МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.А.М.ГОРЬКОГО

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К КУРСУ "МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"
ПО ТЕМЕ "ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"

для студентов 2 и 3 курсов физико-технического,
физического и радиофизического факультетов

Харьков ХГУ 1985

Рекомендовано советом физико-технического факультета ХГУ, протокол № 4 от 20.04.84.

Методические указания к курсу "Методы математической физики" по теме "Теория вычетов и ее приложения" для студентов 2 и 3 курсов физико-технического, физического и радиофизического факультетов /Сост.Б.В.Кондратьев, В.П.Демуцкий. - Харьков: ХГУ, 1985. - 40 с.

Ответственный за выпуск О.Ф.Тырнов
Рецензенты А.Н.Кондратенко, проф., д-р физ.-мат.наук
С.С.Романов, канд.физ.-мат.наук

$n=1$: $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$$

I. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Студенты должны знать, что вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ в точке $z = z_0 \neq \infty$ называют коэффициент $C_{-1}(z_0)$ при первой отрицательной степени ее разложения в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Если функция $f(z)$ имеет в точке $z = z_0$ полюс n-го порядка, то вычет в этой точке равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[f(z) \cdot (z - z_0)^n \right]. \qquad (\text{I.1})$$

Для простого полюса при $n = 1$ можно написать:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \qquad (\text{I.2})$$

где $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$. Вычеты в регулярных и устранимых (конечных!) особых точках равны нулю. В существенно особых точках и в бесконечности вычеты определяют непосредственно из лорановского разложения.

Сумма вычетов во всех особых точках аналитической функции $f(z)$, включая вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю:

$$\sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0 \text{ при } |z_k| < \infty. \qquad (\text{I.3})$$

Студенты должны ознакомиться с теоремой о вычетах (О.Коши). Если однозначная функция $f(z)$ непрерывна на границе C области $\mathcal{D}$ и аналитична всюду внутри $\mathcal{D}$, за исключением некоторых особых точек $z = z_k \in \mathcal{D}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), то интеграл от этой функции по контуру C равен

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (\text{I.4})$$

Здесь контур C обходится в положительном направлении.

При вычислении интегралов с помощью вычетов оказываются полезными следующие четыре леммы:

I. (Об оценке интеграла). Пусть функция $f(z)$

аналитическая на каждом контуре C_ϱ (часть окружности $|z| = \varrho$ при $\varrho >> 1$) и выполняется условие $\lim\limits_{z \to \infty} (z \cdot f(z)) = 0$, тогда предел интеграла по этому контуру

$$\lim_{\varrho \to \infty} \oint_{C_\varrho} f(z)\,dz = 0.$$

В частном случае для дробно-рациональной функции $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ – многочлены степеней n и m, требуемое условие выполняется при $m \geq n + 2$.

2. (К. Жордан). Пусть функция $f(z)$ аналитическая на каждом контуре C_ϱ (верхняя полуокружность $|z| = \varrho$ при $\varrho >> 1$) и выполняются два условия $\alpha > 0$ и $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$, тогда предел интеграла по этому контуру

$$\lim_{\varrho \to \infty} \oint_{C_\varrho} f(z) e^{i\alpha z}\,dz = 0.$$

3. (О простом полюсе). Пусть аналитическая функция $f(z)$ имеет на действительной оси при $z = x_0$ простой полюс, тогда предел интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z = x_0} f(z),$$

где контур C_ε – верхняя полуокружность $|z - x_0| = \varepsilon$ при $0 < \varepsilon << 1$.

4. (Об интегрируемой особенности). Пусть аналитическая функция $f(z)$ имеет на действительной оси при $z = x_0$ особую точку и выполняется условие $\lim\limits_{z \to x_0} ((z - x_0) \cdot f(z)) = 0$, тогда предел интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 0,$$

где контур C_ε – часть окружности $|z - x_0| = \varepsilon$ при $0 < \varepsilon << 1$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЫЧЕТОВ И КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пример I. Найти особые точки и определить в них вычеты для функции:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 \cdot (z^2 + 9)}.$$

Решение: Функция $f(z)$ имеет следующие особые точки: $z=0$ – полюс второго порядка, $z=\pm 3i$ – простые полюсы, $z=\infty$ – существенная особенность. Расположение полюсов и их кратность определяются по расположению и кратности нулей знаменателя. В бесконечности находится существенная особенность функции, так как там получаются разные пределы:

$$\lim_{z\to+\infty} f(z)=\infty \quad \text{и} \quad \lim_{z\to-\infty} f(z)=0.$$

Для вычисления вычета в точке $z=0$ воспользуемся формулой (I.I) при $n=2$, тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}=\left(\frac{e^z}{z^2+9}\right)'\Bigg|_{z=0}=\frac{1}{9}$$

Для вычисления вычета в точках $z=\pm 3i$ воспользуемся формулой (I.2):

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm 3i}\frac{e^z/z^2}{z^2+9}=\frac{e^z/z^2}{2z}\Bigg|_{z=\pm 3i}=\pm\frac{i}{54}e^{\pm 3i}.$$

Так как сумма всех вычетов функции, включая вычет в бесконечности, равна нулю, то

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)-\operatorname*{Res}_{z=3i}f(z)-\operatorname*{Res}_{z=-3i}f(z)=\frac{-1}{27}(3-\sin 3).$$

Пример 2. Найти вычеты во всех конечных особых точках функции $f(z)=\operatorname{tg} z$.

Решение: Так как функция $f(z)=\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$, то она имеет простые полюсы в нулях знаменателя $z_k=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ при $k\in\mathbb{Z}$. Действительно, в числителе $\sin z_k=$ $=(-1)^k$, а в знаменателе $\cos z_k=0$ и $(\cos z)'\Big|_{z=z_k}=$

$= -\sin z_k = (-1)^{k+1}$. Вычеты в точках z_k определяем по формуле (I.2):

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} \operatorname{tg} z = \left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=z_k} = -1.$$

Бесконечность не является изолированной особой точкой функции $\operatorname{tg} z$, так как вне окружности сколь угодно большого радиуса $R_k = |z_k| = \frac{\pi}{2}|2k+1|$ при $k \gg 1$, $k \in \mathbb{Z}$ всегда находится бесчисленное множество особых точек.

Пример 3. Найти вычеты для обеих однозначных ветвей функции

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{2-z}+1} \text{ в точке } z_0 = 1.$$

Решение: Для той ветви функции, где корень $\sqrt{1} = +1$, в точке $z_0 = 1$ нет особенности, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z}{\sqrt{2-z}+1} = 0 \text{ при } \sqrt{1} = +1.$$

Для другой ветви $\sqrt{1} = -1$, и знаменатель функции в точке $z_0 = 1$ обращается в нуль, но производная от знаменателя равна $\left.(\sqrt{2-z}+1)'\right|_{z=1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Поэтому, воспользовавшись формулой (I.2), получим:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z}{\sqrt{2-z}+1} = 2 \text{ при } \sqrt{1} = -1.$$

Пример 4. Вычислить контурный интеграл

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^4+1}\, dz.$$

Решение: Подынтегральная функция имеет четыре особые точки, расположенные внутри контура интегрирования (единичной окружности) – это простые полюсы $z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{-1/2}$ (четыре простых корня знаменателя). Вне контура имеется только одна устранимая особая точка в бесконечности; там $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z^3}{2z^4+1} = 0$. По теореме о вычетах, используя формулу (I.3), получим:

$$I = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{4} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{z^3}{2z^4+1} = -2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^3}{2z^4+1},$$

т.е. достаточно вычислить вычет только в одной точке. Для определения вычета в бесконечности воспользуемся лорановским разложением:

$$\frac{z^3}{2z^4+1} = \frac{1}{2z}\,\frac{1}{1+1/2z^4} = \frac{1}{2z}\cdot\left(1-\frac{1}{2z^4}+\dots\right).$$

Так как вычет в бесконечно удаленной точке равен коэффициенту при первой отрицательной степени с обратным знаком, то в нашем случае $C_{-1}(\infty) = -\frac{1}{2}$ и искомый интеграл равен $I = \pi i$.

