

1.2

$$u_{xx} + x u_{yy} = 0.$$

$$dy^2 + x dx^2 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-x}$$

1) $x < 0$ - интегрируем.

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-x}$$

$$dy = \pm \int \sqrt{-x} dx = \pm \int (-x)^{1/2} dx =$$

$$= \pm \int (-x)^{1/2} d(-x)$$

$$y = \mp \frac{2}{3} (-x)^{3/2} + C_{1,2}.$$

$$C_1 = y + \frac{2}{3} (-x)^{3/2} = L$$

$$C_2 = y - \frac{2}{3} (-x)^{3/2} = \beta$$

Переходим к новым переменным

$$\begin{array}{cc} & \alpha \\ \downarrow & \downarrow \\ L & \beta \\ \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array}$$

$$u_x = u_\alpha L_x + u_\beta \cdot \beta_x = u_\alpha \cdot (-x)^{1/2} (-1) + u_\beta \cdot (-x)^{1/2},$$

Справочный материал

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F_1(x, y, u,$$

$$u_x, u_y) = 0$$

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0 \quad | : dx^2$$

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$dy = \int \frac{(a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})}{a_{11}} dx$$

1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ - гиперболич. тип

2) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ - параболич. тип

3) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ - эллиптический тип.

Вспомогательная функция, характеристика, канонические



$$u_{\alpha} = [u_{\alpha\alpha}(-(-x)^{1/2}) + u_{\alpha\beta}(-x)^{1/2}] \cdot \boxed{(-x)^{1/2}(-1)} \\ + u_{\alpha\alpha} \frac{1}{2}(-x)^{-1/2} + [u_{\alpha\beta}(-x)^{1/2}(-1) + u_{\beta\beta}(-x)^{1/2}] \cdot \\ \cdot (-x)^{1/2} - 2u_{\beta} \frac{1}{2}(-x)^{-1/2}$$

$$u_{\beta} = u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta} = u_{\alpha} + u_{\beta}$$

$$u_{\beta\beta} = [u_{\alpha\alpha} + u_{\alpha\beta}] + [u_{\beta\alpha} + u_{\beta\beta}]$$

$$-u_{\alpha\alpha}x + x u_{\alpha\beta} + u_{\alpha} \frac{1}{2}(-x)^{-1/2} + x u_{\alpha\beta} - u_{\beta} \frac{1}{2}(-x)^{1/2} + x(u_{\alpha\alpha} + \\ + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}) = 0$$

$$4x u_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} u_{\alpha}(-x)^{-1/2} - \frac{1}{2} u_{\beta}(-x)^{-1/2} = 0$$

$$x = -(-x)$$

$$-2(-x)^{3/2} u_{\alpha\beta} + u_{\alpha} - u_{\beta} = 0$$

$$-8 \cdot \frac{3}{4} (2-\beta) u_{\alpha\beta} + u_{\alpha} - u_{\beta} = 0$$

$$-6(2-\beta) u_{\alpha\beta} + u_{\alpha} - u_{\beta} = 0$$

$$u_{\alpha\beta} = \frac{u_{\alpha} - u_{\beta}}{6(2-\beta)} = 0$$

I 15

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{xx} + 2 \frac{\partial}{\partial y} u_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} u_{yy} = 0 \quad (2)$$

$$y^2 dy^2 - 2xy dx dy + x^2 dx^2$$

$$u_{12}^* = u_{21}^* = \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{2}(-1)$
 $x)^{1/2}$

$(xy)^2 - y^2 x^2 = 0$ - нем разрыв. условием
 безье наравном нуль

$$(y dy - x dx)^2 = 0$$

$$y dy - x dx = 0$$

$$y dy = x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2 - x^2}{2}$$

$$\frac{y^2 - x^2}{2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x^2 y^2 = \beta^2 - \alpha^2$$

$$u_x = u_x(-x) + u_p x$$

$$u_y = u_y y + u_p y$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = [u_{xx}(-x) + u_{xp} x] \cdot (-x) - u_x + [u_{px}(-x) + u_{pp} x] x + u_p$$

$$u_{yy} = [u_{xy} y + u_{py} y] y + u_y \cdot [u_{py} y + u_{pp} y] y + u_p$$

$$u_{xy} = [u_{xy} y + u_{py} y] \cdot (-x) + [u_{py} y + u_{pp} y] x$$

логарифмируем в (1):

$$y^2 (x^2 u_{xx} - 2x^2 u_{xp} + x^2 u_{pp} - u_x - u_p) + 2xy [-xy u_{xx} +$$

$$+ xy u_{pp}] + x^2 (y^2 u_{xx} + 2xy u_{xp} + y^2 u_{pp} + u_x + u_p) = 0$$

$$4x^2 y^2 u_{pp} - y^2 u_x + y^2 u_p + x^2 u_x + x^2 u_p = 0$$

$$u_x (-x) + u_p x + 4x^2 y^2 u_{pp} = 0$$

$$-x u_x + \beta u_p + 2(\beta^2 - x^2) u_{pp} = 0$$

$$u_{pp} = \frac{x u_x - \beta u_p}{2(\beta^2 - x^2)} = 0$$

19.11 I.22

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 6u_y + u = 0.$$

Введем $u(x, y) = e^{\alpha x + \beta y} \cdot v(x, y).$

$$2dy^2 - 2dx dy + dx^2 = 0.$$

$$A_{12} - A_{21}A_{22} = 1 - 2 = -1 < 0 - \text{замкнул. мн.}$$

$$2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial y}{\partial x} + 1 = 0.$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

$$y = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\right)x + C$$

$$\xi = C_1 = y - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)x$$

$$\eta = C_2 = y - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)x.$$

Переходим к новым переменным (не имеем знан. от ξ или от η)

$$\xi = \operatorname{Re} \xi = y - \frac{1}{2}x$$

$$\theta = \operatorname{Im} \xi = \frac{1}{2}x$$

$$u_x = u_{\xi} \xi_x + u_{\theta} \theta_x = -\frac{1}{2}u_{\xi} + \frac{1}{2}u_{\theta};$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{2}(u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\theta} \theta_x) + \frac{1}{2}(u_{\theta\xi} \xi_x + u_{\theta\theta} \theta_x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u_{\xi\xi} + \frac{1}{2}u_{\xi\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u_{\theta\xi} + \frac{1}{2}u_{\theta\theta}\right);$$

$$u_y = u_{\xi} \xi_y = u_{\xi}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

$$u_{yx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\theta} \theta_x = -\frac{1}{2}u_{\xi\xi} + \frac{1}{2}u_{\xi\theta}$$

$$2\left(\frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{2}u_{xt} + \frac{1}{4}u_{tt}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}u_{xt} + \frac{1}{2}u_{tt}\right) + u_{xx} + 4\left(-\frac{1}{2}u_{xt} + \frac{1}{2}u_{tt}\right) + 6u_t + u = 0.$$

$$\frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}u_{tt} + 4u_t + 2u = 0.$$

$$u_{xx} + u_{tt} + 8u_t + 4u = 0.$$

$$u(x, t) = e^{Lx + \beta t} \cdot V(x, t).$$

$$u_x = L \exp V + V_x \exp.$$

$$u_{xx} = L^2 \exp V + 2L V_x \exp + V_{xx} \exp.$$

$$u_t = \beta \exp V + V_t \exp.$$

$$u_{tt} = \beta^2 \exp V + 2\beta V_t \exp + V_{tt} \exp.$$

$$L^2 \exp \cdot V + 2L V_x \exp + V_{xx} \exp + \beta^2 \exp V + 2\beta V_t \exp + V_{tt} \exp + 8(L \exp V + V_t \exp) + 4(\beta \exp V + V_t \exp) + \exp V = 0$$

$$V_{xx} + V_{tt} + V_x \underbrace{(2L+8)}_0 + V_t \underbrace{(2\beta+4)}_0 + V(L^2 + \beta^2 + 8L + 4\beta + 2) = 0.$$

$$L = -4$$

$$\beta = -2$$

$$V_{xx} + V_{tt} - 18V = 0.$$

Метод Даламбера - (метод разделения переменных) 19.09.11.

решение волнового ур-я на бесконечности.

числ. определять $u(x, t)$.

$$\partial^2 u_{xx} = u_{tt}.$$

начальн. ур-я:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} - \text{скорость.}$$

a - const, определяющая скорость распространения волны в определенной (среде) среде.

