:

1°. P_k – самосопряженный (эрмитов).

◀ $(P_k x, y) = ((x,e_k)e_k, y) = (x,e_k)(e_k,y) = \overline{(y,e_k)}(x, e_k) = (x, (y,e_k)e_k) = (x, P_k y)$ ▶

2°. $P_k^2 = P_k$. ◀ $P_k^2 x = P_k(P_k x) = P_k(x,e_k)e_k = (x,e_k)Pe_k = (x,e_k)(e_k,e_k)e_k = (x,e_k)e_k = P_k x$ ▶

3°. $P_k P_j = 0$, $(x \neq j)$. ◀ $P_k P_j x = P_k(P_j x) = P_k(x,e_j)e_j = (x,e_j)P_k e_j = (x,e_j)\underbrace{(e_j, e_k)}_{\text{II}_0} e_k = 0$ ▶

Для операторов-проекторов P_k имеем:

$$x = \sum_k P_k x = (\sum_k P_k) x \Rightarrow \sum_k P_k = E = A^{\circ}; \quad Ax = \sum_k \lambda_k P_k x = (\sum_k \lambda_k P_k) x \Rightarrow \sum_k \lambda_k P_k = A.$$

Такое представление эрмитового оператора A называется его спектральным разложением. Обратим еще внимание: $A^2 = (\sum\limits_k \lambda_k P_k)^2 = \sum\limits_k \lambda^2{}_k P_k$, $\forall s \in N$, $A^s = \sum\limits_k \lambda^s{}_k P_k$.

Def: Пусть $P(\lambda)$ – произвольный полином $p^й$ – степени, т.е. $p(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p} c_k \lambda^k$. Тогда определим полином от оператора слеующим образом: $p(A) \overset{def}{\equiv} \sum\limits_{k=0}^{p} p(\lambda_k) P_k$.

<u>T°</u>. (Гамильтона-Кэли). Эрмитов оператор A является корнем своего характеристического полинома: если $p(\lambda) = \det(A - \lambda E) \Rightarrow p(A) = 0$.

◀ $p(A)=\sum_k p(\lambda_k)P_k=0$ ▶

§6. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. КОРЕНЬ *m*-й СТЕПЕНИ ИЗ ОПЕРАТОРА

Def: Эрмитов оператор A называется положительным, если $\forall x\in V$, $(Ax, x)\geq 0$. Если, кроме того, из $(Ax, x)=0 \Rightarrow x=\theta$, то A называют положительно определенным оператором (Обозначается: $A\geq 0$, $A>0$ соответственно).

<u>Т°</u>. Каждое собственное значение положительного (положительно определенного) оператора неотрицательно (положительно).

◀ Если λ – собственное значение A, то $\exists x$ такой, что $\|x\|=1$, $(Ax, x)=\lambda$ (было доказано), отсюда следует утверждение теоремы ▶

Def: Корнем *m*-й степени из оператора A называется такой оператор B, что $B^m=A$.

<u>Т°</u>. Если A – положительный эрмитов оператор ($A\geq 0$), то $\forall m\in N$ существует положительный эрмитов оператор $A^{1/m}, \sqrt[m]{A}, A^{1/m}\geq 0$.

◀ Пусть λ_k – собственные значения A ($k=1, 2, 3,\ldots, n$) и $\{e_k\}$ – ортонормированный собственный базис, $A=\sum_1^n \lambda_k P_k$ (спектральное разложение) и при этом $\lambda_k\geq 0$. Рассмотрим оператор $B=\sum_1^n \lambda^{1/m}{}_k P_k$. Изучим свойства оператора B. Оператор B:

а) эрмитов: $\left(\sum \lambda_k^{1/m} P_k x, y\right)=\sum \lambda_k^{1/m}(P_k x, y)=\sum \lambda_k^{1/m}((x,e_k)e_k y)=\sum \lambda_k^{1/m}(x,e_k)(e_k,y)=$

$=\sum \underbrace{\lambda_k^{1/m}}_{\text{вещ}}\left(\overline{y,e_k}\right)(x,e_k)=\sum\left(x, \lambda_k^{1/m}(y,e_k)e_k\right)=\left(x, \sum \lambda_k^{1/m}(y,e_k)e_k\right)=\left(x, \sum \lambda_k^{1/m} P_k y\right)$;

б) положителен: $(Bx,x)=\left(\sum \lambda_k^{1/m} P_k x, x\right)=\sum \lambda_k^{1/m}(P_k x, x)=\sum \lambda_k^{1/m}(P_k(x,e_k)e_k, x)=$

$$=\sum \lambda_k^{1/m}(x,e_k)\left(\overline{x,e_k}\right)=\sum \lambda_k^{1/m}\left|(x,e_k)\right|^2\geq 0;$$

в) $B^m=\left(\sum \lambda_k^{1/m} P_k\right)^m=\sum\left(\lambda_k^{1/m}\right)^m P_k=\sum \lambda_k P_k=A$. Теорема доказана. ▶

Примечание: В ортонормированном базисе $\{e_k\}$ из собственных векторов матрица оператора A и матрица $A^{1/m}$ имеют вид: $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$,

$$\sqrt[m]{A}=\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \sqrt[m]{\lambda_2} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \sqrt[m]{\lambda_3} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt[m]{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

§1. ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЕ ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

Def: Полуторалинейная форма $B(x, y)$ называется эрмитовой, если $\forall x,\ y\in V$: $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$.

Мы уже отмечали: $\forall B(x, y)$ – полуторалинейные формы $\exists!$ A – линейный оператор такой, что $B(x, y) = (Ax, y)$.

<u>Т°</u>. Для того, чтобы полуторалинейная форма $B(x, y)$ была эрмитовой необходимо и достаточно, чтобы оператор A $(B(x, y) = (Ax, y))$ был эрмитовым.

◀ **<u>Достаточность</u>**: Пусть A – эрмитов, т.е. $A = A^* \Rightarrow B(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \overline{(Ay,x)} =$
$= \overline{(B(y,x))}$, т.е. форма $B(x, y)$ – эрмитова.

<u>Необходимость</u>: Пусть форма эрмитова $\Rightarrow (Ax, y) = B(x, y) = \overline{B(y,x)} = \overline{(Ay,x)} = (x, Ay)$, т.е. A – эрмитов ▶

<u>Т°</u>. Для того, чтобы форма $B(x, y)$ была эрмитовой необходимо и достаточно, чтобы $B(x, x)$ была вещественной $\forall x\in V$.

◀ $B(x, y)$ – эрмитова $\Leftrightarrow$ A – эрмитов. A – эрмитов $\Leftrightarrow A(x, y)\in R$ ▶

предыдущая теорема ↑ доказано ранее

§2. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Def: Квадратичной формой называют $B(x, x)$, соответствующую полуторалинейной форме $B(x, y)$.

<u>Т°</u>. Пусть $B(x, y)$ – эрмитова форма в n-мерном унитарном пространстве V. Тогда в V существует ортонормированный базис $\{e_k\}$ и существуют вещественные числа λ_k, что для $\forall x\in V$ в базисе $\{e_k\}$: $B(x,x) = \sum\limits_{k=1}^{\lambda} \lambda_k |\xi_k|^2$

◀ $B(x, y)$ – эрмитова $\Rightarrow B(x, y) = (Ax, y)$, где A – эрмитов оператор. A – эрмитов $\Rightarrow$ $\exists\{e_k\}$ – собственный ортонормированный базис и λ_k – собственные числа оператора A

$$x = \sum_k \xi_k e_k\,;\quad Ax = \sum_j \xi_j A e_j = \sum_j \lambda_j \xi_j e_j\,.$$

Тогда: $$(Ax,x) = \left(\sum_j \lambda_j \xi_j e_j,\ \sum_k \zeta_k e_k\right) = \sum_{j,k} \lambda_j \xi_j \overline{\xi_k} \delta_{jk} = \sum_k \lambda_k |\xi_k|^2$$ ▶

И еще одна теорема: о приведении пары квадратичных форм к каноническому виду:

<u>Т°</u>. Пусть $A(x, y)$ и $B(x, y)$ – эрмитовы формы в линейном пространстве V и, кроме того, $\forall x\in V,\ x \neq \theta$, $B(x, y) > 0$. Тогда в V существует базис $\{e_k\}$, в котором:
$$A(x,x) = \sum_k \lambda_k |\xi_k|^2,\quad B(x,x) = \sum_k |\xi_k|^2.$$

◀ $B(x, y)$ – эрмитова, $B(x, y) > 0$, $\forall x\in V$, $x \neq \theta$. Из этих условий: В линейном пространстве V можно ввести скалярное произведение векторов x и y по правилу: $(x, y) = B(x, y)$.

После введения скалярного произведения пространство V станет унитарным и в нем, согласно предыдущей теореме, существует ортонормированный базис $\{e_k\}$ и числа λ_k, что в этом базисе $A(x,x)=\sum_k \lambda_k|\xi_k|^2$.

С другой стороны, так как базис ортонормированный, то $(x,x)=\sum_k \xi_k\overline{\xi_k}=\sum_k|\xi_k|^2$ и $B(x, x) = (x, x)$, т.е. $B(x, x) = \sum_k|\xi_k|^2$ ▶

УНИТАРНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Def: Линейный оператор $U\in L(V, V)$ называется унитарным, если

$$\forall x, y\in V \ \ (Ux, Uy) = = (x, y) .$$

1° Из условия унитарности: $\|Ux\| = \|x\|$, $\|U\| = 1$.

2° Если λ – собственное значение унитарного оператора, то $|\lambda| =1$.

◀ Пусть e – собственный вектор с собственными значениями λ и $\|x\| = 1$. Тогда $|\lambda| =|\lambda|\,\| e\| = \|\lambda e\| = \|Ue\| = \| e\| =1$ ▶

<u>Т°</u>. Чтобы линейный оператор $U\in L(V, V)$ был унитарным необходимо и достаточно, чтобы $U^* = U^{-1}$.

◀ **Необходимость**: Пусть U – унитарный $\Rightarrow(Ux, Uy) = (x, y) \Rightarrow(x, U^*Uy) = (x, y) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x, (U^*U - E)y) = 0 \Rightarrow U^*Uy = Ey \Rightarrow U^*U = E \Rightarrow U^* = U^{-1}$.

Достаточность: Пусть $U^* = U^{-1} \Rightarrow U^*U = E \Rightarrow (x, y) = (x, U^*Uy) = (Ux, Uy)$, т.е. U – унитарный ▶

Примечание: $U^* = U^{-1} \Leftrightarrow U^*U = UU^* = E \Leftrightarrow (Ux, Uy) = (x, y)$.

В примечании приведено две эквивалентные формы записи условия унитарности оператора.

Нетрудно убедиться в том, что произведение унитарных операторов – унитарный оператор.

Def: Оператор l **называется унитарно подобным** оператору L, если существует унитарный оператор U такой, что $l = U^*LU,$

Напомним, что $[AB]=AB-BA$ – **называется коммутатором операторов** A и B. При этом, если $[AB]$ = 0, то A и B коммутирующие операторы.

Обозначим $\varphi = U^*\psi$.

Для унитарно подобных операторов выполняются следующие соотношения:

1) $[L, M] = N \Rightarrow [l, m] = n$; 2) $L = L^* \Rightarrow l = l^*$;

3) $L\psi = \lambda\psi \Rightarrow l\varphi = \lambda\varphi$; 4) $(L\psi_1, \psi_2) \Rightarrow (l\varphi_1, \varphi_2)$.

§2. НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Def: Линейный оператор A называется нормальным, если $A^*A = AA^*$.

1° Из определения: любой унитарный оператор является нормальным.

<u>Т°</u>. Пусть A – нормальный оператор. Тогда A и A^* имеют общий собственный вектор e, такой, что $\|e\| = 1$, $Ae = \lambda e$, $A^*e = \overline{\lambda}e$.

◀ Пусть λ – собств. ззначение оператора A. Обозначим R_λ – собственное подпространство оператора A, т.е. множество $x \in V$, $Ax = \lambda x$.

Пусть $x \in R_\lambda$, $Ax = \lambda x$. Тогда $A(A^*x) = (AA^*)x = (A^*A)x = A^*(Ax) = A^*(\lambda x) = \lambda(A^*x)$.

Получили $A(A^*x) = \lambda(A^*x)$, $A^*x \in R_\lambda$. Итак, $x \in R_\lambda \Rightarrow A^*x \in R_\lambda$, т.е. оператор A^* действуют из R_λ в R_λ. Следовательно $\exists e \in R_\lambda$, $\|e\| = 1$, такой, что $A^*e = \mu e$ (собственный вектор A^*), но $e \in R_\lambda$ (собственный вектор A); $Ax = \lambda e$; $A^*e = \mu e$. При этом $\lambda = \lambda(e, e) = (\lambda e, e) = (Ae, e) = (e, A^*e) = (e, \mu e) = \overline{\mu}(e, e) = \overline{\mu}$ ▶

<u>Т°</u>. Пусть A – нормальный оператор. Тогда существует ортонормированный базис $\{e_k\}$, состоящий из собственных векторов A и A^*.

◀ 1) по предыдущей теореме $\exists e_1 \in V$, $\|e_1\| = 1$ и являющийся общим собственным вектором операторов A и A^* с собственными значениями λ_1, $\overline{\lambda}_1$ соответственно.

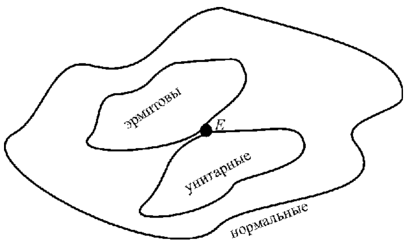
Пусть $V_1 = \mathcal{L}^\perp(e_1) \Rightarrow V = \mathcal{L}(e_1) \oplus V_1$. Это значит, что если $x \in V_1 \Rightarrow x \perp e_1$.

$$x \in V_1 \Rightarrow (Ax, e_1) = (x, A^*e_1) = (x, \overline{\lambda}_1 e_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0;$$

$$(A^*x, e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda_1 e_1) = \overline{\lambda}_1(x, e_1) = 0, \text{ т.е. } Ax,\ A^*x \in V_1.$$

Следовательно операторы A и A^* действуют в V_1.

2) Тогда A и A^* имеют в V_1 общий собственный вектор e_2 ($e_2 \in V_1$, $e_2 \perp e_1$, $\|e_2\| = 1$) с собственными значениями λ_2, $\overline{\lambda}_2$ соответственно. Пусть $V_2 = \mathcal{L}^\perp(e_1, e_2) \Rightarrow V = \mathcal{L}(e_1, e_2) \oplus V_2$,



Это значит, что если $x \in V_2$, то $x \perp e_1$, $x \perp e_2$.

$$x \in V_2 \Rightarrow (Ax, e_1) = (x, A^*e_1) = (x, \overline{\lambda}_1 e_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0;$$

$$(Ax, e_2) = (x, A^*e_2) = (x, \overline{\lambda}_2 e_2) = \lambda_2(x, e_2) = 0;$$

$$(A^*x, e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda_1 e_1) = \overline{\lambda}_1(x, e_1) = 0;$$

$$(A^*x, e_2) = (x, Ae_2) = (x, \lambda_2 e_2) = \overline{\lambda}_2(x, e_2) = 0,$$

т.е. Ax, $A^*x \in V_2$.

Следовательно операторы A и A^* действуют в V_2.

3) ….

Продолжая приведенные рассуждения мы построим ортонормированный базис $\{e_k\}$ из собственных векторов общих для A и A^* ▶

<u>Следствие 1</u>: Для нормального оператора A существует базис в котором A имеет диагональную матрицу.

<u>Следствие 2:</u> Унитарный оператор имеет полную ортонормированную систему собственных векторов.

И, наконец:

<u>Т°.</u> Если оператор $A \in L(V, V)$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов, то этот оператор – нормальный. *Доказать самостоятельно.*

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА
§1. НОРМАЛЬНАЯ ЖОРДАНОВА ФОРМА

Пусть A – линейный оператор, действующий в комплексном векторном пространстве V. Если в V существует базис $\{e_k\}$ из собственных векторов оператора A, то в этом базисе матрица оператора A имеет диагональный вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, где λ – соответствующие собственные значения оператора A.

Так будет, например, в том случае, когда характеристичное уравнение оператора A: $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет n попарно различных корней.

Однако это далеко не всегда так. Например, оператор A с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет характеристическое уравнение: $\varphi(\lambda) = (2 - \lambda)^2 = 0$. Это уравнение имеет кратный корень $\lambda = 2$ и этому корню соответствует лишь один собственный вектор (1, 0) (или ему коллинеарные). И матрица оператора A ни в каком базисе не приводится к диагональному виду.

Поэтому возникает вопрос, о каком-то другом, достаточно простом виде, к которому можно привести матрицу всякого линейного оператора.

В комплексном пространстве таким «простейшим», каноническим видом принято считать так называемую жорданову форму матрицы.

Def: Жордановой клеткой $G_k(\lambda)$ называется квадратная матрица k-го порядка вида:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Порядок жордановой клетки может быть любым. В частности, если $k = 1$, то клетка имеет простейший вид : (λ)

Def: Жордановой матрицей называется матрица вида: $\left(\begin{array}{c:c:c:c} G_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & G_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & G_{k_s}(\lambda_s) \end{array}\right)$.

Здесь $G_k(\lambda)$ – жордановы клетки.

В частности, если оператор A имеет матрицу $A = \left(\begin{array}{ccc:cc} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$, то нормальная жорданова форма матрицы оператора состоит из двух жордановых клеток. Нетрудно заметить, что α и β – соответственные значения оператора A. И, кроме того:

$Ae_1 = \alpha e_1$; $Ae_2 = \alpha e_2 + e_1$; $Ae_3 = \alpha e_3 + e_2$; $Ae_4 = \beta e_4$; $Ae_5 = \beta e_5 + e_4$.

Т°. Произвольный линейный оператор A в комплексном пространстве V имеет базис $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, в котором матрица оператора A имеет жорданову форму.

Доказательство теоремы довольно громоздко и мы его не приводим. Построение базиса и приведение матрицы оператора к жордановой форме продемонстрируем на примерах.

Схема построения нормальной жордановой формы матрицы оператора такова:

1) Нахождение собственных значений оператора A: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и соответствующих им собственных векторов: $e_1, \ldots, e_n$. Если количество собственных векторов равно n, то в указанном базисе матрица диагональная.

2) Если для λ – кратного корня кратности k количество собственных линейно независимых векторов также равно k, то в этом базисе матрица вновь имеет диагональный вид.

3) Для λ – кратных и таких, что количество собственных векторов меньше кратности корня, нахождение базисных векторов идет по схеме:

а) Находим собственные векторы оператора A, т.е. базис $N(A_\lambda)$ – ядра оператора A_λ, где $A_\lambda = A - \lambda E$.

б) находим $M(A_\lambda)$ – образ оператора A_λ и его базис.

в)
$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \underbrace{x_{p+1}, \ldots, x_m}_{\text{допол. до базиса } N(A_\lambda)} \\
\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_p}_{\text{базис } M(A_\lambda)\cap N(A_\lambda)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \underbrace{x'_{p+1}, \ldots, x'_m}_{\text{допол. до базиса } M(A_\lambda)} \\
\underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_p}_{\text{прообразы } x_i \text{ при } A_\lambda} \arrow[uu] & \underbrace{z_{p+1}, \ldots, y_e}_{\text{прообразы } x_i \text{ при } A_\lambda} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$
, :

$(\underbrace{Ay_i = x_i}_{\text{первый слой}},\ \underbrace{Ay'_i = y_i}_{\text{второй слой}}, \ldots)$ $\quad (Az_i = x_i,\ Az_i = z_i, \ldots)$.

