Слипко Валерий Анатольевич

и

Немченко Ульяна ТЯ-31

2-ого пор. в частн. производ.

02.09
2009

рассм. ур-ие $u = u(x,y)$ - возьм такую ф-цию.

$u_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ - и пок - так буду обозначать.

$u_y(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$

Ур-ие с частн. производ. 2-ого порядка с 2-мя независ. перем. х и у - это соотношение между неизвестной ф-цией $u(x,y)$ и её частн. производными до 2-ого пор. включительно: $F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$

$u_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}$

$u_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = u_{yx}(x,y)$

$u_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$

(*) $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и т.д.

$\boxed{F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0}$ - ур-ие 2-ого пор. в частных производных

Линейное ур-ие относительно старших производных

$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x,y,u,u_x,u_y) = 0.}$ (*) $\left.\begin{matrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}\right\}$ ф-ции от x и y

если $a(u)$ или от частн. производ. 1-ого пор., то ур-ие наз. квазилинейным - не рассм

квазилинейное - ур-ие, где a_{11}, a_{12}, a_{22} завис. не только от х и у.

$a_{11} = a_{11}(x,y)$ $a_{12} = a_{1,2}(x,y)$

$a_{22} = a_{22}(x,y)$

линейное ур-ие линейно отн. старших производ. u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, отн. u и её младших произв. u_x, u_y

$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0.$

$b_1 = b_1(x,y)$, $b_2 = b_2(x,y)$, $c = c(x,y)$

$f = f(x,y)$

if $f \equiv 0$, то уравнение однородно

if $a, b, c = const$, то ур-ие линейное с пост. коэфф.

f может завис. от x, y.

перейдём от перем. к перем.

$$(x, y) \to (\xi, \eta)$$

$$\xi = \xi(x,y)$$

$$\eta = \eta(x,y)$$

с помощью преобр. переменных допускается обратное преобразование - мы получаем новое ур-ие, эквивалентное исходному.

Как выбрать ξ и η, чтобы ур-ие имело наиболее простую форму?

Преобразуем производные к новым перем.:

1) $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$

2) $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$

3) $u_{xx} = (u_x)_x = (u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x)_x = u_{\xi x} \xi_x + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_{\eta x} \eta_x + u_\eta \cdot \eta_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + u_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + u_{\eta\xi} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$

отсюда (3) $u_{xx} = \xi_x^2 \cdot u_{\xi\xi} + 2 \xi_x \eta_x u_{\xi\eta} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + \xi_{xx} u_\xi + \eta_{xx} \cdot u_\eta$

4) (2) $u_{yy} = \xi_y^2 \cdot u_{\xi\xi} + 2 \xi_y \eta_y u_{\xi\eta} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + \xi_{yy} \cdot u_\xi + \eta_{yy} \cdot u_\eta$

5) $u_{xy} = (u_x)_y = (u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x)_y =$
$= u_{\xi y} \cdot \xi_x + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_{\eta y} \eta_x + u_\eta \eta_{xy} =$
$= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_y + u_{\eta\xi} \xi_y \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$

(1) $u_{xy} = \xi_x \xi_y \cdot u_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) u_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y u_{\eta\eta} + \xi_{xy} u_\xi + \eta_{xy} u_\eta$

подставим значения производных в ур-ие (*):

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + \underbrace{F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)}_{\text{не завис. от 2-ых производных}} = 0,$$

где $\bar{a}_{11} = a_{11} \xi_x^2 + a_{22} \xi_y^2 + 2a_{12} \xi_x \cdot \xi_y = \bar{a}_{11}(\xi, \eta)$

$\bar{a}_{22} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2$

$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{22}\cdot\xi_y\cdot\eta_y + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)$

выберем ξ и η такие, что $\bar{a}_{11} = 0$

пусть $\bar{a}_{11} = 0$, тогда рассм. ур-ие

$$\boxed{a_{11}\cdot\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0} \quad **$$

if $\xi = \xi(x,y)$, то $\bar{a}_{11} = 0$?

Лемма 1

Пусть $\xi = \xi(x,y)$ удовлетв. ур-ию частн. произвд.

$$a_{11}(\xi_x)^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2 = 0 \quad (*)$$

тогда $\xi(x,y) = C$ – общ. интеграл обыкн. дифф.ур-ия

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}(dx)^2 = 0. \quad (**)$$

т.к. $\xi = \xi(x,y)$ удовл. ур-ию **, то

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0$$ -> сформулировали.

сейчас докажем.

общ. интеграл ур-ия (**) если ф-ция y: $\xi(x,y) = c$ удовл. (**)

$\xi(x,y) = const = c$, Пусть $y = f(x,c)$, тогда:

$d\xi(x,y) = dc = 0.$

$\xi_x dx + \xi_y dy = 0$

$$dy = -\frac{\xi_x}{\xi_y}dx$$

$\xi_y \neq 0$

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}(dx)^2 = \left(a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2\right)\frac{(dx)^2}{\xi_y^2} = 0$$

все слаг.

0

тогда $y = f(x,c)$ удовл. ур-ию **

Лемма 2

Справедливо и обратное утверж.

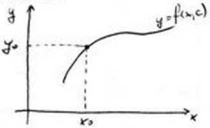
(если есть общ. интеграл обыкн. диффер. ур-ия то $\xi = \xi(x,y)$ - частное реш. ур-я частн. произв.)

пусть $\varphi(x,y) = c$ — общ. интеграл ур-ия $a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0$

то $\xi = \xi(x,y)$ - частн. р.у. $a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$

$\xi(x,y) = c, \quad y = f(x,c)$

Док-во:



$c_0 = \xi(x_0, y_0)$

если докажем, что ур-ие в частн. производ. справедливо в т. (x_0,y_0), то оно справ. в любой точке, т.к. (x_0,y_0) - произвольная.

выбрали произвольн. точку (x_0,y_0), через к-рую можно пров. интегр. кривую

$$\xi(x,y) = C_0 \qquad dy = -\frac{\xi_x}{\xi_y}dx \Big|_{y=f(x,C_0)}$$

$$\xi(x_0,y_0) = C_0$$

подставим dy:

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 \Big|_{\substack{y=f(x,c_0)\\ (\xi(x,y)=c_0)}} = 0 \quad =$$

$$= \left(a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2\right) \cdot \frac{(dx)^2}{\xi_y^2} \Big|_{\xi(x,y)=C_0} = 0 \text{ на интегр. кривой}$$

отсюда $a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$

$$\boxed{a_{11}d^2y - 2a_{12}\,dy\,dx + a_{22}dx^2 = 0} -$$

характеристическое ур-ие

$\xi(x,y) = C$ - семейство характеристик

09.09
2009 :-)

что мы делали:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0$$

$$\xi = \xi(x,y) \quad , \quad \eta = \eta(x,y)$$

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0$$

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \quad (1)$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \quad (11)$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$$

$$\bar{a}_{11} = 0 \Rightarrow a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$$

$$\xi = \xi(x,y)$$

$\xi(x,y) = C$ - характеристика

$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dx^2 = 0.$ - характерист. ур-ие

$$a_{11}y'^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

3 случая $\rightarrow$

во всей рассм. обл.

1) пусть коэфф-ты таковы, что

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ гиперболич. тип

$\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, где $\xi(x,y) = c$ и $\eta(x,y) = c$ – общие интегралы характ. ур-ия

т.к. ξ удовл. ур-ию (I) и η удовл. (II), то:

$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$, $\bar{a}_{12} \neq 0$

$\boxed{u_{\xi\eta} + \Phi = 0}$ каноннич. форма ур-ий гиперболич. типа

$\xi = \alpha + \beta$

$\eta = \alpha - \beta$

$\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \bar{\Phi}} = 0$ -> тоже каноннич. вид

2) пусть во всей рассм. обл.

параболич. тип

$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ – опр-тель характ. ур-ия

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0$$

$$\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y = 0$$

$\xi = \xi(x,y)$, где $\xi(x,y) = c$ – общ. интеграл ур-ия характеристик

Пусть $\eta = \eta(x,y)$ – произвольная ф-ция

$$\bar{a}_{11} = 0, \quad \bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + \sqrt{a_{11}a_{22}}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) +$$

$$+ a_{22}\xi_y\eta_y = \underbrace{\cancel{(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)}}_{0}(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_{\eta\eta} + \tilde{\Phi} = 0 \\ \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \end{array}}$$ канонич. форма ур-ия параболич. типа

3) пусть $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ – эллиптич. тип.

$\xi = \xi(x, y)$

пусть $\xi(x,y) = c$ – комплексн. интеграл ур-ия характеристик

Вводим новые перем. α и β:

$\xi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$

$\alpha = Re\, \xi(x,y)$, $\beta = Im\, \xi(x,y)$

$\tilde{a}_{12} = 0.$

$\xi = \alpha + i\beta$

$$a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + $$
$$+ a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2 -$$
$$-(a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + 2i\underbrace{(a_{11}\alpha_x\beta_x +}_{0}$$
$$+ a_{12}(\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y) + a_{22}\alpha_y\beta_y)$$

$\tilde{a}_{12} = 0$

$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}$

~~$\tilde{a}_{11} u_{\alpha\alpha} + \alpha_{\alpha\alpha}$~~ $\boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \tilde{F}_1 = 0}$ эллипт.

Простейш. ур-не гиперболич. типа

(1) $u_{xx} - u_{yy} = 0$ (гиперб.) соотв. физич. задачам на колебание

$u_{xy} = 0$

(2) $u_{xx} = u_y$ (парабол.) простейш. задачи переноса: диффузия, перенос тепла

(3) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (эллиптич.) задачи на стац. распр. темп. на пл-ти, потенц. на плоск. и др.

1) $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0.$

пусть ур-не имеет гиперболич. тип, тогда

$$u_{\xi\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u + \bar{f} = 0$$

сделаем замену: $u = v \cdot e^{\lambda\xi + \mu\eta}$, пусть $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{c} = const$

подберём λ и μ; так, чтобы занулить коэфф. при 1-ой производ.:

$$u_\eta = (v_\eta + \mu v)\, e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

$$u_\xi = (v_\xi + \lambda v)\, e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

$$u_{\xi\eta} = (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v)\, e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

$$v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v + \bar{b}_1 v_\xi + \bar{b}_1 \lambda v + \bar{b}_2 v_\eta + \bar{b}_2 \mu v + \bar{c} v + \underbrace{\bar{f} e^{-\lambda\xi - \mu\eta}}_{\tilde{f} = \tilde{f}(\xi,\eta)} = 0.$$

т.е. такая замена не меняет тип ур-ия

выберем $\lambda = -\bar{b}_2$, $\mu = -\bar{b}_1$, тогда ур-ие примет вид:

$$v_{\xi\eta} + (\underbrace{\lambda\mu + \bar{b}_1\lambda + \bar{c} + \bar{b}_2\mu}_{\tilde{c}})\, v + \tilde{f} = 0$$

$$\boxed{v_{\xi\eta} + \tilde{c} v + \tilde{f} = 0}$$ каноннч. форма ур-ий гиперболич. типа

$\tilde{c} = const$

2) параболич. тип

$$u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c} u + \bar{f} = 0.$$

$$u = v e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{c}$ - const

λ, μ - const

выберем их так, что $\boxed{v_{\eta\eta} + \bar{b}_1 v_\xi + \tilde{f} = 0}$ канонич. форма для параболич. типа

3) Ур-ие эллиптич. типа

перех. к каонич. виду отн. старших произв.:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c} u + \bar{f} = 0$$

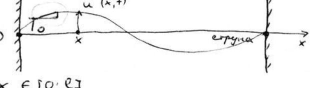
$$u = v e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

$$u_{\xi\xi} = (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v)\, e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

$$2\lambda + \bar{b}_1 = 0, \quad 2\mu + \bar{b}_2 = 0.$$

$$\boxed{v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \tilde{c} v + \tilde{f} = 0}$$ канонич. вид для ур-ий эллиптич. типа по 1-ым производ.