$\Psi(x)$ - профиль скорости.

$$a^2 dt^2 = dx^2$$

$$\frac{dx}{dt} = a \int \Rightarrow x = \pm at + C_{1,2}$$

$$C_1 = x + at = L$$

$$C_2 = x - at = \beta$$

$$u_{kp} = 0.$$

$$u = f(L) + g(\beta).$$

Вернемся к переменным x и t :

$$u(x, t) = f(x+at) + g(x-at).$$

Подставим в систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \Psi(x) \\ f'(x) \cdot a + g'(\beta) \cdot (-a) = \Psi'(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x) + g''(\beta) = \Psi''(x) \\ f''(x) - g''(\beta) = \Psi''(x) \end{cases}$$

так как L , β и x взаимно независимы

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Psi(x+at) + \Psi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi$$

Формула Даламбера

II. 55.

$-c \leq x \leq c$, все отрезки $v=0$.

$$v_0 = \text{const}$$

$$t_k = \frac{ck}{4a}; \quad k=0, 2, 4, 6.$$

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < -c, \\ v_0, & -c \leq x \leq c, \\ 0, & x > c; \end{cases} \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi. \quad \text{Находим первообразную:}$$

$$F(x) = \int \Psi(x) dx = \begin{cases} c_1, & x < -c, \\ v_0 x + c_2, & -c \leq x \leq c, \\ c_3, & x > c; \end{cases}$$

$c_2 = C$; — общая константа.

$$\lim_{x \rightarrow c-0} C = \lim_{x \rightarrow c+0} (v_0 x + c_2);$$

$$C = v_0 c + c_2.$$

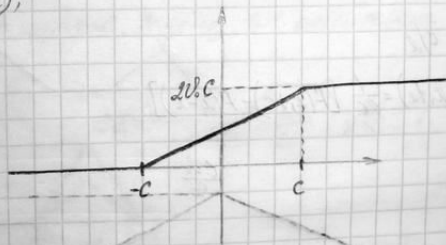
$$c_2 = C - v_0 c.$$

$$\lim_{x \rightarrow c-0} v_0 x + c_2 = \lim_{x \rightarrow c+0} c_3$$

$$c_3 = v_0 c + C + v_0 c.$$

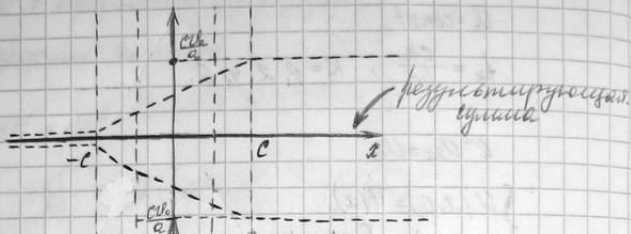
$$c_3 = C + 2v_0 c.$$

$$F(x) = \begin{cases} C, & x < -c, \\ v_0(x+c) + C, & -c \leq x \leq c, \\ C + 2v_0 c, & x > c; \end{cases}$$

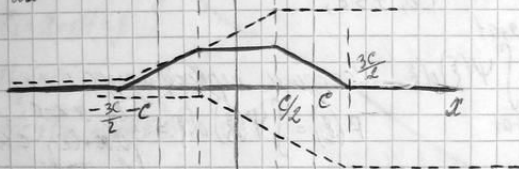


$$u(x, t) = \frac{1}{2a} [F(x+at) - F(x-at)]$$

$$t=0$$



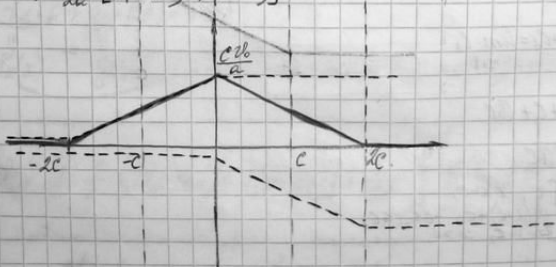
$$t_1 = \frac{c}{2a}$$



$$u(x, t_1) = \frac{1}{2a} \left[F\left(x + \frac{c}{2}\right) - F\left(x - \frac{c}{2}\right) \right]$$

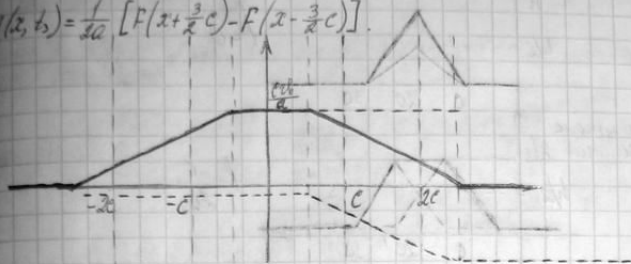
$$t_2 = \frac{c}{2a}$$

$$u(x, t_2) = \frac{1}{2a} [F(x+c) - F(x-c)]$$



$$t_1 = \frac{3c}{2a}$$

$$u(x, t_1) = \frac{1}{2a} \left[F\left(x + \frac{3}{2}c\right) - F\left(x - \frac{3}{2}c\right) \right]$$



Для полубесконечной струны:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases}$$

гранич. усл-я $u(0, t) \rightarrow$ край закреплён: $u(0, t) = 0$ (нат. усл-я пред. ставятся нечётными образом).
 $u_t(0, t) \rightarrow$ край свободен: $u_t(0, t) = 0$. (нат. усл-я пред. ставятся чётными образом).

II.59 закреплённая струна, задано нач. отклонение.

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

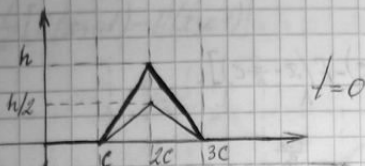
$$u(x, 0) :$$



$$u_t(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = 0.$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]$$

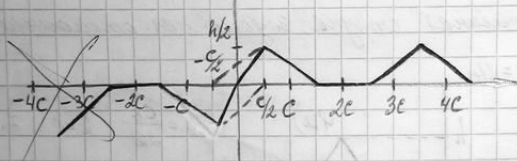


принятая
машинка $h/2$



Слева также не рисуют только Aug.

Интересен этот переход



Отражение происходит в противофазе.

Д/з. II. 52
II. 54.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

26.09.1

Если в этом уравнении отсутствует $f(x, t)$, то такое уравнение - однородное.

кач. усл-я $\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases}$ $\begin{cases} \text{I край.} \\ \text{зад-я} \end{cases} \begin{cases} u(0, t) = \nu(t), \\ u(l, t) = \mu(t), \end{cases} \begin{cases} \text{I край.} \\ \text{зад-я} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{частный случай} \\ \text{когда закреплены концы} \\ \text{задан закон дви-я} \\ \text{концов.} \end{cases}$ Если $\nu(t)$ и $\mu(t)$ равны 0 - гранич. усл-я однородны. (на концы задано значение u)

I край. задан $\begin{cases} u_x(0, t) = \nu(t), \\ u_x(l, t) = \mu(t), \end{cases} \begin{cases} \text{свободные} \\ \text{концы} \end{cases}$

III край. задан $\begin{cases} u(0, t) + \alpha \cdot u_x(0, t) = \nu(t) \\ u(l, t) + \beta \cdot u_x(l, t) = \mu(t) \end{cases}$ - упругое закрепление (оба упруго закреплены)

II.83 концы струны закреплены жестко. Начальное отклонение задано соотношением $u(x, 0) = A \sin(\frac{\pi x}{l})$.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0; \end{cases} \text{ - однородная I край. заданная}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = A \sin(\frac{\pi x}{l}), \\ u_t(x, 0) = 0; \end{cases}$$

Решаем методом Фурье (разделение переменных).

Предполагаем, что $u(x, t) = X(x)T(t)$ - возможно только в случае однородности.

Подставляем в исходное уравнение:

$$X T'' = a^2 X'' T \quad | \quad a^2 X T$$

$$\frac{T''}{\lambda^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda = \text{const}$$

зависит только от X

зависит только от T

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T'' + \lambda^2 T = 0; \end{cases}$$

Подставляем в нач. усл-я:

$$\begin{cases} X(0) \cdot T(t) = 0, \\ X(l) \cdot T(t) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} T(t) \text{ не может } = 0, \text{ так как} \\ \text{указано бы } u(x, t) = 0! \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0, \\ X(l) = 0; \end{cases}$$

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Рассмотрим 3 случая:

$$\lambda < 0$$

$$X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{|\lambda|}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|}x};$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}l} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}l} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|}l} & e^{-\sqrt{|\lambda|}l} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{|\lambda|}l} - e^{-\sqrt{|\lambda|}l} \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{matrix}$$

$$\lambda = 0$$

$$X'' = 0; \quad X' = C_1; \quad X = x C_1 + C_2;$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow C_1, C_2 = 0;$$

Для $\lambda < 0$ и $\lambda = 0$ нет нетривиальных решений.

$$\lambda > 0$$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0, \end{cases}$$

$$C_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0, \text{ искомый ненулевой процесс. Тогда}$$

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0;$$

$$\sqrt{\lambda} l = \pi k,$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$X_k(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

$$C_1 = 1$$

$$\|X_k\|^2 = 1. \quad - \text{нормированная базиса.}$$

$$\text{Нормировка: } \|X_k\|^2 = \int_0^l C_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = C_1^2 \int_0^l \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{l} x\right)}{2} dx =$$

$$= C_1^2 \left(\frac{1}{2} l - \frac{l}{\pi k} (\sin \frac{\pi k}{l} l - \sin 0)\right) = C_1^2 \frac{l}{2} = 1. \Rightarrow C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$$\lambda = 0$$

$$X(x) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

Ищем

$$\text{Находим решение } T(t): T_k'' + \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T_k = 0.$$

$$T_k(t) = D_k \sin\left(\frac{\pi k a}{l} t\right) + D_2 \cos\left(\frac{\pi k a}{l} t\right)$$

$$\text{III часть: } u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \cdot T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \left[D_k \sin\left(\frac{\pi k a}{l} t\right) + D_2 \cos\left(\frac{\pi k a}{l} t\right) \right].$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \cdot D_k = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \\ u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \cdot D_k \cdot \frac{\pi k a}{l} = 0; \end{cases}$$

$$D_{2k} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, \infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{По Рунге} \\ \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot \varphi_k(x) \Rightarrow D_k = \frac{(\varphi(x), \varphi_k(x))}{\|\varphi_k(x)\|^2} \end{array} \right\}$$

$$D_{2k} = \int_0^l A \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k}{l} x \, dx.$$

$$D_{2k} = \delta_{2k}$$

$$D_{2k} = \delta_{2k} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\sqrt{\frac{2}{l}}} \int_0^l A \sin \frac{\pi x}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k}{l} x \, dx = \delta_{2k} \cdot \frac{A}{\sqrt{\frac{2}{l}}} = \sqrt{\frac{l}{2}} A \delta_{2k}$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x}{l} \sqrt{\frac{l}{2}} A \cos\left(\frac{\pi a}{l} t\right) = \boxed{A \sin \frac{\pi x}{l} \cos\left(\frac{\pi a}{l} t\right)}$$

Ответ

10.11. III.2.5

Найти тем-ру стержня длиной l .