Пример 5. Вычислить интеграл I_k, где k – целое число ($k \in \mathbb{Z}$):

$$I_k = \oint\limits_{|z|=1} z^k e^{\frac{1}{z}}\, dz.$$

Решение: Раскладываем подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности нуля (это и разложение в окрестности бесконечности):

$$z^k e^{\frac{1}{z}} = z^k \cdot \left[1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots\right] = z^k + \frac{1}{1!} z^{k-1} + \dots + \frac{1}{(k+1)!\cdot z} + \dots$$

Подынтегральная функция имеет в нуле существенную особенность (бесчисленное количество членов ряда с отрицательными показателями степени) и полюс k-го порядка в бесконечности (конечное число членов ряда с положительными показателями степени и z^k – старший из них). При $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ интеграл

$$I_k = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^k \cdot e^{\frac{1}{z}}\right) = \frac{2\pi i}{(k+1)!}.$$

Если $k = -1$, получим $I_{-1} = 2\pi i$. При $k = -2, -3, \dots$ член с первой отрицательной степенью вообще отсутствует, так что $I_k = 0$ при $k = -2, -3, -4, \dots$ Если вспомнить, что функция Эйлера $\Gamma(k) = (k-1)!$ и $\Gamma(-k) = \infty$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, то результат можно записать в общей форме:

$$I_k = \frac{2\pi i}{\Gamma(k+2)} \qquad \text{при} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл I_n по контурам, расположенным внутри и вне единичной окружности:

$$I_n = \oint_{C_n} \frac{dz}{\sqrt{z^2+2z\cdot\cos\alpha+1}} \text{ при } 0<\alpha<\pi \text{ , } n=1 \text{ и } 2.$$

Решение: Так как корни квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной функции равны $z_\pm = e^{\pm i\alpha} = e^{i(\pi\pm\alpha)}$, $|z_\pm|=1$,

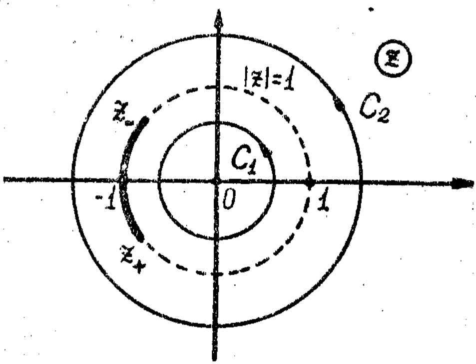

Рис.I

то ее можно представить в виде:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{z^2+2z\cdot\cos\alpha+1}} = \pm\frac{1}{z}\left(1-\frac{z_+}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z_-}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Она имеет следующие особые точки: $z=z_\pm$ – точки ветвления 2-го порядка (в этих точках подкоренное выражение обращается в нуль), $z=\infty$ – устранимая особенность (имеется конечный предел $f(\infty)=0$). Для выделения однозначной ветви функции $f(z)$ достаточно провести разрез между точками z_+ и z_- по меньшей дуге единичной окружности (рис.I).

Так как внутри контура C_1 нет особых точек, то $I_1=0$.

Интеграл по контуру C_2 вычислим, определяя вычет в бесконечности:

$$I_2 = \oint_{C_2} f(z)dz = -\oint_{C_2} f(z)dz = -2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Так как бесконечность – устранимая особенность для обеих ветвей функции $f(z)$, получим лорановское разложение вида:

$$f(z) = \pm\frac{1}{z}\left(1+\frac{z_+}{2z}-\dots\right)\left(1+\frac{z_-}{2z}-\dots\right) = \pm\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{z_+ + z_-}{2z}+\dots\right),$$

поэтому $I_2 = -2\pi i\cdot C_{-1}(\infty) = -2\pi i\cdot(\mp 1) = \pm 2\pi i.$

Пример 7. Вычислить контурный интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\cdot dz$.

Решение: Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=0$ – существенно особая точка, так как лорановское разложение $\sin\frac{1}{z}$ в окрестности этой точки имеет бесчисленное количество членов $\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\cdot z^3} + \frac{1}{5!\cdot z^5} - \dots$;

$z=\infty$ – устранимая особенность, так как конечен предел $\lim\limits_{z\to\infty}\sin\frac{1}{z}=0$. Внутри контура интегрирования (единичной окружности) лежит только особая точка нуль, поэтому

$$\oint\limits_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\cdot dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\sin\frac{1}{z} = 2\pi i;$$

значение вычета здесь определено из лорановского разложения.

Интересно отметить, что интегралы

$$\oint\limits_{|z|=1} \sin\frac{1}{z^2}\,dz = 0, \quad \oint\limits_{|z|=1} \cos\frac{1}{z}\cdot dz = 0 \quad \text{и т.п.}$$

равны нулю из-за четности подынтегральной функции.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

Студенты знают, что вычисление многих типов определенных интегралов можно свести к контурным интегралам, которые легко вычисляются с помощью вычетов.

А. ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНОЙ КОМБИНАЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРЕДЕЛАХ, КРАТНЫХ π

Пример 8. Вычислить интеграл $I(a)$ при $a>1$:

$$I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a-\cos\varphi}.$$

Решение: Если сделать замену $z=e^{\varphi i}$, получим:

$$\cos\varphi=\frac{z^2+1}{2z} \quad \text{и} \quad d\varphi=\frac{dz}{iz};$$

контуром интегрирования будет единичная окружность $|z|=1$ (рис.2); поэтому

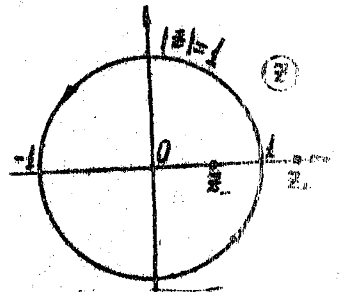

Рис.2

$$I(a)=-2i\cdot\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2az+1}=-2i\cdot\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-z_+)(z-z_-)},$$

где $z_\pm=a\pm\sqrt{a^2-1}$, $z_+z_-=1$, $z_+>1$, $0<z_-<1$. Значит внутри контура $|z|=1$ расположен только корень знаменателя $z_-=a-\sqrt{a^2-1}$, которому соответствует простой полюс подынтегральной функции. Второй простой полюс $z_+>1$ и устранимая особенность в бесконечности в контур не попадают. По теореме о вычетах

$$I(a)=4\pi\cdot\operatorname*{Res}_{z=z_-}\frac{1/(z-z_+)}{z-z_-}=\frac{4\pi}{z_--z_+}=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

При $a<-1$ значение интеграла изменит только знак; при $-1<a<+1$ будет $|z_\pm|=1$, т.е. оба полюса подынтегральной функции лежат на контуре интегрирования и можно определить только главное значение интеграла $I(a)=0$; поэтому окончательно

$$I(a)=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\operatorname{sign}a \quad \text{при} \quad |a|>1.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $I_n(a)$ при $n \in \mathbb{N}$ и вещественных $a \neq 0$:

$$I_n(a) = \int_0^{\pi n} \operatorname{ctg}(\varphi + ai)\, d\varphi .$$

Решение: Если сделать замену $z = e^{2i(\varphi + ai)}$, получим:

$$\operatorname{ctg}(\varphi + ai) = i\,\frac{z+1}{z-1} \quad \text{и}$$

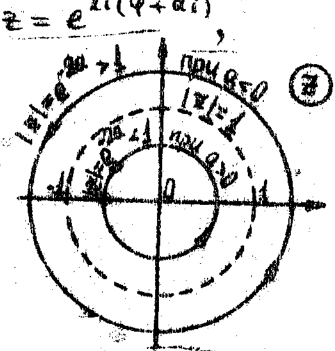

Рис.3

$d\varphi = \frac{dz}{2iz}$; контуром интегрирования будет пробегаемая n раз окружность $|z| = e^{-2a} \neq 1$ (рис.3); поэтому

$$I_n(a) = \frac{1}{2} n \cdot \oint\limits_{|z| = e^{-2a}} \frac{z+1}{(z-1)z}\, dz .$$

Подынтегральная функция имеет три особые точки: $z = 0$ и $z = 1$ – простые полюсы (простые нули знаменателя), $z = \infty$ – устранимая особая точка (там конечный предел). При отрицательных $a < 0$ внутри контура интегрирования $|z| = e^{+2|a|} > 1$ расположены оба полюса $z = 0$ и $z = 1$, так что по теореме о вычетах

$$I_n(a) = \pi n i \cdot \left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\frac{z+1}{z-1}}{z} + \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1+\frac{1}{z}}{z-1} \right) = \pi n i .$$

При положительных $a > 0$ внутри контура $|z| = e^{-2a} < 1$ расположен только полюс $z = 0$, так что

$$I_n(a) = \pi n i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\frac{z+1}{z-1}}{z} = -\pi n i .$$

При $a = 0$ интеграл имеет только главное значение $I_n(0) = 0$; поэтому окончательно $I_n(a) = -\pi n i \cdot \operatorname{sign} a$.