Ур-ие колебание струны



T_0 - натяжение - сила, к-ра тянет левую стенку вправо, правую - влево

кусочек струны

$x \in [0; l]$

рис.

Выведем струну из сост. равновесия
пренебрегаем трением

$dl^2 = dx^2 + du^2$
$du = du(x,t)|_{t=const}$
$dl = dx\sqrt{1+u_x^2}$
$\frac{\partial u}{\partial x} dx = u_x dx$

$u = u(x,t)$ - смещение отн. полож. равнов. т. x

зная $u(x,t)$ мы знаем, где нах. ~~точка~~ точка в люб. мом. вр.

поперечн. плоские колеб.

т.е. $u = u(x,t)$ определяет конфигурационное пр-во нашей струны

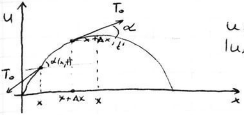
Возвр. сила возн. засчёт того, что натяж. в разн. точках струны напр. в разн. стор.

$$l[u(x,t)] = \int_0^l dx \sqrt{1+u_x^2} \approx \int_0^l dx = l$$ - при малых откл. не меняется

натяжение T не меняется и направлено в каждой точ. по касательной.

см. рис. $$T_0 \sin\alpha\Big|_{x+\Delta x} - T_0\sin\alpha\Big|_x = \rho\Delta x\, u_{tt}(x,t)$$

ρ — плотн. струны.



10.09

$u = u(x,t)$
$|u_x| \ll 1$

$tg\,\alpha = u_x(x,t)$

$\Delta m = \rho \Delta x$

$$\Delta m\, u_{tt}(x,t) = T_0 \sin\alpha(x+\Delta x, t) - T_0 \sin\alpha(x,t) + F(x,t)\Delta x$$

$\sin\alpha \approx \alpha \approx tg\,\alpha$

$$\rho u_{tt}(x,t) = T_0 \frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)}{\Delta x} + F(x,t)$$

$$\boxed{\rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + F(x,t)} \qquad a^2 = \frac{T_0}{\rho}$$

(Ox): $T_0 \cos\alpha(x+\Delta x, t) - T_0 \cos\alpha(x,t) = 0$

$T_0 = const.$

значит, эл-т не будет совершать поперечные колеб., а только продольные.

$u = u(x,t)$

$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t)$

$x \in (0,l),\ t > 0$

н.у. $u(x,0) = \varphi(x)$
начальные
$u_t(x,0) = \psi(x)$, $x \in (0,l)$

Граничные усл.: $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$ 1-ая краевая задача для одномерн. волнового ур-ия

Классич. решение задачи – когда все производные явл. непрер. ф-циями

2-ой тип краевой задачи – неоднор.

гр. у.: $\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), & t>0 \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$

нач. усл.: $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \in (0,l) \end{cases}$
непрер. ф-ции

запишем II-ой з-н Ньют. для кусочка струны

$$\rho \Delta x \, u_{tt}(l,t) = f(t) + F(x,t)\Delta x - T_0 u_x(l-\Delta x, t)$$

$\Delta x \to 0$

$$f(t) - T_0 u_x(l,t) = 0$$

$$\boxed{u_x(l,t) = \frac{1}{T_0} f(t)}$$

$\varphi(l,t)$ – ?

$f(t) = 0, \quad t > 0$

$\begin{cases} u_x(l,t) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$ 2-ая краевая задача

$$f_1(t) + T_0 u_x(0,t) = 0$$

$$u_x(0,t) = -\frac{f_1(t)}{T_0}$$

$$u_x(l,t) = \frac{f_2(t)}{T_0}$$

II-ая краевая задача (неоднородная)

рассм.
III-ю краевую задачу
$u(0,t)$ - смещение левого конца

запишем 2-ой з-н Н.

возвращ. сила — сила натяжения

$$\rho \Delta x\, u_{tt}(0,t) = \underbrace{F(0,t)}_{\text{внеш. сила на левом конце струны}}\Delta x - \underbrace{k}_{\text{жёсткость упругого закрепления}} u(0,t) + T_0 \underbrace{u_x(\Delta x,t)}_{\text{проекция}}$$

$k > 0$

когда $\Delta x \to 0$

гран. усл.
$$\begin{cases} \boxed{T_0 u_x(0,t) - k_1 u(0,t) = 0} \\ T_0 u_x(l,t) + k_2 u(l,t) = 0 \end{cases}$$

однородн. граничн. условие 3-его рода

if $(= \mu_1(t))$ $(= \mu_2(t))$ then неоднородная кр. задача

нач. усл.
$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t)$$

III-я краев. задача однородная

Смешанная краевая задача - когда на разных концах разная краевая задача

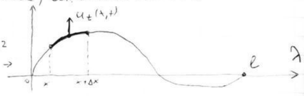
Энергия струны

Струна – мех. с-ма, обл. кин. и пот. эн.

$$E = K + U$$

$$K = \sum \frac{\Delta m\,[U_t(x,t)]^2}{2} \to$$

$\to \Delta m = \rho \Delta x$



рассм. на случае 1-ой однор. краевой зад.

$$K = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\, \rho\, [u_x(x,t)]^2 = k(t)$$

Выберем фиксир. мом. вр. t_0 и зафиксир. профиль $u(x, t_0)$

Какую нужно сов. работу внешним силам, чтобы из начального положения деформир. струну до профиля струны в t_0?

Эта работа $= U$

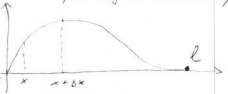
Рассм. семейство ф-ций $v(x,\lambda)$, $\lambda \in [0; \lambda_0]$, описывающ. профиль струны.

$$v(x, 0) \equiv 0$$

$$v(x, \lambda_0) = U(x, t_0)$$

в рез-те U не будет зависеть от вида ф-ции λ, а будет зависеть только от нач. усл.

промежуточный профиль



Считаем работу:

$$\delta A = \Delta F \cdot \Delta S$$

$$\Delta F = -[T_0 v_x(x+\Delta x, \lambda) - T_0 v_x(x,\lambda)]$$

ΔF — внешняя сила

$-$ — т.к. силы, действ. на кусочек ~~...~~ со стороны струны и компенсирующая её сила напр. в разные стороны

$$\Delta x \to 0$$

$$\Delta F = -T_0 \, v_{xx}(x,\lambda)\,\Delta x$$

ΔS — перемещение куска струны

$$\Delta S = \Delta v = v_\lambda(x,\lambda)\,\Delta\lambda$$

$$\delta A = -T_0 \, v_{xx}(x,\lambda)\,\Delta x \cdot v_\lambda(x,\lambda)\,\Delta\lambda$$

$$\Delta x \to dx \quad , \quad \Delta\lambda \to d\lambda$$

интегрирую:

$$A = -T_0 \int_0^{\lambda_0} \left(\int_0^{l} dx \, v_{xx}(x,\lambda)\, v_\lambda(x,\lambda) \right) d\lambda =$$

$$= -T_0 \int_0^{\lambda_0} d\lambda \left(\int_0^{l} dx \left\{ \frac{d}{dx}\left[v_x(x,\lambda)\, v_\lambda(x,\lambda) \right] - v_x(x,\lambda)\, v_{x\lambda}(x,\lambda) \right] \right) =$$

$$= -T_0 \int_0^{\lambda_0} d\lambda \; v_x(x,\lambda)\, v_\lambda(x,\lambda) \Big|_0^{l} + T_0 \int_0^{\lambda_0} d\lambda \left(\int_0^{l} dx \, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left[v_x(x,\lambda) \right]^2 \right) =$$

$$= -T_0 \int_0^{\lambda_0} d\lambda \left[v_x(l,\lambda)\, v_\lambda(l,\lambda) - v_x(0,\lambda)\, v_\lambda(0,\lambda) \right] +$$

$$+ \frac{T_0}{2} \int_0^{\lambda_0} d\lambda \, \frac{d}{d\lambda} \left(\int_0^{l} dx \left[v_x(x,\lambda) \right]^2 \right) =$$

$$= \frac{T_0}{2} \int_0^{l} dx \left[v_x(x,\lambda_0) \right]^2 - \frac{T_0}{2} \int_0^{l} dx \, \overbrace{\cancel{\left[v_x(x,0) \right]^2}}^{0}$$

$$v(x,\lambda_0) = u(x,t_0)$$

тогда:

кинетич. энергия струны

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l dx\, \rho\, [u_t(x,t)]^2 = k(t)$$

пот. эн. $$U = \frac{T_0}{2}\int_0^l dx\, [u_x(x,t)]^2$$

полная энергия струны: $E = K + U$

$$E\,[u(x,t)] = \frac{1}{2}\int_0^l dx\, \rho\, [u_t(x,t)]^2 +$$

$$+\frac{T_0}{2}\int_0^l dx\, [u_x(x,t)]^2$$

Лагранжиан $L = K - U$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) = \frac{\partial L}{\partial u}$$

$$\rho u_{tt} = T_0 u_{xx}$$

импульс $p(x,t) = \dfrac{\delta L}{\delta u_t} = \rho u_t(x,t)$

Предельные задачи: 21.09

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (-\infty; +\infty)$, $t > 0$

Бесконечная струна

нач. условия: $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$

1-вый тип пред. задач - задачи без гран. условий

2) полубесконечная струна

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (0, +\infty)$, $t > 0$

гр. усл.: $u(0,t) = \mu(t)$, $t > 0$

нач. условия: $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$, $x > 0$

3) задачи на установившийся режим неоднозначны. Поэтому включим маленькое трение $-\alpha u_t$ - сила, действ. на эл-т струны, сила трения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t + f(x,t), \ \alpha > 0$$

н.у.: $\begin{cases} u(x,t_0) = \varphi(x) \\ u_t(x,t_0) = \psi(x) \end{cases}$

для примера возьмём беск. струну: $x \in (-\infty; +\infty)$, $t>$

$u = u(x, t; \alpha, t_0)$

решение: нач. усл. отодвигаем на $-\infty$:

$$\bar{u}(x,t) = \lim_{\alpha \to +0} \left(\lim_{t_0 \to -\infty} u(x,t,\alpha,t_0) \right)$$

важно не перепутать порядок пределов!