Имеется температурное распределение в стержне.

Решить ур-е теплопроводности.

$u_t = a^2 u_{xx}$, где a - коэф-т температуропров-ти;
 u - тем-ра, начальная ф-ция.

II крайная задача: $\begin{cases} u_x(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0, \end{cases}$ - гранич. усл.

$$u(x, 0) = x(1-x) - \text{парабола, вершина } x=0.5; \quad 0 \leq x \leq l$$

Решение: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t);$

$$XT' = a^2 X''T \quad | : a^2 XT$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda = \text{const}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + \lambda a^2 T = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0; \end{cases}$$

1) $\lambda < 0$

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x};$$

$$X'(x) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} \sqrt{|\lambda|} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x} \cdot (-1) \sqrt{|\lambda|};$$

$$X'(0) = C_1 \sqrt{|\lambda|} - C_2 \sqrt{|\lambda|} = 0.$$

$$X'(l) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}l} \sqrt{|\lambda|} - C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}l} \sqrt{|\lambda|} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{|\lambda|} & -\sqrt{|\lambda|} \\ \sqrt{|\lambda|} e^{\sqrt{|\lambda|}l} & -\sqrt{|\lambda|} e^{-\sqrt{|\lambda|}l} \end{vmatrix} = -|\lambda| \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|}l} + |\lambda| e^{\sqrt{|\lambda|}l} \neq 0.$$

2) $\lambda = 0$

$$X'' = 0; \quad X' = C_1$$

$$X = C_1 x + C_2.$$

$$\begin{cases} X'(0) = C_1 = 0, \\ X'(l) = C_1 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_0 = \text{const.}$$

$$\|X_0\|^2 = \int_0^l c^2 dx = l = c^2 l. \quad - \text{нормировка.}$$

$$c = \pm \sqrt{l}, \quad X_0(x) = \sqrt{l},$$

3) $\lambda > 0$.

$$X(x) = d_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + d_2 \cos(\sqrt{\lambda} x),$$

$$X'(x) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) \sqrt{\lambda} - d_2 \sin(\sqrt{\lambda} x) \sqrt{\lambda},$$

$$\begin{cases} X'(0) = d_1 \sqrt{\lambda} = 0, \Rightarrow d_1 = 0; \\ X'(l) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) \sqrt{\lambda} - d_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) \sqrt{\lambda} = 0; \end{cases}$$

$$-d_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) \sqrt{\lambda} = 0. \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0;$$

$$\sqrt{\lambda} l = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$X(x) = d_2 n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

$$\|X_n\|^2 = l \Rightarrow d_2 n = \sqrt{\frac{l}{n}};$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{l}{n}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

II часть.

$$T_n' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0. \Rightarrow T_0' = 0.$$

$$T_0 = b_0 - \text{каждый коэффициент}$$

$$T_n = b_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t}$$

III часть.

$$u(x, t) = X_0 \cdot T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t).$$

$$u(x,0) = \sqrt{\frac{l}{l}} b + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{\frac{l}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = x(l-x).$$

$$b = \frac{(X_0, \varphi(x))}{\|X_0\|^2} = \int_0^l \sqrt{\frac{l}{l}} x(l-x) dx = \frac{x^2 l}{2} \sqrt{\frac{l}{l}} \Big|_0^l - \frac{x^3}{3} \sqrt{\frac{l}{l}} \Big|_0^l =$$

$$= \frac{l^3}{2} \sqrt{\frac{l}{l}} - \frac{l^3}{3} \sqrt{\frac{l}{l}} = \frac{l^3}{6} \sqrt{\frac{l}{l}}$$

$$b_n = \frac{(X_n, \varphi(x))}{\|X_n\|^2} = \int_0^l \sqrt{\frac{l}{l}} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cdot x(l-x) dx.$$

II. 85 (упрощенная III краевая задача).

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) + h u(l,t) = 0; \end{cases}$$

Нач. усл-я

$$\begin{cases} u(x,0) = A \cdot x, \\ u_t(x,0) = 0; \end{cases}$$

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda = \text{const.}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T'' + \lambda a^2 T = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} X(0) = 0, \\ X'(l) + h X(l) = 0; \end{cases}$$

Рассматриваем сразу случай $\lambda > 0$.

$$X = D_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + D_2 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

$$\begin{cases} 0 = D_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda} (-D_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) + D_2 \cos(\sqrt{\lambda} l) + h (D_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + D_2 \sin(\sqrt{\lambda} l)) \\ \sqrt{\lambda} D_2 \cos(\sqrt{\lambda} l) + h D_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0, \quad D_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$\tan(\underbrace{\sqrt{\lambda} l}_x) = -\frac{h}{\sqrt{\lambda}} \quad ; \quad \tan x = -\frac{h l}{x} \Rightarrow x_n = \mu_n$$

$$\sqrt{\lambda_n} l = \mu_n$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2$$

$$X_n = D_{2n} \sin\left(\frac{\mu_n}{l} x\right)$$

$$\|X\|^2 = 1 = \int_0^l D_{2n}^2 \sin^2\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) dx = D_{2n}^2 \int_0^l \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\mu_n}{l} x\right) \right) dx =$$

$$= D_{2n}^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_n} \sin(2\mu_n) \right) \Rightarrow D_{2n}^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_n} \cdot \frac{2 \tan(\mu_n)}{1 + \tan^2(\mu_n)} \right) =$$

$$\sin(\mu_n) = \frac{2 \tan \mu_n}{1 + \tan^2 \mu_n} = D_{2n}^2 \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2\mu_n} \cdot \frac{2 h l / \mu_n}{1 + \left(\frac{h l}{\mu_n} \right)^2} \right) = 1.$$

$$D_{2n} = \dots$$

$$T_n'' + \lambda_n^2 T_n = 0.$$

$$T_n = B_n \cos(\sqrt{\lambda_n} a t) + C_n \sin(\sqrt{\lambda_n} a t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \sin\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) \cdot [B_n \cos\left(\frac{\mu_n}{l} a t\right) + C_n \sin\left(\frac{\mu_n}{l} a t\right)]$$

$$+ B_n \sin\left(\frac{\mu_n}{l} a t\right)]$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_n X_n(x) \cdot B_n = Ax, \\ u_x(x, 0) = \sum_n X_n B_n \frac{\mu_n}{l} = 0; \Rightarrow B_n = 0. \end{cases}$$

$$B_n = \frac{(X_n(x), Ax)}{\|X\|^2} = \int_0^l D_n \sin\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) Ax dx =$$

$$= A D_n \int_0^l \sin\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) x dx = -A D_n \frac{l}{\mu_n} \int_0^l x d\cos\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) = x \cos\frac{\mu_n x}{l} \Big|_0^l -$$

$$- \int_0^l \cos\frac{\mu_n x}{l} dx = -A D_n \frac{l}{\mu_n} \left[l \cos(\mu_n) - \frac{l}{\mu_n} \sin(\mu_n) \right]$$

D/3. $\begin{matrix} \text{II} - 104. \\ \text{III} - 25 \end{matrix}$

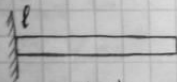
$\begin{matrix} \text{II} - 99 \\ \text{III} - 22 \end{matrix}$

Гомогенные задачи.

II. 147

Определите программу нахождения отрезков функции f , если найти которую заперем интервал $\in$ и проблемы применения смысла $F(t) = k \cdot t$.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$



$$u(0, t) = 0$$

$$u_x(l, t) = \frac{k \cdot t}{ES} = \beta t.$$

$$F(t) = k t$$

$$F = E \cdot S \cdot u_x = k t, \text{ где } E - \text{модуль Юнга.}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0; \end{cases}$$

$$v_x(l, t) = u_x(l, t) - \beta t$$

$$v_x(x, t) = u_x(x, t) - \beta t$$

$$v(x, t) = u(x, t) - \beta t x + c(t).$$

$$\underbrace{v(c, t)}_0 = \underbrace{u(c, t)}_0 + c(t) \Rightarrow c(t) = 0.$$

$$u(x, t) = v(x, t) + \beta x t$$

Laurenz formen: $u_{tt} = v_{tt}$ u $u_{xx} = v_{xx}$.

