И в своей обыденной жизни, и в производственной деятельности, и в процессе познания природы мы непрерывно сталкиваемся со случайностью. Например, мы бросаем монету вверх; заранее нельзя сказать, как она упадет: гербом или решкой. Другой пример: вынимаем наугад карту из колоды. Заранее нельзя сказать, какой она будет масти. Ещё пример: мы выходим к автобусной остановке в момент времени, не связанный с расписанием движения (мы это расписание просто не знаем). Сколько времени придётся нам ждать нужного номера? Заранее сказать нельзя. Это, как говорится, «зависит от случая». Сколько изделий завода будет забраковано ОТК? Тоже заранее сказать нельзя. Совпадут ли результаты измерений одной и той же величины, полученные одним и тем же прибором в одних и тех же условиях? Неизвестно. Влияние очень большого числа разнообразных причин, каждая из которых в отдельности не может повлиять на результат эксперимента, приводит к тому, что результат эксперимента не определяется заранее однозначно; в таких случаях говорят, что результат такого эксперимента случаен.

И всё же, исходя лишь из повседневного опыта, каждый из нас согласится, что различные события можно сравнивать по степени их возможности. Так, попадание в цель с близкого расстояния более возможно, чем с далёкого; если в лотерее разыгрывается 1 автомобиль, а 10000 денежных выигрышей, то денежный выигрыш – более возможное событие, чем выигрыш автомобиля; при бросании симметричной монеты естественно считать, что оба возможных события – выпадение герба и выпадение надписи – равновозможны.

Нельзя ли вывести числовую характеристику, которая служила бы мерой объективной возможности наступления события? Оказывается, такая числовая характеристика существует, это и есть вероятность события.

1.ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.

1.1. Программный материал

Элементы комбинаторики. Число перестановок, число размещений, число сочетаний Свойства сочетаний.

1.2. Методические указания

При изучении этой темы следует уяснить вводимые понятия. Часто приходится составлять из элементов некоторого множества различные подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать эти элементы в различном порядке и т.д. Например, приходится распределять различные виды работ между рабочими, выбирать из данного коллектива различных представителей, из указанного набора предметов выбирать различные группы предметов, распределять эти группы по объектам и т.д. Так как при этом идёт речь о тех или иных комбинациях элементов, эти задачи называют комбинаторными задачами, а раздел математики, в котором изучают комбинаторные задачи, - комбинаторикой. Комбинаторика имеет большое значение в теории вероятностей, теории управляющих систем и вычислительных машин и во многих других разделах науки и техники.

Особое внимание следует уделить определению основных видов соединений, а также обратить внимание на сходство и различие в определении размещений и сочетаний. Из этих определений следует, что если из данных n элементов отобрать каких-то m элементов, то полученное подмножество будет сочетанием, если же это подмножество из m элементов упорядочить, то получим размещение. Это следует учитывать при решении различных комбинаторных задач.

1.3.Справочный материал

Перестановками из n элементов называется совокупность всех способов упорядочения n-элементного множества, а каждый отдельный способ называется перестановкой. ***Число перестановок*** из n элементов, обозначаемое символом P_n, равно $P_n=nP_{n-1}=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$

Размещениями из n элементов по m элементов называют конечные упорядоченные множества, содержащие m элементов из данных n элементов. ***Число размещений*** из n элементов по m элементов, обозначаемое символом A_n^m, будет

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сочетаниями из n элементов по m элементов называют всякие подмножества, содержащие m элементов из данных n элементов. ***Число сочетаний*** из m элементов по n элементов, обозначаемое символом C_n^m, будет

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Справедливы соотношения

$$C_n^m = C_n^{n-m};\quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Правило суммы: если элемент a может быть выбран m способами, а элемент b может быть выбран иными n способами, то выбор одного элемента a или b может быть осуществлён (n+m) способами.

Правило произведения: если элемент a может быть выбран m способами и после каждого такого выбора элемент b может быть выбран n способами, то выбор пары элементов a и b в указанном порядке может быть осуществлён nm способами.

1.4.Примеры решения типичных задач

1. Сколькими способами можно разместить на полке 5 книг?

Решение. Одно размещение книг на полке будет отличаться от другого только порядком их следования, поэтому искомое число способов равно числу способов упорядочения множества, содержащего 5 элементов, т.е. числу перестановок из 5-ти элементов:

$$P_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120.$$

2. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 16 так, чтобы в каждую дробь входили два числа?

Решение. По условию из чисел 6-ти элементного множества нужно составить подмножества по два числа в каждом. Так как подмножества должны быть упорядоченными (дробь a/b не равна дроби b/a при $a \neq b$), то их число будет равно числу размещений из 6 элементов по два элемента, т.е. число дробей будет равно

$$N = A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

3. При встрече 6 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий при этом?

<u>Решение.</u> Из элементов 6-ти элементного множества составляются подмножества по два элемента в каждом, причём порядок следования элементов не играет роли. Рукопожатие считается состоявшимся независимо от того, Иванов пожал руку Сидорову, или Сидоров пожал руку Иванову. Следовательно, число рукопожатий будет равно числу сочетаний из 6-ти элементов по 2, т.е.

$$N = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

4. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 5 человек. Сколько бригад по 5 человек в каждой можно составить из 12 человек?

<u>Решение.</u> В переводе на язык теории множеств задача примет вид: определить число 5-элементных подмножеств 12-элементного множества. Поэтому

$$N = C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792.$$

При этом мы рассуждаем примерно так: из бригады в 12 человек выделяется бригада в 5 человек – из множества, состоящего из 12 элементов, выделяется подмножество из 5 элементов; в каком порядке будут перечислены фамилии выделенных пяти человек безразлично, бригады считаются различными, если они отличаются хотя бы одним человеком – множество из 5 элементов не является упорядоченным, следовательно, число способов отправить на работу бригаду равно числу сочетаний из 12 элементов по 5 элементов.

5. Сколькими способами собрание из 40 человек может избрать председателя собрания, секретаря и трёх членов редакционной

комиссии?

<u>Решение.</u> Будем решать задачу поэтапно. Выборы председателя и секретаря можно провести A_{40}^2 способами, так как задача о количестве способов выбора председателя и секретаря среди 40 человек равносильна задаче о нахождении числа упорядоченных (выбор a – председатель, b – секретарь отличается от выбора b - председатель, a – секретарь) подмножеств по два элемента в каждом множества, состоящего из 40 элементов. После выбора председателя и секретаря останется 40-2=38 человек. Из них нужно выбрать трёх членов редакционной комиссии. Это можно сделать C_{38}^3 способами, так как порядок, в котором выбираем членов редакционной комиссии, безразличен. Так как после каждого из A_{40}^2 способов выборов председателя и секретаря можно C_{38}^3 способами выбрать членов редакционной комиссии, то по правилу произведения указанные выборы можно провести

$$N = A_{40}^2 C_{38}^3 = 40 \cdot 39 \cdot \frac{38 \cdot 37 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13160160 \text{ способами.}$$

2.ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

2.1.Программный материал

Достоверное, невозможное и случайное события. Относительная частота появления события. Классическое и статистическое определения вероятности. Геометрические вероятности.

2.2.Методические указания

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайного события, а поскольку в теории вероятностей рассматриваются только случайные события, то слово случайное часто опускают и говорят просто «событие». Для объяснения понятия «событие» можно сказать, что под «событием» понимают результат наблюдения (или опыта), просто всякий факт, который в результате эксперимента может произойти или не произойти. Событиями являются, например, появление герба при бросании монеты, получение выигрыша в лотерее, получение «счастливого» билета на экзамене, попадание в цель при выстреле и т.п.

Вместо слова «событие» часто говорят «исход испытания» или просто «исход». События обычно обозначают большими буквами латинского алфавита A, B, C…

Для того, чтобы событие произошло, необходимо выполнение определенного комплекса условий. Этот комплекс условий называется также экспериментом, опытом, испытанием.

Следует обратить внимание также на то, что мы будем иметь дело не со всякими случайными событиями, а с массовыми случайными событиями, т.е. мы будем предполагать, что в принципе возможно создать много раз одни и те же условия, при которых может произойти или нет некоторое случайное событие. Теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдёт единичное событие или нет, - она просто не в силах это сделать. Теория вероятностей занимается изучением закономерностей, которым подчиняются массовые однородные случайные события независимо от их конкретной природы.

Следует также обратить внимание на то, что классическое определение вероятности обладает как преимуществами, так и недостатками. Не всегда число элементарных исходов испытания конечно, не всегда возможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий, а ещё труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. По этой причине наряду с классическим определением пользуются также статистическим определением вероятности, принимая за вероятность события относительную частоту или число, близкое к ней. Но следует помнить, что классическое определение вероятности не требует, чтобы испытания проводились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

2.3.Справочный материал

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдёт, если будет произведено испытание.

Невозможным называют событие, которое заведомо не

произойдёт в данном испытании.

Случайным называют событие, которое в данном испытании может либо произойти, либо не произойти.

Несовместными называют события, появление одного из которых исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Единственно возможными называются события, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием. Единственно возможные события попарно несовместны.

Равновозможными называются события, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Элементарным исходом называется каждое событие, которое может наступить в испытании.

Благоприятствующими событию называются те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает.

<u>Классическое определение вероятности.</u> ***Вероятностью события A*** называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех единственно возможных и равновозможных элементарных исходов испытания. Вероятность события A обозначают через P (A). Таким образом

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A, n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Таким образом, ***вероятность есть число***, характеризующее возможность появления события.