Пример 10. Вычислить интеграл I_k при $k \in \mathbb{Z}$,

$$I_k = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cdot \cos(k\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{ik\varphi} \cdot e^{e^{-i\varphi}} \cdot d\varphi .$$

Решение: Сделаем обычную замену $z = e^{i\varphi}$, тогда

$$I_k = \mathrm{Re} \oint\limits_{|z|=1} z^k e^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{iz} = \mathrm{Im} \oint\limits_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} z^{k-1} dz.$$

Воспользуемся результатом примера 5 и получим $I_k = \dfrac{2\pi}{\Gamma(k+1)}$

Б. ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПО БЕСКОНЕЧНЫМ ИНТЕРВАЛАМ

Для вычисления интегралов этого типа (и последующих!) решение начинается с выбора вспомогательного контурного интеграла; процесс решения для удобства распишем по пунктам.

Пример II. Вычислить интеграл $I_n(\alpha)$ при целых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$:

$$I_n(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}.$$

I) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}_n(\alpha) = \oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+\alpha^2)^n};$$

здесь подынтегральная функция является аналитическим продолжением подынтегральной функции исходного интеграла на полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$.

2) Определяем особые точки подынтегральной функции вспомогательного интеграла: $z = \pm\alpha i$ — полюсы n-го порядка; $z = \infty$ — устранимая особенность.

3) Выбор конечного контура интегрирования C. Если контур выбрать в виде $C = (-\rho, +\rho) + C_\rho$ (рис.4), где интервал $(-\rho, +\rho)$ расположен на действительной оси, а радиус верхней полуокружности C_ρ взять $\rho > \alpha$; то вспомогатель-

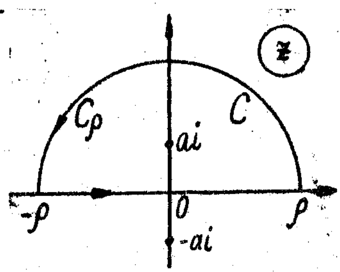

Рис.4

ный интеграл $\tilde{I}_n(\alpha)$ легко вычисляется. Контур C всегда выбирается так, чтобы он не проходил через особые точки, а вспомогательный интеграл сводился к определенным интегралам по действительной оси от заданной подынтегральной функции и дополнялся интегралами по дугам окружностей, которые легко оценить с помощью лемм.

4) Вычислим вспомогательный интеграл $\tilde{I}_n(\alpha)$ по теореме о вычетах. Так как внутри контура C расположен только полюс $z=+\alpha i$, получим:

$$\tilde{I}_n(\alpha)=2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=\alpha i}\frac{1}{(z^2+\alpha^2)^n}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{1}{(z+\alpha i)^n}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=\alpha i}=$$

$$=\frac{2\pi i}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{(2\alpha i)^{2n-1}}=$$

$$=\frac{\pi}{\alpha^{2n-1}}\frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}\cdot(n-1)!]^2}=\frac{\pi}{\alpha^{2n-1}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

5) Разобьем вспомогательный интеграл по участкам контура $C=(-\rho,+\rho)+C_\rho$; тогда

$$\tilde{I}_n(\alpha)=2\cdot\int_0^\rho\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}+\int_{C_\rho}\frac{dz}{(z^2+\alpha^2)^n}=\frac{\pi\cdot(2n-3)!!}{\alpha^{2n-1}\cdot(2n-2)!!};$$

в первом интеграле заменили $z=x$ и упростили выражение.

6) Переход к пределу $\rho\to\infty$. Так как правая часть последнего равенства от ρ не зависит и радиус $\rho>\alpha$, получаем:

$$2\cdot\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}+\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho}\frac{dz}{(z^2+\alpha^2)^n}=\frac{\pi\cdot(2n-3)!!}{\alpha^{2n-1}\cdot(2n-2)!!}.$$

Предел второго интеграла равен нулю по лемме № 1, так как разность между наибольшими показателями степени знаменателя и числителя подынтегральной функции не меньше двух единиц.

7) Окончательно значение интеграла $I_n(\alpha)$ равно

$$I_n(a) = \frac{\pi}{2a^{2n-1}} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \quad \text{при} \quad a \neq 0 \text{ и } n \in \mathbb{N} .$$

Здесь принято $0!! = (-1)!! = 1$, поэтому, в частности,

$$I_1(a) = \frac{\pi}{2a}, \quad I_2(a) = \frac{\pi}{4a^3}, \quad I_3(a) = \frac{3\pi}{16a^5}$$

В. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО БЕСКОНЕЧНЫМ ИНТЕРВАЛАМ

Пример I2. Вычислить интеграл $I(a,b)$ при положительных $a, b > 0$:

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx .$$

I) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}(a,b) = \oint_C \frac{e^{azi}}{z^2+b^2}\,dz .$$

2) Определяем особые точки подынтегральной функции: $z = \pm bi$ - простые полюсы (простые корни знаменателя); $z = \infty$ - существенно особая точка (при стремлении $z \to \pm i\infty$ получаются различные пределы).

3) Выбираем контур интегрирования в виде (рис.5) $C = (-\rho, +\rho) + C_\rho$ при $\rho > b$.

4) Вычисление вспомогательного интеграла $\tilde{I}(a,b)$. Так как внутри контура C расположен только полюс $z = bi$, получим:

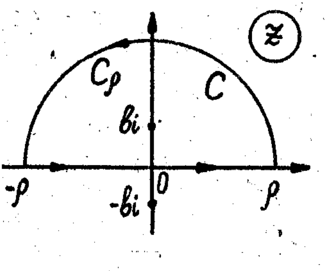

Рис.5

$$\tilde{I}(a,b) = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=ib} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = 2\pi i \cdot \frac{e^{iaz}}{2z}\Big|_{z=ib} = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

5) Разобьем интеграл $\tilde{I}(a,b)$ по двум участкам контура C:

$$\tilde{I}(a,b) = \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2}dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

Упростив первый интеграл, найдем:

$$2 \cdot \int_0^{\rho} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

6) Перейдем к пределу при $\rho \to \infty$, тогда

$$2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx + \lim_{\rho\to\infty} \int_{C_\rho} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

Предел второго интеграла равен нулю по лемме № 2, так как

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2+1} = 0.$$

7) Окончательно значение интеграла $I(a,b)$ равно:

$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2|b|} e^{-|ab|},$$

для произвольных действительных a и $b \neq 0$.

Легко догадаться, что интеграл такого вида с функцией $\sin ax$ приведенным выше способом не вычисляется (подынтегральная функция будет нечетной!); но дифференцированием по параметру a получается интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{x \cdot \sin ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

Г. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПРЕДЫДУЩИХ ТИПОВ, КОГДА ПОДЫНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ИМЕЕТ ПРОСТЫЕ ПОЛЮСЫ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Пример 13. Вычислить интеграл $I(a,b)$ при положительных $a, b>0$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx.$$

1) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}(a,b) = \oint_C \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\,dz.$$

2) Определяем особые точки подынтегральной функции: $z=0$ и $z=\pm ib$ - простые полюсы (три разных простых корня знаменателя); $z=\infty$ - существенно особая точка (при стремлении $z\to\pm i\infty$ получаются различные пределы).

3) Выбираем контур интегрирования в виде (рис.6) $C=(-\rho,-\varepsilon)+C_\varepsilon+(\varepsilon,\rho)+C_\rho$, где $0<\varepsilon<<b<<\rho$. Здесь верхняя полуокружность C_ε обходит простой полюс $z=0$ сверху (по направлению часовой стрелки), чтобы этот полюс оказался вне контура C.