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

$$\begin{cases} v(c, t) = 0, \\ v_x(l, t) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v(x, 0) = u(x, 0) = 0, \\ v_x(x, 0) = -\beta k \end{cases}$$

$$v = X(x) \cdot T(t) \Rightarrow$$

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 T(t) X'(x).$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

$$\begin{cases} X' + \lambda X = 0, \\ T'' + a^2 \lambda T = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(0) \cdot T(t) = 0, \\ X'(l) \cdot T(t) = 0; \end{cases}$$

$$\text{I } \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) = 0; \end{cases}$$

$$\lambda = 0$$

$$X = C_1 x + C_2 ; \quad C_2 = 0 ; \\ C_1 = 0.$$

$$\lambda > 0$$

$$X = A_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad A_2 = 0.$$

$$X' = A_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0 ; \quad \cos \sqrt{\lambda} l = 0 ; \quad \sqrt{\lambda} l = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\lambda_n = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2}{l^2} = \left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}\right)^2$$

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi(1+2n)x}{2l}\right)$$

$$T'' + \omega^2 T = 0.$$

$$T_n'' + \omega^2 \left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}\right)^2 T_n = 0.$$

$$T_n = B_n \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} \omega t\right) + B_{2n} \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} \omega t\right)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t), \quad B_{2n} = 0.$$

$$v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot B_n = 0.$$

$$v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot B_n \cdot \frac{\omega \pi(1+2n)}{2l} = -\beta x$$

$$B_n = \frac{(X_n, (-\beta x))}{\|X_n\|^2} \cdot \frac{2l}{\omega \pi(1+2n)},$$

$$B_{2n} = \frac{-2l \beta}{\omega \pi(1+2n)} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) x dx = -L \frac{2l}{\pi(1+2n)} \int_0^1 x d\left(\sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) =$$

$$= 2 \frac{2l}{\pi(1+2n)} \left[x \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) \right]_0^l + \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) \cdot \frac{2l}{\pi(1+2n)} \left[\right]_0^l =$$

$$= \frac{2l}{\pi(1+2n)} \left[l \cdot (-1)^n - \frac{2l}{\pi(1+2n)} \right]$$

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) \cdot \left(\frac{2l}{\pi(1+2n)}\right)^2 \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \left[(-1)^n - \frac{2}{\pi(1+2n)}\right] \cdot$$

$$\cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}at\right).$$

№128 Найти тем-ру стержня длиной l с теплоизмер.
концами, если бы не было

U - тем-ра в данной точке.

$$l, U_1 = a^2 U_{xx}$$

$$U_x(0, t) = 0.$$

$$q = \lambda \cdot S \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \text{постоянный тепловой поток.}$$

$$\lambda S U_x(l, t) = q_0.$$

$$U_x(l, t) = \frac{q_0}{\lambda S} = Q$$

$$U(x, 0) = 0.$$

Введем новую функцию $U(x, t) \rightarrow v(x, t)$.

$$U_x(x, t) = v_x(x, t) + (Ax + B) \cdot Q$$

$$U_x(0, t) = v_x(0, t) + B \cdot Q \Rightarrow B \cdot Q = 0 \Rightarrow B = 0.$$

$$\underbrace{U_x(l, t)}_Q = \underbrace{v_x(l, t)}_{0 - \text{хотим!}} + (Al + B) \cdot Q$$

$$AlQ = Q \Rightarrow Al = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{l} \Rightarrow U(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} \cdot Q \int dx$$

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x^2}{2l} Q + C(t)$$

$$u_t = v_t(x, t) + C'(t)$$

$$u_{xx} = v_{xx}(x, t) + \frac{Q}{l}$$

$$v_t(x, t) + C'(t) = a^2 v_{xx}(x, t) + \frac{Q}{l} a^2 \Rightarrow C'(t) = \frac{Q}{l} a^2 \Rightarrow C(t) = \frac{Q}{l} a^2 t$$

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x^2}{2l} Q + \frac{Q}{l} a^2 t$$

$$v_t = a^2 v_{xx}$$

$$\begin{cases} v(x, t) = 0, \text{ ГРАН.} \\ v(x, t) = 0, \text{ УСЛ.} \end{cases}$$

$$v(x, 0) = -\frac{x^2}{2l} = 0. - \text{НАЧ. УСЛ.}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x_0 = \frac{l}{\sqrt{l}}$$

$$T_n' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right]$$

$$T_0 = A_0$$

$$v(x, t) = A_0 x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$\text{Используя из формулы } v(x, 0) = A_0 x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) A_n = -\frac{x^2}{2l} Q$$

$$A_0 = \frac{\left(-\frac{x^2}{2l} Q, x_0\right)}{\|X_0\|^2} = -\int_0^l \frac{x^2}{2l} Q \cdot \sqrt{\frac{1}{l}} dx = -\frac{Q}{2l^{3/2}} \cdot \frac{l^3}{3} = -\frac{Q l^{3/2}}{6}$$

$$A_n = -\int_0^l \frac{x^2}{2l} Q \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = Q \sqrt{\frac{2}{l}} (-1)^{n+1} \left(\frac{l}{\pi n}\right)^2$$

17.10.11

Несогласные уравнения

- III. 33 Найти распр-е тем-ры в стержне длиной l с температурной функцией $\varphi(x)$ (температура на левом конце $x=0$ задана), если на его конце $x=l$ задана тем-ра $T=0$, а на конце $x=0$ тем-ра меняется по лог. закону Lt . Начальн. тем-ра стержня $= 0$.

$$U_t = a^2 U_{xx}$$

$$\text{ГРАН. УСЛ-Я} \begin{cases} U(0, t) = 0 \\ U(l, t) = Lt \end{cases}$$

$$U(x, 0) = 0.$$

Делаем замену $U(x, t) = V(x, t) + (Ax + B) \cdot Lt$. и подставляем в ГРАН. УСЛ-Я: $U(0, t) = \underbrace{V(0, t)}_0 + B \cdot Lt = 0 \Rightarrow B = 0.$

$$U(l, t) = \underbrace{V(l, t)}_0 + \underbrace{Al \cdot Lt}_{Al \cdot Lt = Lt} = Lt$$

$$A = \frac{1}{l};$$

$$U(x, t) = V(x, t) + \frac{x}{l} \cdot Lt$$

или производную.

$$U_t + \frac{L}{l} \cdot x = a^2 U_{xx};$$

Найдём нач. УСЛ-Я. Подставим вместо $t=0$:

$$U(x, 0) = V(x, 0) = 0.$$

Эта задача так же несогласна $\Rightarrow$ не решается.

Делаем следующ. замену: $V(x, t) = W(x, t) + h(x)$

$$W_t + \frac{L}{l} \cdot x = a^2 (W_{xx} + h'')$$

★ Требуем, чтобы для h -ции

2. упр-е: $\omega = \omega'' + h(x)$ и $\frac{d^2 x}{dt^2} = h''(x)$ (используем h ,
 имеем еще упр-е: $\omega = \omega'' + h(x)$ при выборе $h(x)$

$$\omega(0, t) = \omega(0, t) + h(0) = 0;$$

$$\omega(l, t) = \omega(l, t) + h(l) = 0;$$

$$\omega(x, 0) = \omega(x, 0) + h(x) = 0,$$

$$\omega(x, 0) = -h(x).$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = h(x).$$

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} + C_1 = h'(x).$$

$$\frac{d^2 x^3}{dt^2} + C_2 x + C_3 = h(x).$$

$$h(0) = C_2 = 0.$$

$$h(l) = \frac{d^2 l^2}{dt^2} + C_1 l = 0.$$

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = C_1.$$

$$h(x) = \frac{d^2 x^3}{dt^2} - \frac{d^2 l x}{dt^2} = \frac{d^2 l x}{dt^2} \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right)$$

$$\omega(x, t) = X(x) + T(t).$$

$$X \cdot T' = a^2 X'' \cdot T(t).$$

$$\frac{X \cdot T'}{a^2 X T} = \frac{a^2 X'' T(t)}{a^2 X T}$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda - \text{const.}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{T'}{a^2 T} &= -\lambda, \\ \frac{X''}{X} &= -\lambda; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0, \\ X'' + \lambda X = 0, \end{cases}$$

$$\lambda < 0 \text{ не имеет решений;}$$

$$\lambda > 0 \text{ тоже}$$

$$\lambda = 0 \text{ имеет}$$

$$1) \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, n \in \mathbb{Z}$$

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l};$$

$$T_n' + \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 T_n = 0.$$

$$T_n = C_n \cdot \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot t \right]$$

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot C_n \cdot \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot t \right]$$

$$W(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot C_n = \frac{L l x}{6 a^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$C_n = \int_0^l \frac{L l x}{6 a^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \dots$$

$$u(x, t) = \frac{x L t}{l} - \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right) \frac{L l x}{6 a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} \ln \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right]$$

II. 206.

$$u_t = a^2 u_{xx} + A e^{-\lambda t} \cos \frac{\pi x}{2l}$$

ГРАН. $\begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \end{cases}$ НАЧ. $u(x, 0) = 0$.

Решение неоднородного ур-я есть решение однород-ного + частное решение этого ур-я:

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = X(x)T(t), \\ T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0, \end{cases}$$

$$X'(0) = 0; \quad X(l) = 0.$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = x l_1 + l_2,$$

$$X' = l_1 = 0.$$

$$X = l_1 l + l_2 = 0.$$

$$\lambda > 0$$

$$X(x) = b_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + b_2 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

$$b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = 0.$$

$$b_2 = 0$$

$$b_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0; \quad b_1 \neq 0$$

$$\sqrt{\lambda} l = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} \right)^2;$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x \right).$$

$$u(x, t) = v(x, t) + ke^{-\lambda t} \cos \frac{\pi x}{2l}$$

$$v(x, t) - \lambda ke^{-\lambda t} \cos \frac{\pi x}{2l} = a^2 (v_{xx}(x, t) - \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 ke^{-\lambda t} \cos \left(\frac{\pi x}{2l}\right)) + Ae^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} \\ \text{ГРАН. УСЛ-Я} \quad \begin{cases} v_x(0, t) = 0, \\ v(l, t) = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{НАЧ.: } v(x, 0) = -\frac{A}{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 - \lambda}$$

$$-2 \cos \left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

$$\begin{aligned} -\lambda ke^{-\lambda t} \cos \left(\frac{\pi x}{2l}\right) &= a^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 ke^{-\lambda t} \cos \left(\frac{\pi x}{2l}\right) + a^2 Ae^{-\lambda t} \cos \left(\frac{\pi x}{2l}\right) \\ -\lambda k &= -\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 k + A \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= \frac{A}{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 - \lambda} \end{aligned}$$

$$v(x, 0) + \frac{A}{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 - \lambda} e^{-\lambda \cdot 0} \cos \left(\frac{\pi x}{2l}\right) = 0$$

$$v(x, 0) = -\frac{A}{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 - \lambda} \cos \left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

Допишите

4.10.11

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$ - волновое ур-е, которое описывает колебательные процессы.