Тогда искомый базис: $x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p, y'_1, y'_2, \ldots z_{p+1}, \ldots, z_e$ (всего k – векторов)

§2. ПРИМЕРЫ ПРИВЕДЕНИЯ МАТРИЦ К ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЕ

1°. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2,3} = 1$. $A_1 = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы A по $\lambda = 1$, т.е. ядро A_1:

$(1,-1,-1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0\Rightarrow x_1=x_2+x_3$, значит базис $N(A_1)$: $\begin{cases} f_1(1,1,0)\\ f_2(1,0,1)\end{cases}$.

Образ оператора A_1 $M(A_1)$ находим из соотношений:

$\left.\begin{matrix} A_1e_1=(1,2,-1)\\ A_1e_2=(-1,-1,1)\\ A_1e_3=(-1,-2,1)\end{matrix}\right\}$; базис $M(A_1)$ $f_3(1, 2, -1)$, и т.к. $f_3=2f_1-f_2$, то $f_3\in\mathcal{L}(f_1, f_2)$.

(1, 2, –1) $\longrightarrow$ (1, 1, 0)

базис $M(A_1)\cap N(A_1)$ дополн. до базиса) $N(A_1)$

любой из f_1, f_2

дополнить нечем: $M(A_1)\subset N(A_1)$

до базиса $M(A_1)$

прообраз

$A_1y=(1, 2, -1)\ \Rightarrow y_1-y_2-y_3=1$, например (1, 0, 0)

Кстати: $A_1y=(1, 0, 0)$, такого y не существует, т.е. прообраза второго слоя для (1, 2, –1) нет.

Жорданов базис оператора A: $\begin{matrix} g_1(1,2,-1)\\ g_1(1,0,0)\\ g_1(1,1,0)\end{matrix}$. Приэтом $\begin{matrix} Ag_1=g_1\\ Ag_2=g_2+g_1\\ Ag_3=g_3\end{matrix}$. И, окончательно, имеем жорданову форму матрицы оператора A: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$.

2°. $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$; $\det(A-\lambda E)=0\ \Rightarrow\ \lambda_{1,2}=1;\ \lambda_{3,4}=2$.

а) Рассмотрим оператор A_1: A_1-E=$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Ищем собственные векторы оператора A при $\lambda=1$, т.е. ядро оператора A_1.

$A_1\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix} x_1=x_3\\ x_2=x_4\end{matrix}$; $\begin{cases} f_1(1,0,1,0)\\ f_2(0,,1,0,1)\end{cases}$. Векторы $\{f_1, f_2\}$ образуют базис $N(A_1)$.

Далее ищем базис $M(A_1)$: $\left.\begin{matrix} A_1e_1=(-1,1,0,0)\\ A_1e_2=(-2,2,2,-1)\\ A_1e_3=(1,-1,0,0)\\ A_1e_4=(2,-2,-2,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \begin{matrix} f_3(-1,1,0,0)\\ f_4(0,0,2,-1)\end{matrix}$.

Так как векторы f_1, f_2, f_3, f_4 – линейно независимы, то:

(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)

………………. уже 2 вектора .

нет векторов (–1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, –1)

Кратность корня λ = 1 равна двум, поэтому имеем два вектора жорданового базиса A:

$$g_1(1, 0, 1, 0);\quad g_2(0, 1, 0, 1).$$

б)Рассмотрим оператор A_2=A-2E: $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, и найдем ядро оператора A_2

т.е. собственные вектора A при λ = 2. $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_4 \end{matrix}$. $\{ f_1(0, 0, -2, 1)\}$

базис ядра

Ищем базис образа оператора A_2 – $M(A_2)$.

$$\left.\begin{matrix} A_2e_1 = (-2,1,0,0) \\ A_2e_2 = (-2,1,2,-1) \\ A_2e_3 = (1,-1,-1,0) \\ A_2e_4 = (2,-2,-2,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \textbf{базис}\, M(A_2)\ \begin{cases} (-2,1,0,0) & f_2 \\ (0,0,2,-1) & f_3 \\ (1,-1,-1,0) & f_4 \end{cases}$$

$$M(A_2) \cap N(A_2) = \mathcal{L}(0, 0, 2, -1).$$

Тогда, согласно схеме: ………………………

(0, 0, –2, 1)

(–2, 1, 0, 0), (1, –1, –1, 0)

A_2y = (0, 0, –2, 1).

Решаем систему A_2y = (0, 0, –2, 1), для нахождения прообраза 1-го слоя вектора (0, 0, –2, 1) Получаем: $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \\ x_3 = -2x_4 \end{matrix}$.

Решением системы является, например, вектор (1, –1, 0, 0).

Тогда $g_3(0, 0, -2, 1)$; $g_4(1, 1, 0, 0)$.

Для оператора A найден жорданов базис: $\begin{matrix} g_1(1,0,1,0) \\ g_2(0,1,0,1) \\ g_3(0,0,-2,1) \\ g_4(1,-1,0,0) \end{matrix}$.

При этом $\begin{matrix} Ag_1 = g_1 \\ Ag_2 = g_2 \\ Ag_3 = 2g_3 \\ Ag_4 = 2g_4 + g_3 \end{matrix}$, т.е. жорданова форма оператора A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И НАПОМИНАНИЯ

Def: Оператор A, действующий в вещественном линейном пространстве называется линейным, если $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in R$

1) $A(x + y) = Ax + Ay$
2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$

Def: Вектор $x \in V$, $x \neq 0$ называется собственным вектором оператора A, если $\exists \alpha \in R$ такое, что $Ax = \alpha x$ и α при этом называется собственным значением оператора A.

1°. Собственные значения оператора A являются корнями характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Наоборот, вообще говоря, неверно. Корень характеристического уравнения является собственным значением оператора A только в случае, когда этот корень вещественен.

Def: Оператор A^* называется сопряженным к оператору A, если $\forall x, y \in V$, $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

2°. Каждый линейный оператор A имеет единственный сопряженный оператор, который также является линейным.

При доказательстве этой теоремы в комплексном пространстве используется понятие полуторалинейной формы. В вещественном пространстве используется понятие билинейной формы.

Def: Функция $B(x, y)$ называется билинейной формой в V, если $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in R$:

1) $B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y)$
2) $B(x, \beta_1 y + \beta_2 y_2) = \beta_1 B(x, y_1) + \beta_2 B(x, y_2)$

3°. Для любой билинейной формы $B(x, y)$ существует линейный оператор A такой, что $B(x, y) = (Ax, y)$.

Аналогом эрмитовых форм в вещественном пространстве служат симметричные билинейные формы.

Def: Билинейная форма $B(x, y)$ называется симметричной, если $B(x, y) = B(y, x)$. Билинейная форма $B(x, y)$ называется кососимметричной, если $B(x, y) = -B(y, x)$.

4°. Любую билинейную форму можно представить в виде суммы симметричной и кососиметричной билинейной формы.

5°. Для того, чтобы билинейная форма $B(x, \ y)$, заданная в вещественном евклидовом пространстве V, была симметричной необходимо и достаточно, чтобы оператор A в представлении $B(x, y) = (Ax, y)$ был самосопряженным.

<u>Т°</u>. Все корни характеристического многочлена самосопряженного линейного оператора A в евклидовом пространстве – вещественны.

◀ Пусть $\lambda = \alpha + \beta i$ – корень характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Пусть (a_{ik}) – элементы матрицы оператора в некотором базисе $\{e_{ik}\}$, $(a_{ik}\in R)$. Будем искать решение системы $\sum_k a_{ik}\zeta_k = \lambda\zeta_i$, где $\lambda = \alpha + \beta i$. Система имеет решение $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, ибо определитель системы равен 0. Пусть решение $\zeta_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Подставляя в систему и приравнивая вещественные и мнимые части выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, имеем: $\sum_k a_{ik}y_k + i\sum_k a_{ik}y_k = (\alpha+\beta i)(x_i + y_k)$,

$\begin{cases} \sum_k a_{ik}x_k = \alpha x_i - \beta y_i, \\ \sum_k a_{ik}y_k = \beta x_i + \alpha y_i \end{cases}$, или в векторном виде $\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y, \\ Ay = \alpha y + \beta x \end{cases}$.

Умножим скалярно первое уравнение на y, а второе на x:

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \alpha(x, y) - \beta(y, y) \\ (y, Ay) &= \alpha(x, y) + \beta(x, x)\end{aligned}.$$

Учитывая, что $(Ax, y) = (x, Ay)$ (ведь A – самосопряженный) имеем

$\alpha(x, y) - \beta(y, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, x)$, т.е. $\beta((x, x) + (y, y)) = 0 \Rightarrow \beta = 0$, т.е. $\lambda = \alpha\in \mathrm{R}$ ▶

6°. У каждого линейного самосопряженного оператора A в n – мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.

7°. В базисе из нормированных ортогональных собственных векторов матрица линейного самосопряженного оператора A имеет диагональный вид и по диагонали стоят собственные значения.

8°. В произвольном ортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора будет симметричной ($A^T = A$). Верно и обратное. Этим вещественный случай отличается от комплексного: в комплексном случае оператор A является эрмитовым, когда матрица этого оператора эрмитова (т.е. $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$).

§2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В комплексных унитарных пространствах рассматривались унитарные операторы, т.е. операторы, сохраняющие скалярное произведение $((Ux, Uy) = (x, y))$, их аналогом в евклидовых пространствах являются ортогональные операторы.

Def: Линейный оператор P, действующий в евклидовом пространстве называется ортогональным, если $\forall x, y\in V$: $(Px, Py) = (x, y)$.

Непосредственно из определения следует, что если $\{e_k\}$ ортогональный базис в V, то $\{Pe_k\}$ тоже ортогональный базис в V.

<u>Т°</u>. Чтобы линейный оператор P был ортогональным необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор P^{-1} и выполнялось равенство $P^* = P^{-1}$.

◀ **<u>Необходимость</u>**. Пусть P – ортогональный.

$(P^*Px, y) = (Px, Py) = (x, y) \Rightarrow ((P^*P - E)x, y) = 0 \Rightarrow P^*P = E \Rightarrow (Px, Py) = (x, y) \Rightarrow P^* = P^{-1}$.

Достаточность. Пусть $P^* = P^{-1}$, $(x, y) = (x, P^{-1}Py) = (x, P^*Py) = (Px, Py)$ ▶

Def: Матрица называется ортогональной, если $P^TP = PP^T = E$.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный базис в V, то оператор P будет ортогональным тогда и только тогда когда матрица оператора будет ортогональной.

В унитарном пространстве аналогом ортогональной матрицы является унитарная матрица, т.е. такая матрица U, что $U^*U = UU^* = E$. Здесь U^* эрмитово сопряженная матрица, т. е. $U^* = \overline{U}^T$. Нетрудно показать, что в ортонормированном базисе матрица линейного оператора U унитарна тогда и только тогда, когда оператор U унитарен.

Рассмотрим **ортогональное преобразование в одномерном случае** $\forall x \in V_1$, $x = \alpha e$, $\alpha \in R$, тогда $Pe = \lambda e \Rightarrow (Pe, Pe) = (\lambda e, \lambda e) = \lambda^2 (e, e) = (e, e)$, т.е. $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$, таким образом, в одномерном пространстве существует два ортогональных преобразования $P_+x = x$ и $P_-x = -x$.

Рассмотрим **ортогональное преобразование в двумерном случае**. Если P задается матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то из условия $P^TP = PP^T = E$ следует, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 + b^2 = 1, \\ c^2 + d^2 = 1, \end{matrix} \quad ac + bd = 0,$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 + c^2 = 1, \\ b^2 + d^2 = 1, \end{matrix} \quad ab + cd = 0,$$

т.е. $\begin{matrix} a^2 = d^2 \\ b^2 = c^2 \end{matrix}$, $\quad a^2 + b^2 = 1$, $\quad \begin{matrix} ac + db = 0 \\ ab + cd = 0 \end{matrix}$. Положив $a = \cos\varphi$, $b = -\sin\varphi$, получим $P_\pm = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \pm\sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix}$, причем во второй строке надо брать либо оба минуса, либо оба плюса. При этом $\det P_\pm = \pm 1$.

Ортогональная матрица P_+ **называется собственной**, а P_- **называется несобственной**.

В ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$ оператор P_+ осуществляет поворот на угол φ в плоскости $\{e_1, e_2\}$. Записав $P_- = QP_+$, где $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, можем сказать, что P_- осуществляет поворот на угол φ в плоскости $\{e_1, e_2\}$ (P_+), а затем отражение относительно оси e_1 (Q).

В **общем случае** в n-мерном евклидовом пространстве произвольный ортогональный оператор P в некотором ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ может быть записан в виде:

$$\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&&&&& \\
&& \cdots &&&&&&&&& \\
&&& -1 &&&&& 0 &&& \\
&&&& -1 &&&&&&& \\
&&&&& \cdots & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 &&&& \\
& 0 &&&&& \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 &&&& \\
&&&&&&&& \cdots & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & \\
&&&&&&&&& -\sin\varphi_k & -\cos\varphi_k & \\
&&&&&&&&&&& \cdots
\end{pmatrix}.$$

Таким образом, в некотором ортонормированном базисе действие ортогонального оператора сводится к последовательным поворотам и отражениям относительно координатных осей.

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К СУММЕ КВАДРАТОВ В ОРТОГОНАЛЬНОМ БАЗИСЕ

<u>Т°</u>. Пусть $B(x, y)$ – симметричная билинейная форма в евклидовом пространстве V. Тогда существует ортонормированный базис $\{e_k\}$ пространства V и существуют $\lambda_k \in R$ такие, что в указанном базисе квадратичная форма $B(x,x)=\sum\limits_k \lambda_k {\zeta_k}^2$.

◀ $B(x, y)$ – симметричная билинейная форма $\Rightarrow \exists A$ – самосопряженный такой, что $B(x, y) = (Ax, y) \Rightarrow$ для $A\ \exists\{e_k\}$ ортонормированный собственный базис $\Rightarrow \forall x\in V$, $x=\sum\limits_k \xi_k e_k$;

$Ax=\sum\limits_k \xi_k A e_k=\sum\limits_k \lambda_k \xi_k e_k \Rightarrow B(x, x) = A(x, x) = \left(\sum\limits_k \lambda_k \xi_k e_k,\ \sum\limits_k \lambda_k \xi_k e_k\right) =$

$= \sum\limits_k \sum\limits_m \lambda_k \xi_k \xi_m (e_k, e_m) = \sum\limits_{k,m} \lambda_k \xi_k \xi_m \delta_{km} = \sum\limits_k \lambda_k \xi_k^2$ ▶

§2. ОДНОВРЕМЕННОЕ ПРИВЕДЕНИЕ ПАРЫ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ К СУММЕ КВАДРАТОВ

<u>Т°</u>. Пусть $A(x, y)$ и $B(x, y)$ – симметричные билинейные формы в вещественном линейном пространстве V. Пусть, кроме того, $\forall x\in V$, $x \neq 0$, $B(x, x) > 0$, т.е. квадратичная форма $B(x, x)$ положительно определена. Тогда в V существует базис $\{e_k\}$, в котором: $A(x,x)=\sum\limits_k \lambda_k {\zeta^2}_k$; $B(x,x)=\sum\limits_k \zeta_k^2$.

◀ Рассмотрим билинейную форму $B(x, y)$ полярную к квадратичной форме $B(x, x)$. Учитывая свойства $B(x, x)$ в посылке теоремы, форма $B(x, y)$, может задавать скалярное произведение в V $(x, y) \equiv B(x, y)$, теперь V стало евклидовым пространством $\Rightarrow \exists\{e_k\}$ – ортонормированный базис, в котором $A(x,x)=\sum\limits_k \lambda_k \zeta_k^2$, при этом в ортонормированном базисе $(x,x)=\sum\limits_k \zeta_k^2 = B(x,x)$ ▶

Две последние теоремы дают доказательство существования и способ построения канонического базиса квадратичной формы.

Этот способ не более сложен чем, скажем, методы Лагранжа или Якоби, рассмотренные ранее. Однако доказательство полезно тем, что иллюстрирует применение самосопряженных операторов и выглядит здесь достаточно мощно.

§3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим произвольную дифференцируемую функцию f на некоторой гладкой поверхности S. Точка $x_0 \in S$ называется стационарной (критической) точкой, если в x_0 производная f по любому направлению на поверхности S равна нулю.

Мы исследуем вопрос о стационарных (в частности экстремальных) точках и значениях квадратичной формы $B(x, x)$ на сфере единичного радиуса в евклидовом пространстве V и о связи этих значений с собственными векторами и значениями самосопряженного оператора A, такого, что $(Ax, y) = B(x, y)$. При этом единичной сферой в V назовем множество $x \in V$ для которых $(x, x) = \|x\| = 1$.

Итак: пусть $B(x, x)$ – квадратичная форма, $B(x, y)$ – полярная ей симметричная билинейная форма, A – самосопряженный оператор: $B(x, y) = (Ax, y)$, тогда в базисе из собственных векторов оператора A : $B(x,x) = \sum_k \lambda_k \xi_k^2$, здесь λ_k – собственные значения A.

Договоримся, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Заметим, что в выбранном базисе уравнение единичной сферы таково: $\sum_k \xi_k^2 - 1 = 0$.

<u>Т</u>°. Стационарные значения квадратичной формы $B(x, x)$ на единичной сфере равны собственным значениям λ_k оператора A. Эти стационарные значения достигаются на единичных собственных векторах e_k оператора A.

Задача: найти точки экстремума $B(x, x)$ при условии $(x, x) = 1$. Это задача на условный экстремум.

◀ Можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа: $L = \sum_k \lambda_k \xi_k^2 - \lambda(\sum_k \xi_k^2 - 1)$. **Необходимое условие экстремума**: $\sum_k \xi_k^2 = 1$ и $\dfrac{\partial L}{\partial \zeta_k} = 2(\lambda_k - \lambda)\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Здесь λ_k – неопределенные множители Лагранжа.

Решение этой системы: $\begin{array}{l} \lambda = \lambda_k,\ \xi_1 = 0, \ldots, \xi_{k-1} = 0,\ \xi_k = 1, \\ \xi_{k+1} = 0, \ldots, \xi_n = 0, \end{array}$ т.е. эти решения – собственные значения и собственные векторы оператора A.

Примечание: Числа λ_1 и λ_n являются собственно наибольшим и наименьшим значением $B(x, x)$ на сфере $(x, x) = 1$, т.е. $\underbrace{\lambda_n \leq B(x,x) \leq \lambda_1}_{\text{принцип Рэлея}}$, $\lambda_n \leq A(x,x)/(x,x) \leq \lambda_1$

$\lambda_{\max} = \sup(A(x,x)/(x,x)) = \sup\limits_{\|x\|=1} B(x,x)$ $\lambda_{\min} = \inf(A(x,x)/(x,x)) = \inf\limits_{\|x\|=1} B(x,x)$.

Неравенства $\lambda_n \le B(x,x) \le \lambda_1$ (принцип Рэлея), $\lambda_n \le A(x,x)/(x,x) \le \lambda_1$ характеризуют, так называемый, принцип Рэлея.