если этот предел существует, то существует установившийся режим.

$\Updownarrow$

это строгое решение задачи, а обычно решаем так: $f(x,t) = \sin\omega t \cdot \tilde{f}(x)$

$u(x,t) = u(x) \sin\omega t$

Задача о колебаниях бесконечной струны.

Метод распространяющихся волн

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (-\infty;+\infty), t>0$$

н.у. $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \quad x \in (-\infty;+\infty)$

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

$$dx - a dt = 0$$

$dx + a dt = 0$; $\quad x - at = c_1$; $x + at = c_2$

$\xi = -x - at$; $\quad \eta = x + at$

$u_{\xi\eta} = 0.$

проинтегрируем:

$$u_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_\eta(\xi,\eta) = 0.$$

$$u_\eta(\xi,\eta) = \tilde{f}(\eta)$$

$$u(\xi,\eta) = \underbrace{\int \tilde{f}(\eta)\,d\eta}_{= f_2(\eta)} + f_1(\xi)$$

$$\boxed{u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)} \quad ☆$$

подст. ξ и η чер. x и t:

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at) \quad * \quad \text{Подст. } t=0$$

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \quad (1)$$

$u_t(x,t) = f_1'(x-at)(-a) + f_2'(x+at)\cdot a$

скор. точек струны в нач. мом. врем.:

$u_t(x,0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x)$ (2)

из (1) и (2) получим f_1 и f_2:

$$-af_1(x) + af_2(x) = \int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C_0' \;\Big|\cdot\frac{1}{a}$$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + c_0$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{c_0}{2} \quad \text{сокр.} \quad \Big| +$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha - \frac{c_0}{2}$$

подставим в * f_1 и f_2

интеграл - ср. скор. смещения на $[x_1;x_2]$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\alpha\,\psi(\alpha)}$$

скорость

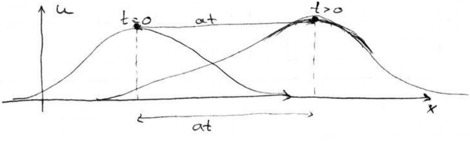
$x\in(-\infty;+\infty),\ t>0$

формула Даламбера

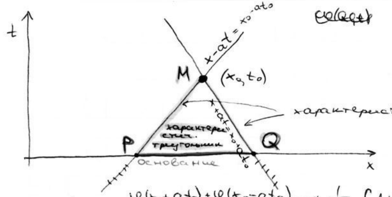
u - смещение

физич. интерпретация ф-лы Даламбера:

Пусть $f_2=0$, тогда $u(x,t) = f_1(x-at)$



плоская волна - к-рая зависит от одного пространственного аргумента.
Это плоская волна



$$u(x_0,t_0) = \frac{\varphi(x_0+at_0)+\varphi(x_0-at_0)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0-at_0} d\alpha\, \psi(\alpha) =$$

$$= \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x_2} d\alpha\, \psi(\alpha)$$

ΔPMQ – характеристический Δ-к

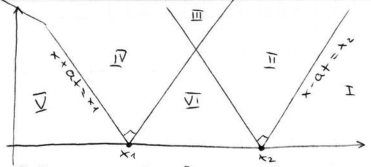
смещение в т. M определяется смещением точек P и Q и скоростью на основании PQ характеристического Δ-ка

Пусть нач. откл. и скорость определены на некот. интервале $(x_1; x_2)$

пусть

$\varphi(x) = 0$ на $x \bar{\in} (x_1; x_2)$

$\psi(x) = 0$, $x \bar{\in} (x_1, x_2)$ См. картинку



разобьём на 6 областей ↑

(I) : $\begin{pmatrix} x - at > x_2 \\ t > 0 \end{pmatrix}$ $u(x,t) = 0$ смещение = 0

(V) : $u = 0 \rightarrow$ смещение = 0. т.к. построим характеристич. Δ-к и окажется что скор. на основании = 0.

(III) смещение: $u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x_2} d\alpha\, \psi(\alpha)$

каждая точка струны ост. неподвижной, но смещённой

II р

рассм. полубеск. струну — есть 1 граница: $x = 0$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ x \in (0; +\infty), \ t > 0$$

гр. усл. $u(0,t) = 0 \rightarrow$ 1-ая краевая задача, $t > 0$

нач. усл. $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $x \in (0; +\infty)$

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} d\alpha\, \psi(\alpha)$$

подст. $t = 0$

совп. с начальным смещением

$u(x,0) = \varphi(x), \ x > 0$

$u_t(x,0) = \psi(x), \ x > 0$ $\qquad t > 0, \ 0 < x < +\infty$

продолжим начальное отклонение и скорость на всю н-ть

$$u(0,t) = \frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} d\alpha\, \psi(\alpha) = 0$$

для всех $t>0$

восп. Методом продолжения → продолжим φ и ψ по нечётности:

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $x>0$

$\psi(-x) = -\psi(x)$, $x>0$.

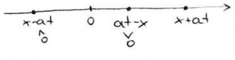
таким обр., смещение в начале коорд. → 0.

С учётом нечётности продолжения:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} d\alpha\, \psi(\alpha) \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} d\alpha\, \psi(\alpha), \quad \text{если } x<at \end{cases}$$

$x<at$

$\psi(-x) = -\psi(x)$



$\varphi(0)=0$

рассм. 2-ую краевую задачу.

Найти реш. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (0; +\infty)$, $t > 0$

г.у.: $u_x(0, t) = 0$ - левый конец струны свободн.

н.у.: $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$

ищем решение при пом. ф-лы Даламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} d\alpha\, \psi(\alpha)$$

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \left(\psi(at) - \psi(-at)\right) \cdot \frac{1}{2a} \equiv 0$$

для всех $t > 0$

$\psi(-x) = \psi(x)$, $x > 0$.

$\varphi(-x) = \varphi(x)$, $x > 0$

$\varphi'(-x) = -\varphi'(x)$.

23.09

1-ая краевая задача неоднор. для полупр-ва:

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (0; +\infty)$, $t > 0$

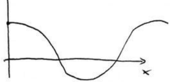
гу. $u(0,t) = \mu(t)$, $t > 0$

н.у. $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (0; +\infty)$

Решение (методом распр. волн)

$u(x,t) = f_1(t - \frac{x}{a}) + f_2(t + \frac{x}{a})$

$u(0,t) = f_1(t) + f_2(t) = \mu(t)$, $t > 0$



$u(x,0) = f_1(-\frac{x}{a}) + f_2(\frac{x}{a}) = 0$. $x > 0$

$u_t(x,0) = f_1'(-\frac{x}{a}) + f_2'(\frac{x}{a}) = 0$ $x > 0$

$\frac{x}{a} = y$

$$\begin{cases} f_1(-y) + f_2(y) = 0, & y > 0 \\ f_1'(-y) + f_2'(y) = 0, & y > 0 \\ f_1(t) + f_2(t) = \mu(t), & t > 0 \end{cases}$$

$-$

$-f_1(-y) + f_2(y) = c_1$, $y > 0$

$f_2(y) = \frac{c_1}{2}$, $y > 0$

$$f_1(-y) = -\frac{c_1}{2}, \quad y > 0$$

$$f_1(t) = -\frac{c_1}{2}, \quad t < 0$$

$$f_1(t) = \mu(t) - f_2(t) = \mu(t) - \frac{c_1}{2}$$
$$t > 0$$

1) $t > \frac{x}{a}$

$$u(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{c_1}{2} + \frac{c_1}{2} = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

2) $t < \frac{x}{a}$

$$u(x,t) = -\frac{c_1}{2} + \frac{c_1}{2} = 0$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x > at \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), & 0 < x < at \end{cases}$$

$t^* = t - \frac{x}{a}$ то же смещение, но в более ранний момент времени t^*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0; +\infty), \ t > 0.$$

гр. усл. $u(0,t) = \mu(t), \quad t > 0$

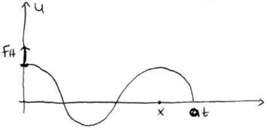
нач. усл. $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \ x \in (0; +\infty)$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\alpha\, \psi(\alpha) + \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

где $\mu(t) = 0$ при $t < 0$. ; $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

$$\psi(-x) = -\psi(x)$$

2-ая кр. з. для полубеск. струны



$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

$$u_x(0,t) = -\frac{1}{a} f'(t) = \nu(t),\ t>0$$

$$u(x,0) = f\left(-\frac{x}{a}\right) = 0,\ x>0$$

$$u_t(x,0) = f'\left(-\frac{x}{a}\right) = 0,\ x>0$$

$$f(y) = 0;\ y<0$$

$$f(t) = -a\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau + c_1,\ t>0$$

$$f(0) = c_1 \underset{\uparrow}{=} 0$$
из нач. усл.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ -a\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau, & \tau>0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{a} \quad (x > at > 0) \\ -a\int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau\cdot\nu(\tau); & t > \frac{x}{a} > 0,\ 0<x<at. \end{cases}$$

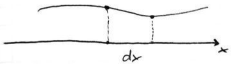
$$u(x,t) = -a\int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau\ \nu(\tau)$$

если считать $\nu(t) = 0,\ t<0$

$$t^* = t - \frac{x}{a}$$

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $t>0$, $x \in (-\infty; +\infty)$

→ непрерывно распред. сила, действующая на струну



$f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho}$ → плотность

$a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$

$\rho f(x,t)\,dx = dF(x,t)$

$u_{tt} = \dfrac{T_0}{\rho} u_{xx} + \dfrac{F(x,t)}{\rho} = f(x,t)$

нач. усл.: $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$

$u_{tt} = a^2 \Delta u$
↓
Лапласиан

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ - сумма 2-ых производ
Лапласиан

Рассм. вспомогат. задачу:

$v_{tt} = a^2 v_{xx}$, $x \in (-\infty; +\infty)$, $t > \tau > 0$.
$v = v(x,t;\tau)$

нач. усл.: $v(x, \underset{t=}{\tau}, \tau) = 0$, $v_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau)$, $x \in (-\infty; +\infty)$

$u(x,t) = \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} d\alpha\, \psi(\alpha) \Leftrightarrow$ →

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$

$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$; $x \in (-\infty; +\infty)$

отсюда следует, что $t \to (t-\tau)$

$\tilde{u}(x,t,\tau) = \dfrac{\varphi(x+a(t-\tau)) + \varphi(x-a(t-\tau))}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\alpha\, \psi(\alpha)$

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (-\infty; +\infty)$ $t > \tau$
$u|_{t=\tau} = \varphi(x)$ $u_t|_{t=\tau} = \psi(x)$

сдвижка на τ не меняет ур-ие

$$\ominus \quad \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{d\alpha}{2a}\,\varphi(\alpha) + \int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{d\alpha}{2a}\,\psi(\alpha)$$

используя ф-лу

$$u(x,t,\tau) = \frac{\varphi(x+a(t-\tau)) + \varphi(x-a(t-\tau))}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\alpha\,\psi(\alpha)$$

можем сразу написать ответ

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau) \quad , t>\tau>0,\ x\in(-\infty;+\infty)$$

Докажем, что $u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau\, v(x,t,\tau)$ — решение задачи.