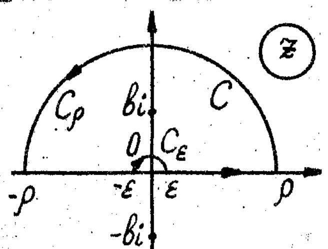

Рис.6

4) Вычисляем вспомогательный интеграл $\tilde{I}(a,b)$. Так как внутри контура C расположен только полюс $z=ib$, получим:

$$\tilde{I}(a,b) = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=bi} \frac{e^{aiz}}{z(z^2+b^2)} = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{iaz}/z}{2z}\right|_{z=bi} = -\frac{\pi i}{b^2} e^{-ab}.$$

5) Разобьем интеграл $\tilde{I}(a,b)$ по четырем участкам его контура:

$$\tilde{I}(a,b)=\int_{-\rho}^{-\varepsilon}\frac{e^{axi}\cdot dx}{x(x^2+b^2)}-\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{azi}\cdot dz}{z(z^2+b^2)}+\int_{\varepsilon}^{\rho}\frac{e^{axi}\cdot dx}{x(x^2+b^2)}+\int_{C_\rho}\frac{e^{azi}\cdot dz}{z(z^2+b^2)}=-\frac{\pi i}{b^2}e^{-ab}.$$

Объединив первый и третий интегралы и изменив направление интегрирования во втором, получаем:

$$2i\cdot\int_{\varepsilon}^{\rho}\frac{\sin ax\cdot dx}{x(x^2+b^2)}-\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{azi}\cdot dz}{z(z^2+b^2)}+\int_{C_\rho}\frac{e^{azi}\cdot dz}{z(z^2+b^2)}=-\frac{\pi i}{b^2}e^{-ab}.$$

6) Перейдем к двойному пределу $\varepsilon\to 0$ и $\rho\to\infty$, тогда

$$2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax\cdot dx}{x(x^2+b^2)}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{azi}\cdot dz}{z(z^2+b^2)}+\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho}\frac{e^{azi}\cdot dz}{z(z^2+b^2)}=-\frac{\pi i}{b^2}e^{-ab}.$$

Предел третьего интеграла равен нулю по лемме № 2, так как $a>0$ и

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z(z^2+b^2)}=0.$$

Предел второго интеграла по лемме № 3 равен:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{azi}\cdot dz}{z(z^2+b^2)}=\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\frac{e^{azi}}{z^2+b^2}}{z}=\frac{\pi i}{b^2}.$$

7) Окончательно значение интеграла $I(a,b)$ при действительных a и $b\neq 0$ будет:

$$I(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cdot dx}{x(x^2+b^2)}=\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

Дифференцированием по параметру a получим результат примера 12; а преобразовав рациональную часть подынтегральной функции, найдем:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cdot dx}{x(x^2+b^2)} = \frac{1}{b^2}\cdot\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx - \frac{1}{b^2}\cdot\int_0^\infty \frac{x\cdot\sin ax}{x^2+b^2}\,dx.$$

Подставляя сюда значения первого и последнего интегралов, получим интеграл Дирихле (он вычисляется и непосредственно):

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sign} a.$$

<u>Пример 14</u>. Вычислить интеграл $I(a,b)$ при положительных $a, b > 0$

$$I(a,b) = \int_0^\infty (\cos ax - \cos bx)\cdot\frac{dx}{x^2}.$$

1) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}(a,b) = \oint_C \left(e^{azi} - e^{bzi}\right)\cdot\frac{dz}{z^2}.$$

2) Определяем особые точки подынтегральной функции: $z = 0$ – простой полюс, $z = \infty$ – существенная особенность; так как лорановское разложение подынтегральной функции в особых точках имеет вид:

$$\frac{1}{z^2}\left(e^{azi} - e^{bzi}\right) = \frac{i}{z}(a-b) - \frac{1}{2}(a^2-b^2) - \frac{1}{6}zi(a^3-b^3) + \dots$$

3) Выбираем контур интегрирования в виде (рис.7) $C = (-\rho,-\varepsilon) + C_\varepsilon + (\varepsilon,\rho) + C_\rho$.

4) Вычисляем вспомогательный интеграл $\tilde{I}(a,b)$. Он равен нулю, так как внутрь контура C не попадает ни одна особая точка.

5) Разобьем интеграл $\tilde{I}(a,b)$ по четырем участкам его контура и после несложных преобразований получим:

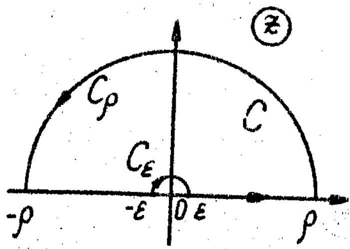

Рис.7

$$2\cdot\int_\varepsilon^\rho (\cos ax - \cos bx)\cdot\frac{dx}{x^2} - \int_{C_\varepsilon} \left(e^{azi} - e^{bzi}\right)\cdot\frac{dz}{z^2} + \int_{C_\rho} \left(e^{azi} - e^{bzi}\right)\cdot\frac{dz}{z^2} = 0.$$

6) Переходим к двойному пределу $\varepsilon \to 0$ и $\rho \to \infty$, тогда

$$2\cdot\int_0^\infty (\cos ax - \cos bx)\cdot\frac{dx}{x^2} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\left(e^{azi} - e^{bzi}\right)\cdot\frac{dz}{z^2} + \lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho}\left(e^{azi} - e^{bzi}\right)\cdot\frac{dz}{z^2} = 0.$$

Разбивая третий интеграл на два, находим, что предел каждого из них равен нулю по лемме № 2, так как $a > 0$, $b > 0$ и $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z} = 0$.

Предел второго интеграла по лемме № 3 равен:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\left(e^{iaz} - e^{ibz}\right)\frac{dz}{z^2} = \pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} = \pi(b-a);$$

здесь вычет определяется непосредственно из лорановского разложения в окрестности нуля (см.пункт 2).

7) Окончательно значение интеграла $I(a,b)$ равно:

$$I(a,b) = \int_0^\infty (\cos ax - \cos bx)\frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}\left(|b| - |a|\right),$$

где a и b – вещественные числа.

Значение рассмотренного интеграла может быть также получено интегрированием интеграла Дирихле по параметру α (см. окончание примера 13).

Д. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РАЦИОНАЛЬНЫХ И ОБЩИХ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пример 15. Вычислить интеграл $I(p,\alpha)$ при $|p|<1$ и $0<\alpha\leq\pi$:

$$I(p,\alpha)=\int_0^\infty \frac{x^p\cdot dx}{x^2-2x\cdot\cos\alpha+1}.$$

1) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}(p,\alpha)=\oint_C \frac{z^p\cdot dz}{z^2-2z\cdot\cos\alpha+1}.$$

2) Определяем особые точки подынтегральной функции. Так как показатель степени p нецелое число, то подынтегральная функция за счет выражения z^p многозначна и имеет точки ветвления логарифмического типа при $z=0$ и $z=\infty$. Для выделения однозначной ветви подынтегральной функции проведем на плоскости z разрез вдоль действительной положительной полуоси $0\leq x<\infty$ и положим на верхнем берегу разреза $\arg z=0$, тогда на нижнем берегу разреза $\arg z=2\pi$; т.е. выбрали главное значение подынтегральной функции. За счет корней знаменателя получим два простых полюса $z_+=e^{i\alpha}$ и $z_-=e^{i(2\pi-\alpha)}$, причем $|z_\pm|=1$ при $0<\alpha\leq\pi$.

3) Контур интегрирования C выбираем в виде (рис.8); $C=(\varepsilon,\rho)\big|_{\arg z=0}+C_\rho+(\rho,\varepsilon)\big|_{\arg z=2\pi}+C_\varepsilon$, где $0<\varepsilon<<1<<\rho$. Так как рациональная часть подынтегральной функции (ее знаменатель) четностью не обладает, нельзя воспользоваться контуром, расположенным только в верхней полуплоскости (полуокружностью); ведь интеграл по отрезку $(-\rho,-\varepsilon)$ не сведется

к исходному интегралу по отрезку (ε, ϱ) заменой $x \to -x$.

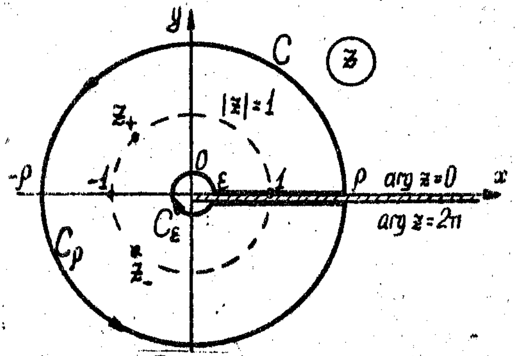

Рис.8

4) Вычисляем вспомогательный интеграл $\tilde{I}(p,\alpha)$ с помощью вычетов:

$$\tilde{I}(p,\alpha) = 2\pi i\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=z_+}\frac{\frac{z^p}{z-z_-}}{z-z_+} + \operatorname*{Res}_{z=z_-}\frac{\frac{z^p}{z-z_+}}{z-z_-}\right) =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{z_+^p - z_-^p}{z_+ - z_-} = -2\pi i\cdot\frac{\sin p(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot e^{\pi p i}.$$

5) Разбиваем интеграл $\tilde{I}(p,\alpha)$ по четырем участкам его контура. В интеграле по верхнему берегу разреза на отрезке (ε,ϱ) имеем $z = x\cdot e^{0i} > 0$ и $z^p = x^p > 0$, а в интеграле по нижнему берегу (в обратном направлении) на отрезке (ϱ,ε) имеем $z = x\cdot e^{2\pi i} > 0$ и $z^p = x^p\cdot e^{2\pi p i}$; в результате получим:

$$\tilde{I}(p,\alpha) = \left(1 - e^{2\pi p i}\right)\cdot\int_\varepsilon^\varrho \frac{x^p\cdot dx}{x^2 - 2x\cdot\cos\alpha + 1} -$$

$$-\int_{C_\varepsilon}\frac{z^p\cdot dz}{z^2 - 2z\cdot\cos\alpha+1} + \int_{C_\varrho}\frac{z^p\cdot dz}{z^2-2z\cdot\cos\alpha+1} = -2\pi i\cdot\frac{\sin p(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot e^{\pi p i}.$$