При этом, $\lambda_{\max} = \sup(A(x,x)/(x,x)) = \sup\limits_{\|x\|=1} B(x,x)$, $\lambda_{\min} = \inf(A(x,x)/(x,x)) = \inf\limits_{\|x\|=1} B(x,x)$

Для нахождения наибольшего по модулю собственного значения оператора *A*, можно применить следующую процедуру: . $v = \sum\limits_i \alpha_i e_i \Rightarrow A^k v = \sum\limits_i \alpha_i \lambda_i^k e_i = \lambda_i^k \sum\limits_i \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \approx \alpha_i \lambda_i^k e_i$;

$$\frac{A^{k+1}v}{A^k v} \approx \frac{\alpha_i \lambda_i^{k+1} e_i}{\alpha_i \lambda_i^k e_i} = \lambda\,;\ \lambda_i = \frac{(A^{k+1}v)_i}{(A^k v)_i} \to \text{cons}.$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

§1. ПОНЯТИЕ ГРУППЫ. ПОДГРУППЫ

Множество *G* элементов *x*, *y*, *z*, … произвольной природы называется группой, если в нем корректно введена внутренняя операция (закон композиции) т.е. $\forall x, y \in G, \exists z \in G$ такое, что $z = x \oplus y$ или ($z = x \odot y$), удовлетворяющее условиям:

1) $x\oplus(y\oplus z) = (x\oplus y)\oplus z$	ассоциативность	1) $x\odot(y\odot z) = (x\odot y)\odot z$;
2) $\exists \theta \in G \mid \forall x \in G\ \ x\oplus\theta = x$	нейтральный элемент	2) $\exists e \in G \mid \forall x \in G\ \ x\odot e = x$;
3) $\forall x \in G\ \exists y \in G \mid x \oplus y = \theta$ аддитивная форма записи	обратный элемент	3) $\forall x \in G\ \exists y \in G \mid x \odot y = e = \theta$ $(y = x^{-1})$. мультипликат. форма записи

Если введенная операция еще и коммутативная, т.е. $x\oplus y = y\oplus x$ или ($x\odot y = y\odot x$), то группа **называется абелевой**.

Подмножество элементов G_1 группы *G* **называется подгруппой**, если:

1) $\forall x, y \in G_1 \to x\odot y \in G_1$; 2) $\forall x \in G_1 \to x^{-1} \in G_1$.

(Здесь применена мультипликативная форма записи)

Подгруппа G_1 группы *G* сама по себе является группой. Простейшими (тривиальными) подгруппами любой группы является сама группа и группа, состоящая из одного элемента – нейтрального.

§2. ПРИМЕРЫ ГРУПП

1. Аддитивные группы: {0}, *Q*, *R*, *C*, множество Z_k целых чисел, кратных целому заданному *k*.
2. Мультипликативные: {1}, {1, –1}, {1, *i*, –1, –*i*}, множество $\{z \in C \mid \|z\| = 1\}$, P_+ – множество вещественных положительных чисел, $Q\backslash\{0\}$, $R\backslash\{0\}$, $C\backslash\{0\}$.
3. Группа симметрий ромба *V*: $\{E, S_{BD}, S_{AC}, S_0\}$.

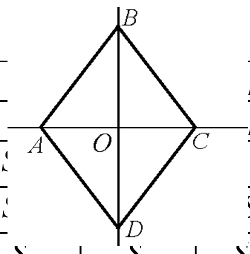


Таблица Кэли:

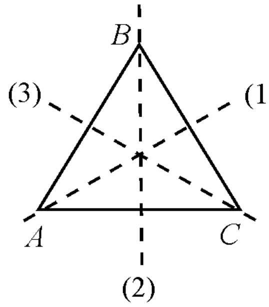
[illegible]	[illegible]	S_{BD}	S_{AC}	S_0
[illegible]	[illegible]	S_{BD}	S_{AC}	S_0
S[illegible]	[illegible]	[illegible]	S_0	S_{AC}
S[illegible]	[illegible]	S_0	E	S_{BD}
S_0	S_0	S_{AC}	S_{BD}	E

4. Для заданного равностороннего треугольника *ABC* рассмотрим преобразования, отображающие треугольник сам на себя:

1. E – тождественное преобразование.
2. α – поворот на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки.
3. β – поворот на угол $4\pi/3$ против часовой стрелки.
4. S_1 – симметрия относительно оси (1) ($B \leftrightarrow C$)
5. S_2 – симметрия относительно оси (2) ($A \leftrightarrow C$)
   - S_3 – симметрия относительно оси (3) ($A \leftrightarrow B$).

Закон композиции зададим таблицей Кэли:

$\odot$	E	α	β	S_1	S_2	S_3
E	E	α	β	S_1	S_2	S_3
α	α	β	E	S_2	S_3	S_1
β	β	E	α	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_2	S_3	E	α	β
S_2	S_2	S_3	S_1	β	E	α
S_3	S_3	S_1	S_2	α	β	E



Такой закон композиции ассоциативен, но не коммутативен (например $S_1 \odot S_2 \neq S_2 \odot S_1$. Единичный элемент E – тождественное преобразование, обратные $\alpha^{-1} = \beta$; $\beta^{-1} = \alpha$; $S_i^{-1} = S_i$.

Множество преобразований самосовмещения треугольника с таким законом композиции **называется группой самосовмещений равностороннего треугольника**.

Подмножество $\{E, \alpha, \beta\}$ этой группы образует подгруппу группы самосовмещений и **называется группой поворотов равностороннего треугольника**.

5. Перестановкой назовем закон, по которому элементам a, b, c, d, … взаимно однозначно ставятся в соответствие элементы того же множества, но, возможно, в другом порядке $f = \begin{pmatrix} a & b & c & \dots \\ f(a) & f(b) & f(c) & \dots \end{pmatrix}$.

Композиция двух перестановок $f_1 \odot f_2$ определяется как последовательное применение двух перестановок: сначала f_2, а потом f_1.

Для конечного множества E из n – элементов перестановки образуют группу (не абелевую!), которая называется симметричной группой S_n.

В частности:

Группа перестановок трех элементов S_3:

Пусть $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Закон композиции определен таблицей:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	P_2	P_1	P_5	P_6	P_3	P_4
P_3	P_3	P_6	P_1	P_5	P_4	P_2
P_4	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3
P_5	P_5	P_4	P_2	P_3	P_6	P_1

P_6	P_6	P_3	P_4	P_2	P_1	P_5

Данная группа имеет три подгруппы по два элемента: $\{P_1, P_2\}$, $\{P_1, P_3\}$, $\{P_1, P_4\}$ и одну подгруппу из трех элементов: $\{P_1, P_5, P_6\}$.

Группу самосовмещений равностороннего треугольника можно представить как группу перестановок трех элементов:

$$E=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, S_1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, S_3=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}.$$

6. Рассмотрим множества, состоящие из двух элементов $\{0, 1\}$ с операцией: $0\odot 0 = 0$; $0\odot 1 = 1$; $1\odot 0 = 1$; $1\odot 1 = 1$. Единичный элемент здесь 0.

Эта группа называется группой вычетов по модулю 2 и обозначается Z_2.

7. Группа из двух преобразований евклидового пространства: а) тождественное преобразование – 0, б) отражение относительно θ – 1.

От группы Z_2 – отличается лишь природой элементов, групповые свойства одинаковы.

§3. ЕЩЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Если группа конечная – то количество её элементов называют порядком группы.

2°. Группа G из элементов $a^0 = e$, a, a^2, a^3, …, $a^k = e$ называется циклической группой, порождаемой элементом a. Порядок группы – $|G| = k$.

3°. Группа поворотов правильного многоугольника относительно его центра является циклической группой $n^{\text{го}}$ порядка. Порождается элементом $P_{2\pi/n}$ (поворот на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки). Эта группа обозначается C_n.

4°. Группа целых чисел по сложению также циклическая, ибо порождается одним элементом (0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, …, –(1), –(1 + 1), …), Группа обозначается C_∞.

5°. Если H_1 и H_2 помножества группы G, то $H \equiv \{h \mid h=h_1+h_2,\ h_1 \in G_1,\ h_2 \in G_2\}$ называется **суммой двух подмножеств группы** G и обозначается $G_1 + G_2$. Если, при этом, представление $h=h_1+h_2$ единственно, то сумма подмножеств называется **прямой суммой** и обозначается $H_1 \oplus H_2$. Отметим что, сумма двух подгрупп группы подгруппой, вообще говоря, не является. (*Попробуйте привести пример*)

6°. T°. $G=G_1\oplus G_2\oplus\ldots\oplus G_k \Leftrightarrow (G_1,G_2,\ldots G_{i-1})\cap G_i=\{\theta\},\ \forall i\leq k.$

Для того чтобы группу G можно было представить в виде прямой суммы подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_k$ необходимо и достаточно, чтобы подгруппы не имели других общих элементов, кроме нейтрального.

T°. Пусть $|G| = n$ и $n=k\cdot l$ **.** НОД(k, l) = 1. Тогда $\exists G_k, G_l \subset G$, $|G_k|=k$, $|G_l|=l$: $G=G_k\oplus G_l$ (для абелевых циклических групп).

7°. Если для циклической группы G порядок группы $|G|=p^n$ ($n>1$), где p – простое число, то группа называется примарной.

T°. Примарная группа не может быть разложена в прямую сумму нетривиальных подгрупп.

8°. T°(Лагранжа). Если G_1 - подгруппа конечной группы G то порядок подгруппы G_1 является делителем порядка группы G.

§4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГРУПП

1°. Если $aa^{-1} = e \Rightarrow a^{-1}a = e$, т.е. $(a^{-1})^{-1} = a$.

◀ Пусть x элемент обратный к a^{-1}, т.е. $a^{-1}x = e$. Тогда $a = ae = a(a^{-1}x) = (aa^{-1})x = ex$ и $a^{-1}a = a^{-1}(ex) = (a^{-1}e)x = a^{-1}x = e$ ▶

2°. $\forall a,\ ea = a$, т.е. правый нейтральный элемент является и левым нейтральным.

◀ $$\left.\begin{matrix} aa^{-1} = e \\ a^{-1}a = e \end{matrix}\right\} \Rightarrow ea = (aa^{-1})a = a(a^{-1}a) = ae = a$$ ▶

3°. Если $ax = e$ и $ya = e$, то $x = y$.

◀ Пусть $ay = e$, т.е. y обратен к $a \Rightarrow ya = e$ (**1°**), т.е. $y = ye = y(ax) = (ya)x = ex = x$ ▶

Из свойств **1°**, **2°**, **3°** следует, что:

1s) Элемент a^{-1} является как левым, так и правым обратным к a.

2s) В любой группе уравнения $ax = b$ и $ya = b$ однозначно разрешимы, причем $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$.

3s) В группе имеется единственный нейтральный элемент.

4°. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

◀ $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = e$ ▶

§5. ИЗОМОРФИЗМ ГРУПП

Две группы G_1 и G_2 **называются изоморфными**, если существует взаимно однозначное соответствие f между элементами G_1 и G_2: $G_1 \xleftrightarrow{f} G_2$ такое, что если

$$\begin{matrix} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \end{matrix} \Rightarrow x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2 .$$

Для изоморфных групп: $e_1 \leftrightarrow e_2$, $a,\ a^{-1} \leftrightarrow f(a),\ f(a^{-1})$. Изоморфные группы с точки зрения групповых свойств неразличимы.

Примеры изоморфных групп:

а) группа самосовмещений равностороннего треугольника и группа перестановок из трех элементов.

б) Группа вычетов по модулю 2: Z_2 и группа, состоящая из двух преобразований евклидового пространства: тождественного преобразования и отражения относительно θ.

Изоморфное отображение группы G на саму себя **называется автоморфизмом**. Если отдельные автоморфизмы группы рассматривать как некоторые элементы, а последовательное проведение автоморфизмов, как произведение соответствующих элементов, то автоморфизмы сами по себе образуют группу, единичным элементом которой является тождественный автоморфизм. Эта группа **называется группой автоморфизмов данной группы** G.

§6. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ. НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

Если H_1 и H_2 – подмножества группы G, то произведением H_3 подмножеств H_1 и H_2 называется $H_3 = H_1 \cdot H_2 \equiv \{h_3 \mid h_3 = h_1 \cdot h_2;\ h_1 \in H_1;\ h_2 \in H_2\}$.

Отметим, что если H_1 и H_2 – подгруппы группы G, то $H_1\cdot H_2$, вообще говоря, не подгруппа.

◀ В самом деле, если $h_3^{(1)}, h_3^{(2)} \in H_3$, то $h_3^{(1)}\cdot h_3^{(2)} = (h_1^{(1)}\cdot h_2^{(1)})(h_1^{(2)}\cdot h_2^{(2)}) =$

$= h_1^{(1)}(h_2^{(1)}\cdot h_1^{(2)})h_2^{(2)} = \overbrace{\underbrace{(h_1^{(1)}\cdot h_1^{(2)})}_{\in H_1}\underbrace{(h_2^{(1)}\cdot h_2^{(2)})}_{\in H_2}}^{\in H_3}$, если бы можно было, то …. Но коммутативный закон, вообще говоря, не выполнен ▶

Если H подгруппа G и $a\in G$, то aH и Ha, рассматриваемые как произведения множества H и одноэлементного множества $\{a\}$, **называются левым и правым смежными классами подгруппы** H в G. Изменение a влечет за собой, вообще говоря, изменение смежных классов.

§7. СВОЙСТВА СМЕЖНЫХ КЛАССОВ (СФОРМУЛИРОВАНЫ ДЛЯ ЛЕВЫХ, НО СПРАВЕДЛИВЫ И ДЛЯ ПРАВЫХ)

1°. $a\in H \Rightarrow aH \equiv H$. *Доказать самостоятельно.*

2°. $a^{-1}b\in H \Rightarrow aH = bH$. ◀ $a^{-1}bH \equiv H$ (из **1°**) и тогда $bH = (aa^{-1})bH = a(a^{-1}bH) = aH$ ▶

3°. Два смежных класса одной подгруппы H либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

◀ Пусть aH и bH имеют общий элемент, т.е. для $h_1, h_2\in H$, $ah_1 = bh_2 \Rightarrow a^{-1}b = h_1h_2^{-1}\in H$ и т.к. $a^{-1}b\in H \Rightarrow aH = bH$ (из **2°**) ▶

4°. $a\in aH$. *Доказать самостоятельно.*

Пусть H такая подгруппа G для которой все левые смежные классы являются и правыми смежными классами. В этом случае, $aH = Ha$, $\forall a\in G$. Подгруппа H для которой все левые смежные классы являются одновременно и правыми смежными классами **называется нормальным делителем группы** G.

<u>Т</u>°. Если H – нормальный делитель группы G, то произведение смежных классов – смежный класс.

◀ aH, bH – смежные классы, $aH\cdot bH = a(H\cdot b)H = a(bH)H = (ab)H\cdot H = (ab)H$ ▶

§8. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ СМЕЖНЫХ КЛАССОВ

1°. Рассмотрим группу S_3 (группа перестановок 3^x элементов).

Левые смежные классы группы S_3 по подгруппе $B = \{P_1, P_2\}$ состоит из классов:

B; $P_5B = P_4B = \{P_4, P_5\}$; $P_3B = P_6B = \{P_3, P_6\}$.

Правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $B = \{P_1, P_2\}$ состоит из классов:

B; $BP_6 = BP_4 = \{P_4, P_6\}$; $BP_5 = BP_3 = \{P_3, P_5\}$.

Здесь множество левых и правых смежных классов не совпадают.

Однако … левые и правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $A = \{P_1, P_5, P_6\}$ совпадают: A; $AP_2 = P_2A = \{P_2, P_3, P_4\}$.

В данном случае подгруппа A – есть нормальный делитель группы S_3.

2°. В множестве целых чисел Z рассмотрим аддитивную подгруппу чисел, делящихся на пять: $A_5 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$.

Левые и правые смежные классы здесь такие, $A_5^1\{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$ – множество чисел, которые при делении на пять дают в остатке единицу. Аналогично

A_5^2, A_5^3, A_5^4 – множества чисел, которые при делении на пять, дают в остатке 2, 3, 4 соответственно.

Все левые смежные классы совпадают с правыми смежными классами. Таким образом, A_5 – нормальный делитель группы Z. Если обозначить B_5 множество целых чисел, не делящихся на пять, то можно записать $Z = A_5 \times B_5$, где знак обозначает прямое произведение.

Замечание: Множество классов $\{A_5^0, A_5^1, A_5^2, A_5^3, A_5^4\}$ образую аддитивную группу с нейтральным элементом A_5^0.

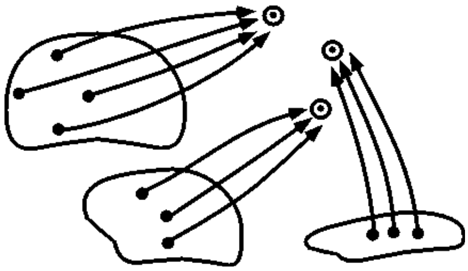
Эта группа **называется фактор-группой** группы Z по подгруппе A_5 и обозначается Z/A_5.

§9. ГОМОМОРФИЗМЫ. ФАКТОР-ГРУППА

Пусть G – группа с элементами a, b, c, … и $\overline{G}$ – некоторое множество с элементами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ в котором введена операция: $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \overline{G} \quad \exists \bar{c} \in \overline{G} \,|\, \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

Def: Отображение f группы G на множество $\overline{G}$: $f : G \to \overline{G}$ **называется гомоморфизмом**, если $\forall a, b \in G$ выполнено соотношение $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. При этом $\overline{G}$ называется гомоморфным образом группы G.

Если $\overline{G} \subset G$, то гомоморфизм **называется эндоморфизмом**.



Если задано гомоморфное отображение G на $\overline{G}$, то все элементы группы G разбиваются на непересекающиеся классы; В классы объединяются все те элементы группы G, которые отображаются в один и тот же элемент множества $\overline{G}$.

<u>T</u>°. Гомоморфный образ группы есть группа.

◀ Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ элементы гомоморфного образа $\overline{G}$ группы G при гомоморфизме f. Значит, $\forall \bar{a}, \bar{b}, \ldots \in \overline{G} \quad \exists a, b, \ldots \in G$ такие, что $\bar{a} = f(a), \ \bar{b} = f(b), \ldots$ Тогда операции в G и $\overline{G}$ согласованны (по определению гомоморфизма) и осталось проверить свойства операции:

а) $\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = f(a)((f(b) \cdot f(c)) = f(a)f(bc) = f(a(bc)) = f((ab)c) = f(ab) \cdot f(c) = (f(a)f(b)) \cdot f(c) = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$ (ассоциативность операции);

б) $f(e)$ обозначим $\bar{e}$: $\bar{a}\bar{e} = f(a)f(e) = f(ae) = f(a) = \bar{a}$ (т.к. $f(e) = \bar{e}$ единичный элемент);

б) $f(a^{-1})$ обозначим $\bar{a}^{-1}$: $a\bar{a}^{-1} = f(a)f(a^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) = f(e) = \bar{a}$ (т.е. обратный $\bar{a}^{-1}$ к $\bar{a}$) ▶

Пусть H – нормальный делитель группы G. Определим отображение f группы G на множество $\overline{G}$ смежных классов по нормальному делителю H: f: $a \in G$, то $a \mapsto aH$: $aH \in \overline{G}$.

<u>T</u>°. Отображение f группы G на смежные классы по нормальному делителю H, при определении операции умножения классов смежности, как подмножеств группы G, представляет собой гомоморфизм.

