Слинко Валерий Анатольевич ММФ

01.09.11.

диф. ур. в част. производных
класс. ур. в част. произв.

[Гиперболич. тип]

(1) $U_{tt} = a^2 \Delta U = 0$, $u = u(\vec{x}, t)$ — волновое ур-е — мех. сист.

$U_t = \frac{\partial U}{\partial t}$, $U_{tt} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ ф-я род. вект. в 3-х м. пр-ве (много. пр. ве)

колебания в сплошной среде, колебание струны, колебание плотности возд. Колебание скалярн. потенциала эл.маг. поля в аудит.

(2) $U_t = a^2 \Delta U$, $u = u(\vec{x}, t)$ процесс распр. тепла в теле

ур-е теплопроводности → [параболич. тип] (U - температура)

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\vec{x} = (x, y, z)$ — термодинам. сист.

(3) $\Delta U = 0$ ур-е Лапласа, $u = u(\vec{x})$ U - не зав. от времени (ф-я 3-х перем-х)

[эллипт. тип]

некий частный случай предыдущ-х ур-й

стационар. сит.

$\Delta U = f(\vec{x})$ ур-е Пуассона - ему удовлет. потенц. электростат. поля

$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0$ одномерные (плоские) задачи

ур. в част. произв-х 2-го порядка ва 3 ур-я
линейные (и входит линейно)

$u = u(x, t)$ $x \in [0, l]$ растянутая струна Континуальный набор решений (∞)

$u(x, 0) = \varphi(x)$ дает нач. профиль струны

бесконечномерная мех. сист. описыв.-ся теорией поля
(беск. много степеней свободы)

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad u = u(x,t) \qquad x \in [0, l]$ $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$ н.у.

$u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0$ концы струны

гран. условия

чтобы однозн. найти решение необх. доп. усл.

(гиперболич. тип)

(3) $\Delta u = 0 \qquad u = u(\vec{x})$

только н.у.

найти реш-е ур. Лапл. внутри нек. обл-ти

$\rightarrow u|_S = f$ на границе S

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = g$ задана произв. по нормали

Метод характеристик (гип. тип)

Метод раздел. переменных (все типы) → ищем частные решения

$u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$ (ищем реш-е в таком виде)

$x^2 q''(x) + x \cdot q'(x) + (x^2 - \nu^2) q(x) = 0$ → ур-е для цилиндр. ф-й

удовлетв. ф-я Бесселя

спец. ур. мат. физ.

ν - порядок цилиндр. ф-ции

полиномы Лежандра, сфер. ф-ции, шаровые ф-ции

чт (через нед.) программа курса + список задач (на сайте)

→ Тихонов А.Н., Самарский А.А. „Ур-я мат. физики"

→ В.С. Владимиров „Ур-я мат. физики" (для математиков)

Классиф. ур-й в частных производных 2-го порядка

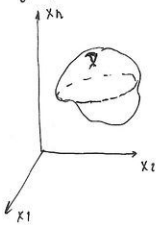
def: ур-е в част. произв-х $\to F(x_1, x_2, .. x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, .. \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, .. \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = 0$

такая ф-я наз. ур-м в част. произв.

$u = u(x_1, .. x_n)$

соотношение, кот. связыв.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n} = 0$ ур. Лапласа (пример) n измерений



def: реш-е: $u = u(x_1, .. x_n)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, .. x_n) \in D$

непр. ф-я

$\exists$ частные произв-е 2-го пор., они явл. непр. ф-ми

$\exists \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$

порядок диф. ур. $\to$ порядок наивысшей произв.

Линейное уравнение относит. старшей произв. (вторые)

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F_1(x_1, x_2, .. x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, .. \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

$A_{ij} = A_{ij}(x_1, .. x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, .. \frac{\partial u}{\partial x_n})$

Коэф.

просто лин. ур-е:

$$\sum_{ij=1}^{n} A_{ij} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C \cdot u + \underbrace{f(x_1, .. x_n)}_{F} = 0$$

квазилин. ур-е

$A_{ij} = A_{ij}(\vec{x})$

$B_i = B_i(\vec{x})$

$C = C(\vec{x})$

$F = F(\vec{x})$

if $F \equiv 0$ то ур-е наз. лин. однородным

if вс коэф. $A, B, C = const \to$ ур-е с пост. коэф.

F - неоднородность ур-я (свободный член)

Класс. реш-е ур-я: требования непрер. ти

преобразования, не меняющие хар-р ур-я (порядок)

Инвариантность при замене координат:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C\cdot u + F = 0$$

новые координаты: $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots x_n) \quad i = 1,\dots n$

например сферические, цилиндрические

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)} \neq 0$$ (якобиан перехода от старых координат к новым $\neq 0$)

$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$

$$u = u(x_1, \dots x_n) = u(x_i(\xi_1, \dots \xi_n)) = \tilde{u}(\xi_\ell)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}(\xi_j)}{\partial \xi_j}\cdot\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right)$$; линейность сохраняется

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}(\xi)}{\partial \xi_\ell}\cdot\left(\frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_i}\right)\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi)}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell}\cdot\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_i}\right) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}(\xi)}{\partial \xi_\ell}\frac{\partial^2 \xi_\ell}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\sum_{\ell,k=1}^{n} \tilde{A}_{\ell k}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_\ell \partial \xi_k} + \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{B}_\ell \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} + \tilde{C}\cdot u + \tilde{F} = 0$$

$$\tilde{A}_{\ell k} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\cdot\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_i}$$

ф-ла преобразования коэф. при старших производных при произвольной замене координат

06.09.11

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad u = u(x) \quad x = (x_1, x_2, \dots x_n)$$

$(A)_{ij} = A_{ij}$ — коэф. образуют симметр. матр.

матрица

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \qquad A_{ij} = A_{ji}$$

$x \to \xi = \xi(x) \quad \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \neq 0, \ x = x(\xi)$

при таком преобразовании ур-е сохраняет свой вид (остается линейным)

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} \tilde{A}_{k,\ell}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell} + \tilde{\varphi}\left(\xi, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$$

общий случай — мы будем рассм. такой случай

$\widetilde{A}_{ke}$ $\quad A_{ij} = A_{ij}(x, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ $\quad \boxed{A_{ij} = A_{ij}(x)}$

$x^{(0)} \to y^{(0)} = f(x^0)$ локальная обратимость

$(J)_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ $\quad \widetilde{A}_{ke} = \sum_{ij=1}^{n} J_{ki} A_{ij} J_{ej}^{T}$

k, i-й матричный эл-т матр. Якоби J

Св-во 1:

1) $\boxed{\widetilde{A} = J \cdot A \cdot J^T}$

новые коэф. преобраз-ся по такому з-ну (совпадают з з-н преобраз. квадратич. форм)

2) $\boxed{\widetilde{A}_{ek} = \widetilde{A}_{ke}}$

Св-во симметрии сохр.

з-н преобраз. коэф. при старш. произв-й при нелинейной замене с точ. соотв. с з-м преобраз. квадр. ф-м

∀ квадр. ф-ку можно по особой замене переменной (лин.) привести к диаг. виду

$\sum_{ij=1}^{n} A_{ij} p_i p_j = \left| \begin{matrix} p \to q \\ p = \eta \cdot q \end{matrix} \right| = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i q_i^2$

Лин. замена $\det \eta \neq 0$ (не особая)

$\gamma_i = \overset{\alpha}{1}, \overset{\beta}{-1}, \overset{\gamma}{0}$ $\quad \boxed{\alpha + \beta + \gamma = n}$

Число коэф. явл. inv квадр. ф. (не зав-т от способа приведения кв. ф. к диаг. виду)

↓

[з-н инерции квадр-х форм]

Метод выделения полного квадрата

$x^{(0)} \to A_{ij}(x^{(0)})$ (обычн. числ. матр.) $\to y = J \cdot x$ (лин. замена) $\to \widetilde{A} = J \cdot A \cdot J^T = \begin{pmatrix} +1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & +1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ (α шт. +1, β шт. −1, γ шт. 0)

$x^{(0)}$ — фиксируем точку n-мерного пр-ва

фикс. матрицу

$\det J \neq 0$

n - порядок кв. ф.

матр. принимает диаг. вид в новых переменных

Наше ур-е в новых перем-х (канонич. ф-ма):

$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial f_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial f_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial f_\alpha^2}}_{(+1)\ \alpha \text{ шт.}} \underbrace{- \frac{\partial^2 u}{\partial f_{\alpha+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial f_{\alpha+\beta}^2}}_{(-1)\ \beta \text{ шт.}} + \widetilde{\Phi}\left(f, u, \frac{\partial u}{\partial f}\right) = 0$

в каждой т. можно обычной лин. заменой привести ур-е к более простому виду!

(α, β, γ) исходное ур-е α, β, γ-типа

$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le n$ $\quad \gamma \neq n$ три неотриц. числа

$(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\beta, \alpha, \gamma)$ одно и то же ур-е (исх. ур-е домножено на -1)

$\alpha + \beta + \gamma = n$, $\gamma \neq n$

подклассификация:

(1) эллипт. типа $\rightarrow$ $\alpha = n$ $(\beta = n)$ $\quad (n,0,0) \sim (0,n,0)$

Пример: ур-е Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$

(2) гипербол. тип $\rightarrow$ $(1, n-1, 0) \sim (n-1, 1, 0)$

$\alpha = 2$ $(\beta = 2)$ ультрагиперб. тип
$\alpha(\beta) > 1$

Волн-е ур-е: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$

(3) параболич. тип $\rightarrow$ $(n-1, 0, 1) \sim (0, n-1, 1)$

ур-е теплопров-ти: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1} - \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}}_{n-1} = 0$

тип ур-я сразу опред-ся из хар-го ур-я:

вводим поточечную классиф. если тип ур-я меняется в др. т. $\Rightarrow$ смешанный тип, if не

(1) $|A_{ij} - \lambda \cdot E| = 0$ составл. хар-е ур-е

(2) находим λ, опред. знаки; $\begin{bmatrix} \text{число положит. собств. зн-й} = \alpha \\ \text{число отриц. собств. зн.} = \beta \\ \text{число нулевых собств. зн.} = \gamma \end{bmatrix}$ меняется $\rightarrow$ тип (α, β, γ) в нашей обл.