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна 1:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

2. Вероятность невозможного события равна 0:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей:

$$0<m<n, \Rightarrow 0<\frac{m}{n}<1, \Rightarrow 0<P(A)<1.$$

4. Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось к общему числу фактически произведённых испытаний.

$$W(A)=\frac{m}{n}.$$

При ***статическом определении вероятности*** за вероятность события принимают относительную частоту (или число, близкое к ней).

Геометрическое определение вероятности. Если результат испытания определяется случайным положением точки в некоторой области, причём любые положения точек в этой области равновозможны, то при этом используется геометрическое определение вероятности. А именно, вероятность события равна

$$P(A)=\frac{S_0}{S},$$

где S – размер (т.е. длина, площадь или объём) всей области, S_0 – размер той части области, попадание в которую благоприятствует данному событию.

2.4.Примеры решения типичных задач

1. Из урны, содержащей 3 красных, 4 зелёных и 8 синих шаров наудачу вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар а) белый; б) зелёный; в) цветной?

Решение а) Какой бы шар мы ни вынули, он будет либо красным, либо зелёным, либо синим, но белым он не будет никогда, т.к. нет в этой урне белых шаров, поэтому число m

исходов, благоприятствующих этому событию А равно 0, число же всех исходов n=3+4+8=15, следовательно, вероятность появления из урны белого шара

$$P(A)=\frac{0}{15}=0,$$

т.е. событие А является невозможным.

б) Число исходов, благоприятствующих событию В (появлению зелёного шара) m=4, число всех исходов по-прежнему n=15, следовательно

$$P(B)=\frac{4}{15}.$$

в) Пусть С – событие, состоящее в появлении из урны цветного шара. В урне находятся только цветные шары, поэтому любой исход испытания благоприятствует событию С, следовательно

$$P(C)=\frac{15}{15}=1.$$

2. Из урны, содержащей 3 красных, 4 зелёных и 8 синих шаров, наудачу последовательно вынимаются три шара. Какова вероятность того, что третий вынутый шар будет зелёным, если первые два были красными?

Решение. После извлечения из урны двух красных шаров, в ней останутся 1 красный шар, 4 зелёных и 8 синих шаров, всего 13 шаров, поэтому m=4, а n=13 и, следовательно,

$$p=\frac{4}{13}.$$

3. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется точно один туз.

Решение. Число всех равновероятных и несовместных исходов в нашей задаче состоит из всевозможных комбинаций по три карты, их число n= C_{36}^3.

Число благоприятствующих исходов можно подсчитать следующим образом. Один туз мы можем выбрать C_4^1 различными способами, а две другие карты (не тузы) можно выбрать C_{32}^2 различными способами. Т.к. для каждого определённого туза две остальные карты могут быть выбраны C_{32}^2 способами, то всего благоприятствующих исходов будет

$m=C_4^1 C_{32}^2$, следовательно, искомая вероятность равна

$$p=\frac{m}{n}=\frac{C_4^1\cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}=\frac{\frac{4}{1}\cdot\frac{32\cdot 35}{1\cdot 2}}{\frac{36\cdot 35\cdot 34}{1\cdot 2\cdot 3}}=\frac{31\cdot 16}{35\cdot 3\cdot 17}=\frac{496}{1785}=0{,}278\ .$$

4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные стороны.

Решение. Всего исходов (кубиков) n=1000. Кубик имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными сторонами, поэтому число благоприятствующих исходов m=12·8=96, следовательно

$$p=\frac{m}{n}=\frac{96}{1000}=0{,}096\ .$$

5. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков окажется равной 7?

Решение. Игральный кубик может упасть шестью различными способами. Каждый из них комбинируется с шестью способами падения второго кубика. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 6·6=36. Подсчитаем число элементарных исходов, благоприятствующих событию А (сумма очков равна 7). Семь очков получится, если на первом и втором кубиках будет соответственно 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, 4 и 3, 5 и 2, 6 и 1 очков, т.е. имеется всего 6 исходов, благоприятствующих событию А. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

6. В урне 12 белых и 18 черных шаров ; вынимают сразу 10 шаров. Вычислить вероятность вынуть четыре белых и шесть чёрных шаров.

Решение. Число всех равновероятных и несовместных исходов есть число способов, которыми можно вынуть 10 шаров из тридцати, т.е. n= C_{30}^{10}. Число благоприятствующих исходов

определим так: четыре белых шара можно вынуть числом способов C_{12}^4; каждой четвёрке белых соответствует ряд шестёрок чёрных шаров; их число равно C_{18}^6, поэтому число благоприятствующих случаев равно m= $C_{12}^4\cdot C_{18}^6$. Следовательно, вероятность вынуть четыре белых и шесть чёрных шаров равна

$$p=\frac{C_{12}^4\cdot C_{18}^6}{C_{30}^{10}}=\frac{495\cdot 18564}{30045015}\approx 0{,}306.$$

7. В партии из n изделий бракованных k штук. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки m изделий ровно *i* окажутся бракованными.

Решение. Число возможных способов взять m изделий из n равно C_n^m . Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа k бракованных изделий взято *i* штук, что можно сделать C_k^iспособами, а остальные m-*i* изделий не бракованные, т.е. они взяты из общего числа n-k, что можно сделать C_{n-k}^{m-i} способами, поэтому число благоприятствующих случаев $C_k^i\cdot C_{n-k}^{m-i}$. Искомая вероятность будет

$$p=\frac{C_k^i\cdot C_{n-k}^{m-i}}{C_n^m}.$$

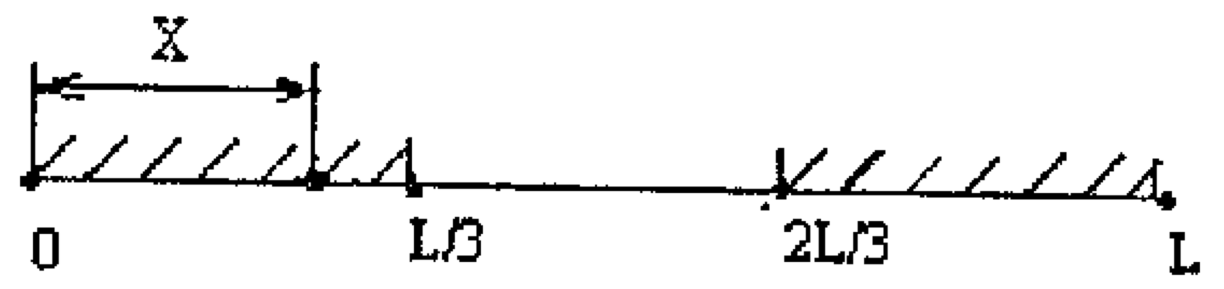
8. Среди 5000 взятых наудачу деталей оказалось 32 бракованные. Найти частоту бракованных деталей в данной партии.

Решение. В этой задаче нас интересует событие А – появление бракованной детали. Произведено n=5000 испытаний, причём событие А наступило m=32 раза. Поэтому искомая относительная частота

$$W(A)=\frac{32}{5000}=0{,}0064\ .$$

9. Стержень разламывается на две части в случайной точке, равномерно распределённой по длине стержня. Найти вероятность того, что меньший обломок имеет длину, не превосходящую одной трети длины стержня.

Решение. Обозначим длину стержня L, а расстояние точки разлома от одного (фиксированного) конца стержня через x (см. рис.)

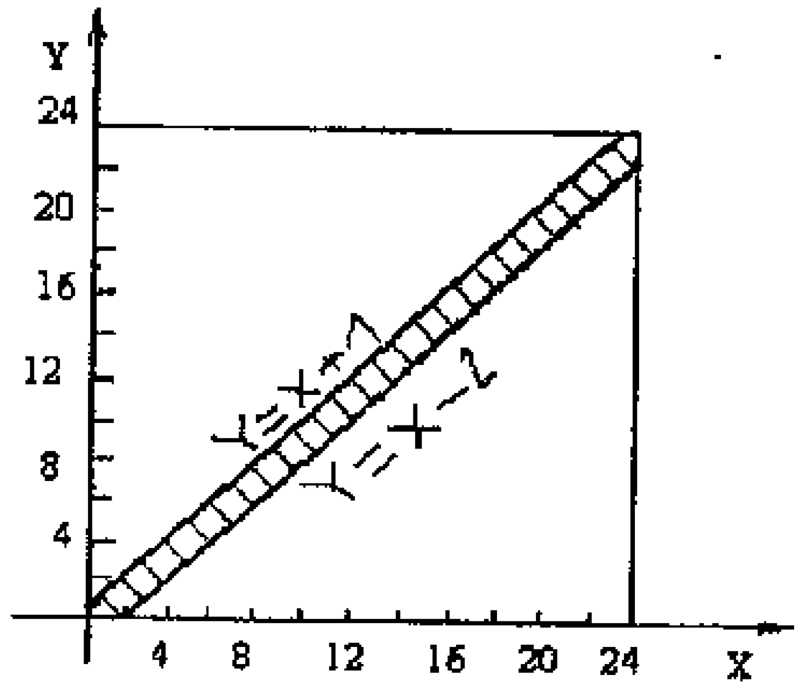


Тогда описанное событие произойдёт тогда и только тогда, когда-либо $x \le L/3$, либо $x \ge 2L/3$. Искомая вероятность равна отношению

$$P(A) = \frac{L/3 + L/3}{L} = \frac{2}{3}.$$

10. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – один час, а второго – два часа.