◀ Истинность этого факта следует из доказанной теоремы о том, что произведение смежных классов есть смежный класс ▶

Следствием двух последних теорем является:

Т°. Множество смежных классов группы G по нормальному делителю H с операцией умножения этих классов, определенной как произведение подмножеств группы G, образуют группу.

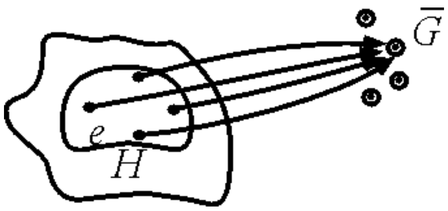
Эта группа **называется фактор-группой** группы G по нормальному делителю H и обозначается: G/H.

Очевидно, отображение f группы G на множество смежных классов по нормальному делителю H представляет собой гомоморфизм этой группы на фактор-группу G/H.

Пример: Пусть R^n – n-мерное линейное пространство. Оно является абелевой группой по сложению. По определению прямого произведения $R^n = R^1_{(1)} \times R^1_{(2)} \times R^1_{(3)} \times \ldots \times R^i_{(n)}$. $R^1_{(n)}$ –абелева подгруппа, т.е. нормальный делитель группы R^n. Смежным классом $a \in R^n$ служат многообразие $a + R^1_{(n)}$, фактор-группа $R^n / R^1_{(n)}$ изоморфна $(n–1)$ – подпространству R^{n-1}: $R^{n-1} = R^1_{(1)} \times R^1_{(2)} \times R^1_{(3)} \times \ldots \times R^i_{(n-1)}$ т.е. $R^{n-1} = R^n / R^1_{(n)}$. Кстати, именно этим и объясняется термин: нормальный делитель и обозначение G/H.

§10. ДВЕ ТЕОРЕМЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ

Т°. Пусть f – гомоморфизм группы G на $\overline{G}$ и пусть H – множество тех элементов группы G, которые при гомоморфизме f отображаются в элемент $f(e)$, где e – единица группы G. Тогда H нормальный делитель группы G.



◀ Достаточно доказать, что H – подгруппа и, что левые смежные классы есть одновременно и правые смежные классы.

1) $a \in H,\ b \in H \Rightarrow \begin{matrix} f(a) = f(e) \\ f(b) = f(e) \end{matrix} \Rightarrow f(ab) = f(a)f(b) =$

$= f(e)f(e) = f(ee) = f(e)$, т.е. $ab \in H$;

$a \in H \Rightarrow f(a^{-1}) = f(a^{-1}e) = f(a^{-1})\, f(e) = f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e)$, т.е. $a^{-1} \in H$. Тогда H – подгруппа группы G.

2) $a \in G$ и пусть $A = \{x \in G \mid f(x) = f(a)\}$. Докажем, что A – это одновременно и левый и правый смежные классы.

Пусть $a' \in A$. Рассмотрим уравнение $ax = a'$: $f(a') = f(ax) = f(a) \cdot f(x) = f(a')f(x)$, отсюда $f(x) = \bar{e} = f(e) \Rightarrow x \in H$; Т.к. $a \underset{x \in H}{x} = a' \Rightarrow a' \in aH$.

Пусть $a' \in A$. Рассмотрим уравнение $xa = a'$: $f(a') = f(xa) = f(x) \cdot f(a) = f(x) f(a')$), отсюда $f(x) = \bar{e} = f(e) \Rightarrow x \in H$; Т.к. $\underset{x \in H}{x} a = a' \Rightarrow a' \in Ha$.

Получили $A = aH = Ha$ ▶

Т°. Пусть f – гомоморфизм группы G на $\overline{G}$ и H – тот нормальный делитель группы G, элементам которого при гомоморфизме f соответствует $\bar{e} \in \overline{G}$. Тогда группа $\overline{G}$ и фактор-группа G/H изоморфны.

◀ Установим взаимно-однозначное соответствие между $\overline{G}$ и G/H.

$\bar{a} \in \overline{G} \rightarrow$ смежный класс, который с помощью f отображается в $\bar{a}$.

Это отображение взаимно – однозначно, ибо смежные классы не пересекаются. Если умножение классов производить как умножение подмножеств, то станет ясно, что это отображение есть изоморфизм. Но классы смежности и есть элементы фактор-группы. ▶

§11. ГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1°. Рассмотрим множество невырожденных линейных операторов (преобразований), действующих из V_n в V_n. Если определить произведение линейных операторов по правилу $(AB)x = A(Bx)$, то:

<u>T°</u>. Множество $GL(n)$ невырожденных линейных преобразований линейного n-мерного пространства V с операцией умножения операторов введенной,как $(AB)x = A(Bx)$ представляет собой группу.

Эта группа **называется группой линейных невырожденных преобразований** линейного пространства V_n и обозначается: $GL(n)$.

2°. *Короткое воспоминание*: Линейный оператор P в евклидовом пространстве называется ортогональным, если $\forall x, y \in V$ (евклидово пространство) $(Px, Py) = (x, y)$.

Условие ортогональности оператора: Оператор P_2 ортогонален тогда и только тогда когда существует P^{-1} и $P^{-1} = P^*$.

<u>T°</u>. Множество всех ортогональных операторов евклидового пространства V_n с обычной операцией умножения линейных операторов образует группу.

Эта группа **называется ортогональной группой** и обозначается $O(n)$.

◀ Пусть P_1 и P_2 – ортогональные операторы. Докажем, что P_1P_2 тоже ортогональный оператор $(P_1P_2x, P_1P_2x) \underbrace{=}_{\text{ортог}P_1} (P_2x, P_2x) \underbrace{=}_{\text{ортог}P_2} (x, y)$ ▶

3°. *Еще воспоминание*: Если оператор P ортогонален, то $\det P = \pm 1$. Поэтому все ортогональные операторы P делятся на два класса:

а) P для которых $\det P = 1$ (эти преобразования **называются собственными**)

б) P для которых $\det P = -1$ (эти преобразования **называются несобственными**)

<u>T°</u>. Множество всех собственных ортогональных преобразований образует группу, которая **называется собственной ортогональной группой** и обозначается $SO(n)$.

4°. $O(n)$ есть подгруппа $GL(n)$; $SO(n)$ есть подгруппа $O(n)$.

5°. В комплексном линейном пространстве также можно рассмотреть группу линейных преобразований. Если в комплексном пространстве со скалярным произведением (унитарное пространство) рассмотреть множество линейных операторов, сохраняющих скалярное произведение: $(U_x, U_y) = (x, y)$ (такие операторы называются унитарными), то окажется, что унитарные операторы образуют группу. Эта группа называется **унитарной группой**, обозначается U_n и является аналогом ортогональной группы в унитарном пространстве.

§12. ГРУППА ЛОРЕНЦА

В физике, при изучении поведения тел (частиц) в пространстве и времени, часто полезно, из наглядных соображений, пользоваться 4^x-мерным пространством векторов с координатами (ct, x, y, z)) (c – скорость света)). Такое пространство называется мировым пространством.

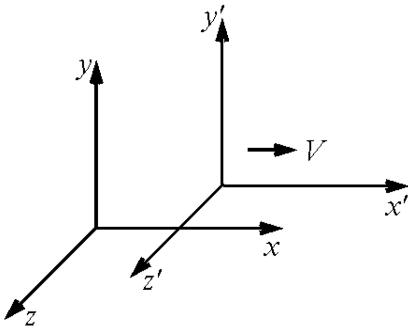
В этом пространстве событие изображается точкой в мировом пространстве или мировой точкой.

Частице в мировом пространстве соответствует мировая линия.

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета K из точки (x_1, y_1, z_1) в некоторый момент времени t_1 отправлен сигнал со скоростью c и этот сигнал принят в точке (x_2, y_2, z_2) в момент времени t_2. Тогда расстояние, которое этот сигнал прошел, равно: $c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, следовательно: $c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - -(y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$. В другой инерциальной системе отсчета K' будем иметь: $c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0$.

Принцип неизменности скорости света в различных системах отсчета в математической интерпретации обозначает, что не изменяется величина S, где: $S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - -x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$.

Величина S **называется интервалом** между двумя событиями в мировом пространстве.



Преобразования, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета K к другой инерциальной системе отсчета K', движущейся относительно K с постоянной скоростью V в предположении бесконечности скорости света **называются преобразованиями Галилея**:

$(x' = x + vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t)$.

Если же учитывать конечность скорости света, то такие преобразования носят **названия преобразований Лоренца**. Преобразования Лоренца сохраняют интервал. Если в указанном пространстве ввести: $\sigma(x) = (\mathrm{sgn} S^2(x))\sqrt{|S^2(x)|}$, то все векторы (и интервалы) разобьются на:

а) времени-подобные ($\sigma(x) > 0$);

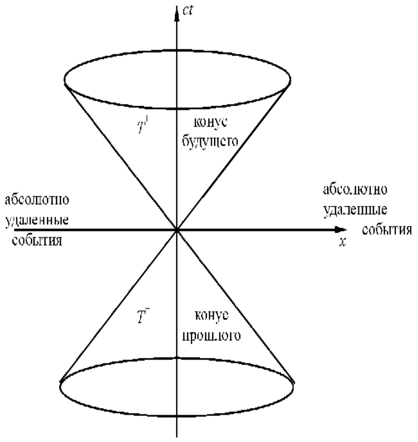
б) изотропные ($\sigma(x) = 0$);

в) пространственно-подобные ($\sigma(x) < 0$).

Если интервал между событиями времени-подобен, то существует K' в которой два события произошли в одном и том же месте мирового пространства.

Если интервал между событиями пространственно-подобен, то существует K' в котором два события произошли одновременно.

Два события могут быть связаны причинно-следственной связью, если интервал между ними времени-подобный.



Рассмотрим псевдоевклидово пространство $E^n(p, q)$ в котором скалярное произведение (x, y) задано симметричной невырожденной билинейной формой, полярной знакопеременной квадратичной форме $A(x, x)$, которая в некоторой системе координат(она называется Галилеевой) имеет вид: $A(x,x) = (x,x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q=n} x_i^2$.

Def: Линейное преобразование P псевдоевклидового пространства $E^n(p, q)$ называется преобразованием Лоренца, если $\forall x, y \in E^n(p, q)$, $(Px, Py) = (x, y)$.

<u>**Т°**</u>. Определитель преобразования Лоренца отличен от нуля и, следовательно, существует P^{-1}. *Доказать самостоятельно*.

<u>**Т°**</u>. Произведение преобразований Лоренца есть преобразование Лоренца. *Доказать самостоятельно*.

Таким образом:

<u>**Т°**</u>. Множество всех преобразований Лоренца псевдоевклидового пространства $E^n(p, q)$ с обычной операцией умножения линейных операторов образуют группу, которая называется общей группой Лоренца псевдоевклидового пространства $E^n(p, q)$ и обозначена $L(n; p, q)$. *Доказать самостоятельно*.

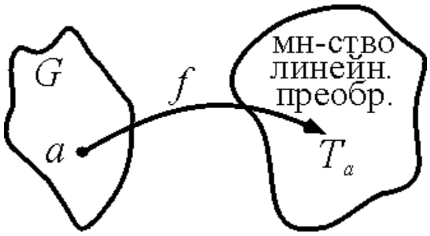
Группа $L(n; 1, n-1)$ обозначается $L(n)$. Группа Лоренцевых преобразований в рассмотренном выше $E^4(1, 3)$ обозначается $L(4)$.

Подгруппа группы $L(n)$ преобразований P, которые времени-подобные векторы переводят во времени-подобные векторы **называется полной группой Лоренца** и обозначается $L_{\uparrow}(n)$.

Подгруппа группы $L(n)$ преобразований P, для которых $\det P > 0$ **называется собственной группой Лоренца** и обозначается $L_+(n)$.

Собственные преобразования Лоренца, которые принадлежат $L(n)$ т.е. переводят времени-подобные векторы во времени-подобные векторы также образуют подгруппу $L(n)$, которая называется группой Лоренца и обозначается $L_+^{\uparrow}(n)$.

§13. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП. ТЕРМИНОЛОГИЯ

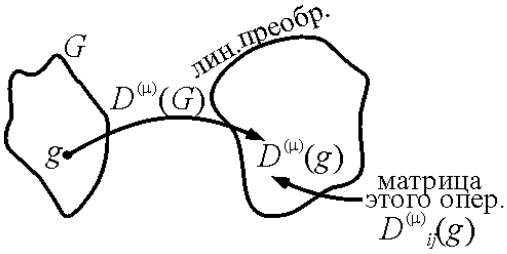


Def: Линейным представлением группы G в конечномерном евклидовом пространстве E^n называется такое отображение f, посредством которого $\forall a \in G\ \exists T_a$ – линейный оператор пространства E^n так, что $\forall a_1, a_2 \in G$ выполнено соотношение: $T(a_1, a_2) = T_{a_1} \cdot T_{a_2}$. Т.е. осуществляет **гомоморфизм группы *G* на некоторое подмножество линейных преобразований**.

Используется следующая терминология: E^n – пространство представления; $\dim E^n$ – размерность представления; базис в E^n – базис представления.

Сам гомоморфный образ $f(G)$ группы G также **называется представлением группы *G* в пространстве представлений.**

В дальнейшем: n-мерное линейное представление группы будем **называть** (для кратности) **представлением этой группы**.



Обозначение представления группы : $D(G)$.

Различные представления группы : $D^{(\mu)}(G)$.

$D^{(\mu)}(y)$ – это линейный оператор: f: $g \to D^{(\mu)}(y)$.

Представления $D^{(\mu_1)}(G)$ и $D^{(\mu_2)}(G)$ группы G в одном и том же пространстве **называются эквивалентными**, если $\exists\, C$ – линейный оператор в E^n такой, что

$$\forall g \in G \colon\ D^{(\mu_1)}(g) = C^{-1} D^{(\mu_2)}(g)\, C.$$

Тривиальное представление группы G: гомоморфизм G на единичный элемент группы $GL(n)$.

Если f: $G \to G_1$, где G_1 подгруппа в $GL(n)$ и если f – изоморфизм, то представление **называется точным**. (Не у всякой группы есть точное n-мерное представление для заданного n).

Например: У $O(10)$ нет точного одномерного представления: группа $O(1)$ – абелева, а группа $O(10)$ не абелева.

§14. ПРИВОДИМЫЕ И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Def: Подпространство E' называется инвариантным для представления $D(G)$, если оно инвариантно для всякого оператора из $D(G)$.

Очевидно, что на инвариантном подпространстве E' представления $D(G)$ индуцируется некоторое представление $\widetilde{D}(G)$, которое, вообще говоря, не сводится к $D(G)$ если $E' \neq E^n$.

Представление $\widetilde{D}(G)$ **называется частью представления** $D(G)$.

Поясним теперь понятие представления.

Пусть, например, все матрицы некоторого трехмерного представления $D(G)$ имеют вид $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline 0 & 0 & a_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right)$. Нетрудно проверить, что при умножении матриц такого типа их структура сохраняется, причем $A_1^H = A_1' \cdot A_1''$ и $A_3^H = A_3' \cdot A_3''$ (т.е. части A_1 и A_3 перемножаются автономно).

Отсюда следует, что A_1 есть двумерное представление группы G, а A_3 есть одномерное представление этой же группы.

В таких случаях говорят, что представление $D(G)$ **приводимо**.

Если все матрицы (речь идет о квадратных матрицах $n \times n$) имеют вид $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, где A_1 и A_2 квадратные матрицы порядков n_1 и n_2, то матрицы A_1 и A_2 образуют представления, сумма размерностей которых $n_1 + n_2 = n$.

В этом случае представление **называют вполне приводимым**.

И в заключение: Представления $D(G)$ называется неприводимым, если у этого представления существуют лишь два инвариантных подпространства: E^n и $\{\theta\}$.

Роль неприводимых представлений заключается в том, что любое представление может быть выражено через неприводимые.

§15. ХАРАКТЕРЫ

Пусть $D(G)$ – n-мерное представление группы G, и $D_{ij}(g)$ – матрица оператора, отвечающего $g \in G$.

Характером элемента $g \in G$ в представлении $D(G)$ **называется число** $\chi(g) = D_{ij}(g) = D_{11}(g) + D_{22}(g) + \ldots + D_{nn}(g)$, т.е. характером элемента $g \in G$ является след оператора $D(G)$. Отсюда ясно, что характер любого элемента не зависит от базиса представления и поэтому является инвариантом.

Итак: любому $g \in G$ представления $D(G)$ отвечает число – характер этого элемента.

Вопрос: каким элементам группы отвечают одинаковые характеры?

Def: Элемент $b \in G$ называется сопряженным к элементу $a \in G$, если $\exists u \in G$ такой, что $uau^{-1} = b$.

Для сопряженных элементов выполнено:

1°. a сопряжен самому себе. ◀ $eae^{-1} = a$ ▶

2°. Если b сопряжен к a, и c сопряжен к b, то c сопряжен к a.

◀ $uau^{-1} = b \Rightarrow u^{-1}uau^{-1}u = u^{-1}bu \Rightarrow a = u^{-1}bu \Rightarrow a = vbv^{-1}$ ▶

3°. Если b сопряжен к a, и c сопряжен к b , то с сопряжен к a.

◀ $uau^{-1} = b, \quad vbv^{-1} = c \Rightarrow c = v(uau^{-1})v^{-1} = (vu)a(u^{-1}v^{-1}) = = (vu)a(vu)^{-1} = waw^{-1}$ ▶

Все элементы группы разобьем на классы взаимно-сопряженных элементов. Два таких класса либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

<u>Т°</u>. Характеры элементов принадлежащих к одному и тому же классу сопряженных элементов равны друг другу. *Доказать самостоятельно.*

<u>Т°</u>. Характеры элементов для эквивалентных представлений совпадают. *Доказать самостоятельно.*

Пусть G разбита на классы сопряженности k_1, k_2, …, k_v. Тогда каждому k_i можно поставить в соответствие число χ_i – характер элементов k_i в представлении $D(G)$.

Тогда представление $D(G)$ может быть описано с помощью набора характеров χ_1, χ_2, …, χ_v, который можно рассматривать, как координаты вектора в евклидовом пространстве E^v. При этом различным представлениям соответствуют, вообще говоря, различные векторы.

Указанный геометрический подход позволяет во многих случаях решать важные вопросы теории представления групп.

§16. ПРИМЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

Рассмотрим группу G – группу симметрий трехмерного пространства, состоящего из трех элементов: I – тождественное преобразование и P – отражение пространства относительно начала координат.

Т.е. $G = \{I, P\}$. При этом умножение элементов задано таблицей:

*	I	P
I	I	P
P	P	I

1) Одномерное представление группы G.

Пусть E^1 – пространство представлений и e_1 – базис. Пусть линейный невырожденный оператор $A^{(1)}$ в этом базисе имеет матрицу $A^{(1)} = (1)$. Очевидно, это преобразование образует подгруппу в группе $GL(1)$ причем умножение в этой подгруппе задается по правилу:

*	$A^{(1)}$
$A^{(1)}$	$A^{(1)}$

Мы получили одномерное представление $D^{(1)}(G)$ группы G

$$D^{(1)}(I) = A^{(1)};\ D^{(1)}(P) = A^{(1)};$$

2) Двумерное представление группы G. Выберем в E^2 базис $\{e_1, e_2\}$ и рассмотрим в этом базисе матрицы преобразований: $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; операции задаются таблицей:

	$A^{(2)}$	$B^{(2)}$
$A^{(2)}$	$A^{(2)}$	$B^{(2)}$
$B^{(2)}$	$B^{(2)}$	$A^{(2)}$

Получим двумерное представление группы G с помощью соотношений: $D^{(2)}(I) = A^{(2)}$; $D^{(2)}(P)= B^{(2)}$;

Этими соотношениями определяется изоморфизм группы G на подгруппу $\{A^{(2)}; B^{(2)}\}$ группы $GL(2)$, т.е. это точное представление группы G.