пример:
(ур-е смеш. типа)

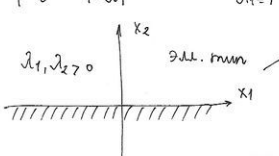
$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ $\quad A_{11} = x_2$ $\quad A_{12} = 0$ $\quad A_{22} = 1$ $\quad A_{21} = 0$

$\begin{vmatrix} x_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ $\quad (\lambda - 1)(\lambda - x_2) = 0$ $\quad \underline{\lambda_1 > 0}$

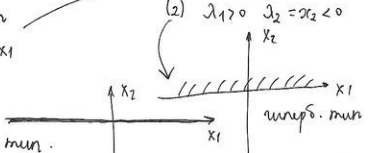
$\lambda_1 = 1$ $\quad \lambda_2 = x_2$

эллипт.

(1) $\lambda_2 = x_2 > 0$ if $x_2 > 0$ $\quad (2,0,0)$



(2) $\lambda_1 > 0$ $\quad \lambda_2 = x_2 < 0$ $\quad$ тип $(1,1,0)$ гиперб.



(3) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = x_2 = 0$ параболич. тип.

(Трикоми) $x_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$

ур-е

характеристики

Понятие хар-го ур-я

$\widetilde{A}_{11} = 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j} = 0 \quad \xi_1 = \xi_1(x)$

ур-я характеристик наз. след. д.у: $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) = 0$, $w = w(x_1, x_2, \ldots)$

~~всякое реш-е эт. ур-я~~

$w(x) = const$, поверхность в пр-ве перем. $x \to$ хар-ая пов-ть

это ур-е опред-т гиперповерхность $n=2$ $w(x_1, x_2) = const$

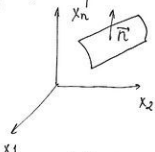
хар-ки будут линиями в пр-ве x_1, x_2

$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad A_{ij} = A_{ij}(x)$

хар-е ур-е – ур-е в частн-х пр-х 1-го порядка

задача Коши для ур-я 2-го пор. /гиперболич. тип./

задается смещение, нач. скор.



$u|_S = \varphi$

$\vec{n}$ - нормаль

$\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_S = \psi$

Ко-реш-е

рассмотр. малое возмущение

$u^{(0)} + (\delta u) \to$ смотрим поведение малой добавочки δu

разрешимость з-чи Коши

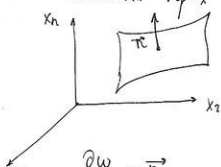
маленькие возмущ. распред-ся по хар-й пов-ти (малые возмущ-е бегут по хар-хам)

$x - v \cdot t = const$

$x + v \cdot t = const$

Петровский „ур-я в частных пр-х"

Геом. интерпретация ур-я хар-к



$w(x_1, x_2, \ldots x_n) = const$ $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ - вектор нормали к хар-й пов-ти

$\alpha_i \equiv \frac{\partial w}{\partial x_i}$ компоненты 1-ра $\vec{n}$

$\frac{\partial w}{\partial x_i} \sim \vec{n}$

$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \alpha_i \alpha_j = 0$ (удовлетв. эт. ур-ю)

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad (*) \qquad A_{ij} = A_{ij}(x)$$

$\xi = \xi(x)$ $\qquad \xi_i = \xi_i(x_1, x_2, .. x_n)$

$x = x(\xi)$ $\qquad \tilde{A}_{kl} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} A_{ij} \cdot \frac{\partial \xi_e}{\partial x_j}$; $\qquad J_{ki} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$ якобиева матрица

ее опред-ль - якобиан

$\tilde{A} = J \cdot A \cdot J^T$

законы преобр. коэф. совпадают с законом прибр. коэф. квадр. ф.

св-во инерции квадр-х форм

(α, β, γ), $\alpha + \beta + \gamma = n$ inv по отнош. к замене коорд.

inv хар-ка самой квадр. формы

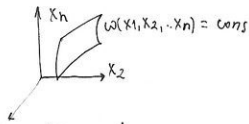
$|A_{ij} - \lambda E| = 0$ $\qquad \lambda^n + .. + a_0 = 0$ полином n-го пор.

$\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n$

хар-е ур-е

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_j} = 0 \qquad \xi_1 = w(x_1, x_2, .. x_n)$$ w - нетривиальное реш-е (трив. реш - const)

$\tilde{A}_{11} = 0$ $\qquad w(x_1, x_2, .. x_n) = const$ хар-ая пов-ть в пр. вс $\{x_1, .. x_n\}$



интегральная поверхность

характ-ая пов-ть исходного ур-я (*)

$n = 2$ → линия

возможность реш-я задачи Коши (с нач. усл.)

Пример № 1:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + .. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ $\quad u = u(x_1, .. x_n)$ $\quad n > 1$ **ур-е Лапласа**

эллипт. тип каноним. ф-ма $(\alpha = n, \beta = 0, \gamma = 0)$

характ-е ур-е: $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + .. + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0$ имеет вещ-е реш-я

$\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \omega = const$ не определяет никакой пов-ти.

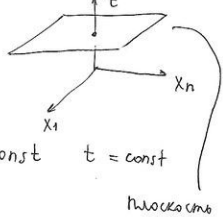
$\omega(x) = C \rightarrow$ тривиальн. реш-е

нет нетрив-х реш-й, нет никаких хар-к. вещ-е хар-ки отсутств-т

2. $u_t = \Delta u$ **ур-е теплопр-ти** $\quad u_t - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - .. - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$

$u = u(t, x_1, x_2, .. x_n)$ каноним. вид $(\alpha = 0, \beta = n, \gamma = 1)$ $n+1$ независ. переменная

ур-е параболич. типа



$-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 - .. - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0 \quad \omega = \omega(t, x_1, x_2, .. x_n)$

$\Downarrow$

$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) = 0 \Rightarrow \omega = f(t) \quad \forall f(t) \quad \omega = f(t) = const \quad t = const$

произв-я ф-я от времени

плоскость $t = const$

набор плоскостей $t = const$

3. **волн-е ур-е в n-мерном пр-ве** гиперболич. тип

$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad N = 1 \quad u_{tt} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - .. - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad u = u(\underbrace{t, x_1, .. x_n}_{n+1 \text{ незав. перем.}})$

$(\alpha = 1, \beta = n, \gamma = 0)$ - гиперб. тип n-мерное волн-е ур-е (по числу простр-х ур-й)

$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 - .. - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0 \quad \omega = \omega(t, x_1, .. x_n)$

$n = 1$ плоская задача

$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ введем новые независ. переменные $\begin{cases} \xi = x - t \\ \eta = x + t \end{cases}$

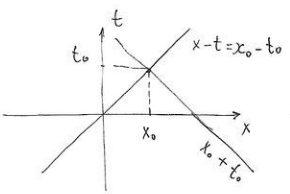
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

$\Rightarrow 2\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad w(\xi, \eta) \quad w = f(\xi)$ — f - произв. а ф-я

$\xi = x - t$ $\boxed{w = f(x-t)}$ $\boxed{w = g(x+t)}$

$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$



$w = \{ f(x-t) \vee g(x+t) \}$

найден хар-е нов-ти: $f(x-t) = const \Rightarrow x - t = const$

$g(x+t) = const \Rightarrow x + t = const$

$u_{tt} = a^2 \Delta u \qquad x + at = const$

$x - at = const$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_x + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_t = 0 \qquad \frac{\partial(w,x)}{\partial(t,x)} + \frac{\partial(w,t)}{\partial(x,t)} = 0 \qquad \frac{\partial(x,t)}{\partial(w,t)}$$

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial(w,x)}{\partial(t,x)} \cdot \frac{\partial(x,t)}{\partial(w,t)} + 1 = 0$$

$$-\frac{\partial(w,x)}{\partial(w,t)} = -1 \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_w = 1 \qquad x = t + h(w)$$

$x - t = h(w) \Rightarrow$

$\boxed{w = f(x-t)}$

f - обратная ф-я к h

$n \geq 2$ $\quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0$

а) $\omega = f(t) + X(x)$

$\left(f'(t)\right)^2 = \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x_1}\right)^2 + .. + \left(\frac{\partial (X(x)}{\partial x_n}\right)^2 = \lambda^2 = const$ — константа разделения переменных

$f'(t) = \lambda, \quad \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x_1}\right)^2 + .. + \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x_n}\right)^2 = \lambda^2$

$f(t) = \lambda t + c$

$X(x) = X(x_1) + \ldots + X(x_n)$ повторяя эту процедуру

$\omega = \lambda t + p_i \cdot x_i + C \qquad \lambda, p_i, C = const$

$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \lambda \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = p_i \quad \lambda^2 - p^2 = 0 \quad \lambda = |\vec{p}|$ $\boxed{\omega = |\vec{p}| \cdot t + \vec{p} \cdot \vec{x} + C}$

полный интеграл

зная полный интеграл ур-я в ч. произв-х 1 пор.

общий интеграл $\omega(t, \vec{x}, \vec{p}) = |\vec{p}| \cdot t + \vec{p} \cdot \vec{x} + f(\vec{p})$ f - произв. ф-я от n незав. перем-х

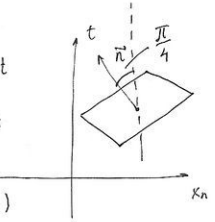
$\frac{\partial \omega(t, \vec{x}, \vec{p})}{\partial \vec{p}} = 0$ и соотнош-й находим $\vec{p}(\vec{x}, t)$

Ландау - Лившиц I том (в конце), Смирнов VI том

$\vec{p} = \vec{p}(t, \vec{x}) \quad \omega(t, \vec{x}) = |\vec{p}(t, \vec{x})| \cdot t + \vec{p}(t, \vec{x}) + f(\vec{p}(t, \vec{x}))$

$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vec{x}}\right)^2 = 0. \quad \vec{x}\,(x_1, x_2, .. x_m) \qquad t \pm x = const$

15.09.11



$n = 1 \quad \forall n \quad \omega = |\vec{p}|_n \cdot t - \left(\vec{p}\right)_n \cdot \vec{x}_n + C \quad \forall\, p_i = const, \; C = const$

$|\vec{p}| \cdot t - \vec{p} \cdot \vec{x} = const \quad \left(\vec{n}\right)_{n+1} \sim (|\vec{p}|_n, -\vec{p}_n) \qquad \vec{n}_{n+1} = \frac{(|\vec{p}|, -\vec{p})}{\sqrt{\vec{p}^2 + \vec{p}^2}}$

$\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2$

$\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, \underbrace{x_1, x_2, .. x_n}_{\vec{x}})\} \qquad t, x_i \in (-\infty, \infty)$

$\vec{a}_{n+1} = (t, \vec{x}_n)$

$\vec{n}_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\vec{p}_n}{\sqrt{2}\cdot|\vec{p}_n|}\right)$

Множ-во хар-х пов-й волн-го ур-я - плоскости, кот-е наклонены под $\frac{\pi}{4}$ к оси времени.