Решение. Обозначим моменты прихода первого парохода через x, а второго через y. Станем изображать x и y как декартовы координаты на плоскости, в качестве единицы масштаба выберем два часа. Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со сторонами 24 единицы.



Следовательно, $S=24^2$. Очевидно, что положения точек (x,y) в области этого квадрата равновозможны. Выясним, какие точки благоприятствуют интересующему нас событию А (один из пароходов ожидает освобождения причала). Событие А может состояться лишь в том случае, если момент y прихода второго парохода не более чем на два часа раньше момента x прихода первого парохода и не более чем на один час позже прихода первого парохода:

$$x-2 \le y \le x+1.$$

Таким образом, область квадрата, благоприятствующая событию А (на рисунке она заштрихована), состоит из точек квадрата, координаты (x,y) которых удовлетворяет неравенствам $x-2 \le y \le x+1$, т.е. из точек квадрата, лежащих между прямыми $y= x-2$ и $y= x+1$. Площадь квадрата равна $S=24^2=576$, площадь заштрихованной области равна

$$S=576-0{,}5\cdot 23^2-0{,}5\cdot 22^2=69{,}5.$$

Следовательно, вероятность искомого события

$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{69{,}5}{576} \approx 0{,}121 .$$

3.ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

3.1.Программный материал

Теорема сложения вероятностей. Зависимые и независимые события. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Следствия из теорем сложения и умножения вероятностей: формула полной вероятности, формула Бейеса.

3.2.Методические указания.

При изучении этой темы следует обратить внимание, что основными в теории вероятностей являются не прямые, а косвенные методы вычисления вероятностей, когда вероятности интересующих нас событий выражаются через вероятности других событий, с ними связанных. Для этого, прежде всего, нужно уметь выражать интересующие нас события через другие. Этим целям служит так называемая алгебра событий. Для событий вводятся понятия «сумма событий», «произведение событий» и другие, а также правила действий с событиями. Заметим, что все эти понятия вводятся только тогда, когда события, о которых идёт речь, представляют собой подмножества одного и того же пространства элементарных событий. Далее, пользуясь правилами алгебры событий и комбинируя между собой различные простые события, нужно образовать другие, интересующие нас, более сложные события, вероятности которых можно вычислить, пользуясь двумя основными правилами теории вероятностей: 1) правилом сложения вероятностей и 2) правилом умножения вероятностей. Эти правила часто называют основными теоремами теории вероятностей. На самом деле они являются теоремами только для схемы случаев, а для опытов, не сводящихся к схеме случаев, вводятся аксиоматически.

Следует также обратить внимание, что при определении условной вероятности события А при наличии условия В, условие, состоящее в том, что событие В произошло, равносильно изменению условий опыта, когда из всех элементарных событий остаются только те, которые благоприятны событию В, а все остальные отбрасываются.

И ещё, следует также обратить внимание, что если событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2,…, B_n, образующих полную группу, то, поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами. В этом случае вероятность события А можно определить по формуле полной вероятности. Но если допустить, что уже проведено испытание, в результате которого событие А уже произошло. Изменятся ли при этом вероятности гипотез? Ответ на этот вопрос даёт формула Бейеса, которая и позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

3.3.Справочный материал

Суммой A+B двух событий А и В называется событие, состоящее в появлении события А или события В, или обоих этих событий.

Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий А и В называется событие АВ, состоящее в совместном появлении этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Полной группой называется совокупность единственно возможных событий испытания.

Противоположными называются два единственно возможные события, образующие полную группу.

Замечание. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через р, то вероятность другого события обозначают через q.

Независимыми называются события, для которых вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Зависимыми называются два события, для которых вероятность появления одного из них зависит от наступления или ненаступления другого события.

Независимыми в совокупности называют несколько событий, если каждое из них и любая комбинация остальных событий (содержащая либо все остальные события, либо часть из них) есть события независимые.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2,…, A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Принцип практической невозможности маловероятных событий: если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит.

Теорема. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, $A_2,\ldots,A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1;\overline{A}_2;\ldots\overline{A}_n$:

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n.$$

Частный случай. Если события A_1, $A_2,\ldots$, A_n имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A)=1-q^n.$$

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причём вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Замечание. Эта теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий, в частности, для трех совместных событий

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Формула полной вероятности. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, $B_2,\ldots$, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

Формулы Бейеса. Если событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_i, $i=1,2,\ldots,n$ (гипотез), то условная вероятность любой гипотезы B_i может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)},\ i=1,2,\ldots,n.$$

3.4. Примеры решения типичных задач

1. Выпускаемые хлебозаводом булочки имеют такое распределение по массе: меньше 98 г – 5%, больше 102 г – 10%, остальные 85% булочек имеют нормальную массу (98…102 г). Из достаточно большой партии берут наудачу две булочки. Найти вероятность того, что:

а) обе булочки имеют нормальную массу;

б) одна булочка имеет массу меньше нормы, а другая – больше.

Решение: Пусть A_1, A_2 и A_3 – события, состоящие соответственно в том, что первая взятая булочка по массе меньше 98 г, имеет нормальную массу и больше 102г; B_1, B_2 и B_3 – события, состоящие соответственно в том, что вторая взятая булочка по массе меньше 98 г, имеет нормальную массу и больше 102г; С – событие, состоящее в том, что обе булочки имеют нормальную массу; Д – событие, состоящее в том, что одна булочка имеет массу меньше нормы, а другая – больше.

Так как событие С состоит в совместном появлении событий A_2 и B_2, т.е. $C= A_2 \cdot B_2$ и эти события независимы, то

$$P(C)=P(A_2 \cdot B_2)=P(A_2)\cdot P(B_2)=0{,}85\cdot 0{,}85=0{,}7225$$

Событие Д произойдёт, если произойдут события A_1 и B_3 или события A_3 и B_1, т.е. $Д= A_1B_3+ A_3B_1$. Так как события A_1, A_3, B_1, B_3 – независимые, то

$$P(Д)=P(A_1\cdot B_3+A_3\cdot B_1)=P(A_1\cdot B_3)+P(A_3\cdot B_1)=P(A_1)\cdot P(B_3)+$$
$$+P(A_3)\cdot P(B_1)=0{,}05\cdot 0{,}10+0{,}10\cdot 0{,}05=0{,}01.$$

2. Из трёх орудий произведён залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,9; для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадёт в цель.

Решение: Обозначим через А – событие, заключающееся в том, что в цель попало только одно орудие, B_1 – попадание в цель первого орудия, B_2 – попадание в цель второго орудия, B_3 – попадание в цель третьего орудия, С – в цель попало только первое орудие, Д – в цель попало только второе орудие, Е – в цель попало только третье орудие.

Т.к. событие $B_1, B_2, B_3, \overline{B}_1$ (не B_1), $\overline{B}_2, \overline{B}_3$ независимы, то

$$P(C)=P(B_1\cdot\overline{B}_2\cdot\overline{B}_3)=P(B_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(\overline{B}_3)=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}072,$$

$$P(Д)=P(\overline{B}_1\cdot B_2\cdot\overline{B}_3)=P(\overline{B}_1)\cdot P(B_2)\cdot P(\overline{B}_3)=0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}032,$$

$$P(E)=P(\overline{B}_1\cdot\overline{B}_2\cdot B_3)=P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(B_3)=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}012$$

События С, Д и Е несовместные, поэтому:

$$P(A)=P(C+Д+E)=P(C)+P(Д)+P(E)=0{,}072+0{,}032+0{,}0012=0{,}116$$

Таким образом, вероятность того, что только одно орудие попадёт в цель при указанных условиях, равна 0,116.

3. Партия семян, состоящая из 10 мешков, принимается, если при проверке выбранных наугад двух мешков, содержащиеся в них семена окажутся удовлетворяющими стандарту. Найти вероятность приёмки партии, содержащей в четырёх мешках нестандартные семена.

Решение. Обозначим события: А – приёмка партии семян; A_1 – стандартность семян в первом проверяемом мешке, A_2 – стандартность семян во втором проверяемом мешке.

Приёмка партии семян осуществляется, если и в первом и во втором мешках семена окажутся стандартными. Поэтому событию А будет соответствовать совмещение событий A_1 и A_2, т.е. $A= A_1\cdot A_2$.

Равенство событий означает равенство их вероятностей:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2).$$

Для вычисления вероятности совмещения событий применяем теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2).$$

Вероятности $P(A_1)$ и $P(A_2)$ вычисляем из условий задачи. Вероятность того, что в первом проверяемом мешке окажутся стандартные семена, будет равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Вероятность того, что во втором проверяемом мешке окажутся стандартные семена при условии, что в первом проверяемом мешке оказались стандартные семена,

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{5}{9}.$$

Перемножая полученные вероятности, получаем

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, вероятность приёмки партии из 10 мешков, содержащей 4 мешка нестандартных семян, равна 1/3.

4. На двух автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Вероятность изготовления деталей высшего качества на первом станке равна 0,92, на втором – 0,80. Изготовленные на обоих станках нерассортированные детали находятся на складе, причём деталей, изготовленных на первом станке, в 3 раза больше, чем на втором. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется высшего сорта.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что взятая деталь высшего качества, B_1, B_2 – события, состоящие в том, что взятая деталь изготовлена соответственно на I-м или II-м станке. Так как событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий B_1 или B_2, образующих полную группу, то вероятность наступления события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{3}{4} \cdot 0{,}92 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}80 = 0{,}89.$$

5. Коэффициент использования рабочего времени у двух комбайнов соответственно равен 0,8 и 0,6. Считая, что остановки в работе каждого комбайна возникают случайно и независимо друг от друга, определить относительное время: 1) совместной работы комбайнов; 2) работы только одного комбайна; 3) простоя обоих комбайнов.