6) Переходим к двойному пределу $\varepsilon \to 0$ и $\rho \to \infty$ тогда

$$(1-e^{2\pi p i})\cdot\int_0^\infty \frac{x^p\cdot dx}{x^2-2x\cdot\cos\alpha+1} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^p\cdot dz}{z^2-2z\cdot\cos\alpha+1} +$$

$$+\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho}\frac{z^p\cdot dz}{z^2-2z\cdot\cos\alpha+1} = -2\pi i\cdot\frac{\sin p(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot e^{\pi p i}.$$

Здесь предел второго интеграла равен нулю по лемме № 4, так как

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^{p+1}}{z^2-2z\cdot\cos\alpha+1} = \lim_{z\to 0} z^{p+1} = 0 \text{ при } p>-1;$$

а предел третьего - равен нулю по лемме № I, так как

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^{p+1}}{z^2-2z\cdot\cos\alpha+1} = \lim_{z\to\infty} z^{p+1} = 0 \text{ при } p<1.$$

Значит, при $-1<p<+1$ одновременно обращаются в нуль оба интеграла по контурам C_ε и C'_ρ, что определяет допустимые пределы изменения этого параметра.

7) Окончательно значение интеграла $I(p,\alpha)$ будет

$$I(p,\alpha)=\int_0^\infty\frac{x^p\cdot dx}{x^2-2x\cdot\cos\alpha+1}=\frac{\pi}{\sin\pi p}\cdot\frac{\sin p(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}$$

при $0<\alpha\leqslant\pi$ и $-1<p<1$. Подставляя различные значения параметров p и α, можно получить из интеграла $I(p,\alpha)$ нетривиальные частные случаи; например:

$$I\left(p,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi/2}{\cos\frac{\pi p}{2}},\quad I(p,\pi)=\frac{\pi p}{\sin\pi p},\quad I(0,\alpha)=\frac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}.$$

Интересны также значения производных $I'_p(p,\alpha)$ и $I'_\alpha(p,\alpha)$ и их частные случаи.

Отметим, что после замены $x=t^2$, рассматриваемый интеграл можно вычислять по контуру, целиком расположенному в верхней полуплоскости, так как при этом рациональная часть подынтегральной функции становится четной.

Пример 16. Вычислить интеграл:

$$I_n(p)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{Q_n(x)}\,dx\,,$$

где $Q_n(x)=(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)$ - многочлен n-ой степени и p -нецелое число из интервала $0<p<n$.

1) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}_n(p)=\oint_C \frac{z^{p-1}}{Q_n(z)}\,dz.$$

2) Определяем особые точки подынтегральной функции. Как и в примере 15 в точках $z=0$ и $z=\infty$ имеются логарифмические точки ветвления и нужно выделять главное значение подынтегральной функции. За счет корней многочлена $Q_n(z)$ появляются еще простые полюсы на действительной отрицательной полуоси при $z=-1,-2,-3,\ldots,-n$.

3) Контур интегрирования C выбираем в виде, аналогичном рис.8, где $0<\varepsilon<<1\leq n<<\varrho$.

4) Вычисляем вспомогательный интеграл $\tilde{I}_n(p)$ с помощью вычетов:

$$\tilde{I}_n(p)=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=-k}\frac{z^{p-1}}{Q_n(z)}=-2\pi i\cdot e^{\pi p i}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{Q'_n(-k)}\,.$$

Так как в производной $Q'_n(z)$ после подстановки $z=-k$ останется только одно слагаемое, в котором множитель $z+k$ отсутствует, получим:

$$Q'_n(-k)=(-k+1)(-k+2)\cdot\ldots\cdot(-k+k-1)\cdot1\cdot(-k+k+1)\cdot\ldots\cdot(-k+n)=$$
$$=(-1)^{k+1}\cdot(k-1)!\cdot(n-k)!$$

Поэтому вспомогательный интеграл

$$\tilde{I}_n(p) = 2\pi i \cdot e^{\pi p i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot k^{p-1}}{(k-1)! \cdot (n-k)!} .$$

5) Разбиваем интеграл $\tilde{I}_n(p)$ по четырем участкам его контура и после преобразований получим:

$$\tilde{I}_n(p) = \left(1 - e^{2\pi p i}\right) \cdot \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{x^{p-1}}{Q_n(x)} dx - \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{p-1}}{Q_n(z)} dz +$$

$$+ \int_{C_\rho} \frac{z^{p-1}}{Q_n(z)} dz = 2\pi i \cdot e^{\pi p i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot k^{p-1}}{(k-1)! \cdot (n-k)!} .$$

6) Переходим к двойному пределу $\varepsilon \to 0$ и $\rho \to \infty$, тогда

$$\left(1 - e^{2\pi p i}\right) \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{Q_n(x)} dx - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{p-1}}{Q_n(z)} dz +$$

$$+ \int_{C_\rho} \frac{z^{p-1}}{Q_n(z)} dz = 2\pi i \cdot e^{\pi p i} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k^{p-1}}{(k-1)! \cdot (n-k)!} .$$

Здесь предел второго интеграла равен нулю по лемме № 4, так как

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^p}{Q_n(z)} = \frac{1}{n!} \cdot \lim_{z \to 0} z^p = 0 \text{ при } p > 0;$$

а предел третьего - равен нулю по лемме № I, так как

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z^p}{Q_n(p)} = \lim_{z \to \infty} z^{p-n} = 0 \text{ при } p < n .$$

Значит, параметр p должен быть не целым числом из интервала $0 < p < n$.

7) Окончательно значение интеграла $I_n(p)$ будет:

$$I_n(p)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{Q_n(x)}dx=\frac{\pi}{\sin\pi p}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot k^{p-1}}{(k-1)!\cdot(n-k)!}$$

В частном случае при n = I и 2 получим:

$$I_1(p)=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{x+1}dx=\frac{\pi}{\sin\pi p},\quad I_2(p)=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}\cdot dx}{(x+1)(x+2)}=\frac{\pi}{\sin\pi p}\left(1-2^{p-1}\right)$$

Значения интегралов $I_n(p)$ при целых значениях параметра p из интервала $0<p<n$ можно найти или с помощью предела (например, значение $I_2(1)=\ln 2$), или с помощью введения логарифма (см. пример 20).

<u>Пример I7</u>. Вычислить интеграл $I(p)$ при $0<p<1$:

$$I(p)=\int_0^\infty\frac{x^{-p}}{x-1}\,dx.$$

I) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}(p)=\oint_C\frac{z^{-p}}{z-1}dz.$$

2) Определяем особые точки подынтегральной функции. При нецелом p выражение z^{-p} многозначно и имеет логарифмические точки ветвления при $z=0$ и $z=\infty$. Для выделения главного значения подынтегральной функции проведем разрез $0\leqslant x<\infty$ и положим на его верхнем берегу $\arg z=0$. За счет знаменателя имеется простой полюс при $z=1$, расположенный на разрезе.

3) Выбираем контур интегрирования в виде (рис.9):

$$C=(\varepsilon,1-\delta)\Big|_{\arg z=0}+C_\delta^+ +(1+\delta,\,\rho)\Big|_{\arg z=0}+C_\rho+$$

$$+(\rho,1+\delta)\Big|_{\arg z=2\pi}+C_\delta^- +(1-\delta,\,\varepsilon)\Big|_{\arg z=2\pi}+C_\varepsilon;$$

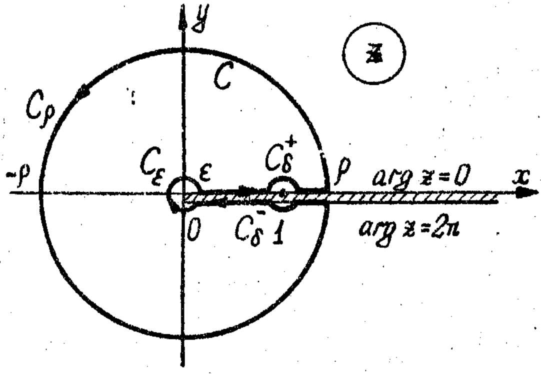

Рис.9

так как рациональная часть подынтегральной функции (ее знаменатель) не обладает четностью и приходится обходить еще полюс на разрезе при $z = 1$; здесь $0 < \varepsilon$ и $\delta << 1 << \rho$.