$\omega = \omega(t, r) \qquad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \qquad \frac{\partial\omega}{\partial x_i} = \frac{\partial\omega(t,r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \cdot \frac{\partial\omega(t,r)}{\partial r}$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot x_i}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial\omega(t,r)}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial\omega(t,r)}{\partial r}\right)^2$$

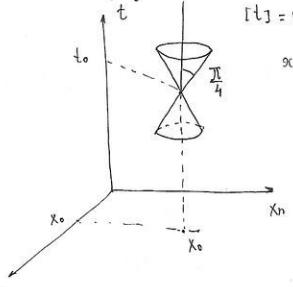
$$\left(\frac{\partial\omega(t,r)}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega(t,r)}{\partial r}\right)^2 = 0 \qquad t \pm r = const \qquad t \pm \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = const = t_0$$

семейство конусов

$(t - t_0)^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 0 \qquad x_i \to x_i - x_{0i} \qquad x_{0i} = const$

$(t - t_0)^2 - (\vec{x} - \vec{x}_0)^2 = 0$ → конус с центр. в т. (t_0, x_0)

$(t_0, \vec{x}_0)$ - произв-е числа



$[t] = [x_i]$ размерность t и x_i совпадает

характер-й конус

Классификация ур-я для одной искомой функции от двух независ-х перем-х. (ур-е 2-го пор. в ч-х произв-х)

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad \underline{n = 2}$$

теорема об инвариантн-ти хар-к при замене переменных:

пусть нашли хар-ку $\omega = \omega(x)$, $x \to \xi = \xi(x)$ $\quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0$

$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{kl} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \tilde{F} = 0$ в новых перем-х хар-е пов-ти опред-ся

реш-м ур-я $\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{kl} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_k}\right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_l}\right) = 0$ докажем $\omega = \tilde{\omega}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x(\xi)) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_l} \cdot \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} = 0 \qquad \sum_{k,l=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x(\xi)) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right)}_{\tilde{A}_{k,l}} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi_l} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{kl} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi_l} = 0$$

} хар-я пов-ть явл. скалярной величиной

$\boxed{\omega = \omega(x(\xi)) = \tilde{\omega}(\xi)}$ св-во inv-ти

$\omega = \omega(x_1, x_2, \ldots x_n)$ $\quad \xi_1 = \omega(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\xi_2 = \xi_2(x), \ldots, \xi_n = \xi_n(x)$

нашли реш-е хар-го ур-я (в переменных x) $\Rightarrow$ перешли к другим переменным

$\underbrace{\omega(x_1, x_2, \ldots x_n)}$ = const

$\Downarrow$ переход. к нов. перем-м $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ $\quad \xi_1 = const$

$n = 2$ $\quad x_1 = x$, $x_2 = y$ $\quad A_{11} \cdot u_{xx} + 2 A_{12} \cdot u_{xy} + A_{22} \cdot u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$

$A_{11} = A_{11}(x,y)$, $A_{12} = A_{12}(x,y)$, $A_{22} = A_{22}(x,y)$

$\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$

$$A_{11} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2 A_{12} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + A_{22} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad \text{(ур-е хар-к)}$$

пусть $\omega = \omega(x,y)$ - нетривиальное реш-е ур-я хар-к, то $\omega(x,y) = const$ ($= C$)

явл. общим интегралом след. д. ур-я.

$\downarrow$

Это ур-е опред-т ф-ю $y = f(x, C)$

$$A_{11} \cdot dy^2 - 2 A_{12} \cdot dx\,dy + A_{22} \cdot dx^2 = 0$$

хар-кие линии

$\omega(x,y) = C$ определим интегр-ю линию, выбрали const

$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot dy = 0$ дифф-м вдоль линии

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}}$$ наклон интегр. линии $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$

$$A_{11} \cdot dy^2 - 2A_{12}\, dx\, dy + A_{22} \cdot dx^2 = (dx)^2 \cdot \left\{ A_{11} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2A_{12} \cdot \frac{dy}{dx} + A_{22} \right\} =$$

$$= dx^2 \left\{ A_{11} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2} + 2A_{12} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)} + A_{22} \right\} = \frac{dx^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2} \left\{ A_{11} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + \right.$$

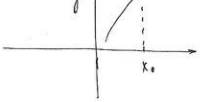
$$\left. + A_{22} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \right\} = 0$$

доказачем и обр-е утв-е:

2. пусть $\omega(x,y) = C$ явл. общим интегралом о.д.у.

$A_{11}(dy)^2 - 2A_{12} \cdot dx\, dy + A_{22}(dx)^2 = 0$, тогда $\omega = \omega(x,y)$ – есть реш-е хар-го ур-я в частн. произв-х $A_{11} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + A_{22} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = 0$

Док-во:



возьм произв-ю точку (x_0, y_0)

$\omega(x,y) = \omega(x_0, y_0)$

проведм интегр-ю кривую через произв. точку (x_0, y_0)

посчит. произв-ю на этой интегр. кривой

$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}$, но везде на интегр. кривой

$$0 = \left(A_{11} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2A_{12} \cdot \frac{dy}{dx} + A_{22} \right)\Bigg|_{y:\, \omega(x,y) = \omega(x_0,y_0)} = \left(A_{11} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2} + 2A_{12} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)} + A_{22} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^{-2} \left\{ A_{11} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + A_{22} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \right\}\Bigg|_{y:\, \omega(x,y) = \omega(x_0,y_0)}$$

$\Rightarrow$ ур-е в част. произв-х выполняется в фиксир. точке, но т.к. т. произвольна, то везде

$$\left\{ A_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + A_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} = 0$$

$$A_{11}(y')^2 - 2A_{12}\cdot y' + A_{22} = 0 \qquad y' = \frac{A_{12} \pm \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}\cdot A_{22}}}{A_{11}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_{12}(x,y) \pm \sqrt{A_{12}^2(x,y) - A_{11}(x,y)\cdot A_{22}(x,y)}}{A_{11}(x,y)} =$$

1-й случай: $A_{12}^2 - A_{11}\cdot A_{22} > 0$ (гипербол. тип)

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{12} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - (A_{11}+A_{12})\lambda + \underbrace{A_{11}\cdot A_{22} - A_{12}^2}_{} = 0$$

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0$$

$$\lambda_1\cdot\lambda_2 = A_{11}\cdot A_{22} - A_{12}^2 < 0$$

$\varphi(x,y) = C$

$\psi(x,y) = 0$ — вводим новые перем-е $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$

20.09.11.

$$A_{11}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{12}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

$$A_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + A_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad w = w(x,y)$$

$$A_{11}(dy)^2 - 2A_{12}\cdot dx\cdot dy + A_{22}(dx)^2 = 0 \quad \text{(ур-е хар-к)}$$

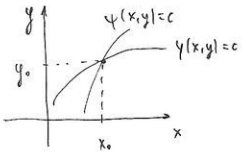
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

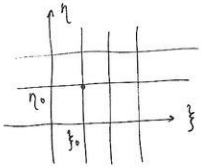
1) $\lambda_1\cdot\lambda_2 < 0$ $\qquad A_{12}^2 - A_{11}\cdot A_{22} > 0$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{A_{12} \pm \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}\cdot A_{22}}}{A_{11}}$

$\varphi(x,y) = C$, $\quad \psi(x,y) = C$

$\xi = \varphi(x,y)$; $\eta = \psi(x,y)$ перешли к хар-м переменным (,,семи на хар-ку")

$\left.\begin{matrix} \xi = const \\ \eta = const \end{matrix}\right\}$ $\rightarrow$ в новых перем-х ур-я хар-к принимают очень простой вид:





$$\widetilde{A}_{11}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\widetilde{A}_{12}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\widetilde{A}_{22}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+$$

$$+\widetilde{F}=0$$

$\widetilde{F}\neq F$

в новых перем-х ур-е хар-к:

$$\widetilde{A}_{11}\cdot\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)^2+2\widetilde{A}_{12}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\widetilde{A}_{22}\cdot\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)^2=0 \qquad \omega=\xi,\ \omega=\eta$$

г.о. реш-я этого ур-я, наз-у хар-ки $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$

подставл. 1-е реш-е: $\omega=\xi$

$$\widetilde{A}_{11}\cdot 1^2+0+0=0 \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\eta}=0 \text{ (независ. перем.)}$$

$$\boxed{\widetilde{A}_{11}=0}$$

(для $\omega=\eta$, аналогично $\widetilde{A}_{22}=0$) $A_{12}\neq 0$, if $A_{12}=0 \Rightarrow$ ур-е сведось к ур-ю 1 пор. в частн. произв-х (это невозможно)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\widetilde{\Phi}=0,} \quad \text{где } \widetilde{\Phi}=\frac{\widetilde{F}}{2\widetilde{A}_{12}}$$

канонич. ф-ма ур-я гиперболич. типа

$$\alpha=\xi+\eta \qquad \beta=\xi-\eta \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+F_1=0}$$

Канонич. ф-ма ур-я гиперб. типа

$u_{tt}-u_{xx}=0$ [одномерное волновое ур-е]

2) из свойств-х знач. обращ. в ноль в некот. области (не в точке) параболич. тип

$\lambda_1\cdot\lambda_2=0$ (не на кривой)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A_{12}}{A_{11}}\Rightarrow \varphi(x,y)=C \text{ в кан-ке}$$

$$A_{11}\cdot A_{22}-A_{12}^2=0$$

второй незав. перем. выбираем произв. ф-ю $\eta=\psi(x,y)$ – независ. ф-я от x,y

$\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$

$\widetilde{A}_{11}=0$ $\qquad \widetilde{A}_{12}^2-\widetilde{A}_{11}\cdot\widetilde{A}_{22}=0$

Д/з показать, что при произв. замене переменной $\left(\widetilde{A}_{12}^2-A_{11}\cdot A_{22}\right)=$

$$=\left(A_{12}^2-A_{11}\cdot A_{22}\right)\cdot\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|^2$$