Решение. Коэффициент использования рабочего времени комбайна (как и других машин) – это отношение времени

непосредственной работы ко всему рабочему времени (например, сменному). Оно совпадает с определением вероятности события и, следовательно, рассматриваемый коэффициент есть вероятность того, что комбайн работает в данный момент. Относительное время, которое необходимо найти, это также вероятности соответствующих событий.

Обозначим события A_2 – совместная работа комбайнов; A_1 – работа одного комбайна; A_0 – оба комбайна не работают; B – работа первого комбайна (противоположное событие, т.е. простой – $\overline{B}$, C - работа второго комбайна (простой - $\overline{C}$). По условию имеем : $P(B) = 0{,}8$; $P(\overline{B}) = 0{,}2$, $P(C) = 0{,}6$; $P(\overline{C}) = 0{,}4$.

1)Совместная работа комбайнов – это работа первого и второго комбайнов вместе, т.е. совмещение событий B и C:

$$A_2 = B \cdot C.$$

Следовательно, вероятность события A_2 равна вероятности совмещения независимых событий B и C, последняя же определяется по теореме умножения для независимых событий.

$$P(A_2) = P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48 = 48\ \%.$$

2)Работа одного комбайна имеет место тогда, когда первый комбайн работает, а второй не работает($B \cdot \overline{C}$) или же первый не работает, а второй работает ($\overline{B} \cdot C$). Используя понятие суммы событий, представим событие A_1 через события B, $\overline{B}$, C и $\overline{C}$ так : $A_1 = B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C$. Поэтому искомая вероятность равна :

$$P(A_1) = P(B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C).$$

Для вычисления вероятности в правой части применяем теоремы сложения и умножения вероятностей:

$$P(A_1) = P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{B}) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44 = 44\%.$$

3) Простой обоих комбайнов вместе – это простой и первого и второго комбайнов, т.е. совмещение событий $\overline{B}$ и $\overline{C}$:

$$A_0 = \overline{B} \cdot \overline{C}.$$

Для вычисления вероятности совмещения двух событий используем теорему умножения для независимых событий, так как по условию события $\overline{B}$ и $\overline{C}$ независимые:

$$P(A_0) = P(\overline{B} \cdot \overline{C}) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08 = 8\%.$$

Таким образом, 48% рабочего времени работают оба комбайна, 44% рабочего времени работает только один комбайн и 8% рабочего времени оба комбайна не работают.

6. На трёх станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10%, на втором – 30%, на третьем – 60% всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 – если на втором станке, и 0,9 – если на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что взятая деталь бездефектна, B_i (i=1,2,3) – событие, состоящее в том, что взятая деталь изготовлена на i-ом станке. Так как событие А может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий B_1, B_2 или B_3, образующих полную группу, то вероятность наступления события А равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}07 + 0{,}24 + 0{,}54 = 0{,}85.$$

7. Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

Решение.

Обозначим интересующее нас событие буквой А. Тогда событие $\overline{A}$, противоположное А, состоит в том, что среди вынутых карт не окажется ни одного туза. Очевидно, что три не туза

можно вытянуть из колоды карт C_{32}^3 различными способами и, следовательно,

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{31 \cdot 8}{3 \cdot 17 \cdot 7} \approx 0{,}695.$$

Искомая вероятность равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0{,}305.$$

8. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора, вероятности срабатывания при аварии которых соответственно равны 0,8 и 0,9. Вычислить вероятность срабатывания сигнализации при аварии.

Решение. Обозначим через А и В события, заключающиеся в срабатывании первого и второго сигнализаторов соответственно, а через С – событие, вероятность которого требуется вычислить. Тогда P(A)=0,8, P(B)=0,9, C=A+B и P(C)=P(A+B). По теореме сложения вероятностей P(C)=P(A)+P(B)-P(AB), а по теореме умножения вероятностей для независимых событий P(AB)=P(A)·P(B).

Следовательно, P(C)=0,8+0,9 - 0,8·0,9=0,98.

9. Три охотника стреляют в лису, причём вероятность попадания для каждого охотника равна 0,3. Найти вероятность того, что хотя бы один охотник попадёт в лису.

Решение. Пусть событие А состоит в том, что хотя бы один охотник попал в лису. Тогда событие $\overline{A}$ - все охотники промахнулись. Вероятность промаха для каждого охотника q=1-p=1-0,3=0,7 и не зависит от результатов стрельбы двух других охотников, поэтому

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}7^3 = 0{,}657.$$

10. Большая партия изделий содержит 20% брака. Сколько изделий нужно взять из этой партии наудачу для того, чтобы вероятность встретить хотя бы одно доброкачественное изделие была не менее 0,95.

Решение. Пусть A_i – событие, состоящее в появлении доброкачественного изделия при i-ом единичном испытании, А – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, $A_2, \dots, A_n$. По условию $p_i=0,8$, $q_i=0,2$, $P(A)\geq 0,95$. Так как события A_i независимы в совокупности и имеют одинаковую вероятность $p_i=p$, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий в n испытаниях P(A) равна

$$P(A)=1-q^n.$$

Подставляя исходные данные, получаем

$$0,95\leq 1-0,2^n, \Leftrightarrow 0,2^n\leq 0,05, \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n\leq\frac{1}{20}, \Leftrightarrow 5^n\geq 20,$$

$$\Rightarrow n\geq \log_5 20=\frac{\lg 20}{\lg 5}\approx\frac{1,3010}{0,6990}\approx 1,861, \Rightarrow n\geq 2.$$

Таким образом, чтобы вероятность встретить хотя бы одно доброкачественное изделие была не меньше 0,95, из данной партии наудачу нужно взять не меньше двух изделий ($n\geq 1,861$ изделия).

11. Для передачи сообщения путём подачи сигналов «точка» и «тире» используется телеграфная система. Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 0,4 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в соотношении 5: 3. Определить вероятности того, что при приёме сигналов «точка» и «тире» в действительности были переданы эти сигналы.

Решение. Пусть событие А –принят сигнал «точка», а событие В – принят сигнал «тире». Можно сделать две гипотезы: H_1 – передан сигнал «точка», H_2 – передан сигнал «тире». По условию $P(H_1):P(H_2)=5:3$, кроме того, $P(H_1)+P(H_2)=1$, поэтому $P(H_1)=5/8$, $P(H_2)=3/8$. Известно, что

$$P_{H_1}(A)=\frac{3}{5}, P_{H_2}(A)=\frac{1}{3}, P_{H_1}(B)=\frac{2}{5}, P_{H_2}(B)=\frac{2}{3}.$$

Вероятности событий А и В находим по формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}, \quad P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

По формуле Бейеса находим искомые вероятности:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}, \qquad P_B(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

4.ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

4.1.Программный материал

Формула Бернулли. Формула Пуассона. Локальная теорема Лапласа. Интегральная теорема Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.

4.2.Методические указания

При изучении этой темы следует обратить внимание на то, что в ней изучаются методы решения задачи, в которой один и тот же опыт повторяется несколько раз. В результате каждого опыта может появиться или не появиться интересующее нас событие. Однако, нас интересует не результат отдельного опыта, а результат серии опытов, т.е. какова вероятность появления того или иного числа событий в серии опытов. Характерные примеры такой задачи появляются при выборочном обследовании. Когда образована выборка и производится её изучение, то каждый элемент её обследуется и устанавливается наличие или отсутствие того или иного фактора. Обследование одного элемента выборки и есть опыт или испытание. Обследование всех элементов выборки, проводимое в одинаковых условиях, есть повторение испытаний, рассматриваемое в задаче о повторении опытов. Решение основного вопроса задачи о повторении испытаний – расчёт вероятности появления определённого числа событий в серии испытаний даётся формулой Бернулли.

Если n большое, то вычисления по формуле Бернулли очень трудоёмки, и тогда рекомендуется применять приближённые локальную и интегральную формулы Муавра-Лапласа, которые дают тем лучше результаты, чем ближе p к 1/2.

Если число независимых испытаний n велико ($n>1000$),а вероятность появления события в каждом испытании p мала ($p\leq 0{,}3$), то для отыскания вероятности того, что в этих испытаниях событие появится m раз, используют приближённую формулу Пуассона, которую можно получить из формулы Бернулли, перейдя к пределу ($p\to 0$, $n\to\infty$, но $np=\lambda=\text{const}$).

Формула Пуассона наряду с задачей повторения испытаний используется также для расчёта вероятности появления различного числа событий (например, точек или других элементов) в какой-либо области (площади, объёме или во времени).

При этом должны соблюдаться следующие условия:

- события (точки) в области распределены в общем равномерно;
- положение каждого события (точки) случайное, независимое друг от друга;
- события (точки) появляются в области поодиночке, а не парами, тройками и т.д.

При решении задач с использованием формулы Пуассона исходные данные могут встречаться в двух вариантах:

1) в условии задачи указывается вероятность p появления события в одном испытании и число испытаний n;
2) в условии задачи указывается среднее число λ_1 появлений события в какой-либо единице области (площади, объёма, времени) и размер области S (площади, объёма, времени), внутри которой появляются интересующие события.

В первом случае параметр распределения Пуассона определяется как произведение вероятности p и числа n испытаний: $\lambda = n\cdot p$.