Проверим:

возьмём производные: $u_t(x,t) = \cancel{v(x,t,t)}^{\,0} + \int\limits_0^t d\tau\, v_t(x,t,\tau) \quad , t>0$

$t>0$

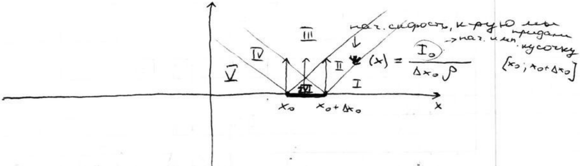
$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0.$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t d\tau\, v_t(x,t,\tau) = v_t(x,t,t) + \int\limits_0^t dt\, v_{tt}(x,t,\tau)$$

$$u_{tt} - a^2u_{xx} - \cancel{f(x,t)} = f(x,t) + \int\limits_0^t d\tau\, v_{tt}(x,t,\tau) - a^2 \times \int\limits_0^t d\tau\, v_{xx}(x,t,\tau) - \cancel{f(x,t)} = \int\limits_0^t d\tau\,[v_{tt}(x,t,\tau) - a^2 v_{xx}(x,t,\tau)] = 0$$

$t>\tau>0$

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \left(\frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \, f(\xi,\tau) \right) \qquad x \in (-\infty; +\infty), \quad t > 0$$



$\psi(x)\,\Delta x_0 \cdot \rho = I_0$ — нач. имп., к-рый получила струна

$$\psi(x) = 0, \qquad x \notin [x_0, x_0+\Delta x_0]$$

$$\psi(x) = \frac{I_0}{\Delta x_0 \cdot \rho}\,; \qquad x \in [x_0; x_0+\Delta x_0]$$

$\Delta x_0 \to 0$, тогда обл. (II, IV, VI) $\to 0$

в обл. I и V смещение $= 0$.

$$u(x,t) = 0.$$

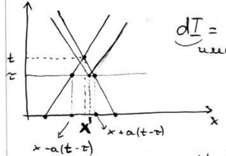
в обл. III: $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} d\alpha\, \psi(x) = \dfrac{1}{2a}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} d\alpha\, \psi(\alpha) = \dfrac{I_0}{2a}\dfrac{\Delta x_0}{\Delta x_0 \rho} = \dfrac{I_0}{2a\rho}$

$$u(x,t) = \frac{I_0}{2a\rho} = \text{const}$$

ф-ция влияния или ф-ция Грина.

24.09 $u(x,t) = \frac{1}{2a\rho}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi\, F(\xi,\tau)$

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{F(x,t)}{\rho}$, $t>0$



$\underbrace{dI}_{\text{импульс}} = F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$

$t > \tau > 0$

$du(x,t) = \frac{dI}{2a\rho} = \frac{1}{2a\rho}F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$

$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \frac{1}{2a\rho}F(\xi,\tau) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \underbrace{G(x,t,\xi,\tau)}_{\text{ф-ция отклика}} \frac{F(\xi,\tau)}{\rho}$

$G = G(x,t,x_0,t_0)$

$x - a(t-\tau) < \xi < x + a(t-\tau)$

ф-ция Хевиссайда $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2a}\eta[\xi - x + a(t-\tau)]\cdot\eta[x + a(t-\tau) - \xi] =$

$= \frac{1}{2a}\eta[x-\xi + a(\underbrace{t-\tau}_{\geq 0})]\cdot\eta[-(x-\xi) + a(t-\tau)] =$

$= \frac{1}{2a}\eta[-|x-\xi| + a(t-\tau)]$

Ф-ция Грина одномерн. волнового ур-ия

$$\boxed{G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2a}\eta[a(t-\tau) - |x-\xi|]}$$

ф-ция Грина - отклик на единичный удар

Беск. струна:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in (-\infty;+\infty),\ t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in (-\infty;+\infty) \end{cases}$$

решение задачи о вынужденных колеб. беск. струны:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} d\xi\, \psi(\xi) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau).$$

1. Классич. решение задачи,

если u_{xx} существует и непрерывн. (существование классического решения)

ψ_x, f_x, f

2. Единственность решения.

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, [\rho u_t^2(x,t) + T u_x^2(x,t)] < \infty$$

пусть имеется 2 решение этой задачи:

$$\begin{cases} u_{1tt} = a^2 u_{1xx} + f(x,t) & \forall x,\ t>0 \\ u_1(x,0) = \varphi(x), \quad u_{1t}(x,0) = \psi(x), & \forall x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} + f(x,t) & \forall x,\ t>0 \\ u_2(x,0) = \varphi(x) \quad u_{2t}(x,0) = \psi(x), & \forall x \end{cases}$$

рассм. $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \qquad x \in (-\infty;+\infty),\ t>0$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

$$E\,[v(x,t)] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ [\rho\, v_t^2(x,t) + T\, v_x^2(x,t)] =$$

$$= E(t)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ [2\rho\, v_t\, v_{tt} + 2T\, v_x \underbrace{v_{xt}}_{\frac{\partial}{\partial x} v_t}] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ [\rho\, v_t\, v_{tt} - T\, v_{xx}\, v_t] + \overbrace{T\, v_x v_t \Big|_{-\infty}^{+\infty}}^{0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \rho\, v_t\, [v_{tt} - \underbrace{\frac{T}{\rho}}_{a^2} v_{xx}]$$

$$E\ [v(x,t)] = \text{const} = E\,[v(x,t)]\Big|_{t=0} = 0$$

$$v_x\ (x,t) = 0$$

$$v_t\ (x,t) = 0$$

$$v\,(x,t) = \text{const}$$

$$u_1\,(x,t) = u_2(x,t) \quad x \in (-\infty; +\infty),\ t \geq 0.$$

Говорят, что задача мат. физики поставлена корректно, если: 1) решение существует; 2) решение единственно; 3) решение устойчиво.

Докажем устойчивость решения нашей задачи.

$$\begin{cases} u_{1tt} = a^2 u_{1xx} + f_1(x,t) & x \in (-\infty; +\infty), t>0 \\ u_1(x,0) = \varphi_1(x) & u_{1t}(x,0) = \psi_1(x) \quad x \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} + f_2(x,t) & x \in (-\infty; +\infty) \quad t>0 \\ u_2(x,0) = \varphi_2(x), & u_{2t}(x,0) = \psi_2(x), \quad x \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$.

$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon \qquad x \in (-\infty; +\infty)$

$t \in [0; t_0]$

если $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$

$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$.

$|f_1(x,t) - f_2(x,t)| < \delta \quad , \quad x \in (-\infty; +\infty)$

$t \in [0; t_0]$

Док-во:

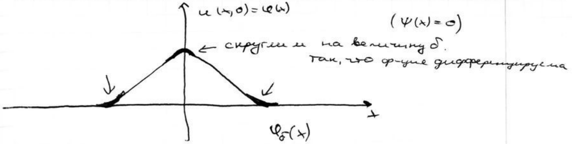
$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)\right] + \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} d\xi \left[\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \left[f_1(\xi,\tau) - f_2(\xi,\tau)\right]$$

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} d\xi\, |\psi_1(\xi)-\psi_2(\xi)| + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \,|f_1(\xi,t) - f_2(\xi,\tau)| < \delta + \delta t + \frac{\delta}{2a}\int\limits_0^t d\tau\, 2a(t-\tau) = \delta\left(1+t - \frac{1}{2}(t-\tau)^2\Big|_{\tau\,0}^{\,t}\right) =$$

$$= \delta\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) \leqslant$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_0$$

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \delta\left(1 + t_0 + \frac{t_0^2}{2}\right)$$



при $\delta = 0 \to$ Δ-к
при $\delta > 0 \to$ скруглённый

$$u_\delta(x,t) = \frac{\varphi_\delta(x+at) + \varphi_\delta(x-at)}{2}$$ (ф-ла Даламбера)

пусть существует предел

$$\lim_{\delta\to 0} u_\delta(x,t) = \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{\varphi_\delta(x+at) + \varphi_\delta(x-at)}{2} \right] =$$

$$= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \varphi_\delta(x) = \varphi(x)$$

треугольник.

Возьмём одномерн. волн. ур-е с внеш. силой 30.09

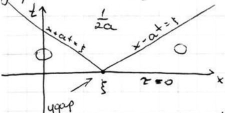
$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $x>0$, $t>0$.

гр. усл.: $u(0,t)=0$, $t>0$

нач. усл.: $u(x,0)=0$; $u_t(x,0)=0$, $x>0$

решим задачу методом продолжений

пусть есть беск. струна, и мы по ней ударили в т. ξ

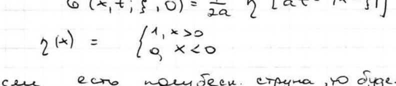


Если струна ∞, то (можем постр) знаем описание с-мы. Построим характеристич. конус

$$G(x,t;\xi,0) = \frac{1}{2a}\eta\left[at-|x-\xi|\right]$$

$$\eta(x) = \begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Если есть полубеск. струна, то будем рассм. её как беск. но продолжим нач. усл. по нечётности:



тогда для беск. струны $G(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2a}\eta\left[a(t-\tau)-|x-\xi|\right]$

$\eta(x) = \begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

удар в точку $x=\xi$, в $t=\tau$

тогда:

тогда для полубеск. струны:

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2a}\eta\,[a(t-\tau)-|x-\xi|] - \frac{1}{2a}\eta\,[a(t-\tau)- |x+\xi|]$$

$x>0,\ \xi>0$

тогда, проинтегрировав, получим ответ:

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\xi\, G(x,t,\xi,\tau)\, f(\xi,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^t d\cancel{t} \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau)$$

решена задача о колеб. полубеск. струны с закреплённым левым концом

1-ая краевая задача: гу: $u(0,t)=\mu(t), t>0$

$$\mu\left(t-\frac{x}{a}\right) + \left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\xi\, \psi(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau)$$

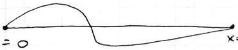
доопределим:

$\mu(t) = 0,\ t<0$

$\varphi(-x) = -\varphi(x)\quad ;\ \psi(-x) = -\psi(x)$

Метод раздел. перем. для 1-ой краевой задачи колебания конечной струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \; t>0$$



гр.усл.: $u(0,t)=0, \; u(l,t)=0, \; t>0$

нач.усл.: $u(x,0)=\varphi(x), \; u_t(x,0)=\psi(x), \; 0<x<l$

Решим задачу методом раздел. перем., т.е.:

1) Найдём набор частн. реш. ур-ия колеб, удовл. гран. усл., но не удовл. нач. усл.

2) затем возьмём сумму частн. решений — это тоже решение задачи.