$\widetilde{A}_{11} = 0 \quad \widetilde{A}_{12}^2 - \widetilde{A}_{11} \cdot \widetilde{A}_{22} = 0 \Rightarrow \widetilde{A}_{12} = 0 \quad \widetilde{A}_{22} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{F} = 0 \quad \Big| : \widetilde{A}_{22}$

$\widetilde{A}_{22}$ не обращ. в ноль в обл-ти (может в тек. т-х)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{\Phi}_1 = 0}$$

$$\widetilde{\Phi}_1 = \frac{\widetilde{F}}{\widetilde{A}_{22}}$$

3) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ эллипт. тип

$A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2 > 0$ $\Gamma(x,y) = C$ комп. величина

$\Gamma(x,y) = C = \psi(x,y) + i \cdot \varphi(x,y) \quad \xi = \mathrm{Re}\,\Gamma(x,y), \ \eta = \mathrm{Im}\,\Gamma(x,y)$

$\omega = \xi + i \cdot \eta$ т.о. есть реш-е ур-я хар-к $\widetilde{A}_{11} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)^2 + 2\widetilde{A}_{12} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \widetilde{A}_{22} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)^2 = 0$

$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi + i \cdot \eta) = 1 \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = i$

$\widetilde{A}_{11} \cdot 1 + 2i \cdot \widetilde{A}_{12} + \widetilde{A}_{22} \cdot i^2 = 0 \quad \widetilde{A}_{11} = \widetilde{A}_{22}, \ \widetilde{A}_{12} = 0$

в нов. перех. исчезают коэф. при смеш. произв.

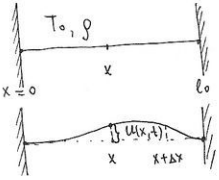
$\widetilde{A}_{11} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \widetilde{A}_{22} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{F} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{\Phi}_1 = 0}, \quad \widetilde{\Phi}_1 = \frac{\widetilde{F}}{\widetilde{A}_{11}}$$

канон. ф. эл. типа

Постановка задач Матфизики

выведем ур-е попер. колеб. струны:



натянутая струна с силой T_0 (натяжение струны)

ур-е малых колебаний

ρ - лин. плотность

конфигурационное пр-во - ми-во коорд-т

u - смещение в напр. $\perp$ оси x

$x \in [0, l_0]$ каждая т. струны хар-ся коорд. x

произвольное смещение точек струны

вводим $u(x,t)$ - смещение т. струны, с коорд. x в мом. вр. t

$u(x,t)$ образует мн-во конфигураций сист.

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ - скор. т. с коорд. x (с меткой x)

маленький наклон

$(|u| \ll l)$ $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$

пытаемся вывести ур-е движения струны

$$L[u(x,t)] = \int \sqrt{dx^2 + du^2} = \int_0^{l_0} \sqrt{1 + (u_x)^2}\, dx =$$

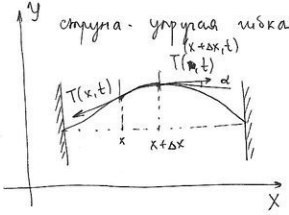
можно считать, что струна сильно натянута (можно пренебречь изм-м длины)

$$= \left| |u_x| \ll 1 \right| = \int_0^{l_0} dx \left(1 + \frac{1}{2}(u_x)^2 + \dots\right) = l_0 + O(u_x^2)$$

$L \approx l_0$

струна удовлетв. з-ну Гука $\Rightarrow$ считаем, что натяжение не поменялось.

$T(x,t) = T(x)$ натяжение



струна - упругая гибкая нить т.е. натяжение напр. по касательной

$\overrightarrow{T(x,t)}$ - напр. по кас. $T = T(x)$

угол натяжения меняется

$\Delta m = \rho \cdot \Delta x$ масса кусочка

$\Delta m \cdot a = \mathcal{F}$

проекция на ось y:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = T(x+\Delta x)\cdot \sin\alpha(x+\Delta x) - T(x)\cdot \sin\alpha(x)$$

напр. колеб $\longrightarrow$

ось X:

$$0 = T(x+\Delta x)\cdot \cos\alpha(x+\Delta x) - T(x)\cdot \cos\alpha(x)$$

$tg\alpha(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$

продольное смещение по y

$|\alpha(x)| \ll 1$

$T(x+\Delta x) - T(x) = 0$ (натяжение от x не зав-т)

$\sin\alpha(x) \simeq tg\alpha(x) \approx \alpha(x)$

$T(x) = const = T_0$

$\cos\alpha(x) \approx 1$

возвращающая сила возник. за счет разных наклонов

с точ. слагаемых линейных по u

$$\rho \cdot \Delta x \cdot u_{tt}(x,t) = T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) \quad \Big| : \Delta x,\ \Delta x \to 0$$

$\rho \cdot u_{tt}(x,t) = T_0 \cdot u_{xx}(x,t)$ — одномерное волновое ур-е

ур-е малых попер-х колеб. струны

if есть внешние силы → ур-е стан. неоднор-я

$\rho(x) \cdot u_{tt}(x,t) = T_0 \cdot u_{xx}(x,t) + f(x,t)$ ← плотность внешней силы (сила, отнесенная к длине струны Δx)

↑

ур-е вынужд. колеб. струны

$a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ $\quad [a] = \frac{см}{сек}$ $\quad u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t)$ $\quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{[u]}{[t]^2} = \frac{[u]}{сек^2}$

выражает

$u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t) \quad x \in (0,l) \quad t > 0$

этому ур-ю удовлетв-т ∞ мн-во ф-й

чтобы выделить ед. реш-е необх. доп. усл.

н.у.: $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ } независимо задаются эти 2 ф-ции их недостаточно, чтобы выделить ед-е реш-е

типы гран. усл:

1-ая краевая задача:

смещение на концах струны заданные ф-ции времени при $t > 0$.

$u(0,t) = \nu_1(t)$ — левый конец

$u(l,t) = \nu_2(t)$ — правый конец

усл. согласования: $\nu_1(0) = \varphi(0)$, $\nu_2(0) = \varphi(l)$

$\dot{\nu}_1(0) = \psi(0)$, $\dot{\nu}_2(0) = \psi(l)$

$\nu_1(t) = \nu_2(t) \equiv 0$ → концы закреплены, то это однор-я краев-я задача

краевые усл. однородны

$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0$

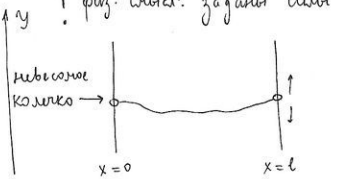
$u\big|_{\Gamma} = \gamma(t)\big|_{\Gamma}$ $\quad \Gamma = \{x=0,\ x=l\}$ граница состоит из 2-х точек.

2-ая краевая задача: наклон струны на концах

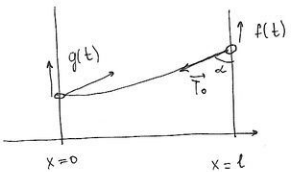
$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}, \quad t>0$$

if $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$ $\forall t$ → однородная 2-я краевая з.

! физ. смысл: заданы силы на концах струны.



струна со свободными концами



$u(l,t)$ - смещение колечка

$m \cdot u_{tt}(l,t) = f(t) - T_0 \cdot u_x(l,t)$

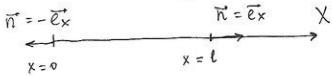
$f(t)$ - сила, действ. на колечко

$m \to 0$ масса колечка

$$\begin{cases} u_x(0,t) = -\dfrac{g(t)}{T_0} \\ u_x(l,t) = \dfrac{f(t)}{T_0} \end{cases} \Leftarrow$$

прав. конец $f(t) - T_0 \cdot u_x(l,t) = 0 \quad T_0 \cdot u(x,t) = f(t), \ t>0$

левый конец $g(t) + T_0 \cdot u_x(0,t) = 0, \ t>0$



производная по нормали к границе

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \mu(t)\Big|_{\Gamma}$$

оба крав. усл. можно записать единообразно

3-ая краевая задача: лин. комбинации смещений

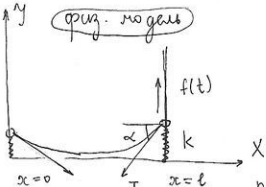
$$\left(\gamma_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 \cdot u\right)\Big|_\Gamma = \delta(t)\Big|_\Gamma$$

$$\begin{cases} \gamma_1 \cdot \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \gamma_2 \cdot u(l,t) = \delta_2(t) \\ -\gamma_3 \cdot \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \gamma_4 \cdot u(0,t) = \delta_1(t) \end{cases}$$

if $\delta_1(t) = \delta_2(t) \equiv 0$ при $t > 0$, то крав. усл. однородны

$\gamma_1 = \gamma_3 \equiv 0 \Rightarrow$ 1-я крав. зад. при $\gamma_2 \neq 0, \gamma_4 \neq 0$

if $\gamma_2 = \gamma_4 \equiv 0 \Rightarrow$ 2-я крав. зад. при $\gamma_1 \neq 0, \gamma_3 \neq 0$



упругая заделка k - коэф. жесткости пруж-ки

$m \cdot u_{tt}(l,t) = f(t) - T_0 \cdot u_x(l,t) - k \cdot u(l,t)$, $k > 0$

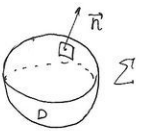
$m \to 0$

$$\boxed{T_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + k \cdot u(l,t) = f(t)}$$ - внешняя сила

$T_0, k > 0$

Ф/з: для левого конца

$$\boxed{-T_0 \cdot \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + k \cdot u(0,t) = g(t)}$$ левый конец



$g(t) - k \cdot u(0,t) + T_0 \cdot u_x(0,t) = 0$

постановка задачи в более общем случае

обобщение на многомерный случай

простр-й вектор

$\rho(x) \cdot u_{tt} = \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - q(x) \cdot u + F(x,t)$ $\quad x = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dots \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ $\quad \rho(x) > 0$, $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ $\quad F$ - вн. сила

гиперб. тип н.у. $\boxed{u(x,0) = \varphi(x), \ x \in D \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \ x \in D}$

D - область изменения переменных x

$\left(\gamma_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 \cdot u\right)\Big|_\Gamma = \mu(t)\Big|_\Gamma$ — у. у.