4) Вычисляем вспомогательный интеграл $\tilde{I}(p)$. Он равен нулю, так как внутри контура C нет особых точек.

5) Разбиваем интеграл $\tilde{I}(p)$ по восьми участкам его контура:

$$\tilde{I}(p) = \left(1-e^{-2\pi p i}\right)\cdot\left[\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^{-p}}{x-1}dx + \int_{1+\delta}^{\rho}\frac{x^{-p}}{x-1}dx\right] + \int_{C_\rho}\frac{z^{-p}}{z-1}dz -$$

$$-\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{-p}}{z-1}dz - \int_{C_\delta^+}\frac{z^{-p}}{z-1}dz - \int_{C_\delta^-}\frac{z^{-p}}{z-1}dz = 0.$$

Здесь учтено, что на верхнем берегу разреза $z = x\cdot e^{0i} > 0$ и $z^{-p} = x^{-p} > 0$, а на нижнем $z = x\cdot e^{2\pi i} > 0$ и $z^{-p} = x^{-p}\cdot e^{-2\pi p i}$; сделаны и другие преобразования.

6) Переходим к тройному пределу $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ и $\rho \to \infty$, тогда

$$\left(1-e^{-2\pi p i}\right)\cdot\int_0^{\infty}\frac{x^{-p}}{x-1}dx + \lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho}\frac{z^{-p}}{z-1}dz - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{-p}}{z-1}dz -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta^+}\frac{z^{-p}}{z-1}dz - \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta^-}\frac{z^{-p}}{z-1}dz = 0.$$

Предел второго интеграла равен нулю по лемме № I, так как

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^{1-p}}{z-1} = \lim_{z\to\infty} z^{-p} = 0 \text{ при } p>0;$$

предел третьего интеграла равен нулю по лемме № 4

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^{1-p}}{z-1} = -\lim_{z\to\infty} z^{1-p} = 0 \text{ при } p<1.$$

Таким образом определяется интервал для тех значений параметра $0<p<1$, при которых интеграл $I(p)$ существует.

Пределы интегралов по контурам $C_\delta^{\pm}$ вычисляются с помощью леммы № 3; для случая C_δ^{+} получим $(z = x\cdot e^{0i})$:

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{C_\delta^+} \frac{z^{-p}}{z-1}\,dz = \pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^{-p}}{z-1} = \pi i;$$

а для случая C_δ^{-} будет $(z = x\cdot e^{2\pi i})$

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{C_\delta^-} \frac{z^{-p}}{z-1}\,dz = \pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^{-p}}{z-1} = \pi i\cdot e^{-2\pi p i}.$$

Таким образом сумма наших интегралов даст:

$$(1-e^{-2\pi p i})\cdot \int_0^\infty \frac{x^{-p}}{x-1}\,dx - \pi i\cdot(1+e^{-2\pi p i}) = 0.$$

7) Окончательно значение интеграла $I(p)$ будет равно:

$$I(p) = \int_0^\infty \frac{x^{-p}}{x-1}\,dx = \pi\cdot \operatorname{ctg}\pi p \text{ при } 0<p<1.$$

Представляют интерес и производные от этого интеграла:

$$-I'(p) = \int_0^\infty \frac{x^{-p}\cdot \ln x}{x-1}\,dx = \left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)^2.$$

Пример 18. К рассмотренным типам интегралов от функций со степенными иррациональностями можно свести и некоторые другие интегралы.

а) Интегралы от алгебраических функций на конечном интервале:

$$I(p)=\int_a^b\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p\cdot R(x)\,dx;$$

здесь интервал $0\leq a<x<b<\infty$, p – нецелое число; а $R(x)$ – дробно-рациональная функция, причем $R(\infty)=0$. Сделав замену переменной:

$$t=\frac{b-x}{x-a},\quad x=\frac{at+b}{t+1},\quad dx=\frac{a-b}{(t+1)^2}\,dt,$$

получим интеграл рассмотренного ранее вида:

$$I(p)=(b-a)\cdot\int_0^\infty R\left(\frac{at+b}{t+1}\right)\cdot\frac{t^p\cdot dt}{(t+1)^2}=\int_0^\infty\tilde{R}(t)\cdot t^p\,dt,$$

где снова от рациональной функции требуем $\tilde{R}(\infty)=0$. Представляют интерес и интегралы, полученные дифференцированием по параметру:

$$I'(p)=\int_0^\infty\tilde{R}(t)\cdot t^p\cdot\ln t\cdot dt.$$

Рассмотрим для примера следующий интеграл $(0<p<1,\ a>0)$:

$$I(p,a)=\int_0^1\left(\frac{1-x}{x}\right)^p\cdot\frac{dx}{x+a}=\frac{1}{a+1}\cdot\int_0^\infty\frac{t^{-p}\cdot dt}{\left(t+\frac{a}{a+1}\right)(t+1)}=$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{1}{t+\frac{a}{a+1}}-\frac{1}{t+1}\right)\cdot t^{-p}\,dt=$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{a}\right)^p-1\right]\cdot\int_0^\infty\frac{t^{-p}\cdot dt}{t+1}=\left[\left(1+\frac{1}{a}\right)^p-1\right]\cdot\frac{\pi}{\sin\pi p};$$

здесь использованы замена $x=\frac{t}{t+1}$ и результата примера 16 при $n=1$. Интересны частные случаи $I(0,a)=\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$, $I(-p,0)=\frac{\pi}{\sin\pi p}$, различные производные и т.п.

б) Интегралы от некоторых комбинаций экспоненциальных функций:

$$I(p)=\int_{-\infty}^{\infty} R(e^x)\cdot e^{px}\,dx,$$

где p – нецелое число, $R(t)$ – рациональная функция и $R(\infty)=0$. Заменой переменной $t=e^x$ этот интеграл приводится к рассмотренным ранее типам:

$$I(p)=\int_0^{\infty} R(t)\cdot t^{p-1}\,dt.$$

Вычислим для примера интеграл:

$$I(p)=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} x}\cdot dx \quad \text{при } |p|<1.$$

Проделаем необходимые преобразования, тогда

$$I(p)=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} x}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}}{\operatorname{ch} x}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{t^p\cdot dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{2}\cdot\sec\frac{\pi p}{2},$$

здесь последний результат взят из примера 15 при $\alpha=\frac{\pi}{2}$.
Если в рассматриваемом интеграле заменить $p\to ip$, получим:

$$I(ip)=\int_0^{\infty}\frac{\cos px}{\operatorname{ch} x}\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sch}\frac{\pi p}{2} \quad \text{при } |p|<1.$$

Найдем еще производную по параметру:

$$I'(p)=\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\operatorname{sh} px}{\operatorname{ch} x}\,dx=\frac{\pi^2}{4}\cdot\sin\frac{\pi p}{2}\cdot\sec^2\frac{\pi p}{2}.$$

в) Связь интегралов рассматриваемого типа с Γ и B – функциями Эйлера. Основные интегральные представления для B –функции следующие:

$$B(p,q)=\int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}\cdot dt}{(1+t)^{p+q}} \quad \text{при } p,q>0;$$

здесь под интегралом сделана замена $x = \frac{t}{1+t}$, Γ – функция определяется интегралом:

$$\Gamma(p) = a^p \cdot \int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{p-1}\, dx \quad \text{при } p, a > 0.$$

Особенно часто используются следующие основные свойства этих функций:

$$B(p,q) = B(q,p) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad B(p, 1-p) =$$

$$= \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad \Gamma(p+1) = p\cdot\Gamma(p),$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\cdot(2n-1)!!,$$

$$\Gamma(-n) = \infty, \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Например, легко проверить, что интеграл $I_n(a)$ из примера 11 заменой переменной $x^2 = \frac{a^2 t}{1-t}$ сводится к B -функции, действительно:

$$I_n(a) = \frac{1}{2a^{2n-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{n-\frac{3}{2}}\, dt = \frac{1}{2a^{2n-1}}\, B\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2a^{2n-1}\cdot\Gamma(n)} = \frac{\pi}{2a^{2n-1}}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

Б. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РАЦИОНАЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пример 12. Вычислить интеграл $I_2(a)$ при $a > 0$:

$$I_2(a) = \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

1) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}_2(a) = \oint_C \frac{\ln^2 z}{z^2+a^2}\, dz .$$

2) Определяем особые точки подынтегральной функции. За счет числителя при $z=0$ и $z=\infty$ имеются точки ветвления логарифмического типа. Для выделения однозначной ветви подынтегральной функции проведем разрез по действительной положительной полуоси $0 \le x < \infty$; если на его верхнем берегу принять $\arg z = 0$, то получим главное значение подынтегральной функции. За счет корней знаменателя получаем два простых полюса при $z = \pm a i$.