ищем частное решение в виде:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)\,T(t)$$

$$u_{tt}(x,t) = X(x)\,T''(t)$$, тогда из усл.:

$$X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\,T(t) \;\Big|\cdot \left(X(x)\,T(t)\cdot a^2\right)^{-1}$$

$$X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0$$

разделим переменные

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = const = -\lambda$$ просто так обозначим

$x \in (0,l), \; t>0$

с одной стор. λ явл. только ф-цией $f(t)$

с другой $\lambda = f(x)$ и не завис. от t, т.к. x, t — независ. перем., то $\lambda = const$.

тогда получим 2 ур-ия:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

подставим наше решение $\left(u(x,t) = X(x)T(t) \right)$

в гран. условия: $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0$

Вспомогат. задача

$$u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(l,t) = X(l)\,T(t) = 0 \qquad t > 0$$

т.к. $t > 0$, то: $X(0) = 0$; $X(l) = 0$

рассм. различные случаи знака λ:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \\ 0 < x < l \end{cases}$$

1) пусть $\lambda < 0$: $\quad X''(x) - |\lambda| X(x) = 0.$

общ. решение ур-ия: $X(x) = A\,ch(\sqrt{|\lambda|}\,x) + B\,sh(\sqrt{|\lambda|}\,x)$

$$X(0) = A = 0,\ A = 0$$

$$X(l) = B\,sh(\sqrt{|\lambda|}\,l) = 0\ ;\ sh(\underbrace{\sqrt{|\lambda|}\,l}_{>0}) \overset{\neq 0}{=} 0$$

$sh \neq 0$ при $(\sqrt{|\lambda|}\,l) > 0$

~~Пусть $B \neq 0$ => $A = 0$, $B = 0$~~ тогда $B = 0$

2) $\lambda = 0$

2) $\lambda = 0$, тогда $X''(x) = 0$

$$X(x) = Ax + B$$

$$X(0) = B = 0$$

$$X(l) = A\underbrace{l}_{\neq 0} + \cancel{B}^{0} = 0$$

$$A = 0, \quad X(x) \equiv 0$$

3) $\lambda > 0$

$$X(x) = A \sin(\sqrt{\lambda} x) + B \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$X(0) = B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X(l) = A \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

$$A \neq 0 \qquad \sin(\underbrace{\sqrt{\lambda}\, l}_{\neq 0}) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\, l = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Возможные значение λ имеют такой вид

$$\begin{cases} \lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \end{cases}$$

найдём ф-цию T_n:

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0$$

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + D_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} a t\right)$$

$$u_n(x, t) = \left[C_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + D_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} a t\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

частное решение ур-ия, удовл. гран. условием.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t)$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x),$$

$x \in [0, l]$

Пусть начальное смещение может быть разложено в ряд Фурье: $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \qquad c_n = \varphi_n$$

разложим ф-цию на интервал $(-l; l)$

$f = f(x)$, $x \in [-l; l]$

$f(x+2l) = f(x)$

пусть $f(x)$ - достаточно хорошее (напр., $\exists$ непрер. производные)

тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) +$

ряд Фурье,

где коэфф. заданы такими ф-лами

$+ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$

ф-ция 2π -периодич., где коэфф-ты разлож. опред. интегралами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx\, f(x); \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx\, f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right);$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx\, f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

Вспомним постановку задачи:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ t > 0$$

гр. усл.: $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t > 0$

нач. усл.: $u(x,0) = \varphi(x)$; $u_t(x,0) = \psi(x)$; $0 < x < l$

$\varphi = \varphi(x)\ ,\ x \in [0; l]$

доопределим ф-цию т.е. сделаем нечётн. продолжение:

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$, далее $\varphi(x+2l) = \varphi(x)$
сделаем $2l$-периодичность

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx\, \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = 0$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$b_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

для нач. скорости сделаем то же самое:
(найдём коэфф-ты D_n)

$$u_t(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\Big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{\pi n}{l} a \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \psi(x).$$

ф-цию $\psi(x)$ можно разл. в ряд Фурье

по sin.

Пусть $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \Rightarrow \psi_n = \frac{\pi n}{l} a \cdot B_n$

$$B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n \qquad A_n = \varphi_n$$

подставляем в ответ:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\varphi_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right) + \frac{l}{\pi n a}\psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x \\ \psi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \end{aligned}\right\}\ \text{решение задачи}$$

$\longrightarrow$

Интерпретация решения:
решение имеет вид суммы n гармоник, где

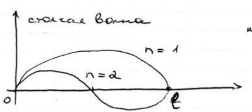
n-тая гармоника: $u_n(x,t) = \alpha_n \cos[\omega_n(t-\delta_n)]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

$$\alpha_n = \sqrt{\varphi_n^2 + \left(\frac{l}{\pi n a}\psi_n\right)^2}, \quad \omega_n = \frac{\pi n}{l}a$$

пусть t - фиксир., тогда

решение для n-той гармоники можно зап. как

$u_n(x,t) = \alpha_n(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right)$ - стоячая волна



каждая т. соверш. гармонич. колеб. по з-ну
$\alpha_n(t) = \alpha_n\cos[\omega_n(t-\delta_n)]$

Для сильнейших: 07.10

Рассм. такую задачу:

одномерное волн. ур-ие

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \ t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ t > 0 \to \text{1-ая кр. задача} -$$

смещение лев. и прав. конца струны $= 0$.

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in (0, l)$$

получим такое решение:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\varphi_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + \frac{\psi_n l}{\pi n a} \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx\, \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx\, \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

В фиксир. мом-т врем. получим

$$u_n(x,t) = \underbrace{\alpha_n}_{\text{амплитуда}} \cos[\omega_n (t - \delta_n)] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

для n-той стоя. волны:

$$u_n = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = 0 \quad \frac{\pi n}{l} x = \pi k$$

$$x = \frac{l}{n} k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

узлы стоячей волны — в к-рых смещение в любой мом. врем. $= 0$.

положение узлов завис. от n

для $n = 2$

пучности стоячей волны:

$$\frac{\pi n}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{l}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right), \ k = 0, 1, n-1.$$

n пучностей

Анализ графика (зависимости от x)

проанализируем завис. от t

$\cos\omega_n(t-\underbrace{\delta_n}_{\text{фаза}})=0$

Посчитаем энергию n-той гармонии:

$$E_n=\frac{1}{2}\int_0^{l}dx\,[\rho u_t^2+Tu_x^2]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{l}dx\,\alpha_n^2\big[\rho\,\omega_n^2\sin^2\omega_n(t-\delta_n)\sin^2\frac{\pi n}{l}x+$$

$$+T\cos^2\omega_n(t-\delta_n)\cdot\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cos^2\frac{\pi n}{l}x\big]\ominus$$

$\omega_n=\frac{\pi n}{l}a$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi n}{l}x\right)$$

$$\ominus\ \frac{l}{4}\alpha_n^2\omega_n^2\left[\rho\sin^2\omega_n(t-\delta_n)+\frac{T}{a^2}\cos^2\omega_n(t-\delta_n)\right]\ominus$$

a^2 - скор. распр. возмущений в струне

подставим $a^2=\frac{T}{\rho}$ $\rho\to$ лин. плотн.

$\|\sin^2+\cos^2=1\|$

$$\ominus\ \frac{l}{4}\alpha_n^2\omega_n^2\cdot\rho\cdot\alpha_n^2\cdot\omega_n^2$$

Основной тон струны

$\omega_1=\frac{\pi}{l}a$

$\omega_1=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ - з-н Мерсена

Полная энергия

$E[u(x,t)] = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n$ → энергия n-ой гармоники.

$E_n = \frac{M}{4}\alpha_n^2\omega_n^2$ — ряд должен сходиться, чтобы энергия в с-ме была конечна

набор ортогональн. ф-ций

$\int_0^l dx \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) = 0$, когда $m \neq n$. это мы хорошо знаем!

$E[u(x,t)] = \frac{1}{2}\int_0^l dx\, [\rho u_t^2 + T u_x^2] =$

$= \frac{1}{2}\int_0^l dx \left[\rho \sum_{m,n=1}^{+\infty} u_{nt} u_{mt} + T \sum_{m,n=1}^{+\infty} u_{nx} u_{mx}\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\rho \sum_{n,m=1}^{+\infty} \alpha_n \alpha_m \omega_n \omega_m \sin\omega_n(t-\delta_n)\cdot \sin\omega_m(t-\delta_m) \int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot \sin\frac{\pi m}{l}x\, dx + \dots\right.$

из-за ортогональности собств. ф-ций

$\left. \dots \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx\right]$

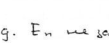
$= \sum_{n=1}^{\infty} E_n$

кажд. E_n не завис. от t

т.е. каждая мода колебл. сама по себе. Полн. эн. с-мы = сумме энергий беск. числа стоячих волн.

α_n опред. из нач. усл.

при $\psi(x) = 0$; $\varphi(x) > 0$; $x \in (0; l)$



$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

$\varphi_1 > 0$

$\varphi_2 = 0$

φ_3

если мы оттянем струну и отпустим, то осн. энергия будет E_1 — осн. тон; более высокие тона — обертоны

Обоснование метода раздел. перем.

Установим достаточные усл., когда решение опис. ф-ой $\int\limits_0^l dx \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=0$

$x \in [0;l]$

хотим, чтобы ряд давал классич. реш.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\varphi_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\frac{\psi_n l}{\pi n a}\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x,t)$$

если ряды

$\sum_n|\varphi_n|<\infty$, $\sum_n\frac{1}{n}|\psi_n|<\infty$ сходятся,

то наш ряд сходится равномерно

$$|u_n(x,t)|<|\varphi_n|+\frac{l}{\pi a}\frac{1}{n}|\psi_n|$$

чтобы сход этот ряд

$$u_{xx}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2n^2\left[\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi n a}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

достаточно, что
должны сходиться ряды:

$$\sum_n n^2|\varphi_n|<\infty;\ \sum_n n|\psi_n|<\infty$$

$$\sum_n n^k|\varphi_n|<\infty,\ \sum_n n^{k-1}|\psi_n|<\infty$$

при $k=0,1,2$

проверим

$u_{tt}=a^2u_{xx}$

и $u(0,t)=u(l,t)=0,\ t>0$ гр. у.

sono stupida!

проверим нач. усл.:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

физические требование: $\varphi(x)$ - непрерывн. ф-ция, такая, что $\varphi(0)=\varphi(\ell)=0$

непрерывности мало.

Достаточно добавить требование кусочной монотонности.

Пусть $\varphi(x)$ дифференцир., т.е.

пусть $\exists$ $\varphi'(x)$ - непрер. проинт. по частям!