Σ - поверхность, охватывающая обл-ть D

в каждой т. границы задано н.у. $\Sigma = \partial D$

Формула Даламбера

Нужно найти реш-е ур-я: $u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t)$

$x \in (-\infty, +\infty)$, $t > 0$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Решение:

ур-е хар-к: $(dx)^2 = a^2 \cdot (dt)^2$

$dx - a\,dt = 0$ $\quad dx + a\,dt = 0$

$x - at = const$ $\quad x + at = const$

$\xi = x - at$, $\eta = x + at$

хар-ки - прямые линии

лин. задача с пост. коэф.

$u_{\xi\eta} = 0$ $\qquad \widetilde{A}_{11}^{\,0} \cdot u_{\xi\xi} + 2\widetilde{A}_{12}^{\,a} \cdot u_{\xi\eta} + \widetilde{A}_{22}^{\,0} \cdot u_{\eta\eta} = 0$

$u_{\xi\eta} = 0$ (в хар-х переменных)

$\frac{\partial}{\partial \xi} u_\eta(\xi,\eta) = 0$ $\qquad u_\eta(\xi,\eta) = f_1(\eta)$ $\qquad \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} = f_1(\eta)$

$u(\xi,\eta) = \int f_1(\eta)\,d\eta + f_2(\xi)$

$g(\eta)$

$$\boxed{u(\xi,\eta) = g(\eta) + f_2(\xi)}$$

$$\boxed{u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)}$$

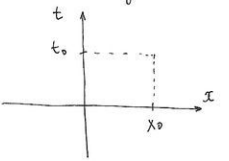
27.09.11

(*) $u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, $t > 0$ — бесконечная струна

$u(x,0) = \varphi(x)$ $\quad u_t(x,0) = \psi(x)$ $\quad x \in (-\infty; +\infty)$

задача Коши (нету границ)

решение: $x - at = C_1$, $\quad x + at = C_2$ $\quad u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$



$\forall$ $g(x)$, $f(x)$ — дважды непр. диффер. ф-ции

найдем явный вид f, g, удовлетв-х нач. у.

$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x)$ $\quad x \in (-\infty; +\infty)$

$u_t(x,t) = f'(x-at)\cdot(-a) + g'(x+at)\cdot a$

$u_t(x,0) = a[g'(x) - f'(x)] = \psi(x)$

$x \in (-\infty; +\infty)$

$$+ \begin{cases} g(x) - f(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} d\xi \cdot \psi(\xi) + C_0 \\ g(x) + f(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} d\xi \cdot \psi(\xi) + \frac{C_0}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} d\xi \cdot \psi(\xi) - \frac{C_0}{2}$$

ф-я задает смещение т. струны

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at} d\xi\,\psi(\xi) - \frac{C_0}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi) + \frac{C_0}{2} =$$

$\Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi)$$

(ф-ла Даламбера)

определ-т реш-е задачи Коши одномерного волнового ур-я

обратно посчитаем, когда это реш-е удовлетв. ур-ю (*)

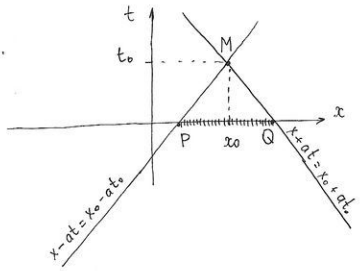
$\exists$ $\varphi, \varphi', \varphi''$ — непр.

$\exists$ ψ, ψ' — непр.

классическое решение (не строго) — сама ф-я непр, и ее первые произв-е непр.

геом. интерпретация ф-ии Даламбера:

физ. нат.



точка $M(x_0, t_0)$ - произвольная

$x - at = C_1$ $\quad$ хар-ки через
$x + at = C_2$ $\quad$ точку M:

$C_1 = x_0 - at_0 \qquad a > 0$

$x - at = x_0 - at_0 \qquad t = 0$

$x = x_0 - at_0 \qquad P(x_0 - at_0, 0)$

$x + at = x_0 + at_0 \qquad t = 0$

$x = x_0 + at_0 \qquad Q(x_0 + at_0, 0)$

$\triangle MPQ$ - характеристический треугольник (равнобедр.) - его 2 сор. стор. явл. хар-ми линиями

$\psi(\xi)$ - нач. скорость

счещ. струны в $m.M(x_0, t_0)$

$$u(M) = u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} d\xi \cdot \psi(\xi) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} +$$

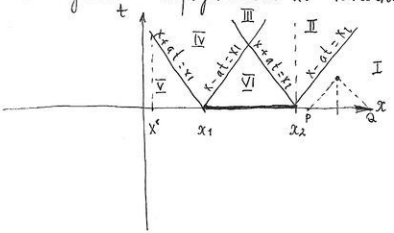
φ - нач. счещ.

$$+ \frac{1}{2a} \cdot \int_{P}^{Q} d\xi \cdot \psi(\xi) = u(M)$$

конеч. счещение т. струны равно полусумме нач. смещений в этих двух точках (P и Q) + интеграл (среднее знач-е скор) на основании PQ хар-го треугольника.

к мом. вр. t_0 (от нуля $t = 0$)

пусть нач. данные сосредоточены на конечном интервале:



вне предела отрезка $x_1 x_2$ нач. д. = 0
нач. данные имеют финитный носитель

I) $x - at > x_2, \quad t > 0$ произв. т. в области I

$u(x,t) = 0$ смещение в обл. I всюду $= 0$

$x = \underset{\smile}{a}t + x_2$ возмущения бегут вправо со скор. a

V) $x + at < x_1, \quad t > 0 \quad u(x,t) = 0$ падения амплитуды не происходит

III) асимптотич. область

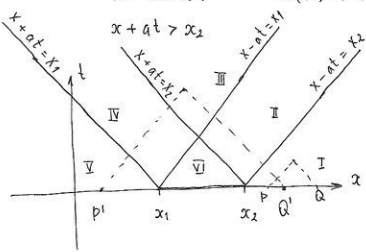
$x - at < x_1$

$x + at > x_2$

$$u(M) = 0 + \frac{1}{2a}\int_{P'}^{Q'} d\xi\, \psi(\xi) = \frac{1}{2a}\int_{x_1}^{x_2} d\xi\, \psi(\xi) = const =$$

$$= \frac{1}{2a\rho}\cdot\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{d\xi\, \rho\psi(\xi)}_{} = \frac{1}{2a\rho}\cdot P$$

(скорость; масса кусочка струны $d\xi$)



P - полный импульс струны

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \rho\, u_t(x,t)$$

Д/з: $\frac{d}{dt}P(t) = 0$ {полный имп-с сохр} $P(t) = const = P(0)$

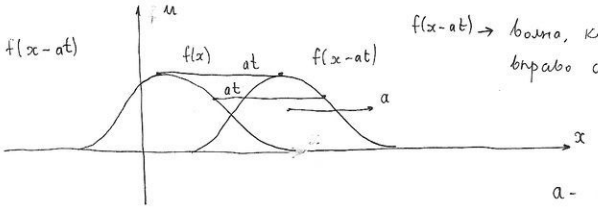
II, IV, VI - области, где происходит переходной режим от 0 к const.

$u(x,t)$ фиксир. мом. t - профиль струны

{почему a имеет смысл скорости ...}

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x-at} d\xi\cdot\psi(\xi)}_{f(x-at)} + \underbrace{\frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x+at} d\xi\cdot\psi(\xi)}_{g(x+at)}$$

$f(x-at)$



$f(x-at) \to$ волна, которая бежит вправо со скор. a (профиль не поменялся

a - скорость распростр-я возмущения

$f(x+at)$ - волна бежит влево со скор. a

$f+g$ - суперпозиция двух волн (профиль меняется)

$\varphi(x) \underset{+}{-} \frac{1}{a} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} d\xi \cdot \psi(\xi) = const \quad \forall x$ - одна из волн, бегущая влево или вправо

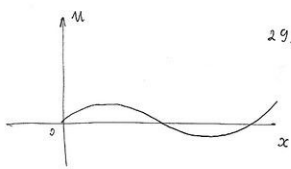
1-ая и 2-ая краевые задачи для полубесконечной струны.

хар-ки - это такие линии, по которым бегают нач. зн-я

$x - at = const$

29.09.11.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t) & x>0,\ t>0 \\ u(0,t)=0, & t>0 \quad \text{гран. усл.} \\ \text{н.у.} \quad u(x,0) = \varphi(x) & \\ \qquad u_t(x,0) = \psi(x), & x>0 \end{cases}$$



реш-е: $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at) \quad \forall x>0$ реш-е дается этой ф-лой

задача - опред. f, g из нач. и гран. усл.

$g(s)$ - ? $s>0$ $\qquad f(s)$ - ? $\forall s$

гр. усл. $u(0,t) = f(-at) + g(at) = 0 \quad \forall t>0$ $\qquad$ обозначим $\underline{at = s}$ $\qquad \boxed{g(s) = -f(-s) \quad \forall s>0}$

$f(x) + g(x) = \psi(x)$, $\forall x > 0$ $\quad -a \cdot f'(x) + a \cdot g'(x) = \psi(x)$, $\forall x > 0$

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \cdot \int_{x_0}^{x} d\xi \cdot \psi(\xi) + C_0, \quad \forall x > 0$$

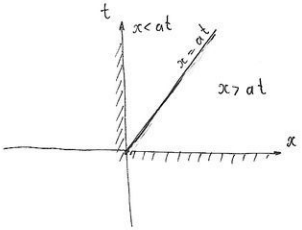
$$\boxed{f(x) = \frac{\psi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} d\xi\, \psi(\xi) - \frac{C_0}{2}, \quad \forall x > 0}$$

$f(x)$ $\forall x > 0$ найдено

$f(x) - f(-x) = \psi(x)$ $\forall x > 0$ $\quad f(-x) = f(x) - \psi(x)$, $\forall x > 0$

$$f(-x) = -\frac{1}{2}\psi(x) - \frac{1}{2a} \cdot \int_{x_0}^{x} d\xi \cdot \psi(\xi) - \frac{C_0}{2}, \quad \forall x > 0$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} d\xi \cdot \psi(\xi) + \frac{C_0}{2}, \quad \forall x > 0}$$



$$u(x,t) = |x > at| = \frac{\psi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a} \cdot \int_{x_0}^{x-at} d\xi \cdot \psi(\xi) - \frac{C_0}{2} + \frac{1}{2}\psi(x+at) + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x_0}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi) + \frac{C_0}{2} =$$

$$= \frac{\psi(x+at) + \psi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi)$$

$$u(x,t) = |x < at| = f|-(at-x)| + g(x+at) = -\frac{1}{2}\psi(at-x) - \frac{1}{2a} \cdot \int_{x_0}^{at-x} d\xi \cdot \psi(\xi) - \frac{C_0}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\psi(x+at) + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x_0}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi) + \frac{C_0}{2} = \frac{\psi(x+at) - \psi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{at-x}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi)$$

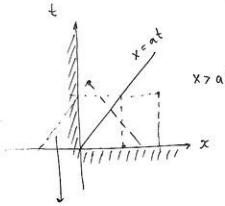
$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\psi(x+at) + \psi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \cdot \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi), & x > at, \\ \dfrac{\psi(x+at) - \psi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \cdot \displaystyle\int_{at-x}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi), & x < at, \end{cases} \qquad x > 0,\ t > 0$$

if $x = at$ (нах. на хар-ке) обе формулы дают один и тот же ответ.