3) Выбираем контур интегрирования в виде (рис.10) $C = C'_\rho + (\rho,-\varepsilon)\big|_{\arg z=\pi} + C_\varepsilon + (\varepsilon,\rho)\big|_{\arg z=0}$ где $0<\varepsilon \ll a \ll \rho$. За счет четности рациональной части подынтегральной функции (ее знаменателя) можно вычислять интеграл по контуру, расположенному только в верхней полуплоскости.

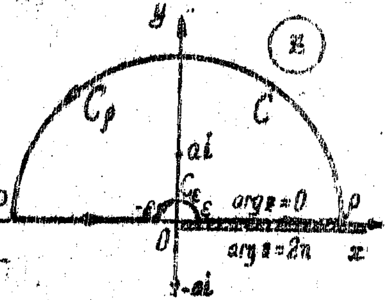

Рис.10

4) Вычисляем вспомогательный интеграл $\tilde{I}_2(a)$. Так как в верхней полуплоскости имеется полюс при $z=ai$, по теореме о вычетах получим:

$$\tilde{I}_2(a) = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{\ln^2 z}{z^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\left(\ln a i\right)^2 .$$

5) Разбиваем интеграл $\tilde{I}_2(a)$ по четырем участкам его контура:

$$\tilde{I}_2(a) = \int_\varepsilon^\rho \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\, dx + \int_{C_\rho} \frac{\ln^2 z}{z^2+a^2}\, dz + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\, dx -$$

$$- \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln^2 z}{z^2+a^2}\, dz = \frac{\pi}{a}\left(\ln a i\right)^2 ;$$

здесь в первом интеграле $z = x > 0$; а в третьем $z = x < 0$, поэтому там удобно сделать замену переменной $x \to -x$ (новый $x > 0$) и $\ln(-x) = \ln x + i\pi$. После преобразований получим:

$$2\cdot\int_\varepsilon^\varrho \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,dx + 2\pi i\cdot\int_\varepsilon^\varrho \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx - \frac{\pi^2}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_\varepsilon^\varrho +$$

$$+\int\limits_{C_\varrho}\frac{\ln^2 z}{z^2+a^2}\,dz - \int\limits_{C_\varepsilon}\frac{\ln^2 z}{z^2+a^2}\,dz = \frac{\pi}{a}\cdot(\ln a i)^2.$$

6) Переходим к двойному пределу $\varepsilon \to 0$ и $\varrho \to \infty$, тогда

$$2\cdot\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,dx + 2\pi i\cdot\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx - \frac{\pi^3}{2a} + \lim_{\varrho\to\infty}\int\limits_{C_\varrho}\frac{\ln^2 z}{z^2+a^2}\,dz -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{\ln^2 z}{z^2+a^2}\,dz = \frac{\pi}{a}\cdot\left(\ln^2 a - \frac{\pi^2}{4} + \pi i\cdot\ln a\right).$$

Здесь предел предпоследнего интеграла равен нулю по лемме № I, так как

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z\cdot\ln^2 z}{z^2+a^2} = \lim_{z\to\infty}\frac{\ln^2 z}{z} = 2\cdot\lim_{z\to\infty}\frac{\ln z}{z} = 2\cdot\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z} = 0;$$

а предел последнего равен нулю по лемме № 4

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\cdot\ln^2 z}{z^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{\ln^2 z}{1/z} = \frac{-2}{a^2}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{\ln z}{1/z} = \frac{2}{a^2}\cdot\lim_{z\to 0} z = 0.$$

7) Окончательно интеграл $I_2(a)$ получается, если в приведенной выше сумме разделить действительные и мнимые части; тогда действительная часть даст искомый результат:

$$I_2(a) = \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\left(\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4}\right).$$

Приравнивая мнимые части, получим тоже интересный интеграл:

$$I_1(a)=\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}\ln a.$$

Очевидно, что рассмотренный способ вычисления интегралов годится и для интегралов более общего вида:

$$I_m(a)=\int_0^\infty \frac{\ln^m x}{x^2+a^2}\,dx \quad \text{при } m=0,1,2,3,\ldots$$

При больших m получаются несколько интегралов с различными показателями не бо́льшими m, для последовательного вычисления которых следует начинать с m = 0, I, 2. Представляют интерес и значения производных $I'_m(a)$.

Ж. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ НЕЧЕТНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Студент должен знать, что интегралы от таких функций вычисляют по полуоси; а интегралы от рациональных функций, не обладающих четностью, вычисляют только по всей оси.

Пример 20. Вычислить интеграл $I(a)$ при $a>0$, если подынтегральная функция нечетная:

$$I(a)=\int_0^\infty \frac{x\cdot dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

I) Выбираем вспомогательный интеграл по замкнутому контуру C:

$$\tilde{I}(a)=\oint_C \frac{z\cdot\ln z}{(z^2+a^2)^2}\,dz.$$

2) Определяем особые точки подынтегральной функции. В точках $z=0$ и $z=\infty$ имеются логарифмические точки ветвления, поэтому проводим разрез по действительной положительной полуоси $0\leq x<\infty$ и выделяем главное значение подынтегральной функции. За счет корней знаменателя получаем полюсы второго порядка в точках $z=\pm ai$.

3) Выбираем контур интегрирования (рис.10) как в примере 19.

4) Вычисление вспомогательного интеграла:

$$\tilde{I}(a) = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{z \cdot \ln z}{(z^2+a^2)^2} = 2\pi i \cdot \left(\frac{z \cdot \ln z}{(z+ai)^2} \right)' \Bigg|_{z=ai} = -\frac{\pi i}{2a^2}.$$

5) Разбиваем интеграл $\tilde{I}(a)$ по четырем участкам его контура:

$$\tilde{I}(a) = \int_{\varepsilon}^{\rho} \left(\frac{x \cdot \ln x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{x \cdot \ln(-x)}{(x^2+a^2)^2} \right) \cdot dx +$$

$$+ \int_{C_\rho} \frac{z \cdot \ln z}{(z^2+a^2)^2} dz - \int_{C_\varepsilon} \frac{z \cdot \ln z}{(z^2+a^2)^2} dz = -\frac{\pi i}{2a^2}.$$

Здесь в интеграле по отрезку (ε, ρ) подставлено $z = x > 0$; а в интеграле по отрезку $(-\rho, -\varepsilon)$ будет $z = x < 0$, поэтому там сделана замена $x \to -x$, что приводит к выражению $\ln(-x) = \ln x + i\pi$; так как дроби с числителями $x \cdot \ln x$ взаимно уничтожаются, остается только интеграл от заданной рациональной дроби:

$$\pi i \cdot \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{x \cdot dx}{(x^2+a^2)^2} + \int_{C_\rho} \frac{z \cdot \ln z \cdot dz}{(z^2+a^2)^2} - \int_{C_\varepsilon} \frac{z \cdot \ln z \cdot dz}{(z^2+a^2)^2} = -\frac{\pi i}{2a^2}.$$

6) Переходим к двойному пределу $\varepsilon \to 0$ и $\rho \to \infty$, тогда

$$-\pi i \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{x \cdot dx}{(x^2+a^2)^2} + \lim_{\rho \to \infty} \int_{C_\rho} \frac{z \cdot \ln z \cdot dz}{(z^2+a^2)^2} -$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{z \cdot \ln z \cdot dz}{(z^2+a^2)^2} = -\frac{\pi i}{2a^2}.$$

Здесь предел интеграла по контуру C_ρ по лемме № I равен нулю, потому что

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^2\cdot\ln z}{(z^2+a^2)^2}=\lim_{z\to\infty}\frac{\ln z}{z^2}=0;$$

предел интеграла по контуру C_ε равен нулю по лемме № 4, так как

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2\cdot\ln z}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^4}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{\ln z}{1/z^2}=\frac{-2}{a^4}\cdot\lim_{z\to 0}z^2=0.$$

7) Окончательно значение интеграла $I(a)$ будет:

$$I(a)=\int_0^\infty\frac{x\cdot dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}.$$

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Приступая к изучению темы, следует обратить особое внимание на теорему о нулях (Е. Р у ш е). Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в замкнутой области $\overline{\mathcal{D}}=\mathcal{D}\cup C$. Если во всех точках контура C справедливо неравенство:

$|g(z)|<|f(z)|$ и $f(z)\neq 0$ при $z\in C$,

то в области $\mathcal{D}$ функции $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ имеют одинаковое число нулей. Причем каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

Пример 2I. Сколько корней уравнения $F(z)\equiv z^4+6z-1=0$ находится в круге $|z|<1$ и в кольце $1<|z|<2$.