Во втором случае этот параметр определяется произведением среднего числа появлений события и размера области: $\lambda=\lambda_1\cdot S$.

Дальнейший расчёт вероятности по формуле Пуассона одинаков в обоих случаях.

4.3.Справочный материал

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют ***независимыми относительно события A.*** В этом разделе рассматриваются независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события одинакова.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},$$

где $q=1-p$. (Если $n<50$ и p не мало)

Формула Пуассона. При $p\to 0$ и $n\to\infty$ так, что $np=\lambda=\text{const}$ (для редких явлений) имеет место формула

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda=np.$$

(Если $n>50$, $npq\leq 9$, но $p\leq 0{,}1$)

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближённо равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

$$\text{где } \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}, \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

(Если $n>50$, $npq\geq 9$, но k – [illegible])

Таблица значений функции φ (x) для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей: $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближённо равна

$$P(k_1;k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$, $x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$ (Если $n\geq 50$, $npq\geq 9$, то $k_1\leq k\leq k_2$)

Таблица функции Лапласа для положительных значений x ($0\leq x\leq 5$) приведена в приложении 2; для значений $x>5$ полагают $\Phi(x)=0{,}5$, для отрицательных значений x используют ту же таблицу, учитывая, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближённо равна удвоенной функции Лапласа при

$x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Наивероятнейшее число появления события в независимых испытаниях. Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют **наивероятнейшим,** если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз не меньше вероятности остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np-q\leq k_0\leq np+p, \quad \textit{причём}$$

а) если число np целое, то $k_0=np$;

б) если число $np-q$ - целое, то существует два наивероятнейших числа k_0 и k_0+1;

в) если число $np-q$ – дробное то существует одно наивероятнейшее число k_0.

4.4.Примеры решения типичных задач.

1. Производится 6 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 1/3. Найти вероятность того, что событие А появится: 1) 2 раза и 2) не менее одного раза.

__Решение.__ По условию вероятность появления события А в одном опыте равна $p=1/3$, следовательно, вероятность непоявления: $q=1-1/3=2/3$.

1) Решение получаем непосредственно по формуле Бернулли при $m=2$.

$$P_6(2)=C_6^2p^2q^4=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{16}{81}=\frac{80}{243}\approx 0{,}33\,.$$

2) Воспользуемся свойством: сумма вероятностей событий, составляющих полную систему, равна единице. На основании этого свойства вероятность появления события А не менее одного раза равна $p_1=1-p_0$, где p_0 – вероятность непоявления события А во всех шести опытах; эта вероятность определяется по формуле Бернулли:

$$p_0=C_6^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6=1\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\approx 0{,}09,$$

следовательно искомая вероятность

$$p_1=1-0{,}09=0{,}91.$$

2. Всхожесть семян равна 95%. Отбирается 6 зёрен. Какова вероятность того, что они дадут не менее 5 всходов?

__Решение.__ Событию «не менее 5 всходов» соответствует следующая комбинация событий: «ровно 5 всходов», или «ровно 6 всходов». На основании теоремы сложения искомая вероятность

$$P_6(\kappa\geq 5)=P_6(5)+P_6(6).$$

Вероятности $P_6(5)$ и $P_5(6)$ определяются по формуле Бернулли:

$$P_6(5)=C_6^5\cdot 0{,}95^5\cdot 0{,}05^1=6\cdot 0{,}95^5\cdot 0{,}05\approx 0{,}23,$$

$$P_6(6)=C_6^6\cdot 0{,}95^6\cdot 0{,}05^0=0{,}95^6\approx 0{,}73,$$

следовательно, искомая вероятность

$$P_6(\kappa \geq 5) = 0{,}23 + 0{,}73 = 0{,}96.$$

3. Требуется найти вероятность того, что в 4-х независимых испытаниях событие появится: а) ровно 2 раза; б) не менее двух раз; в) не более двух раз; г) хотя бы один раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,9.

Решение. Применяя формулу Бернулли, находим:

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0001,$$

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^3 = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}01 = 0{,}0036,$$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}01 = 0{,}0486,$$

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 4 \cdot 0{,}729 \cdot 0{,}1 = 0{,}2916,$$

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^0 = 1 \cdot 0{,}6561 \cdot 1 = 0{,}6561.$$

Так как события A_i образуют полную группу, то:

$$\sum_{i=0}^{4} A_i = 0{,}0001 + 0{,}0036 + 0{,}0486 + 0{,}2916 + 0{,}6561 = 1,$$

что подтверждает правильность вычислений.

Следовательно:

а) вероятность того, что событие наступит ровно два раза, равна $P_4(2)=0{,}0486$;

б) вероятность того, что событие наступит не менее двух раз равна $P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=0{,}0486+0{,}2916+0{,}6561=0{,}9963$;

в) вероятность того, что событие наступит не более двух раз равна $P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)=0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486=0{,}0523$;

г) вероятность того, что событие наступит хотя бы один раз, равна $1 - P_4(0)=1 - 0{,}0001=0{,}9999$.

4. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо. Вероятность отказа любого элемента в течении времени Т равна 0,002. Найти вероятность того, что за время Т откажут ровно три элемента.

Решение. По условию, n=1000, p=0,002, m=3. Поскольку число n велико, а вероятность p – мала и элементы работают независимо, воспользуемся формулой Пуассона. Найдём λ:

$$\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}002 = 2.$$

Искомая вероятность:

$$P_{1000}(3) \approx \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \frac{4}{3} \cdot 0{,}13534 = 0{,}18.$$

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит 1500 раз в 2100 испытаниях.

Решение. По условию, n=2100, k=1500, p=0,7, q=1-0,7=0,3. Так как n=2100 достаточно большое число, то воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. Найдём значение аргумента x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1500 - 2100 \cdot 0{,}7}{\sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = \frac{30}{21} = 1{,}43.$$

По таблице функции φ(x) находим φ(1,43)=0,1435. Искомая вероятность

$$P_{2100}(1500) \approx \frac{1}{\sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \varphi(1{,}43) = \frac{0{,}1435}{21} = 0{,}007.$$

6. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число изделий первого сорта заключено между 652 и 760?

Решение. Известны число независимых испытаний n=1000 и вероятность наступления события в отдельном испытании p=0,7.

Требуется найти вероятность того, что число появлений события заключено между $x' = 652$ и $x'' = 760$. Искомую вероятность найдём по интегральной теореме Лапласа

$$P(652; 760) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Т.к. $x' = \frac{652 - 1000 \cdot 0{,}7}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = -3{,}31,$ $x'' = \frac{760 - 1000 \cdot 0{,}7}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = 4{,}14,$

то по таблице приложения 2 находим

$$\Phi(x'') = \Phi(4{,}14) = 0{,}499974,$$

$$\Phi(x') = \Phi(-3{,}31) = -\Phi(3{,}31) = -0{,}49949,$$

следовательно искомая вероятность

$$P(652;760) = 0{,}499974 + 0{,}49949 \approx 0{,}9995.$$

7. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Найти границу абсолютной величины отклонения частоты взошедших семян от вероятности p=0,9, если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью P=0,995.

Решение. Мы знаем, что если n – число независимых испытаний и p – вероятность наступления события в отдельном испытании, то при любом ε>**0** имеет место приближённое равенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где q=1-p. В нашем случае n=600, p=0,9, q=1-0,9=0,1, P=0,995 и необходимо найти ε. Из соотношения

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}9\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}9\cdot 0{,}1}}\right) \text{ или } \Phi(81{,}65\,\varepsilon) = 0{,}4975,$$

пользуясь таблицей приложения 2, находим $81{,}65\,\varepsilon = 2{,}81$, откуда $\varepsilon = 0{,}034$.

8. Стреляют по группе из 24 танков. Вероятность того, что танк будет подбитый, равна 0,6. Определить наивероятнейшее число подбитых танков.

Решение. По условию n=24, p=0,6, q=0,4, поэтому наивероятнейшее число подбитых танков будет не менее 24·0,6-0,4=14,4-0,4=14 и не больше 24·0,6+0,6=14,4+0,6=15.

5.СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.1.Программный материал

Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Многоугольник распределения. Биномиальный закон распределения. Закон распределения Пуассона. Интегральная и дифференциальная функции распределения случайной величины, их свойства.

5.2.Методические указания

Понятие случайной величины – основное в теории вероятностей. Применение теории вероятностей для решения практических задач в первую очередь связано с этим понятием. Следует хорошо разобрать методику задания случайной величины дискретного типа с помощью таблицы или многоугольника распределения, а непрерывного типа – с помощью дифференциальной функции или кривой распределения, использования этих понятий для расчёта вероятности попадания случайной величины в заданный интервал.

5.3.Справочный материал

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определёнными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (в последнем случае множество всех возможных значений называют счётным).

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень её возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан **в виде таблицы,** первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если подмножество возможных значений X бесконечно (счётно), то ряд $p_1+p_2+\ldots$ сходится и его сумма равна 1.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан ***аналитически*** (в виде формулы)

$$P(X=x_i)=\varphi(x_i)$$

или с помощью ***функции распределения.***

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1,p_1)$, $M_2(x_2,p_2)$,…, $M_n(x_n,p_n)$ (x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную прямую называют ***многоугольником распределения.***

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p; вероятность возможного значения X=к (числа к появлений события) вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближённую формулу

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где k – число появления события в n независимых испытаниях, λ= np (среднее число появлений события в n испытаниях), и говорят, что случайная величина распределена по ***закону Пуассона.***

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или

бесконечного промежутка, или, более строго, случайная величина называется ***непрерывной***, если её интегральная функция распределения F(x) непрерывно дифференцируема.