2) Трехмерное представление группы G. Рассмотрим в E^3 в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ линейное преобразование $A^{(3)}$ с матрицей $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и законом умножения: $A^{(3)} \cdot A^{(3)} = A^{(3)}$. Получаем трехмерное представление $D^{(3)}(G)$ с помощью соотношений:

$$D^{(3)}(I) = A^{(3)};\ D^{(3)}(P) = A^{(3)}.$$

4) Четырехмерное представление группы G. Рассмотрим в E^4 линейные преобразования $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$ с матрицами: $A^{(4)} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$; $B^{(4)} = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Преобразования $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$ образуют подгруппу в $GL(4)$ с законом умножения, аналогичным примеру **2,** соотношениями:

$$D^{(4)}(I) = A^{(4)},\ D^{(4)}(P) = B^{(4)}.$$

Заметив, что $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$ можно записать в виде $A^{(4)} = \begin{pmatrix} A^{(2)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}$; $B^{(4)} = \begin{pmatrix} B^{(2)} & 0 \\ 0 & B^{(2)} \end{pmatrix}$, можно записать (условно): $D^{(4)}(G) = D^{(2)}(G) + D^{(2)}(G) = 2D^{(2)}(G)$.

Аналогично можно условно записать $D^{(3)}(G) = 3D^{(3)}(G)$.

Используя это замечание можно без труда построить представление группы G любой конечной размерности.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТЕНЗОРОВ

§1. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ГРАММА

Def: Определителем Грамма, системы векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ **называется определитель**

$$\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_k) = \begin{vmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & \ldots & (e_1,e_k) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & \ldots & (e_2,e_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_k,e_1) & (e_k,e_2) & \ldots & (e_k,e_k) \end{vmatrix}.$$

<u>Т°</u>. Для того чтобы система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ евклидова пространства E_n была линейно-зависимой необходимо и достаточно чтобы $\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ был равен нулю.

◀ Необходимость. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно зависимы. Тогда $e_k = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + e_{k-1}\alpha_{k-1}$ и в $\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ элементы последней строки имеют вид $\alpha_1(e_1,e_i) + \alpha_2(e_2,e_i) + \ldots + \alpha_{k-1}(e_{k-1},e_i)$, т.е. последняя строка есть линейная комбинация остальных $\Rightarrow \Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_k) = 0$.

Достаточность. Пусть $\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_k) = 0 \Rightarrow$ строки его линейно зависимы $\Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ $\beta_1(e_1,e_i) + \ldots + \beta_k(e_k,e_i) = 0 \Rightarrow (\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_k e_k = 0$ и не все $\beta_i = 0 \Rightarrow e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно зависимы. Противоречие ▶

Следствие. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно независимы, то $\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_k) \neq 0$. Более того, $\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_k) > 0$

◀ Рассматриваем $\mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_k)$. Тогда (e_k, e_i) – элементы матрицы некоторой симметрической билинейной формы, соответствующая которой квадратичная форма определяет скалярное произведение, т.е. является положительно определенной. Следовательно, по критерию Сильвестра $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_k > 0$. Но $\Delta_k = \Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ ▶

§2. ВЗАИМНЫЕ БАЗИСЫ. КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ

Пусть E_n – евклидово пространство, пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базис в E_n и $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ другой базис в E_n. Базисы $\{e_i\}$ и $\{e^i\}$ называются взаимными, если $(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

↑символ

Кронекера-Капелли.

<u>Т°</u>. Любой базис $\{e_i\}$ из E_n имеет единственный взаимный базис.

◀ Пусть $e^j = x_1^j e_1 + x_2^j e_2 + \ldots + x_n^j e_n$. Умножим равенство скалярно на e_i.

$$(e_i, e^j) = x_1^j (e_i, e_1) + x_2^j (e_i, e_2) + \ldots + x_n^j (e_i, e_n) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Имеем неоднородную систему n-линейных уравнений с n неизвестными $\left(x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j\right)$, Определитель этой системы есть $\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_n) \neq 0$, т.е. система имеет единственное ненулевое решение.

Следовательно векторы e^j определяются однозначно. Убедимся в том, что они образуют базис (т. е. являются линейно независимыми).

Пусть $\alpha_1 e^1 + \alpha_1 e^2 + \ldots + \alpha_n e^n = 0$. Умножим скалярно на e_i.

$\alpha_1(e_i, e^1) + \alpha_2(e_i, e^2) + \ldots + \alpha_n(e_i, e^n) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$ ▶

<u>Замечание</u>: если базис $\{e_i\}$ ортонормированный, то его взаимный базис совпадает с данным базисом.

Пусть $\{e_i\}$ и $\{e^j\}$ взаимные базисы в E_n.

$$\text{Тогда} \quad \forall x \in E_n \quad \begin{aligned} x &= x_1 e^1 + x_2 e^2 + \ldots + x_n e^n \\ x &= x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n \end{aligned} \tag{1}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **называются ковариантными координатами вектора** x.
$(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ **называются контравариантными координатами вектора** x.

Смысл названий мы поясним далее.

<u>Соглашение</u>: Пусть имеется выражение, составленное из сомножителей, которые снабжены конечным числом индексов (верхних и нижних). При этом договариваются, что все нижние индексы обозначаются разными символами (аналогично верхние). Если в таком выражении встречаются два одинаковых индекса, из которых один верхний, а другой – нижний, то считается, что по таким индексам производится суммирование от 1 до n.

Например: $\begin{array}{l} x_i e^i = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \ldots + x_n e^n \\ \delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^n \end{array}$.

Используя, это соглашение формула (1) записывается так: $x = x_i e^i$, $x = x^i e_i$, (индекс суммирования может быть обозначен любым символом, результат не изменится – и часто **называется** «немым» (иногда «глухим») индексом).

Пусть $x = x_i e^i$. Умножив на e_j, получим $(x,e_j) = x_i(e^i,e^j) = x_i\delta_i^j = x_j$. Аналогично $x = x^i e_i$ умножим на e^j и получим $(x,e^j) = x^i(e_i,e^j) = x^i\delta_i^j = x^j$. Т.е. получили формулы:

$$\left.\begin{array}{l} x = (x,e_i)\, e^i \\ x = (x,e^i)\, e_i \end{array}\right\}$$

Эти формулы **называются формулами Гиббса**.

Тогда используя формулы Гиббса, запишем: $e_j = (e_j,e_i)e^i$ и $e^j = (e^j,e^i)e_i$ и обозначив $g_{ji} = (e_j,e_i)$, $g^{ji} = (e^j,e^i)$ получим $e_j = g_{ji}e_i$; $e^j = g^{ji}e^i$.

> Т.е. для получения взаимного базиса $\{e_j\}$ по базису $\{e^i\}$ достаточно знать матрицу $g_{ji} = (e_j,e_i)$ и наоборот: для получения базиса $\{e^j\}$ по базису $\{e_i\}$ достаточно знать матрицу $g^{ji} = (e^j,e^i)$. (Точнее их обратные матрицы).

<u>**Т°**</u>. Матрицы g_{ji} и g^{ji} – взаимнообратные.

◀ Соотношение $e_i = g_{ji}e^j$ умножим на e^k : $\delta_i^k = (e_i,e^k) = g_{ji}(e^j,e^k) = g_{ji}g^{jk} \Rightarrow g_{ji}g^{jk} = \delta_i^k$, т.е. произведение матриц (g_{ji}) и (g^{ji}) есть единичная матрица ▶

Задача 1. По заданному базису $\{e_i\}$ (нижнему) построить ему взаимный базис $\{e^i\}$ (верхний), по заданному верхнему базису построить взаимный нижний.

◀ а) Чтобы построить базис взаимный к нижнему надо найти матрицу $G_H = (g_{ik}) = (e_i, e_k)$, обратить матрицу, получив $(G_H)^{-1}$ и подействовать этой матрицей на матрицу F_H, строками которой являются векторы нижнего базиса. После перемножения получится матрица F_B, строками которой являются векторы верхнего базиса.

б) Чтобы построить базис взаимный к верхнему надо найти матрицу $G_B = (g^{ik}) = (e^i, e^k)$, обратить ее, получив $(G_B)^{-1}$ и подействовать этой матрицей на матрицу F_B, строками которой являются векторы верхнего базиса. После перемножения получится матрица F_H,

строками которой, являются векторы нижнего базиса.

в) именно так трактуются формулы: $e_i = g_{ij}e^i = (g^{ij})^{-1}e^i$; $e^i = g^{ij}e_i = (g^{ij})^{-1}e_i$ ▶

Примеры.

1°. Найти базис, взаимный к базису: $e_1(1, 1, 0)$, $e_2(1, 0, 1)$, $e_3(0, 1, 1)$.

◀ а) Строим матрицу: $G_H = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix}$. Получаем:

$G_H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$(G_H)^{-1}=\begin{pmatrix}3/4 & -1/4 & -1/4\\ -1/4 & 3/4 & -1/4\\ -1/4 & -1/4 & 3/4\end{pmatrix}.$$

б) Составляем матрицу $F_H=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$;

в) и находим: $F_B=G_H^{-1}F_n=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/4 & -1/4 & -1/4\\ -1/4 & 3/4 & -1/4\\ -1/4 & -1/4 & 3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

г) Строки полученной матрицы F_B и есть векторы взаимного базиса, т.е. $e^1(1/2,\ 1/2,\ –1/2)$, $e^2(1/2,\ –1/2,\ 1/2)$, $e^3(–1/2,\ 1/2,\ 1/2)$ ▶

2°. Найдем базис взаимный к базису: $e^1(1,\ 1,\ 1)$, $e^2(0,\ 1,\ 1)$, $e^3(0,\ 0,\ 1)$.

◀ Строим матрицу: $G_B=(g^{ik})=\begin{pmatrix}(e^1,e^1) & (e^1,e^2) & (e^1,e^3)\\ (e^2,e^1) & (e^2,e^2) & (e^2,e^3)\\ (e^3,e^1) & (e^3,e^2) & (e^3,e^3)\end{pmatrix}$, т.е. $G_B=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

; $(G_B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$. Находим $F_H=(G_B)^{-1}F_B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

Таким образом найдены векторы взаимного базиса: $e_1(1,\ 0,\ 0)$, $e_2(–1,\ 1,\ 0)$, $e_3(0,\ –1,\ 1)$ ▶

Задача 2. Вектор $x\ (5,\ 2,\ 1)$ задан своими координатами в том же базисе, в котором заданы векторы двух взаимных базисов: $e_1(1,\ 1,\ 0)$, $e_2(1,\ 0,\ 1)$, $e_3(0,\ 1,\ 1)$ и $e^1(1/2,\ 1/2,\ –1/2)$, $e^2(1/2,\ –1/2,\ 1/2)$, $e^3(–1/2,\ 1/2,\ 1/2)$. Найти ковариантные и контравариантные координаты вектора x в базисе $\{e_1, e_2, e_3, e^1, e^2, e^3\}$.

◀ Вектор $x=(xe_i)e^i=7e^1+6e^2+3e^3$ поэтому $(x_1,\ x_2,\ x_3)=(7,\ 6,\ 3)$ – ковариантные координаты x.

Вектор $x=(xe^i)e_i=3e_1+2e_2-e_3$, следовательно $(x^1,\ x^2,\ x^3)=(3,\ 2,\ –1)$ – контравариантные координаты x ▶

§3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БАЗИСА И КООРДИНАТ

Пусть в E_n задана $\{e_i\}$ и $\{e^i\}$ –пара взаимных базисов, а $\{e_{i'}\}$ и $\{e^{i'}\}$ некоторая другая пара взаимных базисов. Запишем формулы преобразования базисных векторов:

1°. Переход $e_i \leftrightarrow e_{i'}$: $e_{i'}=b^i_{i'}e_i$; $e_i=b^{i'}_i e_{i'}$. Здесь $b^i_{i'}$ – матрица перехода от e_i к $e_{i'}$; $b^{i'}_i$ – матрица перехода $e_{i'}$ от к e_i; т.е.матрицы $b^i_{i'}$ и $b^{i'}_i$ взаимно-обратны: $\left(b^i_{i'}\right)^{-1}=\left(b^{i'}_i\right)$.

2°. Переход $e^i \leftrightarrow e^{i'}$: $e^{i'}=\tilde b^{i'}_i e^i$; $e^i=\tilde b^i_{i'}e^{i'}$. Здесь $\tilde b^{i'}_i$ – матрица перехода e^i от к $e^{i'}$; $\tilde b^i_{i'}$ – матрица перехода от e^i к $e^{i'}$; т.е.матрицы $\tilde b^{i'}_i$ и $\tilde b^i_{i'}$ взаимно-обратны.

<u>**T°.**</u> $b^{i'}_i=\tilde b^{i'}_i$ и (следовательно $b^i_{i'}=\tilde b^i_{i'}$).

◀ $\begin{matrix} e_{i'}=b^i_{i'}e_i \ \mid e^k \Rightarrow \left(e_{i'},e^k\right)=b^i_{i'}(e_i,e^k)=b^i_{i'}\delta^k_i=b^k_{i'}\\ e^i=\tilde b^i_{i'}e^{i'} \ \mid e_{k'} \Rightarrow \left(e^i,e_{k'}\right)=\tilde b^i_{i'}\left(e^{i'},e_{k'}\right)=\tilde b^i_{i'}\delta^{i'}_{k'}=b^i_{k'}\end{matrix}$.Положим $k=i$, $k'=i'$ $\Rightarrow$

$\begin{matrix}\left(e_{i'}e^i\right)=b^i_{i'}\\ \left(e_{i'}e^i\right)=\tilde b^i_{i'}\end{matrix}$, т.е. матрицы $b^i_{i'}$ и $\tilde b^i_{i'}$ совпадают ▶

<u>**Примечание:**</u> Правило нахождения матрицы $b^i_{i'}$

$$b_{i'}^{i} = (e_{i'}, e^{i}).$$

Итак: $\begin{cases} e_{i'} = b_{i'}^{i} e_i; \quad & e_i = b_i^{i'} e_{i'}; \\ e^{i'} = b_i^{i'} e^{i}; \quad & e^{i} = b_{i'}^{i} e^{i'}; \end{cases}$ – формулы преобразования базисных векторов. Здесь $\left(b_{i'}^{i}\right)$ матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$.

Таким образом для перехода от базиса $\{e_i, e^i\}$ к базису $\{e_{i'}, e^{i'}\}$ достаточно знать лишь матрицу перехода $b_{i'}^{i}$ от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$.

Задача . Имеется две пары взаимных базисов $\{e_1, e_2, e_3, e^1, e^2, e^3\}$ и $\{e_1, e_2, e_3, e^{1'}, e^{2'}, e^{3'}\}$. Записать формулы для преобразования при переходе от одного базиса к другому и найти соответствующие матрицы перехода.

◀ Формулы преобразования базисных векторов:

1) $e_{i'} = b_{i'}^{i} e_i$, $b_{i'}^{i}$ – матрица перехода от e_i к $e_{i'}$; i' – строки, i – столбцы(строки слева) $\}B_1$.

2) $e_i = b_i^{i'} e_{i'}$, $b_i^{i'}$ – матрица перехода от $e_{i'}$ к e_i; i – строки, i' – столбцы (строки слева) $\}B_2$,

при этом $B_2 = (B_1)^{-1}$.

3) $e^{i'} = b_i^{i'} e^{i}$, $b_i^{i'}$ – матрица перехода от e^i к $e^{i'}$; i' – строки, i – столбцы (строки слева) $\}B_3$,

при этом $B_3 = (B_{12})^T$.

4) $e^{i} = b_{i'}^{i} e^{i'}$, $b_{i'}^{i}$ – матрица перехода от $e^{i'}$ к e^i; i – строки, i' – столбца (строки слева) $\}B_4$,

при этом $B_4 = (B_1)^T$.

5) Элементы матрицы $B_1 = (b_{i'}^{i})$ находят так $b_{i'}^{i} = (e_{i'}, e^{i})$ ▶

Пример: Пусть $e_1(1, 1, 0)$ $\quad e_{1'}(1, 0, 0)$

$e_2(1, 0, 1)$ $\quad e_{2'}(-1, 1, 0)$

$e_3(0, 1, 1)$ $\quad e_{3'}(0, -1, 1)$

$e^1(1/2, 1/2, -1/2)$ $\leftrightarrow$ $e^{1'}(1, 1, 1)$.

$e^2(1/2, -1/2, 1/2)$ $\quad e^{2'}(0, 1, 1)$

$e^3(-1/2, 1/2, 1/2)$ $\quad e^{3'}(0, 0, 1)$

Строим матрицу $B_1 = (b_{i'}^{i}) = (e_i, e^j) = \begin{pmatrix} (e_1,e^1) & (e_1,e^2) & (e_1,e^3) \\ (e_2,e^1) & (e_2,e^3) & (e_2,e^3) \\ (e_3,e^1) & (e_3,e^2) & (e_3,e^3) \end{pmatrix}$. Имеем $B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$B_2 = B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B_3 = B_2^T$; $B_4 = B_1^T$. Чтобы проверить формулу 1) $e_{i'} = b_{i'}^{i} e_i$ мы должны матрицу B_1 умножить на матрицу у которой в строках стоят e_i – получим матрицу у которой в строках $e_{i'}$, аналогично проверяются формулы 2), 3), 4).

1) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{i'}}$;

2) $\underset{B_2}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{e_{i'}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{e_i}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$;

3) $\underset{B_3}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{e^i}{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}} = \underset{e^{i'}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$;

4) $\underset{B_4}{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{e^{i'}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{e^i}{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$ ►

Информация к размышлению:

Та же **задача**: В базисе, в котором заданы координаты всех векторов, построить матрицу перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$ (а также от базиса $\{e^i\}$ к базису $\{e^{i'}\}$).

◄ а) пусть $P_{S\to e}$ – матрица перехода из стандартного базиса в базис $\{e_i\}$, т.е. для построения матрицы $P_{S\to e}$ координаты векторов e_i пишутся в столбцы;

б) $P_{e\to S} = (P_{S\to e})^{-1}$;

в) $P_{S\to e'}$ – матрица перехода из стандартного базиса в базис $\{e_{i'}\}$;

г) $P_{e\to e'} = (P_{S\to e'})(P_{S\to e})^{-1}$ ►

Примеры:

1°. $e_1(1, 1, 0)$ $\quad$ $e_{1'}(1, 0, 0)$

$e_2(1, 0, 1)$ $\quad$ $e_{2'}(-1, 1, 0)$

$e_3(0, 1, 1)$ $\quad$ $e_{3'}(0, -1, 1)$.

Тогда $P_{S\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(P_{S\to e})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $P_{S\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Получаем

$$P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

При этом $P_{e'\to e} = (P_{e\to e'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. И при этом: если обозначить $P_1 = P_{e\to e'}$, $P_2 = P_{e'\to e}$, то:

$P_1 e_1 = e_{1'}$; $P_1 e_2 = e_{2'}$; $P_1 e_3 = e_{3'}$; $P_2 e_{1'} = e_1$; $P_2 e_{2'} = e_2$; $P_2 e_{3'} = e_3$.