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\, d\cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)\left(\frac{\ell}{\pi n}\right) =$$

$0 \to$ т.к. смещение на концах $= 0$

$$= -\frac{2}{\ell}\cdot\frac{\ell}{\pi n}\cancel{\varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)\Big|_0^{\ell}} +$$

$$+\frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)\int_0^{\ell}\cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)\varphi'(x)\,dx =$$ Дирихле

Пусть $\exists$ $\varphi''(x)$ - непрер. на $x\in(0;\ell)$

$$= \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)^2 \cancel{\varphi'(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\Big|_0^{\ell}} - \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)^2\int_0^{\ell} dx\,\varphi''(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x$$

$$\varphi_n = -\frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)^2\int_0^{\ell} dx\,\varphi''(x)\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)$$

необх. существование и 3-ей непрер. производ.
(из рядов Фурье, рез-т не доказываем)

Мы это прекрасно знаем :-)

пусть $\exists$ $\varphi'''(x)$ - кусочно непрерывная; опять по частям:

$$\varphi_n = +\frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)^3\int_0^{\ell}\varphi''(x)\,d\cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) = \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)^3\varphi''(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}x\Big|_0^{\ell} - \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)^3\int_0^{\ell}\varphi'''(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)dx$$

тогда $|\varphi_n| \leq \frac{\tilde{\alpha}}{n^4} = \varphi(x)$

$\psi(x)$ - непрер.

$\psi(0) = \psi(l) = 0$, чтобы опять проинт. по частям.

$\psi'(x)$ - $\exists$ непр., но

$\psi''(x)$ - кусочно-непр., кусочно-монот., (т.е. удовл. Дирихле)

Решим неоднор. ур-ие:

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $x \in (0,l)$, $t>0$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t>0$

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (0,l)$

С пом. метода раздел. перем.:

ищем решение

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right) x$$

в виде стоячей волны, но с другой временной зависим.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = 0$$

$u_n(0) = 0$.

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = 0$$

$u_n(0) = 0$, $\dot{u}_n(0) = 0$ расклад. в ряд Фурье

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

предпол., что есть такое разложен.

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l d\xi\, f(\xi,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left\{\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 u_n(t) - f_n(t)\right\}}_{=0}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)=0$$

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) = f_n(t)$$

08.10

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x\in(0,l),\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, & x\in(0,l) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int^l d\xi\, f(\xi,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) = f_n(t), \quad t>0, \quad \omega_n = \frac{\pi n}{l}a, \quad n=1,2,\dots \\ u_n(0)=0, \quad \dot{u}_n(0)=0 \end{cases}$$

$$u_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t d\tau \sin[\omega_n(t-\tau)]\, f_n(\tau)$$

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\underbrace{\sin\omega_n(t-\tau)}_{0} f_n(\tau)\Big|_{\tau=t} + \frac{\omega_n}{\omega_n}\int_0^t d\tau \cos\omega_n(t-\tau) f_n(\tau)$$

$$u_n(0)=0, \quad \dot{u}_n(0)=0$$

$$\ddot{u}_n(t) = \cos\omega_n(t-\tau) f_n(\tau)\Big|_{\tau=t} - \omega_n\int_0^t d\tau \sin\omega_n(t-\tau) f_n(\tau)$$

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t) =$$

$$= \cancel{f_n(t)} - \cancel{\omega_n\int_0^t d\tau \sin\omega_n(t-\tau) f_n(\tau) + \omega_n\int_0^t d\tau \sin\omega_n(t-\tau) f_n(\tau)} - \cancel{f_n(t)} = 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t d\tau \, \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} f_n(\tau) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t d\tau \, \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l d\xi \, f(\xi,\tau) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \, G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)$$

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)$$

(ф-ция влияния)
ф-ция Грина 1-ой краевой задачи для полубеск. струны

в мом. $t=0$ включ. внеш. сила — и струна соверш. вынужденные колеб.:

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \, G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)}$$

$$\boxed{G(x,t;\xi,\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left[\frac{\pi n}{l} a(t-\tau)\right] \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)}$$

$0<x<l$, $t>0$

$0<\xi<l$, $t>\tau>0$

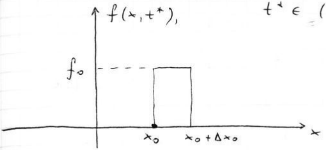
$t \to t+t_0$ — однородность во времени.

поэтому ф-ция G обязана зависеть от $(t-\tau)$

Пусть $f(x,t)=0$ $\quad x \bar{\in} [x_0, x_0+\Delta x_0]$

$f(x,t)=0$, $\quad t \bar{\in} [t_0, t_0+\Delta t_0]$,

где $x_0 \in (0,l)$, $t_0>0$



$t^* \in (t_0, t_0+\Delta t_0)$

теперь $\Delta x_0 \to 0$

$\Delta t_0 \to 0$, но $f_0 \to \infty$

пусть $f_0 \Delta x_0 \cdot \Delta t_0 = \frac{I_0}{\rho}$ -> имп. силы

$\Delta x_0 \to 0, \quad \Delta t_0 \to 0$

$f_0 \to \infty$

упростим (★) : $u(x,t) = \int_0^t \dots$

$t > t_0 + \Delta t_0$

$$u(x,t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} d\tau \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} d\xi \, \overset{t > t_0+\Delta t_0}{G(x,t;\xi,\tau)} f(\xi,\tau) =$$

$\Delta t_0 \to 0, \quad \Delta x_0 \to 0$

по т-ме о сред., вынесем ф-цию Грина из-под интеграла

$$= G(x,t;x_0,t_0) \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} d\tau \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(\xi,\tau) d\xi$$

$$= G(x,t;\ x_0,t_0)\ f_0 \Delta x_0 \cdot \Delta t_0 =$$

$$= G(x,t,x_0,t_0)\ \frac{I_0}{\rho}, \quad \Delta x_0 \to 0, \ \Delta t_0 \to 0$$

возьмём $\rho = 1$, $I_0 = 1$

$$\boxed{u(x,t) = G(x,t;x_0,t_0)} \quad t > t_0 > 0$$

ф-ция Г. $\overset{в\ т.\ x}{\text{конечной}}$ струны $\overset{в\ мом.\ вр.\ t}{\text{равна}}$ смещен. $^{в\ t}$, если в мом. врем. t_0 струну ударили в т. x_0 (сообщили конечн. имп.)

Рассм. более общую задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0$$

концы закреплены: неодноp. 1-ая кр. задача

$u(0,t) = \mu_1(t)$, $t > 0$ – смещ. левого конца струны

$u(l,t) = \mu_2(t)$, $t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $x \in (0, l)$

Общ. метод –

ищем решение задачи в виде

$$u(x,t) = \mu_1(t) + [\mu_2(t) - \mu_1(t)]\frac{x}{l} + U(x,t)$$

при $x = 0$ $u(x,t) = \mu_1(t) + \ldots$

$x = l$, $u(x,t) = \mu_2(t) + \ldots$

роль добавки

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + \tilde f(x,t)$$

$$\tilde f(x,t) = f(x,t) - \mu_1''(t) - [\mu_2''(t) - \mu_1''(t)]\frac{x}{l}$$

$u(0,t) = \mu_1(t) = \cancel{\mu_1(t)} + U(0,t) \Rightarrow$

$\Rightarrow U(0,t) = 0$ – добавка забирает неоднор-ть гран. усл.

$u(l,t) = \mu_2(t) = \mu_2(t) + U(l,t)$

$U(l,t) = 0$

тогда и на правом конце гран. условия однородны

$U(x,0) = \tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu_1(0) -$

$- [\mu_2(0) - \mu_1(0)] \frac{x}{l}$

$U_t(x,0) = \tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \mu_1'(0) - [\mu_2'(0) - \mu_1'(0)] \frac{x}{l}$

это мы производим редукцию задачи – предст. сложную в виде суммы простых

редуцируем дальше...

$U(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$

$w_{tt} + v_{tt} = a^2 w_{xx} + a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x,t)$

хотим $v_{tt} = a^2 v_{xx}$, тогда

$\boxed{w_{tt} = a^2 w_{xx} + \tilde{f}(x,t)}$

хотим, чтобы

$\boxed{w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0}$

нач. усл.

$\cancel{w(x,0)}^{0} + v(x,0) + \tilde{\varphi}(x) \Rightarrow \boxed{v(x,0) = \tilde{\varphi}(x)}$

$\cancel{w_t(x,0)}^{0} + \boxed{v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x)}$

$U(0,t) = 0, = \cancel{w(0,t)}^{0} + \cancel{v(0,t)}^{0} = 0$

для w получим:

решение через G

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + \tilde{f}(x,t) \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

решим методом разд. перем.

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \tilde{\varphi}(x);\ v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

$$w(x,t) = \int_0^t dt \int_0^l d\xi\, G(x,t,\xi,t)\, \tilde{f}(\xi,\tau)$$

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l d\xi\, G(x,t;\xi,0)\, \varphi(\xi) + \int_0^{\xi} d\xi\, G(x,t;\xi,0)\, \psi(\xi)$$

это для красоты.

дома потренируйтесь!

Важный частный случай:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x) \qquad x \in (0;l)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u_1 = \text{const} \\ u(l,t) = u_2 = \text{const} \qquad t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in (0;l) \end{cases}$$

$$u(x,t) = U(x) + \underline{v(x,t)}$$

стационарная неоднородность

при трении исчезает

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \underbrace{a^2 U_{xx}(x) + f(x)}_{=0}$$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

$$a^2 U_{xx}(x) + f(x) = 0$$

$$U(0) + \underbrace{v(0,t)}_{=0} = u_1 \qquad U(0) = u_1 \qquad 0 \le x \le l$$

$$U(l) = u_2$$

$$v(0,t) = 0$$

$$v(l,t) = 0 \qquad \text{кр. задача.}$$

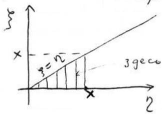
нач. условие:

решим задачу $a^2 U_{xx}(x) + f(x) = 0$:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = -\frac{1}{a^2} f(x) \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = -\frac{1}{a^2}\int_0^x d\xi f(\xi) + C_1$$

$$U(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x d\eta \left(\int_{\xi=0}^{\eta} d\xi f(\xi)\right) + C_1 x + C_2 \to \text{общ. решение}$$

упростим интеграл.



$$U(x) = -\frac{1}{a^2}\int d\xi f(\xi) \underbrace{\int_{\eta=\xi}^{x} d\eta}_{=(x-\xi)} + C_1 x + C_2 =$$

$$U(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x d\xi (x-\xi) f(\xi) + C_1 x + C_2$$

$$U(0) = C_2 = u_1$$

$$U(l) = -\frac{1}{a^2}\int_0^l d\xi (l-\xi) f(\xi) + C_1 l + u_1 = u_2$$

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{l} + \frac{1}{l a^2}\int_0^l d\xi (l-\xi) f(\xi)$$

$$C_2 = u_1$$

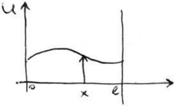
это ответ.

$$\boxed{U(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x d\xi (x-\xi) f(\xi) + \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1 + \frac{x}{l a^2}\int_0^l d\xi (l-\xi) f(\xi)}$$