Интегральной функцией распределения называют функцию F(x), определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x)=P(X<x)$$

Свойства интегральной функции распределения:

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]: $0\le F(x)\le 1$.
2. Функция распределения есть неубывающая функция: $$F(x_2)> F(x_1) \text{ при } x_2> x_1.$$
3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то F(x)=0 при $x\le a$; F(x)=1 при $x\ge b$.
4. Функция распределения непрерывна слева: $$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$$

Следствия.

1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключённое в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$.
2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определённое значение, например x_1 равна 0: $P(x=x_1)=0$.
3. Справедливы следующие предельные соотношения: $$\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to \infty} F(x) = 1.$$

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины (или ***плотностью вероятностей***, или ***дифференциальной функцией распределения***) называют первую производную от интегральной функции распределения $f(x)=F'(x)$.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), определяется равенством

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Свойства плотности распределения.

1. Плотность распределения неотрицательна, т.е. $f(x)\geq 0$.
2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int_a^b f(x)dx=1.$$

5.4. Примеры решения типичных задач

1. Производятся три независимых выстрела по мишени; вероятность попадания при каждом выстреле p=0,4. Дискретная случайная величина X – число попаданий в мишень. Построить её ряд распределения.

Решение. Случайная величина X может принимать значения 0; 1; 2; 3. Вычислим соответствующие им вероятности:

$$P_3(0)=C_3^0\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^3=0{,}216,\quad P_3(1)=C_3^1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^2=0{,}432,$$

$$P_3(2)=C_3^2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6=0{,}288,\quad P_3(3)=C_3^3\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^0=0{,}064,$$

$$\sum_{i=0}^{3} P_3(i)=0{,}216+0{,}432+0{,}288+0{,}064=1,$$

следовательно вычисления верны.

Ряд распределений дискретной случайной величины X будет:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

2. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leq 0,\\ x/2 & \text{при } 0<x\leq 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (1/4,1).

Решение. Искомая вероятность равна приращению функции распределения на заданном интервале:

P(1/4<x<1)=F(1)-F(1/4).

Так как на интервале (1/4,1), по условию, F(x)=x/2, то F(1)-F(1/4)=1/2-1/8=3/8. Итак, P(1/4<x<1)=3/8.

3. Случайная величина X задана функцией распределения, приведенной в задаче 2. Требуется: а) найти плотность распределения вероятностей; б) используя плотность распределения вероятностей, найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина x примет значение, принадлежащее интервалу (1/4,1).

Решение. а) Найдём плотность распределения вероятностей f(x) для чего продифференцируем по x интегральную функцию F(x):

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1/2 & \text{при } 0<x<2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

б) Искомая вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (1/4,1), равна определённому интегралу в пределах от 1/4 до 1 от плотности распределения вероятностей:

$$P\left(\frac{1}{4}<x<1\right)=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_{1/4}^{1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}.$$

4. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытания равны 4/5 и независимы. Испытания заканчиваются после первого же изделия, не выдержавшего испытания. Вывести формулу для ряда распределения числа испытаний.

Решение. Испытания заканчиваются на k-ом изделии (k=1,2,3,…), если первые k-1 изделий пройдут испытания, а k-е изделие не выдержит испытаний. Если X – случайное число испытаний, то по теореме умножения вероятностей совместных событий

$$P(X=k)=\left(1-\frac{1}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}=\frac{4^{k-1}}{5^k}.$$

Полученная формула для ряда распределения эквивалентна таблице:

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	1/5	$4/5^2$	$4^2/5^3$	…	$4^{k-1}/5^k$	…

Заметим, что теоретически число испытаний может быть бесконечно большим, однако вероятность такого события стремится к нулю

$$\lim_{k\to\infty}P(X=k)=\frac{1}{5}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}=0.$$

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ 1/9\,(x-1)^2 & \text{при } 1<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$ и построить графики функции распределения и плотности распределения

вероятностей.

Решение. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от интегральной функции распределения, поэтому

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ 2/9\,(x-1) & \text{при } 1<x<4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Заметим, что при x=4 производная F'(x) не существует.

График функции распределения имеет вид

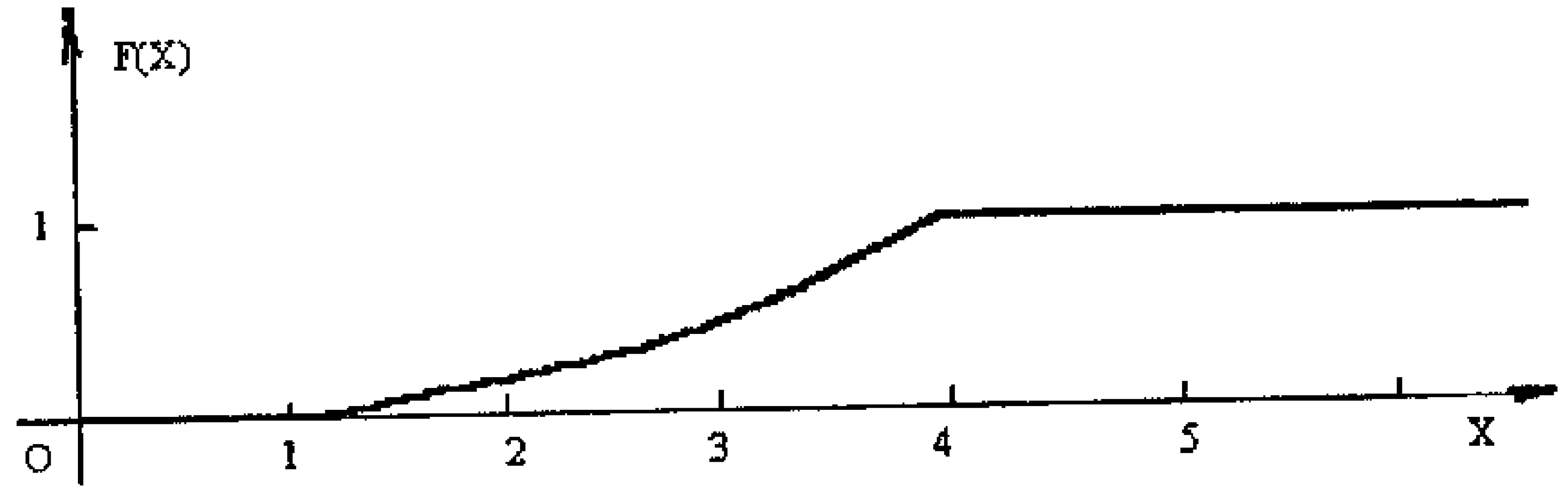
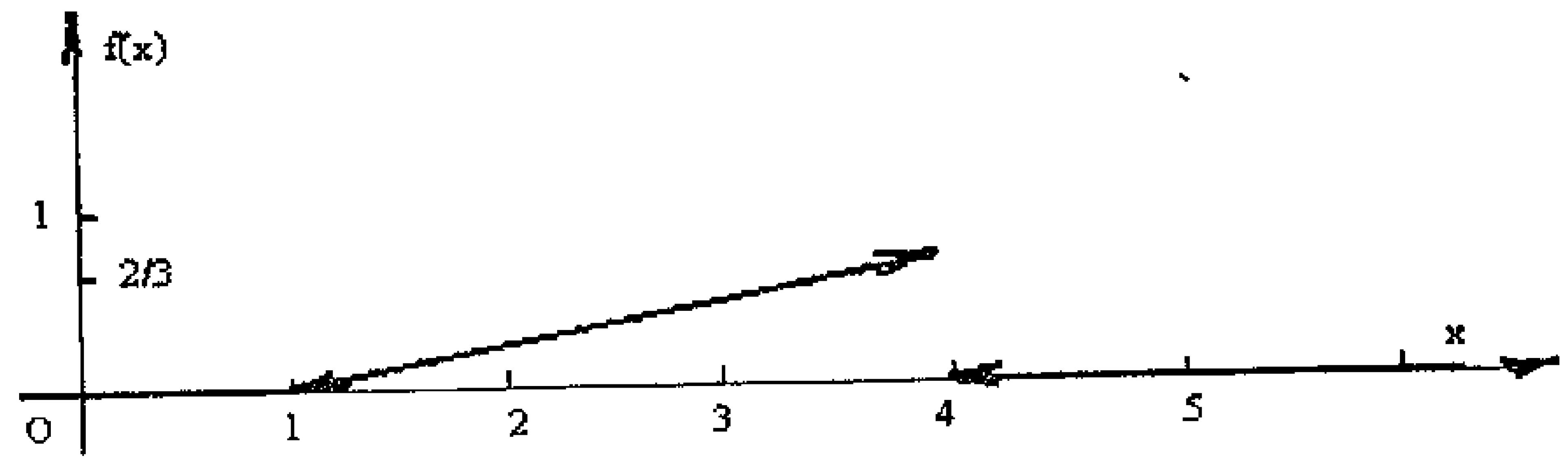


График плотности распределения вероятностей имеет вид



6.ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

6.1.Програмный материал

Математическое ожидание и дисперсия. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии. Среднее квадратическое отклонение. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал.

Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Бернулли. Понятие о теореме Ляпунова.

6.2. Методические указания.

Понятие математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения принадлежит к числу наиболее важных, поэтому решению задач на усвоение этих понятий необходимо уделить особое внимание.