2°. $e^1(1/2, 1/2, -1/2)$ $\quad$ $e^{1'}(1, 1, 1)$

$e^2(1/2, -1/2, 1/2)$ $\quad$ $e^{2'}(0, 1, 1)$

$e^3(-1/2, 1/2, 1/2)$ $\quad$ $e^{3'}(0, 0, 1)$.

Построение: $P^{S\to e} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $(P^{S\to e})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{S\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$P^{e\to e'} = \left(P^{S\to e'}\right)\left(P^{S\to e}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и кроме того: $P^{e\to e'} = \left(P^{e\to e'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Если обозначить $P^{e\to e'} = P_3$, $P^{e'\to e} = P_4$, то $P_3 e^1 = e^{1'}$; $P_3 e^2 = e^{2'}$; $P_3 e^3 = e^{3'}$; $P_4 e^{1'} = e^1$; $P_4 e^{2'} = e^2$; $P_4 e^{3'} = e^3$. Для P_1, P_2, P_3, P_4 справедливы те же соотношения, что и для B_1, B_2, B_3, B_4:

B_1; $B_2 = B_1^{-1}$; $B_3 = \left(B_1^{-1}\right)^T$; $B_4 = B_1^T$;

P_1; $P_2 = P_1^{-1}$; $P_3 = \left(P_1^{-1}\right)^T$; $P_4 = P_1^T$.

Вопрос: Почему же B_1 и P_1 (а также остальные) матрицы различны? Правда, они симметричны относительно второй большой диагонали?

Попробуйте ответить на этот вопрос прежде чем вы прочитаете последующие две строчки.

Ответ: Матрицы B_1^T и матрицы P_1 это одна и та же матрица перехода но P_1 в стандартном базисе, а B_1^T в базисе $\{e_i\}$.

Пусть $x\in E_n$.Пусть в базисе $\{e_{i'},\ e^{i'}\}$ $x = x_{i'}e^{i}$ т.е. $x_{i'}$ ковариантные координаты вектора x.

$$x_{i'} = (x,e_{i'}) = \left(x, b_{i'}^{i}e_i\right) = b_{i'}^{i}(x,e_i) = b_{i'}^{i}x_i,\quad \text{т.е.}\quad x_{i'} = b_{i'}^{i}x_i.$$

При переходе к новому базису ковариантные координаты вектора x преобразуются с помощью матрицы перехода $b_{i'}^{i}$ от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e^{i'}\}$ (т.е. так же как координаты базисных векторов). Этим и обусловлено название – ковариантные (согласованные) .

Кроме того : $x^{i'} = (x,e^{i'}) = \left(x, b_{i'}^{i}e^{i}\right) = b_{i'}^{i}(x,e^{i}) = b_{i'}^{i}x^{i}.$

При переходе к новому базису контравариантные координаты вектора x преобразуются с помощью матрицы перехода $b_{i}^{i'}$ от базиса нового к старому. Это несогласование преобразований и обусловило название контравариантные (несогласованные) координаты.

Задача . Вектор $x(5, 2, 1)$ в базисе $\{e_1(1, 1, 0), e_2(0, 1, 1), e_3(0, 1, 1), e^1(1/2, 1/2, 1/2), e^2(1/2, -1/2, 1/2), e^3(-1/2, 1/2, 1/2)\}$ имеет ковариантные координаты (7, 6, 3) и контравариантные координаты (3, 2, –1). Это было установлено при решении задач в предыдущем параграфе . Найти ковариантные и контравариантные координаты этого же вектора в базисе $\{e_{1'}(1, 0, 0),\ e_{2'}(-1, 1, 0),\ e_{3'}(0, -1, 1), e^{1'}(1, 1, 1),\ e^{2'}(0, 1, 1), e^{3'}(0, 0, 1)\}$.

◀ Как известно, ковариантные и контравариантные координаты вектора x преобразуются по-разному: с помощью формул: $x_{i'} = b_{i'}^{i}x_i$ и $x^{i'} = b_{i}^{i'}x_i$, тогда $x_{i'} = b_{i'}^{i}x_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$ т.е. $x' = 5e^{1'} - 3e^{2'} - e^{3'}$ (это $x(5, 2, 1)$). Итак (7, 6, 3) $\to$ (5, –3, –1) для ковариантных координат.

Далее: $x^{i'} = b_{i}^{i'}x^{i} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $x' = 8e_{1'} + 3e_{2'} + e_{3'}$ (это $x(5, 2, 1)$). Итак (3, 2, –1) $\to$ (8, 3, 1) для контравариантных координат.

Здесь матрицы перехода взяты из предыдущей задачи. ▶

§4. ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРА

Пусть V – вещественное (не обязательно евклидово) линейное пространство ($\dim V = n$).

***Def*:** Тензором типа (p, q) , (p раз ковариантным, q раз контравариантным) называется геометрический объект, который:

2. в любом базисе $\{e_i\}$ линейного пространства V_n определяется n^{p+q} координатами $A^{k_1k_2..k_q}_{i_1i_2..i_p}$ (индексы принимают значения 1, 2, …, n каждый);
3. обладает свойством, что его координаты $A^{k_1'k_2'..k_q'}_{i_1'i_2'..i_p'}$ в базисе $\{e_{i'}\}$ связаны с координатами $A^{k_1k_2..k_q}_{i_1i_2..i_p}$ в базисе $\{e_i\}$ соотношениями:

$$A^{k_1'k_2'..k_q'}_{i_1'i_2'..i_p'} = b^{i_1}_{i_1'}\dots b^{i_p}_{i_p'} b^{k_1'}_{k_1}..b^{k_q'}_{k_q} A^{k_1k_2..k_q}_{i_1i_2..i_p} \; ; \qquad (*)$$

и здесь $b^i_{i'}$ элементы матрицы перехода от старого базиса к новому ($e_i \to e_{i'}$), а $b^{i'}_i$ – элементы матрицы обратного перехода.

Число $r = p + q$ **называется рангом тензора**.

Формула (*) **называется формулой преобразования тензора при изменении базиса**.

<u>Замечание</u>: Индексы $i_1i_2 \dots i_p$ **называются ковариантными**, а $k_1k_2 \dots k_q$ – **контравариантными**.

<u>Отметим</u>: Ковариантные и контравариантные координаты вектора преобразуется по формуле (*) (p = 1, q = 0 для ковариантных координат, p = 0, q = 1 для контравариантных координат).

Поэтому вектор представляет собой тензор первого ранга (1 раз ковариантный, либо 1 раз контравариантный – в зависимости от выбора типа координат этого вектора).

<u>Отметим</u>: Скаляр – тензор нулевого ранга – имеет одну координату, причем не имеющую индексов и не изменяющуюся при изменении системы координат.

<u>Замечание</u>: Нетрудно убедиться в том, что последовательный переход от $\{e_i\}$ к $\{e_{i'}\}$, а затем от $\{e_{i'}\}$ к $\{e_{i''}\}$, приводит к тем же результатам, что непосредственный переход от $\{e_i\}$ к $\{e_{i''}\}$, т.е. определение тензора корректно.

<u>Замечание</u>: Любая система n^{p+q} чисел $A^{k_1k_2..k_q}_{i_1i_2..i_p}$ может в данном базисе e_i рассматриваться как координаты некоторого тензора A типа (p, q).

§5. ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРОВ

1°. Нуль-тензор – это тензор все координаты которого, в некотором (а, следовательно, в любом базисе) равны нулю.

2°. Символ Кронекера. Тензор A типа (1, 1) в базисе $\{e_i\}$ имеет координаты δ^k_i .

$$\delta^k_i \to b^i_{i'} b^{k'}_k \delta^k_i = b^i_{i'} b^{k'}_i = \delta^{k'}_{i'}$$

↑суммир. ↑взаимно

по k

обратные

матри

цы

Т.е. δ_i^k действительно можно рассматривать как тензор типа (1, 1).

3°. Пусть $A(x, y)$ – билинейная форма. Напомним, что в базисе $\{e_i\}$: $A(x, y) = A(x^i e_i, y^j e_j) = A(e_i, e_j)x^i y^j = a_{ij}x^i y^j$. Здесь a_{ij} – элементы матрицы билинейной формы A в базисе $\{e_i\}$.

Рассмотрим, как изменяется матрица билинейной формы при переходе к базису $\{e_{i'}\}$.

$$a_{i'j'} = A(e_{i'}, e_{j'}) = A\left(b_{i'}^i e_i, b_{j'}^j e_j\right) = b_{i'}^i b_{j'}^j A(e_i, e_j) = b_{i'}^i b_{j'}^j a_{ij}.$$

Равенство $a_{i'j'} = b_{i'}^i b_{j'}^j a_{ij}$, показывает, что матрица билинейной формы представляет собой тензор A типа (2, 0) ранга 2.

4^0. Пусть A линейный оператор: $y=Ax$. В некотором базисе e_i: м $y^j e_j$

$$=A(x^i e_i)= x^i A e_i = x^i b_i^j e_j$$

Т.е. $y^j = a_i^j x^i$, a_i^j – элементы матрицы линейного оператора в базисе $\{e_{i'}\}$.

Рассмотрим базис $\{e_{i'}\}$.

$y^{j'} = a_{i'}^{j'} x^{i'}$. Воспользуемся тем, что $x^i = b_{i'}^i x^{i'}$; $y^j = b_{k'}^j y^{k'}$.

$y^{k'} b_{k'}^j = a_i^j b_{i'}^i x^{i'}$ | умножим обе части на $b_j^{j'}$ и просуммируем по j.

$$y^{k'} b_{k'}^j b_j^{j'} = a_i^j b_{i'}^i b_j^{j'} x^{i'} \quad \Rightarrow \quad y^{k'} \delta_{k'}^{j'} = (b_{i'}^i b_j^{j'} a_i^j)\, x^{i'} \quad \Rightarrow \quad y^{j'} = a_{i'}^{j'} x^{i'}.$$

Тогда $a_{i'}^{j'} = b_{i'}^i b_j^{j'} a_i^j$

Последнее равенство показывает, что матрица линейного оператора может рассматриваться как тензор A типа (1,1) ранга 2.

§6. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ

1^0. Сложение и вычитание тензоров. Определяется для тензоров одинакового типа, как покоординатное сложение и вычитание.

2^0. Умножение тензора на число. Определяется для любых тензоров. Умножается каждая координата тензора на число.

3^0. Умножение тензоров. Определяется для любых тензоров,заданными своими координатами в некотором (общем) базисе.

Чтобы умножить тензор A с координатами $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$ на тензор B с координатами $B_{e_1 e_2 \dots e_r}^{m_1 m_2 \dots m_s}$ надо в тензоре B переименовать индексы $e_1\, e_2 \dots e_r$ на $i_{p+1} i_{p+2} \dots i_{p+r}$, а индексы $m_1 m_2 \dots m_s$ на $k_{q+1} k_{q+2} \dots k_{q+s}$ и составить тензор D типа $(p+r, q+s)$ с координатами $D_{i_1 i_2 \dots i_{p+r}}^{k_1 k_2 \dots k_{q+s}} = A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} B_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_{p+r}}^{k_{q+1} k_{q+2} \dots k_{q+s}}$.

Замечание: операция умножения тензоров, вообще говоря, не коммутативна: $AB \neq BA$. (хотя элементы и одинаковые, но порядок их, вообще говоря, разный).

4^0. Свёртка тензора: Применяется для тензоров типа (p,q) где $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Среди индексов тензора отмечается один верхний индекс и один нижний, заменяются одной буквой и производят суммирование по этому индексу согласно соглашению. Свертка тензора переводит тензор типа $(p$,q) в тензор типа $(p-1, q-1)$ т.е. понижает его ранг на 2.

Замечание: Термин свертка можно применить и к паре перемножаемых тензоров A и B, когда у одного тензора отмечается верхний индекс, а другого нижний и по этим индексам производится суммирование.

5^0. Симметрирование тензора по паре нижних индексов (или верхних).

$$A^{k_1k_2\ldots k_q}_{i_1\ldots i_m\ldots i_n\ldots i_p} \to \frac{1}{2}\left(A^{k_1k_2\ldots k_q}_{i_1\ldots i_m\ldots i_n\ldots i_p} + A^{k_1k_2\ldots k_q}_{i_1\ldots i_n\ldots i_m\ldots i_p}\right)$$

Аналогично для пары верхних индексов.

Получаемый тензор симметричен по указанной паре индексов.

6^0. Альтернирование тензора по паре нижних индексов (или верхних).

$$A^{k_1k_2\ldots k_q}_{i_1\ldots i_m\ldots i_n\ldots i_p} \to \frac{1}{2}\left(A^{k_1k_2\ldots k_q}_{i_1\ldots i_m\ldots i_n\ldots i_p} - A^{k_1k_2\ldots k_q}_{i_1\ldots i_n\ldots i_m\ldots i_p}\right)$$

Аналогично для пары верхних индексов.

Получаем тензор кососимметричный по указанной паре индексов.

§7.АФИННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ

Пусть E_n — эвклидово пространство и $\{e_i\}$ его ортонормированный базис. Если поставить задачу нахождения базиса $\{e^i\}$ взаимного к базису $\{e_i\}$, то нетрудно видеть что ортонормированный базис взаимен самому себе: $\forall i \;\; e^i = e_i$.

Тогда $\forall x \in E_n$

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \ldots + x_n e^n$$

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n$$

Следовательно получим, что $x^i = x_i$.

Т.е. в ортонормированном базисе ковариантные и контравариантные координаты вектора x совпадают.

При этом можно записать:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = x_i e_i = (xe_i)e_i$$

В ортонормированном базисе вместо формул Гиббса имеем формулу: $x = (xe_i)e_i$.

Рассмотрим переход от одного ортонормированного базиса $\{e_i\}$ к другому ортонормированному базису $\{e_{i'}\}$.

Формулы преобразования для произвольных базисов имели вид:

$$e_{i'} = b^i_{i'} e_i\,;\;\; e_i = b^{i'}_i e_{i'}\,;$$

$$e^{i'} = b^{i'}_i e^i\,;\;\; e^i = b^i_{i'} e^{i'}\,;$$

Обозначая $p_{i'i}$ элементы матрицы P перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$ можно указанные формулы переписать в виде:

$$e_{i'} = p_{i'i}\, e_i\,;\;\; e_i = p_{ii'}\, e_{i'}\,;$$

умножая скалярно первое равенство на e_i, а второе на $e_{i'}$ получим:

$$p_{i'i} = (e_{i'}, e_i) = (e_i, e_{i'}) = p_{ii'}\,;$$

Т.е. для матрицы перехода P справедливо соотношение $P^{-1} = P^{T}$ или то же самое: $PP^{T} = P^{T}P$ следовательно матрица оператора перехода ортогональна.

Формулы для преобразования ковариантных и контравариантных координат вектора x имели вид: $x_{i'} = b_{i'}^{i} \, x_i$ и $x^{i'} = b_{i}^{i'} \, x^i$. В случае ортонормированных базисов они будут иметь вид: $x_{i'} = p_{i'i} \, x_i$ и $x^{i'} = p_{i'i} \, x^i$,

Т.е. и ковариантные и контравариантные координаты преобразуются с помощью одной и той же матрицы перехода P от базиса $\{ e_i \}$ к базису $\{ e_{i'} \}$, т.е.согласованно с базисными векторами. В силу этого для ортонормированных базисов все координаты векторов ковариантны и преобразуются по одному и тому же закону: $x_{i'} = p_{i'i} \, x_i$.

В дальнейшем, в соответствии с выше сказанным, в ортонормированных базисах (т.е. при ортогональных преобразованиях) все координаты будут ковариантны, т.е. все индексы нижние.

И наконец:

Def: Аффинным ортогональным тензором A ранга r называется объект, который :

1) В каждом ортонормированном базисе $\{ e_i \}$ евклидова пространства E_n определяется n^r координатами $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ (индексы принимают значения от1 до n).

2) Обладает свойством, что его координаты $A_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r}$ в другом ортонормированном базисе $\{ e_{i'} \}$ связаны с координатами $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ в ортонормированном базисе $\{ e_i \}$ соотношениями:

$$A_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r} = p_{i'_1 i_1} \, p_{i'_2 i_2} \ldots p_{i'_r i_r} \, A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

В дальнейшем изложение будет вестись для аффинных ортогональных тензоров, и для простоты, в дальнейшем именно их будем именовать словом: тензор.

§8. Операции над аффинными ортогональными тензорами

Отношение равенства тензоров, операции сложения, вычитания и умножения тензоров на число определяются как операции покоординатного равенства, сложения, вычитания и умножения на число в некотором базисе. Умножение и свёртка тензоров производится, как и в случае тензоров общего вида, но при свёртке отмечается не один верхний и один нижний индексы а, естественно, два нижних.

Свёртка тензора $A_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_m \ldots i_r}$ по индексам i_k и i_m это фактически умножение на тензор $\delta_{i_k i_m}$ (Здесь $\delta_{i_k i_m}$ тензор Кронекера).

Скалярное произведение тензоров. Часто в тензорной алгебре применяется комбинация операций умножения тензоров с последующей свёрткой по паре индексов. При этом ранг результирующего тензора будет равен ($r_1 + r_2 - 2$), где r_1, r_2 - ранги перемножаемых тензоров.

В частности для тензоров первого ранга (векторов) A_i и B_k получаем: $A_i \, B_k \, \delta_{ik} = A_i \, B_i =$ $A_1 \, B_1 + A_2 \, B_2 + A_3 \, B_3$, а это просто скалярное произведение двух векторов.

По аналогии с этим простейшим случаем, комбинацию перемножения тензоров с последующей свёрткой называют скалярным или внутренним произведением тензоров.

§9 ПРИЗНАК ТЕНЗОРНОСТИ ВЕЛИЧИНЫ

Согласно определению, тензорный характер величины устанавливается по тому, как она преобразовывается при линейном ортогональном преобразовании координат.

Существует, однако, еще один способ установления тензорного характера величины. Проиллюстрируем этот способ на следующем примере:

Пусть A_i и B_k компоненты двух произвольных векторов. Если с помощью n^2 чисел T_{ik} можно образовать скаляр φ по правилу $\varphi = T_{ik} A_i B_k$, то n^2 чисел T_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Действительно:

$$T_{i'k'} A_{i'} B_{k'} = T_{ik} A_i B_k = T_{ik}\, p_{i'i}\, p_{k'k} A_{i'} B_{k'}$$

Вычитаем из левой части равенства правую:

$$(T_{i'k'} - p_{i'i}\, p_{л'л} T_{ik}) A_{i'} B_{k'} = 0$$

Отсюда, в силу произвольности векторов A_i и B_k:

$$T_{i'k'} = p_{i'i}\, p_{k'k} T_{ik}$$

Т.е. числа T_{ik} действительно являются компонентами тензора второго ранга.

Аналогично формулируется и доказывается признак тензорности для тензора любого ранга.

Пользуясь признаком тензорности, легко проверить, что совокупность n^2 чисел образующих символ Кронекера $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ является тензором 2-го ранга.