Решение: Обозначим $F(z)=f(z)+g(z)=z^4+6z-1$ и рассмотрим разные случаи:

I) Внутри круга $|z|<1$ выберем $f_1(z)=6z$ и $g_1(z)=z^4-1$, тогда на контуре $C_1=\{|z|=1\}$ будет $\min|f_1(z)|=6\cdot|z|=6$ и $\max|g_1(z)|=|z^4-1|\leq\leq|z|^4+1=2$. Так как $\max|g_1(z)|<\min|f_1(z)|$ при $z\in C_1$, то внутри круга $|z|<1$ находится только один корень функции $F(z)$, как у функции $f_1(z)=6z$.

2) Внутри круга $|z|<2$ выберем $f_2(z)=z^4$ и $g_2(z)=6z-1$, тогда на контуре $C_2=\{|z|=2\}$ будет $\min|f_2(z)|=|z|^4=16$ и $\max|g_2(z)|=|6z-1|\leq \leq 6\cdot|z|+1=13$. Так как $\max|g_2(z)|<\min|f_2(z)|$ при $z\in C_2$, то внутри круга $|z|<2$ находятся четыре корня функции $F(z)$, как у функции $f_2(z)=z^4$.

3) Внутри кольца $1<|z|<2$ находятся $4-1=3$ корня функции $F(z)$; на окружностях $|z|=1$ и $|z|=2$ корней нет.

Пример 22. Основная теорема алгебры. Уравнение n - ой степени $F(z)\equiv z^n+az^{n-1}+\dots+bz+c=0$ $(a,b,c,\dots=\mathrm{const})$ имеет в комплексной плоскости ровно n корней.

Решение: Внутри круга $|z|<\rho$ выберем $f(z)=z^n$ и $g(z)=az^{n-1}+\dots+bz+c$; тогда на контуре $C_\rho=\{|z|=\rho\}$ будет $\min|f(z)|=\rho^n$ и $\max|g(z)|=|az^{n-1}+ +\dots+bz+c|\leq|a|\cdot\rho^{n-1}+\dots+|b|\cdot\rho+|c|$. Так как $\max|g(z)|< <\min|f(z)|$ при $z\in C_\rho$ и достаточно больших $\rho>>1$, то внутри круга $|z|<\rho$ находится n корней функции $F(z)$, как у функции $f(z)=z^n$. Вне контура C_ρ при $\rho>>1$ корней нет, так как $F(z)\to\infty$ при $\rho\to\infty$.

Пример 23. Показать, что уравнение $F(z)\equiv z+e^{-z}=a$ при $a>1$ имеет в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z=x>0$ один действительный корень.

Решение: Выберем контур $C=L+C_\rho$, где отрезок $L=\{-i\rho,+i\rho\}$ и правая полуокружность $C_\rho=\{|z|= =\rho,\ x>0\}$. Составим функции $f(z)=z-a$ и $g(z)=e^{-z}$ и сделаем их оценки. На отрезке L будет $|f(z)|=|iy-a|\geq a>1$ и $|g(z)|=|e^{-iy}|=1$, а на полуокружности C_ρ получим: $|f(z)|=|z-a|\geq\rho-a>1$ при $\rho>>1$ и $|g(z)|=e^{-x}\leq 1$. Следовательно, на контуре $C=L+C_\rho$ при $\rho>>1$ всегда $|f(z)|>|g(z)|$ значит в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ число нулей уравнения $F(z)=a$ равно числу нулей функции $f(z)=z-a$, т.е. существует только один корень. Этот корень действительный, так как при $z=0$ будет $F(0)=1<a$, а при $z=x>>1$ функция неограниченно возрастает $F(x)=$

$= x + e^{-x} \cong \dot{x} >> 1$; следовательно, найдется такое $z = x_0 > 0$, при котором $F(x_0) \equiv x_0 + e^{-x_0} = \alpha$.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО СУММИРОВАНИЮ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

Вначале необходимо изучить теорему (о суммировании рядов): Пусть функция $f(z)$ аналитическая и однозначная в плоскости z за исключением полюсов при $z = a_k$ ($k = 1,2,\ldots$), среди которых нет целых чисел ($a_k \notin \mathbb{Z}$), и удовлетворяет условиям леммы № I, т.е. $\lim\limits_{z\to\infty}(z\cdot f(z)) = 0$ для $z \neq a_k$; тогда справедлива формула суммирования рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\cdot e^{n\theta i} = 2\pi i \cdot \sum_k \operatorname*{Res}_{z=a_k} \frac{f(z)\cdot e^{i\theta z}}{1-e^{2\pi i z}}$$

при $0 \leq \theta < 2\pi$.

Пример 24. Найти сумму ряда Фурье $F(a,\theta)$ при $0 \leq \theta < 2\pi$ и a нецелом:

$$F(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2 - a^2}.$$

Решение: Преобразуем этот ряд к виду:

$$F(a,\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{n\theta i}}{n^2 - a^2}\right)$$

и воспользуемся формулой суммирования ($\operatorname*{Res}_{\pm a} = \operatorname*{Res}_{+a} + \operatorname*{Res}_{-a}$):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{n\theta i}}{n^2 - a^2} = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=\pm a} \frac{e^{\theta z i}/(1-e^{2\pi z i})}{z^2 - a^2} = -\frac{\pi}{a}\,\frac{\cos(\pi-\theta)a}{\sin \pi a}.$$

Поэтому сумма исходного ряда

$$F(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2 - a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a}\,\frac{\cos(\pi-\theta)a}{\sin \pi a}.$$

Этот результат дает возможность получить много интересных частных случаев:

$$F(a,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a}\cdot ctg\,\pi a;$$

$$F(a,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a}\cdot cosec\,\pi a;$$

$$F(ia,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\,\frac{ch(\pi-\theta)a}{sh\,\pi a}-\frac{1}{2a^2};$$

$$F(0,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{a\to 0}\frac{1-\pi a\cdot ctg\,\pi a}{2a^2}=\frac{1}{6}\pi^2;$$

$$F(0,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\lim_{a\to 0}\frac{\sin\pi a-\pi a}{2a^2\cdot\sin\pi a}=-\frac{1}{12}\pi^2.$$

Отметим, что рассматриваемым методом суммируются только такие ряды, общие члены которых обладают четностью по индексу, т.е. $C_{-n}=+C_n$.

Следствие: При указанных выше условиях, формула суммирования рядов допускает следующую модификацию:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\cdot e^{n\theta i}=2\pi i\cdot\sum_{k}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\frac{f(z)\cdot e^{\theta(z-\frac{1}{2})i}}{e^{2\pi z i}+1}.$$

Пример 25. Вычислить сумму ряда Фурье:

$$F(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}\quad при\quad 0\le\theta<2\pi.$$

Решение: Сначала найдем сумму вспомогательного ряда:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{n\vartheta i}}{(n+\frac{1}{2})^2}=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{\vartheta(z-\frac{1}{2})i}}{z^2\cdot(e^{2\pi z i}+1)}=\pi(\pi-\vartheta)\cdot e^{-\frac{1}{2}\vartheta i},$$

Затем перейдем к суммированию по неотрицательным индексам:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{n\vartheta i}}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\vartheta i}}{(2n+1)^2} + e^{-\vartheta i} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu\vartheta i}}{(2\nu+1)^2} =$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(m+\frac{1}{2})\vartheta}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{4}(\pi-\vartheta) \cdot e^{-\frac{1}{2}\vartheta i},$$

где $\nu = -n-1$ и $\vartheta = 2\theta$. Окончательный результат получим в виде:

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\pi(\pi-2\theta).$$

Представляют интерес разные частные случаи:

$$F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2.$$

$$-F'(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} = \frac{1}{4}\pi$$

Методические указания к курсу "Методы математической физики" по теме "Теория вычетов и ее приложения" для студентов 2 и 3 курсов физико-технического, физического и радиофизического факультетов

Составители: Борис Викторович Кондратьев
Виктор Петрович Демуцкий

Редактор Л.И.Сащенко
Технический редактор Т.Ф.Рыжикова

Подп. к печ.29.10.85. Изд.№ III8. Формат 60х84 I/I6. Бумага тип. Печать офсетная. Усл.печ.л.2,3. Уч.-изд.л.2,I. Тираж 600. План 1985, поз.2I. Бесплатно.

ХГУ. 3I0077. Харьков, пл.Дзержинского,4.

Харьковский филиал Межвузовского полиграфического предприятия. 3I0093. Харьков, ул.Свердлова, II5