В данную тему входит также изучение одного из самых распространенных распределений – нормального распределения. Это распределение применяется для характеристики многих случайных величин: ошибок различных измерений, отклонений в размерах от типичных у каких-либо объектов, животных, растений и др. Широкое распространение нормального распределения объясняет теорема Ляпунова, указывающая характер случайных величин, распределенных нормально.

При вычислении вероятности попадания случайной величины в заданный интервал при нормальном распределении приходится использовать специальную функцию - функцию Лапласа. Существует много разновидностей этой функции. В приложении к настоящим методическим указаниям приведена таблица, которую следует использовать при расчете вероятности попадания случайной величины в интервал (α,β) по приведенной ниже формуле.

При рассмотрении этой темы следует также разобрать вопросы, относящиеся к закону больших чисел. При малом числе испытаний такие характеристики случайных явлений, как относительная частота (частность), средняя арифметическая неустойчивы, заметно меняются от одной серии испытаний к другой. Совершенно другое дело, когда число испытаний велико. Эти же характеристики становятся устойчивыми, стабильными, малоизменяющимися. Такое свойство указанных характеристик или же отмеченная характерная зависимость их от числа испытаний называется законом больших чисел.

Простейшая форма закона больших чисел выражается

теоремой Бернулли. Эта теорема утверждает, что при большом числе испытаний с вероятностью близкой к единице, следует ожидать, что относительная частота появления события будет мало отличаться от ее вероятности. Такое утверждение обосновывает так называемый статистический метод определения вероятности. Оказывается, при определенных условиях относительную частоту можно принимать за вероятность события. Нужно только, чтобы было большое число испытаний. Необходимое для этого число испытаний теорема Бернулли позволяет оценить.

Более общая форма закона больших чисел выражается теоремой Чебышева. Эта теорема утверждает, что при достаточно большом числе независимых испытаний с вероятностью, близкой к единице, следует ожидать, что среднее арифметическое из наблюдавшихся значений случайной величины будет мало отличаться от её математического ожидания. Эта теорема, следовательно, отмечает такое свойство средней арифметической, как устойчивость её при большом числе испытаний. Теорема Чебышева обосновывает статистический метод оценки математического ожидания. Среднее арифметическое при большом числе испытаний можно принимать за математическое ожидание случайной величины.

Теорему Ляпунова также можно отнести к закону больших чисел: утверждающаяся этой теоремой закономерность имеет место при большом числе слагаемых. В этом отношении теорема Ляпунова аналогична теоремам Чебышева и Бернулли. Она также имеет большое значение и для практики, ибо определяет условия, при которых формируется нормальное распределение и, следовательно, определяется применимость его в тех или иных случаях.

6.3. Справочный материал

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

Свойства математического ожидания: а) M(C)=C, где

C- const; б) M(CX) = MC(X); в) $M(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ = $=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot\ldots\cdot M(X_n)$, где $X_1, X_2,\ldots, X_n$ – взаимно независимые случайные величины; г) $M(X_1+X_2+\ldots+X_n)$= $=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$.

Математическое ожидание биномиального распределения M(X)=np.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X)=M\,[X-M(X)]^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии: а) D(C)=0, где C- const; б) $D(CX)=C^2D(X)$; в) если $X_1, X_2,\ldots, X_n$ – независимые случайные величины, то $D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)$.

Дисперсия биномиального распределения D(X)=npq.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

где f(x) – плотность распределения случайной величины X. Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a,b), то

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)\,dx.$$

Все свойства математического ожидания, указанные выше для дискретных случайных величин, сохраняются и для

непрерывных величин.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяются равенством:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx,$$

или равносильным равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a,b), то

$$D(X)=\int_{a}^{b}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx,$$

или

$$D(X)=\int_{a}^{b}x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Все свойства дисперсии, указанные выше для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется также, как и для дискретной величины.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

$U(a,b)$ ***Равномерным*** называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения X, плотность сохраняет постоянное значение, а именно

$$f(x)=\frac{1}{b-a};\ \text{вне этого интервала}\quad f(x)=0.$$

$M(X)=\frac{b+a}{2}$ $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

или Гауссовым

$N(a,\sigma)$ ***Нормальным*** называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$M(X)=a \quad D(X)=\sigma^2$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ - среднее квадратичное отклонение X.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β),

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ,

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности, при a = 0 справедливо равенство

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно независимые случайные величины, причём дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+..X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

6.4. Примеры решения типичных задач.

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной следующим законом распределения:

X	1	2
p	0,2	0,8

Решение. Найдём искомое математическое ожидание: $M(X)=x_1p_1+x_2p_2=1\cdot0{,}2+2\cdot0{,}8=1{,}8$.

Запишем закон распределения x^2:

X^2	1^2	2^2
p	0,2	0,8

Найдём математическое ожидание x^2:

$$M(X^2)=x_1^2p_1+x_2^2p_2=1\cdot0{,}2+4\cdot0{,}8=3{,}4.$$

Найдём искомую дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2==3{,}4-(1{,}8)^2=3{,}4-3{,}24=0{,}16.$$

Найдём искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}16}=0{,}4.$$

2. Случайная непрерывная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leq 6,\\ (x-6)^2 & \text{при } 6<x\leq 7,\\ 1 & \text{при } x>7.\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$, математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X).

Решение. Найдем дифференциальную функцию распределения $f(x)$, для чего продифференцируем по x интегральную функцию F(x):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 6, \\ 2(x-6), & 6 < x < 7, \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Заметим, что при x=7 производная F′(x) не существует.

Найдём теперь математическое ожидание случайной величины:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_6^7 x \cdot 2(x-6)dx = 2\int_6^7 (x^2 - 3x)dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_6^7 = 2\left(\frac{127}{3} - 39\right) = 2\cdot\frac{10}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \int_6^7 x^2\cdot 2(x-6)dx - \left(6\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3\right)\Bigg|_6^7 - 44\frac{4}{9} = 44\frac{1}{2} - 44\frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Вычислим среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{2}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{2} \approx 0,236.$$

3. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причём $x_1<x_2$. Найти закон распределения величины X, если известно, что M(X)=1,4, D(X)=0,24 и вероятность p_1 того, что X примет значение x_1, равна 0,6.

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений X равна единице, поэтому вероятность p_2 того, что X примет значение x_2, равна 1-0,6=0,4.

Запишем закон распределения X:

X	x_1	x_2
p	0,6	0,4

Для отыскания x_1 и x_2 составим два уравнения. Учитывая, что по условию, M(X)=1,4 запишем первое из уравнений:

$$0{,}6x_1+0{,}4x_2=1{,}4.$$

Принимаем во внимание, что по условию, D(X)=0,24 и используя формулу:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2,$$

напишем второе уравнение:

$$0{,}24=0{,}6\,x_1^2+0{,}4x_2^2-(1{,}4)^2, \text{ или } 0{,}6\,x_1^2+0{,}4x_2^2=2{,}2.$$

Решив систему уравнений , найдём два решения $x_1=1$, $x_2=2$ и $x'_1=1{,}8$ и $x'_2=0{,}8$. По условию $x_1<x_2$, поэтому задаче удовлетворяет только первое решение. Таким образом, искомый закон распределения имеет вид:

X	1	2
p	0,6	0,4

4. Известны математическое ожидание a=2 и среднее квадратическое отклонение σ=5 нормально распределённой случайной величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α;β)=(4;9).

Решение. При нормальном распределении вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β) равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - функция Лапласа.

Для нашего случая $P(4 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-2}{5}\right) - \Phi\left(\frac{4-2}{5}\right) =$

$$= \Phi(1{,}4) - \Phi(0{,}4) = 0{,}4192 - 0{,}1554 = 0{,}2638.$$

Значения функции Лапласа взяты из приложения 2.

5. Заданы математическое ожидание a=7, среднее квадратическое отклонение σ=3 нормально распределённой случайной величины X. Найти вероятность того, что абсолютная величина |X–a| окажется меньше 3.

Решение. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения |X–a| меньше положительного числа ε равна P(|X–a|<ε)=2Φ(ε/δ).

По условию ε=3, поэтому

P(|X–7|<3)=2Φ(3/3)=2Φ(1)=2·0,3413=0,6826.

6. Известно, что P(|X–M(X)|<ε)≥0,95, D(X)=0,6. Используя неравенство Чебышева, оценить ε.

Решение. По неравенству Чебышева вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-D(X)/\varepsilon^2$, т.е.