$\psi(0) = 0$

($\psi(x) = 0$ $\psi(x) = 0$ - условие согласования)

1) $x > at$ — формула Даламбера



2) $x < at$ попытаемся формально продолжить φ, ψ, как будто у струны есть втор. половинка.

$x - at = S \quad \varphi(S) = -\varphi(-S)$ нечетное продолжение

выходим в обл. опред. x, где не определены н.у.

представим, что струна не полубеск., а бесконечная (гран. усл. не будет)

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t) \qquad x \in (-\infty, +\infty),\ t > 0$$

н.у. $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ $\qquad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$

сделаем нечетное продолжение →

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$\hat{u}_{tt}(x,t) = a^2 \cdot \hat{u}_{xx}(x,t)$ по ф-ле Даламбера:

$$\hat{u}(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \Psi(\xi) \Rightarrow$$

1) $x > at$ $\quad \hat{u}(x,t) = \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \psi(x) = u(x,t)$

2) $x < at$ $\quad (x > 0)$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{at-x} d\xi \cdot \Psi(\xi) + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} d\xi \cdot \Psi(\xi) =$$

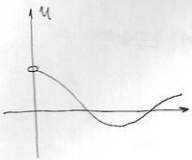
интеграл от нечетной ф-ции в симметр. пределах

$$= \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi)$$

$$\hat{u}(0,t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} d\xi \cdot \psi(\xi) = 0$$

1-ая однородн. краев. зад. решена методом нечетного продолжения

замечание: 2-ая краев. задача реш-ся методом четного продолжения начальных условий

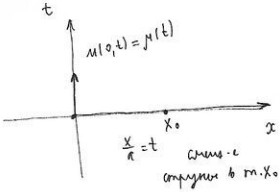


задача о распространении гран. режима

$u_{tt}(x,t) = a \cdot u_{xx}(x,t), \quad x>0, \ t>0$

н.у. $u(x,0)=0 \quad u_t(x,0)=0, \quad x>0$

гр.у. $u(0,t)=\mu(t), \ t>0$



$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$

гр.у. $u(0,t) = f(-at) + g(at) = \mu(t) \quad \forall t>0$

$at = s > 0, \quad t = \frac{s}{a}$

$$\boxed{g(s) = \mu\left(\frac{s}{a}\right) - f(-s) \quad \forall s>0}$$

$u(x,0) = f(x) + g(x) = 0 \quad \forall x>0 \qquad u_t(x,0) = -a\cdot f'(x) + a\cdot g'(x) = 0 \quad \forall x>0 \Rightarrow$

интегрируя получим $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -f(x) + g(x) = C_0 & \forall x>0 \\ f(x) + g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{C_0}{2} \quad \forall x>0}$$

тип бегущей волны справа на лево

$$\boxed{f(x) = -\frac{C_0}{2} \quad \forall x>0}$$

$f(-x) = \mu\left(\frac{x}{a}\right) - g(x), \ \forall x>0$

$$\boxed{f(-x) = \mu\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{C_0}{2}}$$

$u(x,t) = |x>at| = -\frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} = 0; \quad u(x,t) = |x<at| = \mu\left(\frac{at-x}{a}\right) - \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} =$

$= \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad \left(t > \frac{x}{a}\right)$ доопределим μ при $t<0$, $\mu(t)=0$

$$\boxed{u(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)}$$

$$u(x_0, t_0) = u\left(0, t_0 - \frac{x_0}{a}\right)$$

04.10.11.

неоднородность

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t) + f(x,t) \qquad x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

редукция - сведение более сложной задачи к простым

задача о вынужд-х полр. колеб. струны

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t) \qquad x \in (-\infty; +\infty) \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi)$$

область

(I) $\rho \cdot W_{tt} = \operatorname{div}(k \nabla W) - q \cdot w + f(x,t) \qquad x \in D$ x - n мерн. вектор

$t > 0$

чтобы ур. имело гиперб. тип

пусть $\rho > 0$, $k(x) > 0$, $x \in D$; $q \geqslant 0$ н.у. $w(x,0) = 0$, $w_t(x,0) = 0$ однор-ы

покажем, что реш-е неоднор. ур-я можно построить из реш. однор. ур-я

$$\text{гр.у. } w\Big|_{\partial D} = 0 \quad \text{1-я краев. зад.}$$

на границе обл. D

предположим, что мы знаем реш-е однор. зад. с произв. н.у.

(II) $\rho \cdot u_{tt} = \operatorname{div}(k \nabla u) - q \cdot u$ г.у. $u\Big|_{\partial D} = 0$ н.у. произв. $u(x,0) = \varphi(x)$

введем вспомогат-ю ф-ю: $\rho \cdot V_{tt}(x,t,\tau) = \operatorname{div}(k \nabla V(x,t,\tau)) - q \cdot V(x,t,\tau)$

$t > \tau > 0$ г.у. однор. $V(x,t,\tau)$ - вспомог. ф-я τ - пар-р

гр.у. $V(x,t,\tau)\Big|_{\partial D} = 0 \qquad V(x,t,\tau)\Big|_{t=\tau} = 0 \qquad V_t(x,t,\tau)\Big|_{t=\tau} = \frac{1}{\rho} \cdot f(x,\tau) \quad x \in D$

$t > 0$

$\rho \cdot w_{tt} = \operatorname{div}(k \nabla w) - q \cdot w + f(x,t)$ $w|_{t=0} = 0$, $w_t(x,0) = 0$

Смысл τ для эт. задачи – начальное время $\rho \cdot u_{tt} = \operatorname{div}(k \nabla u) - q \cdot u$, $u|_{\partial D} = 0$

учится неоднор. задача, пусть мы умеем решать однор. зад. с произв. н.у. $u(x,0) = \gamma(x)$

$\rho v_{tt}(x,t,\tau) = \operatorname{div}(k \nabla v(x,t,\tau)) - q \cdot v(x,t,\tau)$ $t > \tau > 0$

$v(x,t,\tau)|_{\partial D} = 0$, $v(x,t,\tau)|_{t=\tau} = 0$, $v_t(x,t,\tau)|_{t=\tau} = \frac{1}{\rho} f(x,\tau)$

формулир. вспомог. задачу пусть ф-я $v(x,t,\tau)$ удовлетв. однор. ур. и спецф. н.у. $v_t(x,t,\tau)|_{t=\tau} = \frac{1}{\rho} \cdot f(x,\tau)$

$$w = \int_0^t d\tau \cdot v(x,t,\tau)$$ – дает реш-е неодн. зад. $\to w = w(x,t)$

покажем, что этот интеграл дает реш-е неоднор. задачи по разрешимой обл. $(t > \tau > 0)$.

проверка: по ф-ле Н-Лейбница

$$w_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \cdot v(x,t,\tau) = v(x,t,t) + \int_0^t d\tau \cdot v_t(x,t,\tau)$$

(пар-р; осн. пер-е; $v(x,t,t) = 0$)

$w(x,0) = 0$, $\forall x \in D$ $\quad w_t(x,0) = 0$, $x \in D$

$$w_{tt}(x,t) = v_t(x,t,t) + \int_0^t d\tau \cdot v_{tt}(x,t,\tau) = \frac{1}{\rho} \cdot f(x,t) + \int_0^t d\tau \cdot v_{tt}(x,t,\tau)$$

$$\rho \cdot w_{tt} - \operatorname{div}(k \nabla w) + q \cdot w - f(x,t) = \cancel{f(x,t)} + \int_0^t d\tau \rho v_{tt}(x,t,\tau) -$$

$$- \int_0^t d\tau \cdot \operatorname{div}(k \nabla v(x,t,\tau)) + \int_0^t d\tau \cdot q \cdot v(x,t,\tau) - \cancel{f(x,t)} =$$

$$= \int_0^t d\tau \left\{ \rho \cdot v_{tt}(x,t,\tau) - \operatorname{div}(k \nabla v(x,t,\tau)) + q \cdot v(x,t,\tau) \right\} \qquad t > \tau > 0$$

$$w(x,t)|_{x \in \partial D} = \int_0^t d\tau \cdot \cancel{v(x,t,\tau)}^{\,0}|_{x \in \partial D} = 0$$

$$w_{tt}(x,t) = a^2 \cdot w_{xx}(x,t) + \frac{f(x,t)}{\rho} \qquad x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0$$

н.у. $w(x,0) = 0$, $w_t(x,0) = 0$

$$w(x,t) = \int_0^t d\tau \cdot v(x,t,\tau), \quad \text{где} \quad v_{tt}(x,t,\tau) = a^2 \cdot v_{xx}(x,t,\tau) \quad x \in (-\infty, +\infty)$$
$$t > \tau > 0$$

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho} \qquad \text{н.у.} \quad v(x,t,\tau)\Big|_{t=\tau} = 0, \qquad v_t(x,t,\tau)\Big|_{t=\tau} = \frac{1}{\rho} f(x,\tau) \qquad \tau > 0$$

ф-ла Даламбера для произв. вр. τ:

$$u(x,t) = \frac{\psi(x+at) + \psi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi) \qquad u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}$$

$$t \to t - \tau \qquad u\big|_{t=0} = \psi(x) \to 0$$

$$u(x,t) = \frac{\psi(x+a(t-\tau)) + \psi(x-a(t-\tau))}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \cdot \psi(\xi) \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) = \frac{1}{\rho} f(x,\tau)$$

$$u\big|_{t=\tau} = \psi(x) \qquad u\big|_{t=\tau} = \psi(x) \qquad \text{сдвижка по вр., использ. однор. вр.}$$

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \cdot \frac{1}{\rho} f(\xi,\tau) \qquad x \in (-\infty, +\infty) \quad t > \tau > 0$$

↓

нашли явно вспомогат. ф-ю

$$w(x,t) = \int_0^t d\tau \cdot \frac{1}{2a\rho} \cdot \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \cdot f(\xi,\tau)$$

ответ задачи

Общая задача для ∞ струны:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t) + \frac{1}{\rho} \cdot f(x,t) \\ x \in (-\infty, +\infty), \ t > 0 \\ u(x,0) = \psi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x) \\ x \in (-\infty, +\infty) \quad \text{н.у.} \end{cases}$$

(Принцип редукции задачи)

$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ ищем реш-е в виде суммы двух функций, хотим чтобы

w - дает реш-е неоднор. ур. с однор. н.у.

$$w_{tt} = a^2 \cdot w_{xx} + \frac{1}{\rho} f(x,t)$$
$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0$$

w - реш. неоднор. зад. с однор. усл.