Действительно, возьмем произвольные векторы A_i и B_k и образуем выражение $\delta_{ik} A_i B_k$:

$$\delta_{ik} A_i B_k = \delta_{1k} A_1 B_k + \delta_{2k} A_2 B_k + \ldots + \delta_{nk} A_n B_k =$$
$$= (\delta_{11} A_1 B_1 + \delta_{12} A_1 B_2 + \ldots + \delta_{1n} A_1 B_n) + (\delta_{21} A_2 B_1 + \delta_{22} A_2 B_2 + \ldots + \delta_{2n} A_2 B_n) + \ldots$$
$$+ (\delta_{n1} A_n B_1 + \delta_{n2} A_n B_2 + \ldots + \delta_{nn} A_n B_n) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_n B_n = A_i B_i$$ - скаляр.

Следовательно, δ_{ik} тензор 2-го ранга. Он называется единичным тензором. Этот тензор обладает интересным свойством: он инвариантен относительно преобразования координат.

В самом деле: $\delta_{'ik'} = p_{i'i}\, p_{k'k} \delta_{ik} = p_{i'i}\, p_{k'i} = \delta_{ik}$ - в силу ортогональности матрицы P.

§10 ЕЩЕ РАЗ О СВОЙСТВАХ СИММЕТРИИ ТЕНЗОРОВ

Def: Если $A_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_m \ldots i_r} = A_{i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k \ldots i_r}$, то тензор A называется симметричным по индексам i_m и i_k.

Если $A_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_m \ldots i_r} = -A_{i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k \ldots i_r}$, то тензор A называется антисимметричным (или кососимметричным) по индексам i_m и i_k.

1° Симметрия и антисимметрия тензоров инвариантна относительно преобразования системы координат.

◀ (На примере тензора ранга 2)

$T_{i'k'} = p_{i'i}\, p_{k'k} T_{ik} = p_{i'i}\, p_{k'k} T_{ki} = T_{k'i'}$ - симметричность

$T_{i'k'} = p_{i'i}\, p_{k'k} T_{ik} = -p_{i'i}\, p_{k'k} T_{ki} = -T_{k'i'}$ - антисимметричность. ▶

В пространстве E_3 (размерности 3) антисимметричный и симметричный тензоры 2-го ранга имеют вид: $\begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$, т.е. симметричный тензор имеет только шесть независимых переменных, а антисимметричный и вовсе три независимых переменных.

Это дает возможность предложить следующую геометрическую интерпретацию симметричного и антисимметричного тензоров 2-го ранга в пространстве размерности 3:

2°. Каждому антисимметричному тензору 2-го ранга может быть поставлен в соответствие вектор и наоборот, каждый вектор связан с некоторым антисимметричным тензором 2-го ранга.

3° Любому не нулевому симметричному тензору 2-го ранга соответствует некоторая, и притом, единственная поверхность второго порядка определяемая уравнением: $S_{ik}x_i x_k = \pm 1$ $\quad$ ($Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_2^2 + Dx_1x_2 + Ex_1x_3 + Fx_2x_3 = 1$).

4° Произведение симметрического S_{ik} и антисимметрического A_{ik} тензоров 2-го ранга с последующим двукратным свертыванием равно 0.

◀ Действительно : $S_{ik}A_{lm}\delta_{kl}\delta_{im} = S_{ik}A_{ki}$,

Из симметрии S : $S_{ik}A_{ki} = S_{ki}A_{ki}$,

индексы k и i немые, поэтому k обозначим i, а i обозначим k : $S_{ki}A_{ki} = S_{ik}A_{ik}$

Из антисимметрии A : $S_{ik}A_{ik} = -S_{ik}A_{ki}$, $\quad$ Т.е. $S_{ik}A_{ki} = -S_{ik}A_{ki} = 0$. ▶

5° Любой тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, т.е. $\forall T_{ik}$ - тензора 2-го ранга

$$◀ \quad T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = S_{ik} + A_{ik}. \quad ▶$$

§11. ПСЕВДОТЕНЗОРЫ

В аналитической геометрии при рассмотрении $\left[\vec{A} \times \vec{B}\right]$ направление результирующего вектора устанавливается условно в зависимости от выбора системы координат. В физике такая ситуация встречается при определении направления векторов угловой скорости, момента сил и др. .

В то же время направление таких векторов, как скорость, ускорение, сила определяется физическим смыслом и не зависит от выбора системы координат.

В свете этого:

Для ортогональных преобразований: $PP^T = E \Rightarrow \det P \cdot \det P^T = (\det P)^2 = 1$, $\Delta = \det P = \pm 1$

Поэтому все линейные ортогональные преобразования разбиваются на два класса: класс собственных линейных ортогональных преобразований, для которых $\Delta = 1$ (непрерывные преобразования) и класс несобственных линейных ортогональных преобразований, для которых $\Delta = -1$ (преобразования отражения).

В зависимости от закона преобразования компонент по отношению к этим классам линейных ортогональных преобразований все тензорные величины можно разделить на истинные тензоры (или просто тензоры) и псевдотензоры.

Def: Псевдотензоры – это величины компоненты, которых преобразуются по закону: $\Pi_{i'_1,i'_2,i'_3} = p_{i'_1,i_1}\, p_{i'_2,i_2}\, p_{i'_3,i_3} \ldots \Pi_{i_1,i_2,i_3} \ldots \cdot \Delta$.

Напомним, что для истинного тензора закон преобразования имеет вид:

$$T_{i'_1,i'_2,i'_3} = p_{i'_1,i_1}\, p_{i'_2,i_2}\, p_{i'_3,i_3} \ldots T_{i_1,i_2,i_3} \ldots .$$

Из законов преобразования тензоров и псевдотензоров легко убедиться, что:

1°. Сумма двух псевдотензоров – псевдотензор.

2°. Произведение двух псевдотензоров – истинный тензор.

3°. Произведение псевдотензора на истинный тензор – псевдотензор.

4°. Свертка псевдотензора дает псевдотензор низшего ранга.

Примеры: 1) Если $V \overset{def}{\equiv} \int\int\int dx_1 dx_2 dx_3$, то $V' = \int\int\int dx_{1'} dx_{2'} dx_{3'} = \int\int\int \frac{\partial(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'})}{\partial(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 =$

$= \Delta \cdot \int\int\int dx_1 dx_2 dx_3 = \Delta \cdot V$, т.е. $V' = \Delta \cdot V$, где $\Delta = \pm 1$.

Таким образом, V согласно определению, есть псевдотензор нулевого ранга, т.е. псевдоскаляр.

2) Символ Кронекера δ_{ik} представляет собой единичный, симметричный, инвариантный относительно ортогонального преобразования системы координат, истинный тензор 2го ранга.

3) В паространстве E_3 в фиксированной системе координат K с ортами e_1, e_2, e_3 рассмотрим величины $\varepsilon_{ikl} = (e_i \times e_k) e_l$.

Ясно, что в правой системе координат: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$; $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$. Остальные ε_{ikl} равны нулю.

Рассмотрим, как преобразуются величины ε_{ikl} при линейных ортогональных преобразованиях. Перейдем в систему K' с ортами $e_{1'}$, $e_{2'}$, $e_{3'}$:

$$\varepsilon_{i'k'l'} = (e_{i'} \times e_{k'}) e_{l'} = (p_{i'i} e_i \times p_{k'k} e_k) p_{l'l} e_l = p_{i'i} p_{k'k} p_{l'l} (e_i \times e_k) e_l.$$

Если k и k' – обе правые (или левые), то $\varepsilon_{ikl} = (e_i \times e_k) e_l$. Если k и k' разной ориентации, то: $-\varepsilon_{ikl} = (e_i \times e_k) e_l$. Тогда: $\varepsilon_{i'k'l'} = p_{i'i} p_{k'k} p_{l'l} \varepsilon_{ikl} \cdot \Delta$ ($\Delta = \pm 1$, в зависимости от того рассматривается собственное или несобственное преобразование)

По определению величины ε_{ikl} образуют псевдотензор 3го ранга. Он **называется алгебраическим символом Леви-Чивита** и образует единичный абсолютно антисимметричный псевдотензор 3го ранга, инвариантный относительно любого ортогонального преобразования координат.

Легко видеть, что $(A \times B)_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l$

4) Непосредственным вычислением можно убедиться, что $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{abc} = \begin{vmatrix} \delta_{ia} & \delta_{ib} & \delta_{ic} \\ \delta_{ka} & \delta_{kb} & \delta_{kc} \\ \delta_{la} & \delta_{lb} & \delta_{lc} \end{vmatrix}$, свертка по индексам l и c дает: $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{abl} = \begin{vmatrix} \delta_{ia} & \delta_{ib} \\ \delta_{ka} & \delta_{kb} \end{vmatrix} = \delta_{ia}\delta_{kb} - \delta_{ib}\delta_{ka}$, свертка еще по двум индексам k и b дает: $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{akl} = 2\delta_{ia}$, и наконец полная свертка приводит к: $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{abc} = 6$.

5) С помощью символа Леви-Чивита легко получить, например, известную формулу для двойного векторного произведения трех векторов:

$$\{A \times (B \times C)\}_i = \varepsilon_{ikl} A_k (B \times C)_l = \varepsilon_{ikl} A_k \varepsilon_{lmn} B_m C_n = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn} A_k B_m C_n = (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}) A_k B_m C_n =$$

$= \delta_{im}\delta_{kn}A_kB_mC_n - \delta_{in}\delta_{km}A_kB_mC_n = \delta_{im}A_nB_mC_n - \delta_{in}A_mB_mC_n = B_iA_nC_n - C_iA_mB_m = B_i(A\cdot C) - C_i(A\cdot B) =$
$\{B(A\cdot C) - C(A\cdot B)\}_i$.

§12. СВЯЗЬ ТЕНЗОРОВ 2^го^ РАНГА С МАТРИЦЕЙ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И С ОПРЕДЕЛИТЕЛЯМИ

Пусть в E_n задан линейный оператор A с матрицей (a_{ij}). Тогда: $y_i = a_{ij}x_j$ (в базисе e_i). Рассмотрим в E_n базис $\{e_{i'}\}$: $y_{i'} = a_{i'j'}x_{j'} \Rightarrow p_{i'i}y_i = a_{i'j'}p_{j'j}x_j$. Умножим обе части равенства на $p_{i'k}$. $p_{i'i}p_{i'k}y_i = a_{i'j'}p_{j'j}p_{i'k}x_j \Rightarrow \delta_{ik}y_i = a_{i'j'}p_{j'j}p_{i'k}x_j \Rightarrow y_k = p_{i'k}p_{j'j}a_{i'j'}x_j$. С другой стороны: $y_i = a_{ij}x_j$, т.е. $a_{ij} = p_{i'i}p_{j'j}a_{ij}$.

Таким образом, элементы матрицы линейного оператора образуют тензор 2го ранга.

Наоборот всякий тензор 2го ранга можно истолковать как матрицу линейного оператора.

Поэтому теория тензоров 2го ранга непосредственно связана с теорией линейных операторов и с теорией матриц.

Это дает возможность выявить связь тензоров 2го ранга с определителями и т.д.

Теперь: пусть φ_{ik} – произвольный тензор 2го ранга. Построим тензор 3го ранга χ_{abc} по правилу: $\chi_{abc} = \varepsilon_{ikl}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc}$. Тогда $\chi_{bac} = \varepsilon_{ikl}\varphi_{ib}\varphi_{ka}\varphi_{lc} \overset{(i\leftrightarrow k)}{=} \varepsilon_{kil}\varphi_{kb}\varphi_{ia}\varphi_{lc} = \varepsilon_{kil}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = -\varepsilon_{ikl}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = -\chi_{abc}$. Следовательно абсолютно антисимметричный тензор 3го ранга всегда можно представить в виде: $\chi_{abc} = \varphi\varepsilon_{abc}$, где φ – скаляр. Т.е. каждому тензору 2го ранга φ_{ik} можно поставить в соответствие скаляр φ такой, что:

$$\varepsilon_{ikl}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = \varphi\varepsilon_{abc} \qquad (*)$$

Оказывается, что этот скаляр равен определителю, составленному из компонент φ_{ik}: $\varphi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}$, в этом легко убедиться непосредственным вычислением, например, зафиксировав в (*) говорящие индексы (скажем $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$) и выполнив суммирование по немым индексам i, k, l: $\varphi\varepsilon_{123} = \varepsilon_{ikl}\varphi_{i1}\varphi_{k2}\varphi_{l3} = \ldots$

В этой же идеологии нетрудно ввести понятия тензора обратного к данному тензору 2го ранга (Если $\varphi^{-1}_{ik}\varphi_{km} = \delta_{im}$, то тензор φ^{-1}_{ik} обратный к тензору φ_{ik}), и получить условия обратимости тензора 2го ранга.

Можно сформулировать (а для симметричного тензора и всегда решить) задачу о приведении тензора 2го ранга к главным осям. Эта задача равносильна задаче построения собственного базиса для линейного оператора.

§13.ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

В физических приложениях, как правило, встречаются тензоры, компоненты которых представляют собой функции координат (x_1, x_2, x_3) точек пространства.

Def: Тензорным полем $r^{го}$ ранга $T_{i_1i_2\ldots i_r}(x_1, x_2, x_3)$ является совокупность 3^r функций, которые в любой данной точке пространства образуют тензор $r^{го}$ ранга.

Изучение тензорных полей и составляет предмет тензорного анализа.

В дальнейшем речь будет идти о непрерывных тензорных полях $T_{ikl\ldots}(\bar{r})$, (где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки с координатами x_1, x_2, x_3). Это значит, что абсолютные величины разностей $T_{ikl}(\bar{r}+\Delta\bar{r})-T_{ikl}(\bar{r})$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, при достаточно малых $|\Delta\bar{r}|$.

§14. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ ПО КООРДИНАТАМ ТОЧКИ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $T_{ikl\ldots}(\bar{r})$ – тензорное поле $r^{\text{го}}$ ранга. Каждую из 3^r компонент этого поля продифференцируем по каждой из трех координат x_1, x_2, x_3. Получим совокупность 3^{r+1} функций вида $\dfrac{\partial T_{i_1,i_2,\ldots i_r}}{\partial x_j}$ (j = 1, 2, 3).

<u>Т°.</u> Если $T_{i_1,i_2,\ldots,i_r}(\bar{r})$ – тензорное поле ранга r, то $\dfrac{\partial T_{i_1,i_2,\ldots i_r}}{\partial x_j}$ будет тензорным полем ранга (r + 1).

◀ Отметим что, если $x_i = p_{ii'}x_{i'}$ то $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_{i'}} = p_{ii'} = p_{i'i}$ обратн. и транс., и следовательно

$$\frac{\partial T_{i'_1 i'_2\ldots i'_r}}{\partial x_{j'}} = \frac{\partial}{\partial x_{j'}}\, p_{i'_1 i_1} p_{i'_2 i_2}\cdots p_{i'_r i_r} T_{i_1 i_2\ldots i_r} =$$

$$= p_{i'_1 i_1} p_{i'_2 i_2}\cdots p_{i'_r i_r}\frac{\partial T_{i_1 i_2\ldots i_r}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_{j'}} = p_{i'_1 i_1} p_{i'_2 i_2}\cdots p_{i'_r i_r} p_{j'j}\frac{\partial T_{i_1 i_2\ldots i_r}}{\partial x_j} \qquad ▶$$

Итак, дифференцирование тензорного поля по координатам повышает ранг тензорного поля на единицу.

В частности, применение этой операции к скалярному полю φ порождает векторное поле $A_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, которое называется градиентом скалярного поля.

По аналогии с градиентом скалярного поля, тензорное поле $\dfrac{\partial T_{i_1,i_2,\ldots i_r}}{\partial x_j}$ (j = 1, 2, 3) **называют градиентом тензорного поля ранга** r.

§15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ $1^{\text{го}}$ ПОРЯДКА

1°. Для векторного поля A_i образуем градиент векторного поля $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}$, а затем получившийся тензор свернем по индексам i, j : $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}\delta_{ij} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x_i}$.

Как известно, такая величина в векторном анализе называется дивергенцией векторного поля A ($\operatorname{div} A$). Подобным образом можно получить дивергенцию тензорного поля любого ранга, выше нулевого.

Результирующее тензорное поле имеет ранг на единицу меньший, чем исходное поле.

Для тензорного поля ранга r можно получить r различных тензорных полей $(r-1)^{\text{го}}$ ранга типа «дивергенции» в зависимости от того, какой из индексов исходного поля сворачивается с индексом дифференцирования: $\frac{\partial T_{i_1,i_2,..i_r}}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial T_{i_1,i_2,..i_r}}{\partial x_{i_2}}, \ldots, \frac{\partial T_{i_1,i_2,..i_r}}{\partial x_{i_r}}$.

2°. В векторном анализе известна такая дифференциальная операция, как rot$A$ = $\nabla\times A$. В тензорном представлении $(\mathbf{rot}\vec{A})_i = \varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}A_l$. Оператором $\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}$ можно действовать на тензор любого ранга выше нулевого и затем сворачивать индекс l с одним из индексов этого тензора. Результирующее тензорное поле имеет тот же ранг, что и исходное.

Для тензорного поля ранга r можно получить r различных тензорных полей $r^{\text{го}}$ ранга типа «ротор» в зависимости от того с каким из индексов исходного поля сворачивать индекс l.

$$\varepsilon_{iki_1}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{i_1,i_2,\ldots i_r},\ldots.\varepsilon_{iki_r}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{i_1,i_2,\ldots i_r}.$$

3°. Схематически операции градиента, дивергенции и ротора тензорного поля произвольного ранга можно задать следующим образом:

$$(\mathrm{grad}T\ldots)_i = \frac{\partial T\ldots}{\partial x_i},$$

$$(\mathrm{div}T\ldots_i\ldots) = \delta_{ik}\frac{\partial T\ldots_i\ldots}{\partial x_k} = \frac{\partial T\ldots_i\ldots}{\partial x_i},$$

$$(\mathrm{rot}T\ldots_l\ldots) = \varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}T\ldots_l\ldots.$$

§16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ 2^го ПОРЯДКА

1°. Для скалярной функции φ: $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)\delta_{ij} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k{}^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3{}^2} = \Delta\varphi$, и такая величина называется лапласианом функции.

Аналогично можно ввести лапласиан произвольного тензора ранга r и получить тензорное поле того же ранга: $\Delta T_{i_1,\ldots i_r} = \frac{\partial T_{i_1,\ldots i_r}}{\partial x_i x_j}\delta_{ij} = \frac{\partial^2 T_{i_1,\ldots i_r}}{\partial x^2{}_i}$

Рассмотрим divrot$A$, где A – произвольное векторное поле:

$$\mathrm{Div\ rot}A = \delta_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = \frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = \underline{\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m} \overset{\substack{\textbf{поменяе}\\ \textbf{местами}\\ k\,\textbf{и}\,l}}{=}$$

$$= -\varepsilon_{lkm}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}A_m \overset{\substack{\text{переименуе}\\ l\leftrightarrow k}}{=} \underline{-\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m}.$$

Равенство подчеркнутых выражений позволяет заключить, что divrot$A$ = 0 для любого векторного поля A.

Аналогичное тождество имеет место для тензорного поля любого ранга (кроме нулевого): $\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{\ldots l\ldots} = 0$.

3°. Проверим справедливость тождества: rot rot$A$ = grad div$A$ $-\Delta A$.

◀ $(\mathrm{rot\,rot}\,A)_i = \varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n = (\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n =$

$$= \delta_{im}\delta_{kn}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_m}A_n - \delta_{in}\delta_{km}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_m}A_n = \delta_{im}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_n}A_n - \delta_{in}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}A_n = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_n}{\partial x_n}\right) - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{div}A) - (\Delta A)_i = (\mathrm{grad\,div}A)_i - (\Delta A)_i = (\mathrm{grad\,div}A - \Delta A)_i$$ ▶

Аналогичное тождество можно записать и для произвольного тензорного поля.