$u(x, t)$ - смещение точки струны с координаты x в t

I крайняя задача

Концы зафиксированы жестко

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0; \end{cases}$$

концы движ-ся по определенному закону

$$\begin{cases} u(0, t) = V(t), \\ u(l, t) = U(t); \end{cases} \quad \text{НЕ АВНОРОВА}$$

$u(x, t)$

II краевая задача

$$+ A \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

свободные края

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) = 0; \end{cases}$$

на концах действ.
определенная F

$$\begin{cases} u_x(0, t) = V(t), \\ u_x(l, t) = M(t); \end{cases}$$

интегральные
записи.

$$u_x(x, t) = v_x(x, t) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) V(t) + \frac{x}{l} M(t) \int dx$$

$$u(x, t) = v(x, t) + \left(x - \frac{x^2}{2l}\right) V(t) + \frac{x^2}{2l} M(t) + \frac{x^3}{6l^2} V(t)$$

III краевая задача

упругое закрепление

$$\begin{cases} u(0, t) + \alpha u_x(0, t) = 0, \\ u(l, t) + \beta u_x(l, t) = 0; \end{cases}$$

$$F = E \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$u_t = \kappa^2 u_{xx}$ - ур-е теплопроводности
(и теплоизлучательная бок. пов-ть - однород. ур-е).

$u(x, t)$ - тем-ра стержня в т. x в t .

I краевая

края поддержив-ся
при 0-й тем-ре

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0; \end{cases}$$

на краях
поддерж-ся тем-ра,
заданная по опред. закону

$$\begin{cases} u(0, t) = V(t), \\ u(l, t) = M(t); \end{cases}$$

$$u(x, t) = v(x, t) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) V(t) + \frac{x}{l} M(t)$$

II крайная

края температурованы,
концы темп. = 0.

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) = 0, \end{cases}$$

на края подается
отведен. температурой
ноток

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \nu(t), \\ u_x(l, t) = \mu(t), \end{cases}$$

III крайная

на краях происходит
(коллективный) теплообмен
со средой по закону Ньютона

$$\begin{cases} u(0, t) + \alpha u_x(0, t) = \nu(t) = 0, \\ u(l, t) + \beta u_x(l, t) = \mu(t) = 0 \end{cases}$$

$$q = \alpha \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

↑
коэф-т теплопроводности

N III.

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \tau_1 - \text{ГРАН.} \\ u(l, t) = \tau_2 - \text{УСЛ-Я} \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \tau_0 - \text{НАЧ. УСЛ-Е}$$

I крайная неоднородная задача

1) Замена: $u(x, t) = v(x, t) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\tau_1 + \frac{x}{l}\tau_2$

$$\begin{cases} v(0, t) = 0, & \text{ОДНОРОД.} \\ v(l, t) = 0, & \text{ГРАН. УСЛ-Я} \end{cases}$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\tau_1 + \frac{x}{l}\tau_2 = \tau_0 \Rightarrow$$

$$v(x, 0) = \tau_0 - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\tau_1 - \frac{x}{l}\tau_2.$$

$$v_i = a^2 v_{xx}$$

2) Разделим переменные.

$$v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$X T' = a^2 T X'' \quad - \text{разделим обе части на } a^2 X T$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + a^2 \lambda T = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + a^2 \lambda T = 0, \end{cases}$$

3) $X'' + \lambda X = 0$ ←

$$\begin{cases} v(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0; \\ X(l) = 0; \end{cases} \begin{matrix} \text{Доп} \\ \text{усл-я к} \end{matrix} \end{cases}$$

$\lambda > 0$ (I краевая).

$$X = A \sin(\sqrt{\lambda} x) + B \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$X(0) = B = 0,$$

$$X(l) = A \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0.$$

$$\sqrt{\lambda} l = \pi n \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \quad - \text{собственные значения}, n \in \mathbb{Z}$$

$$X_n = A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right); \quad A_n = \sqrt{\frac{l}{2}} \quad - \text{нормировка};$$

$$X_n = \sqrt{\frac{l}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

во II краевой

$$A_n = \sqrt{\frac{l}{2}}$$

4) Решая $T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$.

$$T'(t) + a^2 \frac{\pi n}{l} T(t) = 0$$

$$T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

C_n находим из начальных у-й:

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot C_n = r_0 - \left(1 - \frac{x}{l}\right) r_1 - \frac{x}{l} r_2.$$

$$C_n = \frac{\underbrace{\left(r_0 - \left(1 - \frac{x}{l}\right) r_1 - \frac{x}{l} r_2\right)}_{\text{ф-ция, которую разлагаем}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)}_{\text{ф-ция по которой разлагаем}}}{\|X_n\|^2} =$$

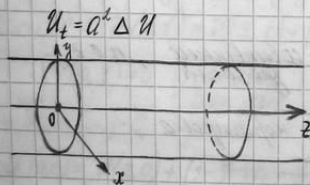
$$= \int_0^l \left(r_0 - \left(1 - \frac{x}{l}\right) r_1 - \frac{x}{l} r_2\right) \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \dots$$

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) r_1 + \frac{x}{l} r_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \dots$$

14.11.11

Цилиндрическая симметрия

$N \sqrt{2}, 28$



НАЧ. УСЛ-Я: $u(z, 0) = u_0 \left(1 - \frac{z^2}{z_0^2}\right)$

ГРАН. УСЛ-Е: $u(z_0, t) = 0$.

Цилиндрич. система координат (r, φ, z)

Граница $z = z_0$

Задача $U = R(r) T(t)$ $\rightarrow 0$ (аксиальная симметрия)

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow 0 \text{ (вектор. цилиндры)}$$

$$R^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) = \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$R^2 T \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) \right) = R \frac{\partial T}{\partial t} \quad \Big| : R^2 R T$$

$$\frac{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right)}{R} = \frac{T'}{R^2 T} = -\lambda$$

$$\{ T' + R^2 \lambda T = 0,$$

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \lambda R = 0; \quad \begin{matrix} \sqrt{\lambda} = 0, \\ k = \sqrt{\lambda} \end{matrix} \rightarrow R(r) = J_0(\sqrt{\lambda} r)$$

Уравнение Бесселя: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0$

Решение: $R \sim J_\nu(kr)$

ГРАН. УСЛ-Е: $R(r_0) T(t) = 0 \Rightarrow R(r_0) = 0;$

$$0 = J_0(\sqrt{\lambda} r_0)$$

$$\sqrt{\lambda_n} r_0 = \mu_n^{(0)} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} \right)^2$$

$$R_n(r) = J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r \right)$$

ВРЕМЕННАЯ ЧАСТЬ: $T_n' + \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a \right)^2 T_n = 0$

$$T_n = C_n e^{-\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a \right)^2 t}$$

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r \right) \cdot C_n e^{-\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a \right)^2 t}$$

$$U(r) = U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r\right) C_n$$

$$C_n = \frac{\left(J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r\right) U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\right)}{\left\| J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r\right) \right\|^2}$$

Для I-ой строки:

$$\left\| J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r\right) \right\|^2 = \frac{r_0^2}{2} \left(J_0'(\mu_n^{(0)}) \right)^2 = \frac{r_0^2}{2} \left(J_1(\mu_n^{(0)}) \right)^2$$

$$\left(J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r\right); U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \right) = \int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r\right) U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) r dr =$$

$$= \left\| x = \frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} r \right\| = \int_0^{\mu_n^{(0)}} J_0(x) U_0 \left(1 - \left(\frac{x}{\mu_n^{(0)}}\right)^2\right) \left(\frac{r_0}{\mu_n^{(0)}}\right) x dx = \left(\frac{r_0}{\mu_n^{(0)}}\right)^2 U_0 \cdot$$

$$\cdot \left[\int_0^{\mu_n^{(0)}} J_0(x) x dx - \left(\frac{1}{\mu_n^{(0)}}\right)^2 \int_0^{\mu_n^{(0)}} x^3 J_0(x) dx \right] \equiv$$