14.10 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (0; l)$, $t > 0$

гр. усл.: $u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $t > 0$

н. у.: $u(x,0) = \varphi(x)$; $u_t(x,0) = \psi(x)$, $x \in (0; l)$



ищем частн. реш.:

$$u_z(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)\,T''(t) = a^2 T(t)\,X''(x)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \ X'(l) = 0 \\ x \in [0; l] \end{cases}$$

1) $\lambda < 0$, $\lambda = -|\lambda|$

$$X''(x) - |\lambda| X(x) = 0$$

$$X(x) = A\, sh(\sqrt{|\lambda|}\, x) + B\, ch(\sqrt{|\lambda|}\, x)$$

$$X'(x) = A\sqrt{|\lambda|}\, ch(\sqrt{|\lambda|}\, x) + B\sqrt{|\lambda|}\, sh(\sqrt{|\lambda|}\, x)$$

$$X'(0) = A \cancel{\sqrt{|\lambda|}} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$X'(l) = B\sqrt{|\lambda|}\ sh\,(\underbrace{\sqrt{|\lambda|}\,l}_{\to 0}) = 0 \Rightarrow B = 0$

нет решений

2) при $\lambda = 0$

$X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$

$X'(x) = A, \quad X'(0) = X'(l) = 0 = A$

$X(x) = \tilde{B}, \quad \tilde{B} \neq 0.$

3) $\lambda > 0$

$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

$X'(x) = -\sqrt{\lambda}\,A\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$

$X'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0 \to B = 0$

тогда $X'(l) = -\sqrt{\lambda}\,A\sin(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$

$A \neq 0 \qquad \sqrt{\lambda}\,l = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

возм. знач. λ: $\quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

$\boxed{X_n = A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)} \qquad \boxed{\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n = 1, 2, \ldots}$

$\lambda_0 = 0$

$X_0(x) = A_0$

$n = 0$

$\lambda_0 = 0 \qquad T_0''(t) = 0 \Rightarrow T(t) = C_0 t + D_0$

$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t) = 0$

$T_n(t) = C_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right) + D_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)$

$$u_0(x) = X_0(x)\,T_0(t) = C_0 t + D_0$$

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = \left(C_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + D_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} a t\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$\tilde{C}_n = C_n A_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$

$x \in (-l; l)$

$$\int_0^l dx \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{l} x\right) = 0 \quad , \quad n \neq m, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_0^l dx \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot 1 = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ \alpha X(0) + \beta X'(0) = 0 \\ \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0 \\ x \in [0; l] \end{cases}$$

$\alpha^2 + \beta^2 > 0$

$\gamma^2 + \delta^2 > 0$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$

1. $X_n(x)$ ф-ции образуют полный набор ф-ций

2. $F(x) = \sum_{\lambda_n} A_n X_n(x) \quad \forall F(x)$ хороший (т.е. удовл. гран. усл.):

можно разл. в ряд собств. ф-ций

3. $\int_0^l dx\, X_n(x) X_m(x) = 0, \quad n \neq m$

$$X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \quad \Big| \cdot X_m(x)$$

$$X_m''(x) + \lambda_m X_m(x) = 0 \quad \Big| \cdot X_n(x)$$

$$X_m(x) X_n''(x) - X_n(x) X_m''(x) + (\lambda_n - \lambda_m) X_n X_m = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[X_m(x) X_n'(x) - X_n(x) X_m'(x) \right] +$$

$$+ (\lambda_n - \lambda_m) X_n(x) X_m(x) = 0.$$

$$\left[X_m(x) X_n'(x) - X_n(x) X_m'(x) \right]\Big|_0^l \stackrel{(=)}{=} (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l dx\, X_n(x) X_m(x)$$

$\int_0^l dx \ldots$

$0 \neq$ if $\lambda_m \neq \lambda_n$,

тогда:

если левая часть $= 0$, то мы получим ортогональность собств. знач.

из $\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0 \longrightarrow X_{n,m}'(0) = -\frac{\alpha}{\beta} X_{n,m}(0)$

$$X_{n,m}'(l) = -\frac{\gamma}{\delta} X_{n,m}(l)$$

$\stackrel{(=)}{=} X_m(l) X_n'(l) - X_n(l) X_m'(l) - X_m(0) X_n'(0) + X_n(0) X_m'(0) =$

$= X_m(l) \cancel{\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)} X_n(l) - X_n(l) \cancel{\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)} X_m(l) + 0$

доказали ортогональность.

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) =$$

$$= c_0 t + D_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[c_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + D_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} a t\right)\right] \times$$

$$\times \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$u(x,0) = D_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x), \; x \in (0,l)$$

$$D_0 \int_0^l dx\, 1 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_m \underbrace{\int_0^l dx \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot 1}_{\to 0} =$$

$$= \int_0^l dx\, \varphi(x)$$

$$D_0 \int_0^l dx \cos\left(\frac{\pi m}{l} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l dx \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{l} x\right) =$$

$$= \int_0^l dx\, \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi m}{l} x\right)$$

$$D_0 = \frac{1}{l} \int_0^l dx\, \varphi(x) \; ; \; C_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx\, \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$u_t(x,0) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \frac{\pi n}{l} a \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \psi(x)$$

$$c_0 = \frac{1}{l} \int_0^l dx\, \psi(x)$$ — среднее началн. скор-ть или скор-ть центра масс

I-ая кр. задача

$$G(x,t,\xi,\tau) = \sum_{\lambda_n} \frac{1}{\omega_n} \sin[\omega_n (t-\tau)] \cdot \frac{X_n(x)\cdot X_n(\xi)}{\|X_n\|^2}, \quad \|X_n\|^2 = \ell/2$$

частота

$\omega = c\,k \to$ волн. вект.

$\omega_n = \sqrt{\lambda_n}\, a \to$ имеет смысл волн. вектора.

смысл констант:

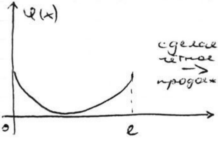
D_0 - ср. смещ.

C_0 - ср. нач. скор.

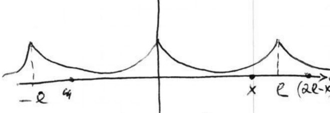
$\underbrace{v_0}_{\text{начальн. скор. смещ.}} t + u_0 \to$ начальное положение центра масс.

решение этой задачи может быть опис. ф-лой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\xi\, \psi(\xi)$$



сделаем чётное продолж. $\to$



$\varphi(-x) = \varphi(x)$

чётное продолжение $\longrightarrow \varphi(x) = \varphi(2\ell - x)$

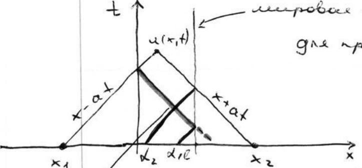
то же для $\psi(x)$:

для 1-ой краевой задачи:

$$\varphi(x) = \varphi(-x)$$

$$\varphi(x) = -\varphi(2l-x) \qquad \text{ф-ция } 2l\text{-периодична}$$

мировая линия



для простоты: $\psi(x)=0$.

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}$$ -> смещение в точке x_2

провела || прямой $(x+at)$

тогда $u(x,t) = \dfrac{\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_2)}{2}$

могу решать такие задачи графически :-)

21.10

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \ t > 0$

$u_x(0,t) = 0 \qquad u_x(l,t) = 0$

$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$

$$u(x,t) = \int_0^l d\xi \, G(x,t;\xi,0)\,\psi(\xi)$$

$$G^{(II)}(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n} \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n (t-\tau) \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{\|X_n\|^2}$$

$$X_n = \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n}\, a$$

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$

$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(l,t) = 0$

$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0.$

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \, G^{(II)}(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)$$

2-ая кр. задача (II)

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0, l), \ t > 0$

$u_x(0,t) = \nu_1(t), \qquad u_x(l,t) = \nu_2(t), \ t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$

$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$

(I) $\quad U(x,t) = c_1(t) + c_2(t) \cdot x$

(II) $\quad U(x,t) = c_1(t) + c_2(t) x + c_3(t) x^2$

:)

я хочу:

гр.усл.: $\begin{cases} U_x(0,t) = \nu_1(t) \\ U_x(l,t) = \nu_2(t) \end{cases} \quad t>0$

$c_2(t) = \nu_1(t)$ -> нах. c_2

$c_2(t) + 2l\,c_3(t) = \nu_2(t)$

$c_3(t) = \dfrac{\nu_2(t) - \nu_1(t)}{2l}$

$$U(x,t) = c_1(t) + \nu_1(t)\cdot x + \frac{[\nu_2(t) - \nu_1(t)]}{2l}x^2$$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \hat{f}(x,t), \quad x\in(0,l),\ t>0.$$

$$\hat{f}(x,t) = f(x,t) - U_{tt}(x,t) + a^2 U_{xx}(x,t).$$

$$v_x(0,t) + \cancel{U_x(0,t)} = \cancel{\nu_1(t)}$$

подбираем такую U, чтобы она забирала на себя неоднор-ть. (вн. „я хочу")

$$v(x,0) + U(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow \boxed{v(x,0) = \tilde{\varphi}(x)},$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x,0)$$

$$v_t(x,0) + U_t(x,0) = \psi(x)$$

н.у.

$$\boxed{v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x)}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - v_t(x,0)$$

специфика 3-ей краевой задачи:

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0,l), \ t>0$

$$\text{гр.у.}\begin{cases} u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0. & h_1>0 \\ u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0 & h_2>0 \end{cases}$$

лев. конец; прав. конец; упругая заделка

h_2 — коэфф. жёсткости

$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in (0,l)$

$u_2(x,t) = X(x)T(t)$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$

получаем ~~зад~~ 3-ю кр. з.: $\begin{cases} X'(0) - h_1 X(0) = 0 \\ X'(l) - h_2 X(l) = 0 \end{cases}$

$x \in [0,l]$

$\lambda_n > 0, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ счётн. набор.

$X_n(x)$

$X_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) + B_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)$

$\|X_n\|^2$ — завис. от n

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t) X_n(x)$

$f(x) = \sum_n D_n X_n(x)$

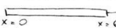
гр. усл.: $\begin{cases} u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = \psi_1(t) \\ u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = \psi_2(t) \end{cases}$

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$$

производим линейную сдвижку

роль ф-ции - что она забирает неоднор. гр. усл.

физ. смысл $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ - то, что они явл. смещения стеночки (пропорц.)



хотим, $U(x,t) = c_1(t) + c_2(t)x$

чтобы

$U(x,t)$ удовлетв. неоднор. гр. усл. для 3-ей кр. зад.