Тогда для $\varphi \cdot v(x,t)$ получаем

$$w_{tt} + v_{tt} = a^2 \cdot w_{xx} + a^2 \cdot v_{xx} + \frac{1}{\rho} \cdot f(x,t) \Rightarrow v_{tt} = a^2 \cdot v_{xx}$$

φ-я v удовлетв. однор. ур. с неоднор. н.у.

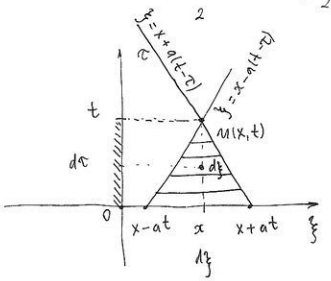
$w(x,0) + v(x,0) = \varphi(x)$

$w_t(x,0) + v_t(x,0) = \psi(x)$

общий принцип, кот. справедлив потому что задача линейна.

реш-е задачи:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi) + \frac{1}{2a} \cdot \int_0^t d\tau \cdot \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \cdot \frac{1}{\rho} \cdot f(x,\tau)$$

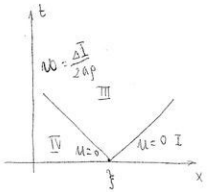


$$x - a(t-\tau) < \xi < x + a(t-\tau)$$

$$d\xi \cdot d\tau \; \frac{1}{2a} \; \frac{1}{\rho} \; f(\xi,\tau)$$

$u(x,t) = \frac{I}{2a\rho}$ - импульс

11.10.11. $$u(x,t) = \begin{vmatrix} \varphi(x) = 0 \\ \psi(\xi) = 0, \\ x \neq \xi \end{vmatrix} = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} d\xi \, \psi(\xi) = \frac{1}{2a\rho} \int_{x-at}^{x+at} d\xi \cdot \psi(\xi) \cdot \rho$$



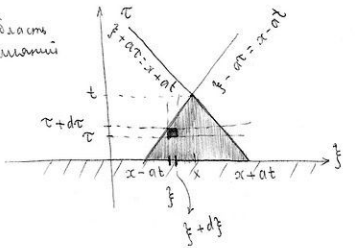
ΔI - импульс, переданный струне

$$\Delta u = \frac{\Delta I}{2a\rho}$$

$$\rho \cdot u_{tt} = T_0 \cdot u_{xx} + f(x,t) \quad | \cdot dx\,dt$$

$$\underbrace{\rho\,dx}_{m} \cdot u_{tt} \cdot dt = (T_0 u_{xx} + f(x,t))\,dx\,dt$$

$$\Delta I = \underbrace{f(x,t)\,dx\,dt}_{\text{импульс силы за бр. } dt} + T_0 \cdot u_{xx} \cdot dx \cdot dt$$



$$\Delta I = f(\xi,\tau)\,d\xi\cdot d\tau$$

$$\Delta u(x,t) = \frac{f(\xi,\tau)\,d\xi\cdot d\tau}{2a\rho}$$

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \cdot \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \cdot \frac{f(\xi,\tau)}{2a\rho}$$

$\xi_н = x - at + a\tau = x - a(t-\tau)$ (ξ нижнее) $\qquad f(\xi x,t)$ - это плотность силы

$\xi_в = x + a(t-\tau)$ (ξ верхнее)

$$u(x,t) = \frac{\psi(x+at)+\psi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\xi\cdot\psi(\xi) + \frac{1}{2a\rho}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi\cdot f(\xi,\tau)\int_0^t d\tau \quad (*)$$

фундаментальное решение
ф-я Грина
ф-я влияния

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\cdot u_{xx} + \frac{1}{\rho}\cdot f(x,t), & x\in(-\infty;+\infty),\ t>0 \\ u(x,0) = \psi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & x\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$$

$$(*) \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\xi\cdot\psi(\xi) + \frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at} d\xi\cdot\psi(\xi) + \frac{1}{2a}\cdot\int_0^t d\tau\cdot\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi\cdot f(\xi,\tau) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\cdot G(x,t\,|\,\xi,0)\,\psi(\xi) + \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\cdot G(x,t,\xi,0)\cdot\psi(\xi) + \int_0^t d\tau\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t,\xi,\tau)\,\frac{1}{\rho}f(\xi,\tau)\,d\xi$$

$$G(x,t,\xi,0) = \frac{1}{2a}\eta[\,at - |x-\xi|\,] \qquad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad \text{ф-я Хэвисайда (ед. ступенька)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, G(x,t,\xi,0) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\cdot\eta[\,at-|x-\xi|\,]\psi(\xi) = \left|\begin{array}{c} at-|x-\xi|>0 \\ |x-\xi|<at \Leftrightarrow \\ x-at<\xi<at+x \end{array}\right| =$$

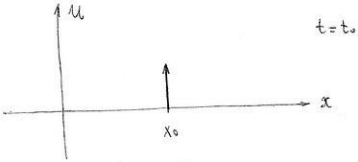
$$= \frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at} d\xi\cdot\psi(\xi)$$

$$\boxed{G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2a}\eta[\,a(t-\tau)-|x-\xi|\,]}$$

ф-я Грина бесконечной струны (ф-я влияния или фундамент. реш-е одномерного волн. ур-я)

Физ. смысл ф. Грина

рассм. случай, когда $\gamma(x)=0$, $\psi(x)=0$ $\quad \frac{1}{\rho}\cdot f(x,t)=\delta(x-x_0)\cdot\delta(t-t_0) \Rightarrow$



$t=t_0$ $\quad$ дельта-функция

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{1}{\rho} f(x,t)\,dx\cdot dt = 1$$

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\; G(x,t,\xi,\tau)\cdot\delta(\xi-x_0)\cdot\delta(\tau-t_0)=\begin{cases} t<t_0, & u=0 \\ t>t_0, & u= \\ u(x,t_0)\Big|_{t>t_0} = G(x,t,x_0,t_0) \end{cases}$$

ф-я Грина описывает отклик под действ. един. точечного импульса

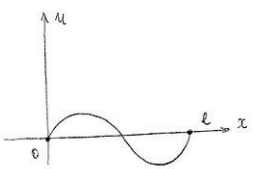
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\cdot f(x)\cdot\delta(x-x_0)=f(x_0) \qquad \forall f(x) \qquad a<x_0<b$$

Задача о свободных колебаниях конечной свободной струны

$u_{tt}(x,t)=a^2\cdot u_{xx}(x,t)$, $\quad x\in(0,l)$, $t>0$ $\quad$ гр. усл. $u(0,t)=0$ $\quad u(l,t)=0$, $t>0$

нач. усл. $u(x,0)=\gamma(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$

$x\in(0,l)$



Метод разделения переменных

$u(x,t)=V(x)\cdot T(t)$ $\qquad u_{tt}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(x)\cdot T(t)=V(x)\cdot T''(t)$ $\quad u_{xx}=V''(x)\cdot T(t)$

$u=0$ тривиальное реш-е

$V(x)\cdot T''(t) = a^2 \cdot V''(x)\cdot T(t) \quad / \; a^2\cdot V(x) T(t)$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)} = -\lambda$$ докажем, что $\lambda = const$

λ - есть отнош-е ф-й, зависящих только от x, но с др. ст-л зав-т только от t, т.о. λ не зав-т ни от x, ни от t $\Rightarrow$ const

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = -\lambda \qquad \frac{T''(t)}{a^2\cdot T(t)} = -\lambda \;\Big|\; a^2\cdot T(t)$$

$$\begin{cases} V''(x) + \lambda\cdot V(x) = 0, \; x \in (0, \ell) \\ V(0) = 0, \; V(\ell) = 0 \end{cases}$$

$V''(x) + \lambda\cdot V(x) = 0 \qquad T''(t) + \lambda\cdot a^2\cdot T(t) = 0$

$u(0,t) = 0 \Rightarrow V(0)\cdot T(t) = 0 \quad V(0) = 0$

$u(\ell,t) = 0 \Rightarrow V(\ell)\cdot \overset{\neq 0}{T(t)} = 0 \quad V(\ell) = 0$

λ - const разделения переменных

Это есть частный случай задач Штурма-Лиувилля

$-V''(x) = \lambda\cdot V(x) \Rightarrow \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) V(x) = \lambda\cdot V(x) \qquad \hat{A}\, V(x) = \lambda\cdot V(x)$

собств. ф-я лин. опер.