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ:

$$① \frac{d}{dx} \left[\frac{J_k(x)}{x^k} \right] = -\frac{J_{k+1}(x)}{x^k}$$

$$② \frac{d}{dx} [x^k J_k(x)] = x^k J_{k-1}(x)$$

$$③ J_{k+1}(x) + J_{k-1}(x) = \frac{2k}{x} J_k(x)$$

$$④ J_{k+1}(x) - J_{k-1}(x) = 2 - J_k'(x)$$

$$I_2 = \int_0^{\mu_n^{(0)}} J_0(x) x dx = \left\{ x J_0(x) = \frac{d}{dx} [x J_1(x)] \right\} = \int_0^{\mu_n^{(0)}} \frac{d}{dx} [x J_1(x)] dx =$$

$$= x J_1(x) \Big|_0^{\mu_n^{(0)}} = \mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})$$

$$I_k = \int_0^{\mu_n^{(0)}} x^k J_0(x) dx = \int_0^{\mu_n^{(0)}} x^k d[x J_1(x)] = x^k \cdot x J_1(x) \Big|_0^{\mu_n^{(0)}} - \int_0^{\mu_n^{(0)}} x^k J_1(x) dx$$

$$- \int_0^{\mu_n^{(0)}} x^k J_1(x) dx = (\mu_n^{(0)})^k J_1(\mu_n^{(0)}) - k \int_0^{\mu_n^{(0)}} x^{k-1} J_1(x) dx = (\mu_n^{(0)})^k J_1(\mu_n^{(0)}) -$$

$$- k \int_0^{\mu_n^{(0)}} d[x^k J_2(x)] = (\mu_n^{(0)})^k J_1(\mu_n^{(0)}) - k(\mu_n^{(0)})^k J_2(\mu_n^{(0)})$$

② при $k=2$

$$\Rightarrow \left(\frac{\gamma_0}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 U_0 \left[\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}) - \mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}) + 2 J_2(\mu_n^{(0)}) \right] = 2 U_0 \left(\frac{\gamma_0}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 J_2(\mu_n^{(0)})$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2 U_0 \left(\frac{\gamma_0}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 J_2(\mu_n^{(0)})}{\frac{\gamma_0^2}{\gamma} (J_2(\mu_n^{(0)}))^2} = \frac{4 U_0 J_2(\mu_n^{(0)})}{(\mu_n^{(0)})^2 (J_2(\mu_n^{(0)}))^2} \stackrel{\text{максимум}}{=} \text{максимум при } k=2$$

Решим ③ при $k=1$:

$$J_2(x) + J_0(x) = \frac{2}{x} J_1(x)$$

$$x = \mu_n^{(0)}$$

$$J_2(\mu_n^{(0)}) + J_0(\mu_n^{(0)}) = \frac{2}{\mu_n^{(0)}} J_1(\mu_n^{(0)})$$

$$\Rightarrow \frac{8 U_0}{(\mu_n^{(0)})^3 J_2(\mu_n^{(0)})} = C_n !!!$$

$$U(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 U_0}{(\mu_n^{(0)})^3 J_2(\mu_n^{(0)})} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{\gamma_0} z\right) e^{-\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{\gamma_0} a\right)^2 t} \leftarrow \text{Остаток.}$$

28.11.11 I квадрат

№ 59 найти поперечные колебания круглой мембраны с закрепленным краем

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

$$u(r, t) = 0$$

$$u_t(r, 0) = \frac{r^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

$$u_t(r, 0) = \mathcal{L} \left(\frac{u_t^{(0)}}{r_0} r \right)$$

$$(r, \varphi, z)$$

$u_t^{(0)}$ - i-й член ряда $\mathcal{L}_0(x)$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Замена: $u = R(r)T(t)$

$$R(r)T''(t) = T(t)a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) \quad | : a^2 R T$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) \cdot \frac{1}{R} = -\lambda$$

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda R = 0; \end{cases}$$

$$R = \mathcal{L}_0(\sqrt{\lambda} r)$$

$$R(r_0)T(t) = 0, \Rightarrow R(r_0) = 0.$$

$$0 = J_0(\sqrt{\lambda} z_0)$$

$$\sqrt{\lambda} z_0 = \mu_n^{(0)} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} \right)^2$$

$$R_n = J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right)$$

$$T_n''(t) + \left(\frac{\mu_n^{(0)} a}{z_0} \right)^2 T_n = 0$$

$$T_n = A_n \sin \frac{\mu_n^{(0)} a}{z_0} t + B_n \cos \frac{\mu_n^{(0)} a}{z_0} t$$

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right) \cdot \left(A_n \sin \frac{\mu_n^{(0)} a}{z_0} t + B_n \cos \frac{\mu_n^{(0)} a}{z_0} t \right)$$

Подставим в нач. уст-е ($t=0$):

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)} r}{z_0} \right) \left(A_n \frac{\mu_n^{(0)} a}{z_0} \right) = J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right) \leftarrow \text{второе слагаемое при дифференцировании} = 0.$$

$$A_n \frac{\mu_n^{(0)} a}{z_0} = \delta_n i \Rightarrow A_n = \frac{\delta_n i z_0}{a \mu_n^{(0)}}$$

$$u(r, t) = J_0 \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{z_0} r \right) \frac{z_0}{a \mu_1^{(0)}} \sin \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{z_0} a t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right) \cdot B_n \cos \left(\frac{\mu_n^{(0)} a}{z_0} t \right);$$

$$u(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right) B_n = \frac{z^2}{z_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{z_0^2} \right)$$

$$B_n = \frac{\int_0^{z_0} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right) \cdot \frac{r^2}{z_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{z_0^2} \right) r dr}{\left\| J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right) \right\|^2}$$

$$\left\| J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right) \right\|^2 = \frac{z_0^2}{2} J_1^2(\mu_n^{(0)})$$

$$\int_0^{z_0} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \right) \frac{r^2}{z_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{z_0^2} \right) r dr = \left| \begin{array}{l} x = \frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} r \\ dx = \frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} dr \end{array} \right| = \int_0^{\mu_n^{(0)}} J_0(x) \left(\frac{x}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{x}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 \right) x dx$$

$$2 \left(\frac{\gamma_0}{\mu_n^{(1)}} \right)^2 x dx = \dots$$

$$\frac{d}{dx} [x^k J_k(x)] = x^k J_{k-1}(x)$$

№ VII. 61.

II-красная задача. J_k -е из VII. 59 только
со свободными краями.

$$U_{tt} = a^2 \Delta U$$

$$U_z(z, t) = 0$$

$$U(z, 0) = \frac{z^2}{z_0} \left(1 - \frac{z^2}{2z_0^2} \right)$$

$$U_t(z, 0) = J_0 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{z_0} z \right)$$

$$U = R T$$

$$\left\{ \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \lambda R = 0, \right.$$

$$\left. T'' + \lambda a^2 T = 0; \right.$$

$$\boxed{\lambda > 0} : R = J_0(\sqrt{\lambda} z)$$

$$J_0 = 0; \quad k = \sqrt{\lambda}; \quad R'(z_0) = 0; \quad J_0'(\sqrt{\lambda} z_0) \sqrt{\lambda} = 0; \quad -J_1(\sqrt{\lambda} z_0) = 0;$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{z_0} \right)^2$$

$$R_n = J_0 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{z_0} z \right)$$

$$T_n = A_n \sin \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{z_0} a t \right) + B_n \cos \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{z_0} a t \right)$$

$$u = \sum_n A_n \left(\frac{u_n^{(1)}}{r_0} r \right)$$

$$\boxed{\lambda=0}: R_0 = \text{const.}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) = 0$$

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = C_1$$

$$R=0 \text{ (исключается)}$$

$$R = C_1 \ln r + C_2 \rightarrow R' = 0 \text{ (2 исключается сразу)}$$

$C_1 = 0$ из физических соображений.

$$T = b_1 + b_2$$

$$u = (\alpha + \beta) + \sum_n A_n \left(\frac{u_n^{(1)}}{r_0} r \right) \left(A_n \sin \left(\frac{u_n^{(1)}}{r_0} \alpha t \right) + B_n \cos \left(\frac{u_n^{(1)}}{r_0} \alpha t \right) \right)$$

$$u_{(z,0)} = \sum_n A_n \left(\frac{u_n^{(1)}}{r_0} r \right) A_n r \frac{u_n^{(1)}}{r_0} + \alpha = A_n \left(\frac{u_n^{(1)}}{r_0} r \right)$$

$$\alpha = 0.$$

$$A_n = \frac{r_0 \delta_{nk}}{r_0 u_n^{(1)}} \Leftrightarrow A_n r \frac{u_n^{(1)}}{r_0} = \delta_{nk}.$$

$$\text{I исключается: } \left\{ A_0 \left(\frac{u_0^{(1)}}{r_0} r \right); A_1 \left(\frac{u_1^{(1)}}{r_0} r \right); \dots \right\}$$

$$\text{II исключается: } \left\{ 1; A_0 \left(\frac{u_0^{(1)}}{r_0} r \right); \dots \right\}$$

$$u(r,0) = \beta + \sum_n A_n \left(\frac{u_n^{(1)}}{r_0} r \right) B_n = \frac{r^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2} \right)$$

$$\beta = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2} \right) \right)}{\|1\|^2} = \frac{1}{3}$$

$$\|1\|^2 = \int_0^{r_0} 1^2 r dr = \frac{r_0^2}{2};$$

$$\int_0^{\gamma_0} \frac{\gamma^3}{\gamma_0^2} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\gamma_0^2}\right) d\gamma = \frac{\gamma_0^4}{4\gamma_0^2} - \frac{\gamma_0^6}{12\gamma_0^4} = \frac{1}{6} \gamma_0^2.$$

$$B_n = \frac{\left(\mathcal{I}_0\left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\gamma_0}\gamma\right), \frac{\gamma^2}{2}\left(1 - \frac{\gamma^2}{2\gamma_0^2}\right)\right)}{\left\|\mathcal{I}_0\left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\gamma_0}\gamma\right)\right\|^2}$$