§17. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

1°. В векторном анализе поток векторного поля $A(r)$ через поверхность S определяется как: $\int_S\int \vec{A}d\vec{s} = \int_S\int A n dS$ (здесь n – орт нормали к поверхности S). При этом поток векторного поля это скаляр.

Аналогично можно определить поток тензорного поля ранга r через поверхность S, как $\int_S\int T_{\dots i\dots}dS_i = \int_S\int T_{\dots i\dots}n_i dS$.

При этом поток тензорного поля ранга r через поверхность S это тензор $(r-1)^{\text{го}}$ ранга (*покажите, что поток это тензор*). Всего существует r различных полей ранга $(r-1)$ типа «поток» в зависимости от того по какому индексу тензора T идет свертка.

2°. Для векторных полей известна формула Гаусса-Остроградского:

$$\int_V\int\int \frac{\partial a_i}{\partial x_i}dV = \oint_S\oint a_i n_i dS = \oint_S\oint a_i dS_i.$$

Для тензорных полей существует r формул типа «Гаусса-Остроградского»

$\int_V\int\int \frac{\partial T_{\dots i\dots}}{\partial x_i}dV = \oint_S\oint T_{\dots i\dots}dS_i$ (справа и слева немой индекс должен быть один и тот же)

3°. Формула Стокса для векторного поля имеет вид $\int_S\int \mathbf{rot}\vec{A}d\vec{S} = \oint_L \vec{A}d\vec{l}$.

Та же формула в тензорной записи выглядит так: $\int_S\int \varepsilon_{ikl}\frac{\partial A_l}{\partial x_k}dS_i = \oint_L A_i dl_i$.

Формула Стокса может быть записана и для тензорных полей ранга r:

$$\int_S\int \varepsilon_{ikl}\frac{\partial T_{\dots l\dots}}{\partial x_k}dS_i = \oint_L T_{\dots i\dots}dl_i.$$

Всего может быть записано r формул типа «Стокса».

§18. ТЕНЗОРЫ (ЗАДАЧИ)

- Показать, что произведение скаляра на тензор 2-го ранга является тензором 2-го ранга.
- Показать, что величина $A_{ikl}B_{ik}$ (где A_{ikl} - тензор 3-го ранга, B_{ik} – тензор 2-го ранга) является вектором.

- Доказать инвариантность свойств антисимметрии антисимметричного тензора 2-го ранга A_{ik}.
- Показать, что произведение тензоров 3-го ранга и 2-го ранга является тензором 5-го ранга.
- Компоненты тензора T_{ik} в некотором ортонормированном базисе $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$

образуют матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ и, в том же базисе, вектор B имеет координаты (1,2,3).

а) Разложить тензор T_{ik} в сумму симметричного S_{ik} и антисимметричного A_{ik} тензоров. б) Найти:

1)$T_{ik}B_k; T_{ik}B_i; T_{ik}B_kB_i$

2)$A_{ik}T_{ik}; \delta_{ik}A_{ik}; A_{ik}B_i; A_{ik}B_iB_k$

3)$T_{ik}\delta_{ik}; A_{ik}\delta_{ik}; \delta_{ik}\delta_{ik};$

- Пользуясь аппаратом тензорной алгебры, проверить тождества:

1)$A(B \times C) = C(A \times B)$

2)$(\overline{A} \times \overline{B})(\overline{C} \times \overline{D}) = (\overline{A}\overline{C})(\overline{B}\overline{D}) - (\overline{D}\overline{A})(\overline{B}\overline{C})$

3)$(A \times B) \times (C \times D) = (A(B \times D))C - (A(B \times C))D = (A(C \times D))B - A(B(C \times D))$

- Записать в векторной форме выражение:

$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{ztp}a_k a_r b_m c_t$

- Пользуясь аппаратом тензорной алгебры, проверить тождества:

1)$\mathbf{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\mathbf{div}\,\vec{a} + \vec{a}\,\mathbf{grad}\,\varphi$

2)$\mathbf{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\mathbf{rot}\,\vec{a} - (\vec{a} \times \mathbf{grad}\,\varphi)$

3)$\mathbf{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}\,\mathbf{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\,\mathbf{rot}\,\vec{b}$

4)$\mathbf{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}\,\mathbf{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathbf{div}\,\vec{a} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\nabla\vec{a})\vec{b}$

- Пользуясь аппаратом тензорной алгебры, вычислить: $\mathbf{div}\,\vec{r},\ \mathbf{rot}\,\vec{r},\ \mathbf{grad}(\vec{a}\vec{r}), (\nabla\vec{a})\vec{r}$

(радиус – вектор – r, (постоянный вектор – a))

10) Найти дивергенции и роторы следующих векторов: $(\overline{a}\overline{r})\overline{b}, (\overline{a}\overline{r})\overline{r}; (\overline{a} \times \overline{r}); \overline{r} \times (\overline{a} \times \overline{b})$.

(радиус – вектор – r, (постоянный вектор – a, b))

11) Вычислить интеграл $\oint_S (\overline{c}\overline{r})(\overline{a}\overline{n})dS$, где a, c – постоянные вектора, $n(r)$ – орт нормали к поверхности S, которая ограничивает объем V.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Часть II.

Линейные и полуторалинейные формы в унитарном пространстве.

1. Линейные формы в унитарном пространстве. Теорема о специальном представлении линейных форм.

2. Полуторалинейные формы в унитарном пространстве. Теоремы о специальном представлении полуторалинейных форм.
3. Связь между матрицей полуторалинейной формы и матрицей линейного оператора.

Сопряженные и самосопряженные операторы в унитарном пространстве.

1. Сопряженный оператор и его свойства.
2. Эрмитовы (самосопряженные) операторы.
3. Коммутирующие операторы.
4. Собственные числа и собственные векторы эрмитового оператора.
5. Норма линейного и эрмитового оператора.
6. Свойства эрмитовых операторов.
7. Теорема о собственном базисе эрмитового оператора.
8. Спектральное разложение эрмитового оператора. Теорема Гамильтона-Кэли.
9. Положительные операторы. Корень n -й степени из оператора.

Эрмитовы формы.

1. Полуторалинейные эрмитовы формы. Квадратичные формы в унитарном пространстве.
2. Приведение квадратичной формы и пары квадратичных форм к каноническому виду.

Унитарные и нормальные операторы.

1. Унитарные операторы. Необходимое и достаточное условие унитарности оператора.
2. Нормальные операторы. Диагонализуемость матрицы нормального и унитарного операторов.

Канонический вид линейного оператора.

- Нормальная жорданова форма. Схема построения жорданова базиса и приведения матрицы линейного оператора к жордановой форме.
- Примеры приведения матрицы к жорданову виду.

Линейные операторы в евклидовом пространстве.

- Линейные операторы в евклидовых пространствах. Билинейные формы.
- Самосопряженные операторы. Спектр самосопряженного оператора. Диагонализуемость матрицы самосопряженного оператора.
- Ортогональные операторы. Ортогональные матрицы. Общий вид произвольного ортогонального оператора.

Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве.

2) Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов.
3) Экстремальные свойства квадратичной формы.

Элементы теории тензоров.

- Определитель Грамма. Линейная зависимость и независимость системы векторов.
- Взаимные базисы. Ковариантные и контравариантные координаты векторов.
- Преобразование координат векторов при изменении базиса. Ковариантные и контравариантные координаты. Формулы Гиббса..

- Понятие тензора. Примеры тензоров.
- Основные операции над тензорами.
- Афинные ортогональные тензоры. Операции над афинными ортогональными тензорами.
- Признак тензорности величины. О свойствах симметрии тензоров.
- Псевдотензоры. Примеры псевдотензоров.
- Алгебраический символ Леви-Чивита.
- Связь тензоров $2^{-го}$ ранга с матрицей линейного оператора и с определителями.
- Тензорные поля. Дифференцирование тензорного поля по координатам.
- Дифференциальные операции $1^{-го}$ порядка. Градиент, дивергенция и ротор тензорного поля.
- Дифференциальные операции $2^{-го}$ порядка для тензорных полей.
- Интегральные формулы тензорного анализа. Формула Гаусса-Остроградского и формула Стокса для тензорных полей.

Элементы теории групп.

a. Определение группы. Подгруппы. Примеры.
b. Группа самосовмещений правильного многоугольника (на примере треугольника).
c. Группа перестановок. Таблица Кэли для группы перестановок трех элементов.
d. Свойства групп. Изоморфные группы. Примеры.
e. Смежные классы. Нормальные делители группы.
f. Гомоморфизмы групп. Фактор-группа.
g. Теоремы о гомоморфизмах групп.
h. Группы линейных преобразований. Ортогональная группа, группа Лоренца.
i. Линейные представления групп. Приводимые и неприводимые представления. Примеры.

Элементы теории гильбертовых пространств.

1. Бесконечномерное евклидово пространство E_∞. Норма в E_∞.
2. Ортонормированные системы в E_∞. Примеры. Ряд Фурье.
3. Замкнутые и полные системы векторов в E_∞. Сходимость по норме и слабая сходимость в E_∞.
4. Компактные и слабо компактные множества в E_∞. Полнота и сепарабельность пространств.
5. Линейные функционалы в E_∞. Непрерывные и ограниченные линейные функционалы. Норма линейного функционала.
6. Пространство бесконечных последовательностей l^2.
7. Пространство интегрируемых функций L_E^2
8. Изоморфизм пространств l^2 и L_E^2.
9. Определение гильбертового пространства. Примеры.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

ПО КУРСУ "ВЫСШАЯ АЛГЕБРА". Часть II

2) Найти матрицу A^* оператора сопряженного к линейному оператору A по заданной матрице оператора A и матрице Грамма Γ:

а) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$; $\Gamma=\begin{pmatrix}3&2\\2&2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$; $\Gamma=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

3) Найти матрицу A^* оператора сопряженного к линейному оператору A по заданной матрице оператора A и скалярному произведению:

а) $A=\begin{pmatrix}5&-3\\-1&1\end{pmatrix}$, $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$;

б) $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$, $(x,y)=x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$;

в) $A=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$, $(x,y)=x_1\bar{y}_1+(1+i)x_1\bar{y}_2+(1-i)x_2\bar{y}_1+3x_2\bar{y}_2$.

4) Оператор A переводит векторы a_1, a_2, в векторы b_1, b_2, соответственно. Найти оператор A^*, если базис в котором заданы a_1, a_2, b_1, b_2 - ортонормирован:

а) $a_1(1,1), a_2(1,4)$; $b_1(0,-2), b_2(-3,7)$;

б) $a_1(0,1), a_2(1,3)$; $b_1(3,1), b_2(2,3)$.

5) Оператор $A=\begin{pmatrix}2&1+i\\-1-i&1-i\end{pmatrix}$ задан матрицей в базисе f_1, f_2, где $f_1=e_1+e_2, f_2=e_1-ie_2$. Найти A^* в том же базисе.

6) Оператор $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ задан матрицей в базисе f_1, f_2, f_3, где $f_1=e_1+e_2+e_3$, $f_2=e_2+e_3$, $f_3=e_2-e_3$. Найти A^* в том же базисе.

7) В евклидовом пространстве полиномов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q)=\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$ (здесь α_i и β_i коэффициенты полиномов p и q при x^i) задан оператор $A\,p(x)=\frac{d}{dx}p(x)$. Найти A^* в следующих базисах:

а) $\{1,x,x^2\}$; б) $\{1,x,3x^2-1\}$.

8) В евклидовом пространстве полиномов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q)=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)\,dx$ задан оператор $A\,p(x)=\frac{d}{dx}p(x)$. Найти A^* в следующих базисах: а) $\{1,x,x^2\}$; б) $\{1,x,3x^2-1\}$.

9) Пусть в унитарном пространстве дифференцируемых и периодичных с периодом 2π функций, скалярное произведение имеет вид: $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Доказать, что оператор $A=\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ - эрмитов.

10) Установить является ли оператор A самосопряженным, если оператор A задан матрицей в базисе с матрицей Грамма Γ:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\Gamma=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

11) Оператор задан матрицей $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$ в базисе с матрицей Грамма $\Gamma=\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Будет ли оператор A - эрмитовым?

12) Установить, является ли ортогональным оператор A, действующий на векторы ортонормированного базиса по формулам:

а) $Ae_1 = e_1 + e_2,\ Ae_2 = e_1 - e_2$; б) $Ae_1 = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_2),\ Ae_2 = \frac{1}{5}(4e_1 + 3e_2)$.

13) Установить, является ли оператор A унитарным, если A действует на векторы ортонормированного базиса по формулам:

$$Ae_1 = e_1 + ie_2,\ Ae_2 = ie_1 + e_2.$$

14) Установить, является ли ортогональным линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

15) Установить, является ли ортогональным оператор A, если он задан матрицей в базисе $\{f_i\}$, а векторы f_i выражаются через векторы ортонормированного базиса $\{e_i\}$:

а) $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_2$;

б) $A=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$, $f_1 = 3e_1 + e_2,\ f_2 = 2e_1 + e_2$;

в) $f_1 = e_2 + e_3,\ f_2 = e_1 + e_3,\ f_3 = e_1 + e_2,\ A=\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16) Построить собственный ортонормированный базис самосопряженного оператора, который, в некотором ортонормированном базисе, задан матрицей:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

17) Построить собственный ортонормированный базис эрмитового оператора, который, в некотором ортонормированном базисе, задан матрицей:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$.

18) Построить собственный ортонормированный базис унитарного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $A=\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19) Привести матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

20) Найти:

а) A^{28}, $A=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$; б) A^{100}, $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\sqrt{A}$, $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\sqrt{A}$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\sqrt{A}$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; е) $\sqrt{A}$, $A=\begin{pmatrix} 0{,}15 & -0{,}09 \\ -0{,}25 & 0{,}15 \end{pmatrix}$.

21) Установить, являются ли следующие квадратичные формы положительно определенными:

а) $A(x,x) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $A(x,x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

22) Установить, при каких λ следующие квадратичные формы являются положительно определенными:

а) $A(x,x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

б) $A(x,x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

23) Найти ортонормированный базис, в котором следующие квадратичные формы (заданные тоже в ортонормированном базисе) имеют диагональный вид:

а) $A(x,x) = 7x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2$;

б) $A(x,x) = -4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$.

24) Привести следующие квадратичные формы к нормальному виду:

а) $A(x,x) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

б) $A(x,x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $A(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

25) С помощью одного преобразования привести пару форм к каноническому виду:

а) $A(x,x) = -4x_1x_2$, $B(x,x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$;

б) $A(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$, $B(x,x) = 4x_1^2 + 16x_1x_3 + 6x_2^2$;

в) $A(x,x) = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$, $B(x,x) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$;

г) $A(x,x) = 11x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$, $B(x,x) = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$;

д) $A(x,x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2$, $B(x,x) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

е) $A(x,x) = x_1^2 + 10x_1x_2 + 26x_2^2$, $B(x,x) = x_1^2 + 16x_1x_2 + 56x_2^2$.

26) Найти базис, взаимный к данному:

а) $e_1(1,1,0)$, $e_2(1,0,1)$, $e_3(0,1,1)$;

б) $e^1(1,0,0)$, $e^2(-1,1,0)$, $e^3(0,-1,1)$.

27) Вектор $x(5,2,1)$ задан своими координатами в том же базисе, в котором заданы координаты векторов двух взаимных базисов: $e_1(1,1,0)$, $e_2(1,0,1)$, $e_3(0,1,1)$ и $e^1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $e^2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $e^3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Найти ковариантные и контравариантные координаты вектора x.

28) Доказать инвариантность свойства антисимметрии тензора второго ранга A_{ik}.

29) Используя тензорную форму записи проверить тождества:

а) $(A\times B)\times(C\times D)=(A\cdot(C\times D))B-A(B\cdot(C\times D))$;

б) $(A\times B)\times(C\times D)=(A\cdot(B\times D))C-(A\cdot(B\times C))D$.

30) Используя тензорную форму записи, вычислить:

а) $\mathbf{grad}(a\cdot r)$; б) $\mathbf{div}((a\cdot r)\,b)$; в) $\mathbf{div}((a\cdot r)\,r)$; г) $\mathbf{div}\,a\times(r\times b)$;

д) $\mathbf{rot}((a\cdot r)\,b)$; е) $\mathbf{rot}((a\cdot r)\,r)$; ж) $\mathbf{rot}\,a\times(r\times b)$; з) $(a\nabla)\,r$.

(здесь a, b - постоянные векторы, r - радиус вектор).

31) Используя тензорную форму записи, доказать тождества:

а) $\mathbf{div}(\varphi\, a)=\varphi\,\mathbf{div}\,a+a\cdot\mathbf{grad}\,\varphi$;

б) $\mathbf{div}(a\times b)=b\cdot\mathbf{rot}\,a-a\cdot\mathbf{rot}\,b$;

в) $\mathbf{rot}(\varphi\, a)=\varphi\,\mathbf{rot}\,a-(a\times\mathbf{grad}\,\varphi)$;

г) $\mathbf{rot}(a\times b)=a\,\mathbf{div}\,b-b\,\mathbf{div}\,a+(b\nabla)a-(a\nabla)b$.

(здесь a, b - векторные поля, φ - скалярное поле).

32) Вычислить (используя интегральные теоремы тензорного исчисления) $\oint\!\!\int_S (cr)(an)\,dS$, где a, c - постоянные векторы, $n(r)$ - орт нормали к поверхности S, которая ограничивает объем V.

32. Найти результат действия перестановок:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

33) Возвести перестановки в степень:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}^{81}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&6&2&4&3&5\end{pmatrix}^{57}$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&4&7&6&3&1\end{pmatrix}^{93}$; г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&5&2&4&3\end{pmatrix}^{67}$.

34) Найти перестановку, обратную перестановке: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

35) Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-25}$.

36) Найти:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{17} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{23}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{31} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{17}$

37) Если S_n группа перестановок n чисел, то найти все подгруппы S_3.

38) Построить смежные классы к C_3 в C_6, где C_3 и C_6 - группы корней $3^{\text{-й}}$ и $6^{\text{-й}}$ степени из 1, соответственно.

39) Построить смежные классы к C_4 в C_8, где C_4 и C_8 - группы корней $4^{\text{-й}}$ и $8^{\text{-й}}$ степени из 1, соответственно.

40) Доказать, что C_3 - нормальный делитель группы C_6, где C_3 и C_6 - группы корней $3^{\text{-й}}$ и $6^{\text{-й}}$ степени из 1, соответственно.

41) Доказать, что C_4 - нормальный делитель группы C_8, где C_4 и C_8 - группы корней $4^{\text{-й}}$ и $8^{\text{-й}}$ степени из 1, соответственно.

42) Найти все гомоморфизмы C_6 в C_3, где C_n группа корней $n^{\text{-й}}$ степени из 1.

43) Найти фактор-группу G/H, если:

а) G - группа целых чисел, H - подгруппа чисел, кратных заданному целому числу n;

б) G - группа всех вещественных чисел по сложению, H - подгруппа целых чисел;

в) G - группа всех комплексных чисел по сложению, H - группа вещественных чисел тоже по сложению;

г) G - группа ненулевых комплексных чисел по умножению, H - группа положительных вещественных чисел по умножению;

д) G - группа ненулевых комплексных чисел по умножению, H - подгруппа чисел по модулю равных 1.

43. Найти нормальную жорданову форму матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -12 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.