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-D(X)/\varepsilon^2,$$

или в эквивалентной форме,

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq D(X)/\varepsilon^2.$$

Так как события {|X–M(X)|<ε} и {|X–M(X)|≥ε)} противоположны, то P(|X–M(X)|≥ε)≤1-0,95=0,05, следовательно, 0,05≤ $D(X)/\varepsilon^2$, откуда $\varepsilon^2\leq 0{,}6/0{,}05=12$, следовательно,

$$\varepsilon \leq \sqrt{12} \approx 3{,}464 .$$

7. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2\sin x, & 0 < x \leq \pi/6, \\ 1, & x > \pi/6. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятности, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение. Найдём плотность распределения вероятностей $f(x)$, для чего продифференцируем по x интегральную функцию F(X):

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 2\cos x, & 0<x<\pi/6, \\ 0, & x>\pi/6. \end{cases}$$

Найдём теперь математическое ожидание случайной величины X

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_0^{\pi/6} x\cdot 2\cos x dx=\left[\begin{array}{c|c} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x \end{array}\right]=$$

$$2\left[x\sin x\Big|_0^{\pi/6}-\int_0^{\pi/6}\sin x dx\right]=2\left[\tfrac{\pi}{6}\sin\tfrac{\pi}{6}+\cos x\Big|_0^{\pi/6}\right]=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}-2.$$

Вычислим дисперсию случайной величины:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^{\pi/6} x^2\cdot 2\cos x dx-\left(\sqrt{3}+\tfrac{\pi}{6}-2\right)^2=\left[\begin{array}{c|c} u=2x^2 & du=4xdx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x \end{array}\right]=$$

$$=2x^2\sin x\Big|_0^{\pi/6}-\int_0^{\pi/6}4x\sin x dx-\left(\sqrt{3}+\tfrac{\pi}{6}-2\right)^2=\left[\begin{array}{c|c} u_1=4x & du_1=4dx \\ dv_1=-\sin x dx & v_1=\cos x \end{array}\right]=2\cdot\frac{\pi^2}{36}\cdot\frac{1}{2}-7-\frac{\pi^2}{36}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot$$

$$=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}+4x\cos x\Big|_0^{\pi/6}-\int_0^{\pi/6}4\cos x dx=4\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}-7-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+4\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-4\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=4\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}-9$$

7.КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

7.1.Требования к выполнению контрольных работ

1. Оформление обложки тетради должно соответствовать образцу:

Контрольная работа
по теории вероятностей
студента II курса, группы…
заочного факультета УГХТУ
……….Ф.И.О……….
шифр………., дата отсылки……..,
Домашний адрес…………………

2. Выполнять контрольные работы необходимо строго по своему варианту, номер которого совпадает с последней цифрой Вашего учебного шифра:

ВАРИАНТ	НОМЕРА ЗАДАНИЙ						
1	1	11	21	31	41	51	61
2	2	12	22	32	42	52	62
3	3	13	23	33	43	53	63
4	4	14	24	34	44	54	64
5	5	15	25	35	45	55	65
6	6	16	26	36	46	56	66
7	7	17	27	37	47	57	67
8	8	18	28	38	48	58	68
9	9	19	29	39	49	59	69
0	10	20	30	40	50	60	70

3. Перед решением каждой задачи нужно полностью переписать её условие, заменив общие данные конкретными из своего варианта.
4. Располагать задачи и их решения следует в порядке возрастания номеров, сохраняя нумерацию.
5. В конце работы (в тексте) нужно поставить дату выполнения работы и личную подпись.
6. К защите не допускаются работы, выполненные
   - небрежно, без необходимых пояснений и рисунков,
   - с существенными ошибками,
   - с изменением условий заданий или не по своему варианту (полностью или частично).
7. Работу, не допущенную к защите, необходимо переделать в соответствии с приведенными выше требованиями и замечаниями рецензента.
8. В конце каждой работы, допущенной к защите, должны быть приведены уточнения и исправления в соответствии с замечаниями рецензента.
9. Каждую работу, допущенную к защите, необходимо защитить в установленном порядке.

10. Студент, не выполнивший или не защитивший контрольную работу, к экзамену не допускается.

7.2.Задания контрольной работы

1. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублём. Найти вероятность того, что вторую также наудачу взятую кость можно приставить к первой.
2. В кошельке лежали три монеты достоинством по 25 коп. и семь монет по две копейки. Наудачу берётся одна монета, а затем извлекается вторая монета, которая оказывается 25 коп. Определить вероятность того, что и первая извлечённая монета имеет достоинство 25 коп.
3. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.
4. Для перевозки n изделий первого типа и m изделий второго типов использовался железнодорожный состав. В пути следования повреждены два изделия. Определить вероятность того, что повреждены изделия различных типов.
5. Из колоды карт в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет два очка, дама – три, король – 4, туз – одиннадцать, а остальные карты соответственно шесть, семь, восемь, девять и десять очков.
6. Из 15 билетов выигрышными являются 4. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу шести билетов будет два выигрышных?
7. В группе из 30 учеников на контрольной работе получили: 6 учеников оценки отлично, 10 учеников оценку хорошо, 9 учеников оценку удовлетворительно. Какова вероятность того, что все 3 ученика, вызванных к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?
8. Трёхзначное число образовано наугад выбранными тремя неповторяющимися цифрами из числа цифр 1, 2, 3, 4, 5. Какова вероятность того, что это число чётное?
9. Автобус должен сделать 8 остановок. Найти вероятность того, что никакие два пассажира из пяти, едущих в автобусе,

не выйдут на одной и той же остановке.

10. В партии из 100 деталей содержится пять бракованных. Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 50 изделий будет хотя бы одно бракованное?
11. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, а на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.
12. Вероятность того, что в результате четырёх независимых опытов событие А произойдёт хотя бы один раз, равна половине. Определить вероятность появления события в каждом опыте, если эта вероятность от опыта к опыту не изменяется.
13. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что четыре наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?
14. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зарегистрировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.
15. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает её наудачу. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в три места.
16. Общество состоящее из 5 мужчин и 10 женщин, наудачу разбивается на 5 групп по три человека. Найти вероятность того, что в каждой группе будет по одному мужчине.
17. Игрок А поочерёдно играет с игроками В и С, имея возможность выигрыша в каждой партии 0,25, и прекращает игру после первого проигрыша или после двух сыгранных партий с каждым игроком. Определить вероятности выигрыша В и С.
18. Для того чтобы сдать коллоквиум, студент должен ответить на два из трёх вопросов, предлагаемых преподавателем.

Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность того, что студент сдаст коллоквиум?

19. В первом ящике 6 шаров: 1 белый, 2 красных и 3 синих. Во втором ящике 12 шаров: 2 белых, 6 красных, 4 синих. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?
20. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,4; 0,5; 0,6 и 0,8.
21. Имеется две партии одинаковых изделий по 12 и 10 штук, причём в каждой партии одно изделие бракованное. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.
22. В тире имеется пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5;0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берёт одно из ружей наудачу.
23. Радиолампа, поставленная в телевизор, может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями $p_1=p_3=0{,}25$, $p_2=0{,}5$. Вероятности того, что лампа проработала заданное число часов для этих партий равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.
24. Определить вероятность того, что 100 лампочек, взятых наудачу из 1000 окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.
25. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также берутся наугад три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

26. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?
27. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый даёт в среднем 0,2% брака, второй – 0,1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго – 3000.
28. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность принятия вызова равна 0,2 для первого вызова, 0,3 для второго вызова, 0,4 для третьего вызова. Найти вероятность установления связи, если события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы.
29. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что первый студент сдаст экзамен, равна 0,95; второй – 0,9; третий – 0,85. Найти вероятность того, что два студента сдадут экзамен.
30. Литьё в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго – 20%. Найти вероятность того, что одна взятая наугад болванка без дефектов.

В задачах 31 – 40 найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится ровно k раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна p.

№ задания	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n	4	4	6	6	8	8	7	7	5	5
k	2	3	5	4	3	2	5	3	4	2
p	0,3	0,2	0,4	0,5	0,5	0,4	0,2	0,6	0,7	0,8

В задачах 41 – 50 найти закон распределения дискретной случайной величины X, которая может принимать только два значения: x_1 с вероятностью p_1 и x_2, причём $x_1 < x_2$. Математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X) также известны.

№ задания	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
p_1	0,9	0,7	0,1	0,2	0,1	0,3	0,5	0,4	0,6	0,8
M(X)	4,1	3,3	5,8	2,6	1,9	3,1	3	2,6	3,2	3,4
D(X)	0,09	0,21	0,36	0,64	0,09	1,89	1	0,24	2,16	0,64

В задачах 51 – 60 случайная величина X задана интегральной функцией F(X). Требуется :
а) найти плотность распределения вероятностей;
б) найти математическое ожидание и дисперсию X;
в) построить графики интегральной и дифференциальной функций.

51.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{при } -1 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

52.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{при } 1 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

53.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

54.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{3}x & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

55.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{4}x & \text{при } 0 \le x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

56.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{5}x & \text{при } 0 \le x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

57.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \sin x & \text{при } 0\le x\le \pi/2, \\ 1 & \text{при } x>\pi/2. \end{cases}$$

58.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\pi/2, \\ \cos x & \text{при } -\pi/2\le x\le 0, \\ 1 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

59.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0\le x\le 2, \in \\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

60.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при } 0\le x\le 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

В заданиях 61 –70. Заданы математическое ожидание a и среднеквадратичное отклонение σ нормально распределённой случайной величины X. Вычислить вероятность того, что

1) X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β);
2) Абсолютное отклонение $|X-a|$ окажется меньше ε.

№ задания	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
a	1	15	8	11	6	14	6	12	16	9
σ	6	4	3	5	2	9	3	8	5	3
α	7	10	6	8	2	11	4	8	13	5
β	15	19	14	17	10	18	16	17	22	14
ε	5	3	7	9	4	8	2	6	10	2

8.Приложения

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

Продолжение прилож.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продолжение прилож. 2

x	Ф(x)	x	Ф(x)	X	Ф(x)	x	Ф(x)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

9.ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1977.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979.
3. Сборник по математике для втузов, ч.3, Теория вероятностей и математическая статистика, п.р. Ефимова, М.: Наука,1990.
4. Вентцель Е.С., Овчаров. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.: Наука, 1988.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кошевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. М.: Высшая школа, 1980.
6. Володин Б.Г., Ганин М.П. и др. Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей. Ленинград. Судпромгиз, 1962.

СОДЕРЖАНИЕ