$$\left\|\mathcal{I}_0\left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\gamma_0}\gamma\right)\right\|^2 = \frac{\gamma_0^2}{2} \mathcal{I}_0^2(\mu_n^{(1)})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\gamma_0} \mathcal{I}_0\left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\gamma_0}\gamma\right) \frac{\gamma^3}{\gamma_0^2} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\gamma_0^2}\right) d\gamma &= \left| x = \frac{\mu_n^{(1)}}{\gamma_0} \gamma \right| = \int_0^{\mu_n^{(1)}} \mathcal{I}_0(x) \frac{\gamma_0 x^3}{(\mu_n^{(1)})^3} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\mu_n^{(1)}}\right)^2\right) \frac{\gamma_0}{\mu_n^{(1)}} dx \\ &= \frac{\gamma_0^2}{(\mu_n^{(1)})^4} \left(\underbrace{\int_0^{\mu_n^{(1)}} x^3 \mathcal{I}_0(x) dx}_{I_1} - \frac{\gamma_0^2}{2(\mu_n^{(1)})^6} \underbrace{\int_0^{\mu_n^{(1)}} x^5 \mathcal{I}_0(x) dx}_{I_2} \right) = \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^{\mu_n^{(1)}} x^3 \mathcal{I}_0(x) dx = \int_0^{\mu_n^{(1)}} x^2 d(\mathcal{I}_2(x)x) = x^3 \mathcal{I}_2(x) \Big|_0^{\mu_n^{(1)}} - 2 \int_0^{\mu_n^{(1)}} x^2 \mathcal{I}_2(x) dx =$$

$$= -2x^2 \mathcal{I}_2(x) \Big|_0^{\mu_n^{(1)}} = -2(\mu_n^{(1)})^2 \mathcal{I}_2(\mu_n^{(1)})$$

$$I_2 = \int_0^{\mu_n^{(1)}} x^5 \mathcal{I}_0(x) dx = \int_0^{\mu_n^{(1)}} x^4 dx \mathcal{I}_1(x) = x^5 \mathcal{I}_1(x) \Big|_0^{\mu_n^{(1)}} - 4 \int_0^{\mu_n^{(1)}} x^4 \mathcal{I}_1(x) dx =$$

$$= -4 \int_0^{\mu_n^{(1)}} x^2 dx^2 \mathcal{I}_2(x) = -4(\mu_n^{(1)})^4 \mathcal{I}_2(\mu_n^{(1)}) + 8 \int_0^{\mu_n^{(1)}} x^3 \mathcal{I}_2(x) dx =$$

$$= -4(\mu_n^{(1)})^4 \mathcal{I}_2(\mu_n^{(1)}) + 8(\mu_n^{(1)})^3 \mathcal{I}_3(\mu_n^{(1)});$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_0^2}{(\mu_n^{(1)})^4} \left(2(\mu_n^{(1)})^2 J_2(\mu_n^{(1)}) \right) - \frac{\gamma_0^2}{(\mu_n^{(1)})^6} \left(-4(\mu_n^{(1)}) J_2(\mu_n^{(1)}) + 8(\mu_n^{(1)})^3 J_3(\mu_n^{(1)}) \right) = \\ & = \frac{\gamma_0^2}{(\mu_n^{(1)})^2} 2 J_2(\mu_n^{(1)}) - \frac{\gamma_0^2}{(\mu_n^{(1)})^3} 8 J_3(\mu_n^{(1)}) = \frac{\gamma_0^2}{(\mu_n^{(1)})^2} \cdot 2 J_2(\mu_n^{(1)}) \left[1 - \frac{16}{(\mu_n^{(1)})^2} \right] = \\ & = \left\{ J_2(\mu_n^{(1)}) + J_0(\mu_n^{(1)}) = \frac{2}{\mu_n^{(1)}} J_1(\mu_n^{(1)}) = 0 \right\} = \frac{\gamma_0}{(\mu_n^{(1)})^2} 2 J_0(\mu_n^{(1)}) \left[\frac{16}{(\mu_n^{(1)})^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$B_n = \frac{4 \left[\frac{16}{(\mu_n^{(1)})^2} - 1 \right]}{(\mu_n^{(1)})^2 J_0(\mu_n^{(1)})^2}$$

Неоднородные задачи

05.12.11

№ V.29

II-краевая
неоднород.

Найти тем-ру бесконечного цилиндра с осью пар. тем-ра - U_0
радиуса R_0 .

$$U_t = a^2 \Delta U$$

$$U_3(R_0, t) = \frac{Q}{\lambda} = q$$

$$U(R, 0) = U_0 = \text{const}$$

Нет зависимости от z и от φ . Рассматриваем фрагмент:

$$a^2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) = U_t$$

Подбираем замену, при которой бы ГРАН. УСЛ-Е было однородно, т.е. $U_3(R_0, t) = 0$.

$$v_3 = U_3(R_0, t) - q \frac{R}{R_0}(1)$$

Выразим отсюда U и подставим в ур-е. Для этого интегрируем выражение (1):

$$v = U(R_0, t) - \frac{q R_0^2}{2 \lambda} + C(t) \rightarrow q R_0^2 / 2 \lambda$$

Омечен $u(s, t) = v + \frac{qs^2}{2s_0} - C(t).$

Дифференцируем и подставляем в ур-е:

$$a^2 \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{qs}{s_0} \right) \right) = v_t - C'(t).$$

$$a^2 \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial v}{\partial s} \right) + a^2 \frac{2q}{s_0} = v_t - C'(t).$$

Поскольку уравнение зависит от s

$$2a^2 \frac{q}{s_0} = -C'(t) \Rightarrow C(t) = -2a^2 \frac{q}{s_0} t.$$

$$u(s, t) = v(s, t) + \frac{qs^2}{2s_0} + 2a^2 \frac{qt}{s_0};$$

$$u(s, 0) = v(s, 0) + \frac{qs^2}{2s_0} = u_0 \Rightarrow v(s, 0) = u_0 - \frac{qs^2}{2s_0}.$$

Поэтому ищут решение:

$$v_t = a^2 \Delta v,$$

$$v_s(s, t) = 0,$$

$$v(s, 0) = u_0 - \frac{qs^2}{2s_0}$$

$$v(s, t) = R(s) T(t)$$

$$R(s) T'(t) = a^2 T(t) \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial R}{\partial s} \right) \Big| : a^2 R T.$$

$$\begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0, \\ \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial R}{\partial s} \right) + \lambda R = 0; \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda=0}$$

$$R_0 = C$$

$$C=1 \Rightarrow R_0=1.$$

$$T_0 = A$$

$$\boxed{\lambda > 0}$$

$$R(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda} \rho)$$

$$R'(\rho_0) = 0,$$

$$J_0'(\sqrt{\lambda} \rho_0) \sqrt{\lambda} = 0,$$

$$-J_2(\sqrt{\lambda} \rho_0) = 0.$$

$$\sqrt{\lambda} \rho_0 = \mu_n^{(1)}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \right)^2$$

$$R_n(\rho) = J_0 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \rho \right)$$

$$T_n' + \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \right)^2 T_n = 0, \Rightarrow T_n(t) = B_n \exp \left[- \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \right)^2 t \right]$$

$$v(\rho, t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \rho \right) \cdot B_n \exp \left[- \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \right)^2 t \right]$$

$$v(\rho, 0) = A + \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \rho \right) \cdot B_n = U_0 - \frac{q \rho^2}{2 \rho_0^2}$$

$$A = \frac{\int_0^{\rho_0} \left(U_0 - \frac{q \rho^2}{2 \rho_0^2} \right) \rho d\rho}{\|1\|^2} = \frac{\rho_0^2}{2} \left(U_0 \frac{\rho_0^2}{2} - \frac{q}{2 \rho_0^2} \frac{\rho_0^4}{4} \right) = U_0 - \frac{\rho_0 q}{4}$$

$$B_n = \frac{\int_0^{\rho_0} J_0 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \rho \right) \cdot \left(U_0 - \frac{q \rho^2}{2 \rho_0^2} \right) \rho d\rho}{\|J_0 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{\rho_0} \rho \right)\|^2} = \dots$$

$$= \frac{\rho_0^2}{2} J_0^2 \left(\mu_n^{(1)} \right)$$

N VI. 65

I-красный
матрица.

$$U_H = a^2 \Delta U$$

$$U(s, t) = A \sin \omega t.$$

$$\begin{cases} U(s, 0) = 0, \\ U_t(s, 0) = 0, \end{cases}$$

$$U_t(s, 0) = 0,$$

$$V(s, t) = U(s, t) - A \sin \omega t = 0$$

$$\text{Замечание: } U(s, t) = V(s, t) + A \sin \omega t.$$

$$U_H(s, t) - \omega^2 A \sin \omega t = a^2 \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial V}{\partial s} \right)$$

$$V(s, t) = 0.$$

$$\begin{cases} V(s, 0) = 0, \\ V_t(s, 0) = -\omega A; \end{cases}$$

$$V(s, t) = W(s, t) + Q(s, t)$$

Общая функция
однород. ур-я

Частная функция
неоднород. ур-я.

$$W = \sum_n J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{s_0} s\right) \left(B_n \sin\left(a \frac{\mu_n^{(0)}}{s_0} t\right) + C_n \cos\left(a \frac{\mu_n^{(0)}}{s_0} t\right) \right)$$

$$Q(s, t) = Z(s) \sin \omega t$$

$$-Z(s) \omega^2 \sin \omega t - \omega^2 A \sin \omega t = a^2 \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial Z}{\partial s} \right) \sin \omega t;$$

$$-Z(s) \omega^2 - \omega^2 A = a^2 \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial Z}{\partial s} \right)$$

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial Z}{\partial s} \right) + \frac{Z(s)}{a^2} \omega^2 + \frac{\omega^2}{a^2} A = 0.$$