Хотим:

$$\begin{cases} U_x(0,t) - h_1 U(0,t) = \psi_1(t) \\ U_x(l,t) + h_2 U(l,t) = \psi_2(t) \end{cases}$$

$$U_x(x,t) = c_2(t)$$

$$\left.\begin{cases} c_2(t) - h_1 c_1(t) = \psi_1(t) \\ c_2(t) + h_2 c_1(t) + h_2 l\, c_2(t) = \psi_2(t) \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -h_1 c_1(t) + c_2(t) = \psi_1(t) \\ h_2 c_1(t) + c_2(t)(1 + h_2 l) = \psi_2(t) \end{cases}$$

решение единств., если $\det \neq 0$.

$$\det = \begin{vmatrix} -h_1 & 1 \\ h_2 & 1 + h_2 l \end{vmatrix} =$$

$$= -h_1 - h_1 h_2 l - h_2 \to \text{всегда} \neq 0$$

$$= -(\underset{\geq 0}{h_1} + \underset{\geq 0}{h_2} + \underset{\geq 0}{h_1 h_2 l})$$

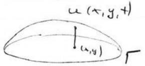
Итак if $h_1^2 + h_2^2 \neq 0 \Rightarrow \det \neq 0.$

$u_{tt} = a^2 \Delta u$ — многомерное (верх) волн. ур-ие

a^2 — кв. скор. распр. возмущ.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Лапласиан.}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u \\ u\Big|_{\Sigma} = 0 \quad (\mathrm{I}) \\ u(\vec{r}, 0) = \varphi(\vec{r}) \qquad \vec{r} \in D \\ u_t(\vec{r}, 0) = \psi(\vec{r}) \\ u = u(\vec{r}, t) \end{cases}$$



$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}$

$u|_{\Gamma} = 0$

рассм. ур-ия параболич. типа

$u_t = a^2 u_{xx}$

$\vec{q} = -\varkappa \nabla u$

$q = -\varkappa u_x$

a^2 - коэфф-т температуропров-ти.

$a^2 = \frac{\varkappa}{c\rho}$ плотн.

$x \in (-\infty; +\infty)$

$u(x,0) = \varphi(x)$ нач. усл. однородное.

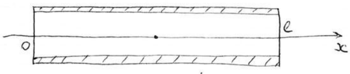
$(dt)^2 = 0$

$t = const$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$

рассм. процесс распростр. тепла в ограничен. стержне

н.у. $u(x,0) = \varphi(x)$



$u = u(x,t)$

Параболич. тип.

Iая кр. зад.
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0,l),\ t>0 \\ u(0,t)=0, & u(l,t)=0 \quad t>0 \\ \text{н.у. } u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

решение

$$u_2(x,t) = X(x)\,T(t)$$

метод раздел. перем. для одномерн. ур-ия теплопров.

$$X(x)\,T'(t) = a^2 X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, & n = 1,2,3\ldots \\ X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$
$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T(t) = 0.$$

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = A_n \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx\, \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \; \frac{2}{l} \int_0^l d\xi\, \varphi(\xi) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) =$$

$$= \int_0^l d\xi \left(\underbrace{\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right)}_{G\text{ - ф-ция Г.}} \right) \varphi(\xi) \Rightarrow$$

однор. ур-ие теплопров.

реш. задачи можно предст. в виде

$$u(x,t) = \int_0^l d\xi\, G(x,t;\xi,0)\, \varphi(\xi)$$

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau)}$$

$$t > \tau$$

$$x \in (0, l)$$

$$\xi \in (0, l)$$

$f(x,t)\,dx\,dt =$ это тепло :)

$= \dfrac{F(x,t)}{c\rho}\,dx\,dt$

$f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$ $\quad$ c – теплоёмкость единицы массы

$u_t = a^2 u_{xx}$ – ур-ие тепл. баланса

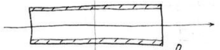
неоднородн. ур-ие теплопров $\quad$ 22.10

$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $x \in (0,l)$, $t>0$

$\underset{\text{температура}}{u(0,t)} = 0$, $u(l,t)$, $t>0$

н.у. $u(x,0) = 0$ – нач. т-ра $= 0$
$x \in (0;l)$

покажем, что реш. выражается чер. G.



$x=0$ $\quad$ $x=l$

$u = u(x,t)$

ищем решение в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\, X_n(x)$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

метод собств. ф-ций

продифф.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \dot{u}_n(t)\, X_n(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t)\, X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \quad (1)$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\, X_n(x), \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l d\xi\, f(\xi,t)\, X_n(\xi)$$

коэфф-ты разложения.

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\dot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n(t) - f_n(t) \right] X_n(x) = 0.$$

тогда $=0$

$$\dot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\, X_n(x) = 0.$$

$$u_n(0) = 0$$

сразу пишу ответ:

$$u_n(t) = \int_0^t d\tau\, e^{\left(-\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t d\tau\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, X_n(x) =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} X_n(x) X_n(\xi) \right) f(\xi,\tau)$$

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l d\xi\, G(x,t,\xi,\tau)\, f(\xi,\tau)$$

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right)$$

$x \in (0;l)$, $\xi \in (0;l)$, $t > \tau > 0$.

$$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho c}$$

физич. интерпр. ф-ции G

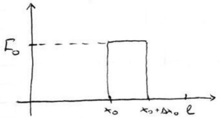
для 1-ой кр. задачи:

рассм. случай $F(x,t) = 0$, $x \overline{\in} [x_0, x_0 + \Delta x_0]$

для тех, кто уже познакомился с δ-ф. Дирака:

$$F(x,t) = \text{const}\, \delta(x - x_0)\, \delta(t - t_0)$$

$F(x,t)=0, \quad t \overline{\in} [t, t_0+\Delta t_0]$



закачиваем порцию тепла ΔQ

$$F(x_0,t_0)\,\Delta x_0\,\Delta t_0 = \Delta Q$$

$$\Delta x_0 \to 0, \quad \Delta t_0 \to 0$$

$$F_0 \to \infty,$$

так что $\Delta Q = const$

тогда $$u(x,t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} d\tau \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} d\xi\, G(x,t,\xi,\tau)$$

$$t > t_0+\Delta t_0$$

$$x \in (0, l)$$

$$\frac{F(\xi,\tau)}{c\rho} = G(x,t,x_0,t_0) \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} d\tau \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} d\xi\, F(\xi,\tau)$$

$\Delta x_0 \to 0 \quad \Delta t_0 \to 0$

ΔQ - кол-во закачанного тепла

$$u(x,t) = G(x,t,x_0,t_0)\frac{\Delta Q}{c\rho}$$

пусть $\Delta Q = c\rho$, тогда ~~как~~ $G(x,t,x_0,t_0) = u(x,t)$

наша ф-ция Грина — это т-ра при закачке кол-ва тепла $\Delta Q = c\rho$.

получим ф-лу $u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l d\xi\, G(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau)$

теперь мгновен. тепл. удар в $t=0$

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0,l),\ t>0$$
$$u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0,\ t>0$$
$$u(x,0)=\varphi(x).$$

затрачен кол-во тепла на интервал Δt.

$$\Delta Q = F(x_0,t_0)\,\Delta x_0\,\Delta t_0 = c\rho\,\Delta x_0\, U(x_0,t_0)$$
$$u(x_0,t_0) = \frac{F(x_0,t_0)}{c\rho}\Delta t_0$$
$$u(x_0,t_0) = f(x_0,t_0)\,\Delta t_0$$

пусть $t_0=0$, а $\Delta t_0 \to 0$

так, что $f(x_0,t_0)\,\Delta t_0 \to \varphi(x_0)$

$$u(x,t) = \int_0^{\Delta t_0} d\tau \int_0^l d\xi\, G(x,t,\xi,\tau) = \{\Delta t_0 \to 0\} =$$
$$= \int_0^l d\xi\, G(x,t,\xi,0) \int_0^{\Delta t_0} f(\xi,0)\,\Delta t_0 =$$

$$u(x,t) = \int_0^l d\xi\, G(x,t,\xi,0)\,\varphi(\xi)$$

$$f(x,t) = \varphi(x)\,\delta(t)$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0, l), \ t>0$$

$$u(0,t) = \mu_1(t); \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t>0$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l)$$

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t).$$

Хотим, чтобы $U(0,t) = \mu_1(t)$

$U(l,t) = \mu_2(t)$

пусть например $U(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{(\mu_2(t) - \mu_1(t))}{l} x$

$$v_t = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x,t)$$

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - U_t(x,t)$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0$$

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x,0)$$

дальше задачу решаю так:

$$v(x,t) = \tilde{v}(x,t) + w(x,t),$$

где
$$\begin{cases} \tilde{v}_t = a^2 \tilde{v}_{xx} \\ \tilde{v}(0,t) = 0, \quad \tilde{v}(l,t) = 0 \\ \tilde{v}(x,0) = \tilde{\varphi}(x) \end{cases}$$

$$w_t = a^2 w_{xx} + \tilde{f}(x,t)$$

$$w(0,t) = 0 \quad w(l,t) = 0$$

$$w(x,0) = 0$$

$$u(x,t) = U(x,t) + \tilde{v}(x,t) + w(x,t).$$

Общ. свва ур-ний теплопроводности

общ. вид ур-ия парабол. типа

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v$$

$$\alpha, \beta, a^2 \to \text{const}.$$

сделаем замену: $v(x,t) = e^{\lambda x + \mu t} u(x,t)$

$$v_t = e^{\lambda x + \mu t} (u_t + \mu u)$$

$$v_x = e^{\lambda x + \mu t} (u_x + \lambda u)$$

$$v_{xx} = e^{\lambda x + \mu t} (u_{xx} + 2\lambda u_x + \lambda^2 u$$

$$u_t + \mu u = a^2 u_{xx} + 2\lambda a^2 u_x + \lambda^2 a^2 u + \alpha u_x + $$
$$+ \alpha \lambda u + \beta u$$

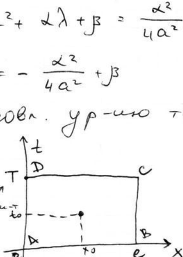
$$u_t = a^2 u_{xx} + \underbrace{(2\lambda a^2 + \alpha)}_{0} u_x + \underbrace{(\lambda^2 a^2 + \alpha\lambda + \beta - \mu)}_{0} u$$

пусть $\lambda = -\frac{\alpha}{2a^2}$

$$\mu = \lambda^2 a^2 + \alpha\lambda + \beta = \frac{\alpha^2}{4a^2} - \frac{\alpha^2}{2a^2} + \beta =$$
$$= -\frac{\alpha^2}{4a^2} + \beta$$

пусть u удовл. ур-ию теплопр.:

$u_t = a^2 u_{xx}$



пусть u - решение ур-ие

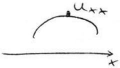
и $u(x,t)$ - непрер. ф-ция в $\overline{ABCD}$ - замкн. прямоуг.

пусть $u(x,t)$ удовлетв. ур-ию: 1) $u_t = a^2 u_{xx}$

2) однор. ур-ию теплопр-ти в $x \in (0, \ell)$ и $0 < t \le T$

Тогда max. значение (и min тоже) температура достигает на границах AD или BC или AB.

пусть $u(x_0, t_0)$ имеет максимум в (x_0, t_0)



тогда $u_{xx}\Big|_{x_0, t_0} < 0$

$$u_t \Big|_{x_0,t_0} = a^2 u_{xx}\Big|_{x_0,t_0} < 0$$

получили противоречие.

значит, максимума в (x_0, t_0) нет.