Зам. ур-я - е

$$Z(s_0) = 0.$$

$$Z(s) = k J_0\left(\frac{\omega}{a} s\right) - A = 0 \Rightarrow$$

$$Z(s) = J_0\left(\frac{\omega}{a} s\right) - A = A \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a} s\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a} s_0\right)} \right]$$

$$k = \frac{A}{J_0\left(\frac{\omega}{a} s_0\right)}$$

$$V(s, 0) = W(s, 0) + Q(s, 0) = W(s, 0) + 0 = 0 \Rightarrow W(s, 0) = 0.$$

$$U_i(s, 0) = W_i(s, 0) + AW \left(\frac{f_0 \left(\frac{a^2}{s} \right)}{f_0 \left(\frac{a^2}{s} \right)} - 1 \right) = -AWA.$$

$$W_i(s, 0) = -AW \frac{f_0 \left(\frac{a^2}{s} \right)}{f_0 \left(\frac{a^2}{s} \right)}.$$

$$W = \sum_n f_0 \left(\frac{a_n^{(0)}}{s} \right) \left[C_n \cos \left(a \frac{a_n^{(0)}}{s} t \right) + B_n \sin \left(a \frac{a_n^{(0)}}{s} t \right) \right]$$

$$W(s, 0) = \sum_n f_0 \left(\frac{a_n^{(0)}}{s} \right) a \frac{a_n^{(0)}}{s} B_n = -AW \frac{f_0 \left(\frac{a^2}{s} \right)}{f_0 \left(\frac{a^2}{s} \right)}; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{f_0}{a \int_0^{\infty} \frac{1}{a_n^{(0)}}}$$

✓ VI. 62

$$U(z, t) = 0$$

$$a^2 \Delta U + \left(\frac{P_0}{f_0} \right) = U_{tt}$$

$$U(z, 0) = 0,$$

$$U_t(z, 0) = 0$$

$$U(z, t) = v(z, t) + W(z)$$

$$a^2 \Delta v + \left(a^2 \Delta W + \frac{P_0}{f_0} \right) = v_{tt}$$

$$a^2 \Delta v = v_{tt}$$

$$a^2 \Delta W = -\frac{P_0}{f_0}$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dW}{dz} \right) = -\frac{P_0}{a^2};$$

$$C_1 = \frac{f_0 r^2}{4a^2} = r \frac{dW}{dz}$$

$$W = - \frac{f_0 r^2}{4a^2} + \vec{g} \ln r + C_2$$

$$u(z, t) = v(z, t) - \frac{f_0 r^2}{4a^2} + C_2$$

$$u(z, t) = \underbrace{v(z, t)}_{\text{Oscillation}} - \frac{f_0 r^2}{4a^2} + C_2 = 0.$$

$$C_2 = \frac{f_0 r_0^2}{4a^2} \Rightarrow u = v + \frac{f_0 r_0^2}{4a^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

$$\left[\begin{aligned} v(z, 0) &= u(z, 0) - \frac{f_0 r_0^2}{4a^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \\ &\underset{0}{=} \end{aligned} \right.$$

$$v_i(z, 0) = 0.$$

$$v = R(z) T(t)$$

$$a^2 T \Delta R = R T'' : a^2 R T$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dz} \left(r \frac{dR}{dz} \right) + \lambda R = 0.$$

$$R = J_0(\sqrt{\lambda} r)$$

$$R(z) = 0 = J_0(\sqrt{\lambda} z_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\lambda_n} z_0 = \mu_n^{(0)} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{z_0} \right)^2$$

$$R_n = J_0\left(\mu_n^{(0)} \frac{r}{r_0}\right)$$

$$T_n = A_n \sin\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a t\right) + B_n \cos\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a t\right).$$

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)} r}{r_0}\right) \left(A_n \sin\left[\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a t\right] + B_n \cos\left[\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a t\right] \right)$$

$$U(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)} r}{r_0}\right) A_n \frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a = 0 \Rightarrow A_n = 0 \quad \forall n$$

$$U(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)} r}{r_0}\right) \cdot B_n = \frac{r_0 r^2}{4a^2} \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)$$

$$B_n = \frac{2}{r_0^2 \cdot J_0^2(\mu_n^{(0)})} \int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)} r}{r_0}\right) \cdot \frac{r_0 r^2}{4a^2} \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) r dr = -\frac{2 r_0^2}{a^2 (\mu_n^{(0)})^3 J_2(\mu_n^{(0)})};$$

$$U(r, t) = \frac{r_0 r^2}{4a^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left[\frac{\mu_n^{(0)} r}{r_0}\right] \cdot B_n \cos\left[\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0} a t\right].$$

IV.39. Найти решение задачи.

I-краевая однородная задача.

$$a^2 \Delta U = U_t$$

$$\text{НАЧ. УСЛ-Е: } U(\rho, \varphi, 0) = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \cos \varphi.$$

$$\text{ГРАН. УСЛ-Е: } U(\rho_0, \varphi, t) = 0.$$

$$U(\rho, \varphi, t) = R(\rho) \Phi(\varphi) T(t).$$

$$\Phi(\varphi) = \cos \varphi.$$

$$\cos n\varphi \Rightarrow J_n(\rho)$$

$$a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) \cos \varphi T - a^2 \frac{1}{\rho^2} \cos \varphi R T = R \cos \varphi T'$$

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda$$

$$\left\{ \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial R}{\partial s} \right) + R \left(\lambda - \frac{1}{s^2} \right) = 0, \right.$$

$$\left\{ T' + \lambda R^2 T = 0 \right\}$$

Данные заданы параметрами первого Бесселя

$$R = J_1(\sqrt{\lambda} s)$$

$$R(s_0) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} \right)^2$$

$$R_n = J_1 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} s \right)$$

$$T_n = C_n \exp \left\{ - \left(a \frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} \right)^2 t \right\}$$

$$u(s, \varphi, t) = \sum_n \cos \varphi J_1 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} s \right) C_n \exp \left\{ - \left(a \frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} \right)^2 t \right\}$$

$$u(s, \varphi, 0) = \frac{s}{s_0} \cos \varphi = \sum_n \cos \varphi J_1 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} s \right) C_n$$

$$C_n = \frac{1}{\frac{s_0^2}{2} \left(J_1(\mu_n^{(1)}) \right)^2} \int_0^{s_0} \frac{s}{s_0} J_1 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} s \right) s ds =$$

$$\int_0^{s_0} \frac{s^2}{s_0} J_1 \left(\frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} s \right) ds = \left\| \begin{array}{l} x = \frac{\mu_n^{(1)}}{s_0} s \\ ds = \frac{s_0}{\mu_n^{(1)}} dx \end{array} \right.$$

Сферическая симметрия без
использования энергетических
(или угловой зависимости).

19.12.

№ 15

$$u_t = a^2 \Delta u.$$

$$u(r, t) = 0.$$

$$u(r, 0) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}_{=0}$$

0, т.к. нет зависимости от углов,
сферическая-симметричная задача.

$$a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} u \right) = u_t$$

$$u = R(r) \cdot T(t)$$

$$a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) T = R T' \Rightarrow \frac{1}{a^2 R T} = -\lambda$$

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda;$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \lambda R = 0, & R(r_0) = 0. \\ T' + a^2 \lambda T = 0; \end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right) + \lambda R = 0.$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \lambda R = 0. \quad \star$$

$$\text{Замени: } R(r) = \frac{z(r)}{r}.$$

$$\text{Дифференцируем: } \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{z}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{2}{r^3} z.$$

Подставим в ★:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{2}{r^3} z + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{z}{r^2} \right) + \lambda \frac{z(r)}{r} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \lambda z = 0.$$

$$z(r) = 0.$$

Итак, для замкнутой для физических и конечности решений, существовавших решений

в центре шара $\exists \lim_{r \rightarrow 0} \frac{z(r)}{r} < +\infty \Rightarrow z(0) = 0.$

$$z(r) = A \cos(\sqrt{\lambda} r) + B \sin(\sqrt{\lambda} r).$$

$$z(0) = A = 0.$$

$$z(r) = B \sin(\sqrt{\lambda} r) = 0.$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{r_0} \right)^2.$$

$$z_n(r) = B_n \sin\left(\frac{\pi n}{r_0} r\right), \quad B_n = 1.$$

$$R_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{r_0} r\right)}{r},$$

$$T_n = C_n \exp \left\{ -\left(a \frac{\pi n}{r_0} \right)^2 t \right\}$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{r_0} r\right)}{r} C_n \exp \left\{ -\left(a \frac{\pi n}{r_0} \right)^2 t \right\}$$

$$u_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{r_0} r\right)}{r} C_n \exp \left\{ -\left(a \frac{\pi n}{r_0} \right)^2 t \right\}.$$

$$C_n = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\frac{2\pi n}{L} z)}{z} \ln(1 - \frac{z^2}{L^2}) r^2 dr}{\left\| \frac{\sin(\frac{2\pi n}{L} z)}{z} \right\|_2^2} = \dots$$

- 1) I.2
- 2) I.15
- 4) I.22
- 7) II.55
- 9) II.59
- 11) II.83
- 14) III.25
- 17) II.85
- 19) II.147
- 22) III.28
- 24) III.33
- 27) II.206
- 29) 1,2,3 краевые.
- 30) III.?
- 32) V.28
- 36) VI.59
- 38) VI.61
- 41) V.29
- 44) VI.65
- 45) VI.62
- 47) V.39
- 49) V.15