1) Пусть $\lambda < 0$ $\quad\lambda$ - вещ-е число, т.к. явл. отношением вещ-х ф-й

$V(x) = C_1\cdot A\cdot sh(\sqrt{|\lambda|}\,x) + B\cdot ch(\sqrt{|\lambda|}\cdot x) = C\cdot e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot x} + D\cdot e^{-\sqrt{|\lambda|}\cdot x}$

$V(0) = 0 \Rightarrow A\cdot 0 + B\cdot 1 = 0 \Rightarrow B = 0$

$V(\ell) = 0 \Rightarrow A\cdot \underset{0}{\underset{\vee}{sh\sqrt{|\lambda|}\cdot\ell}} = 0 \Rightarrow A = 0, \quad V(x) = 0$ тривиальное реш-е

$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

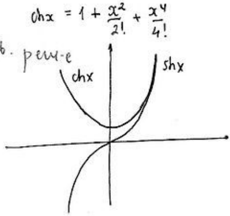
2) Пусть $\lambda = 0$, $V''(x) = 0 \Rightarrow V(x) = Cx + D$

$sh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$V(0) = 0 \Rightarrow D = 0$

$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$V(\ell) = 0 \Rightarrow V(\ell) = 0 : C\cdot \overset{\neq 0}{\ell} \Rightarrow C = 0$ тоже трив. реш-е



3) $\lambda > 0$

все нетрив. реш. задачи даются синусами

$$V(x) = E \cdot \cancel{\cos(\sqrt{\lambda}\, x)} + F \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$

$$V(0) = \underline{0 = E}$$

$$V(l) = 0 = \underset{\neq 0}{F} \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot l) = 0 \qquad \sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$$

$$\sqrt{\lambda} \cdot l = \pi n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \\ V_n(x) = F_n \cdot \sin\left(\dfrac{\pi n}{l} \cdot x\right) \quad \text{пусть } F_n = 1 \end{array}}$$

$$T''_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = 0 \qquad T_n(t) = A_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} \cdot at\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot at\right)$$

$$u_n(x,t) = V_n(x) \cdot T_n(t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right) \cdot \left\{ A_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} \cdot at\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot at\right) \right\}$$

в конечной струне удовлетвор. ∞ мн-во реш-й

$\{A_n, B_n\}$ - набор вещ-х const

$$u(x,t) = \cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot at\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}\, at\right)}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right) \left\{ A_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} \cdot at\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot at\right) \right\}$$

$$u(x,0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right) = \varphi(x)}_{A_n - ?} \Bigg| \begin{array}{l} x \in (0, l) \\ \cdot \sin\left(\dfrac{\pi m}{l} \cdot x\right) \end{array} \quad = \varphi(x)$$

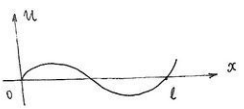
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \underbrace{\int_0^l dx \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{l} \cdot x\right)}_{= \frac{l}{2} \delta_{nm}} = \int_0^l dx \cdot \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{l} \cdot x\right)$$

18.10.11.

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} \qquad x \in (0, l) \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad t>0 \qquad u(x,0) = \varphi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \quad x \in (0,l)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cdot \cos(\omega_n t) + B_n \cdot \sin(\omega_n t) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right)$$



$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x = \varphi(x) \quad \Big| \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{l} \cdot x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \underbrace{\int_0^l dx \cdot \sin\frac{\pi m}{l} x \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x}_{\circ} = \int_0^l dx\, \varphi(x) \cdot \sin\frac{\pi m}{l} x$$

$$I_{nm} = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} dx \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x \cdot \sin\frac{\pi m}{l} x = \left\| \begin{array}{l} \frac{\pi}{l} x = \alpha \\ x = \frac{l}{\pi}\alpha \quad dx = \frac{l}{\pi} d\alpha \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \cdot \sin n\alpha \cdot \sin m\alpha =$$

$1, \cos n\alpha, \sin n\alpha \quad n = 1,2,3,\ldots$ образуют полную систему ф-й

$\alpha \in [-\pi;\pi]$ ортогональную

$$= \delta_{nm} \cdot \frac{l}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \cdot \sin^2 m\alpha = \frac{l}{2\pi} \cdot \delta_{nm} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2m\alpha) = \frac{l}{2\pi} \cdot \delta_{nm} \cdot \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{1}{2m} \cdot \sin 2m\alpha\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{l}{2}\delta_{nm}$$

$$A_m \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l dx \cdot \varphi(x) \cdot \sin\frac{\pi m}{l} x \Rightarrow \boxed{A_m = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l dx \cdot \varphi(x) \cdot \sin\frac{\pi m}{l} x = \varphi_m}$$

$$\boxed{A_m = \varphi_m} \quad \forall m = 1,2,3,\ldots$$

$$u_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(- A_n \cdot \omega_n \cdot \sin\omega_n t + B_n \omega_n \cdot \cos\omega_n t \right) \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \omega_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x = \psi(x) \iff B_n \cdot \omega_n = \psi_n, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\boxed{B_n = \frac{\psi_n}{\omega_n}}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\psi_n \cdot \cos \omega_n t + \frac{\Psi_n}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \cdot x = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t)$$

$$u_n(x,t) = \left(\psi_n \cdot \cos \omega_n t + \frac{\Psi_n}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \cdot x \qquad x \in (0, l), \; t > 0$$

$$\psi_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l d\xi \cdot \psi(\xi) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Psi_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l d\xi \cdot \psi(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi$$

$$u_n(x,t) = \alpha_n \cdot \cos \omega_n (t - \delta_n) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \cdot x \qquad \alpha_n = \sqrt{\psi_n^2 + \frac{\Psi_n^2}{\omega_n^2}}$$ амплитуда колеб.

$$tg\, \omega_n \delta_n = \frac{\Psi_n}{\psi_n \cdot \omega_n}$$

1) $x = x_0$ $u_n(x_0,t) = \underbrace{\alpha_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \cdot x_0}_{\text{амплитуда колебаний}} \cdot \cos \omega_n (t - \delta_n)$ - стоячая волна, кот. соотв. гарм. колеб. ω_n

фикс. точку струны

$u_n(x,t)$ - стоячая волна

$k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

Узлы стоячей волны: $\sin \frac{\pi n}{l} \cdot x_0 = 0$ $\frac{\pi n}{l} \cdot x_0 = \pi k$ $\boxed{x_0 = \frac{k}{n} \cdot l}$ Узлы

для n-й гармоники (n-1) узел

$x_0 \in (0, l)$

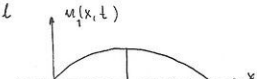
пучности стоячей волны: $\sin \frac{\pi n}{l} \cdot x_0 = \pm 1$ $\frac{\pi n}{l} \cdot x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow$

у n-й гармоники n пучностей

$$\boxed{x_0 = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}} \qquad k = 0, \ldots n-1$$

if $n = 1$ → осн. гармоника $x = \frac{1}{2} l$

$u_1(x,t) = \alpha_1 \cdot \sin \frac{\pi x_0}{l} \cdot \cos \omega_1 (t - \delta_1)$



скорость

2) $t = t_0$ фикс. мом. вр.

$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \cdot a = k_n \cdot a$

$u_n(x,t_0) = \underbrace{\alpha_n \cdot \cos \omega_n (t_0 - \delta_n)}_{\text{амплитуда}} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \cdot x$ $k_n = \frac{\pi n}{l}$ - волновой вектор

$\cos \omega_n (t_0 - \delta_n) = 0 \qquad \omega_n (t_0 - \delta_n) = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in Z$ амплитуды обращ. в 0

$\cos \omega_n (t_0 - \delta_n) = 1$

Энергия струны

$$E[u(x,t)] = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \rho \, dx \cdot (u_t(x,t))^2 + \frac{1}{2} \cdot T_0 \int_0^l dx \cdot (u_x(x,t))^2 = K + U$$

$$L = K - U = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \int_0^l dx \cdot u_t^2 - \frac{1}{2} T \cdot \int_0^l dx \cdot u_x^2 = L(u, u_t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) = \frac{\partial L}{\partial u} \Rightarrow \rho \cdot u_{tt} = T \cdot u_{xx} \qquad u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}, \quad a^2 = \frac{T}{\rho}$$

$F[f(x)] \Rightarrow$

$$\delta F = F[f(x) + \delta f(x)] - F[f(x)] = \int dx \cdot \delta f(x) \cdot \left(\frac{\delta F}{\delta f(x)}\right)$$ — вариационная производная

$$E[u(x,t)] = \cancel{\sum} \frac{\rho}{2} \cdot \int_0^l dx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_m \cdot \omega_n \cdot \omega_m \sin \omega_n (t - \delta_n) \cdot \sin \omega_m (t - \delta_m) \cdot$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \cos \omega_n (t - \delta_n) \cdot \sin k_n x$$

$$\cdot \underline{\sin k_n x \cdot \sin k_m x} + \frac{T}{2} \cdot \int_0^l dx \cdot \sum_{n,m} \alpha_m \alpha_n \cdot k_n \cdot k_m \cdot$$

$$\cdot \cos \omega_n (t - \delta_n) \cdot \cos (t - \delta_m) \cdot \omega_m \cdot \underbrace{\cos k_n x \cdot \cos k_m x}_{} = \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \sin^2 \omega_n (t - \delta_n) +$$

$$+ \frac{T}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \cdot k_n^2 \cdot \cos^2 \omega_n (t - \delta_n) = \frac{l}{4} \cdot \rho \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \cdot \omega_n^2 \cdot [\sin^2 \omega_n (t - \delta_n) +$$

$$+ \cos^2 \omega_n (t - \delta_n)] = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \qquad \boxed{E_n = \frac{l\rho}{4} \cdot \alpha_n^2 \cdot \omega_n^2}$$ — энергия колебаний n-ой гармоники

$l \cdot \rho$ - масса струны $\qquad E_n = \frac{M}{4} \alpha_n^2 \cdot \omega_n^2$

ρ - лин. плотность

$\omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \cdot a = \frac{\pi}{\ell} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ (закон Мерсена) ω_1 - основной тон

$\omega_n = \frac{\pi n}{\ell} \cdot a = n \cdot \omega_1$ $\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t)$

$E_n = \frac{M}{4} \cdot \omega_n^2 \left(y_n^2 + \frac{\psi_n^2}{\omega_n^2} \right)$ тембр - зависимость E от n

↓ опред-т тембр звука

фразиолет

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(y_n \cdot \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x =$$

$$= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell d\xi \sum_{n=1}^{+\infty} (y(\xi) \cos \omega_n t \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} \xi + \frac{2}{\ell} \int_0^\ell d\xi \left(\psi(\xi) \cdot \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n}{\ell} \xi \right.$$

$$= \int_0^\ell d\xi \cdot G_t(x,t,\xi,0)\, y(\xi) + \int_0^\ell d\xi \cdot G(x,t,\xi,0) \cdot \psi(\xi)$$

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n}{\ell} \xi$$

25.10.11.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} & x \in (0,\ell) \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \quad u(\ell,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = y(x), \; u_t(x,0) = \psi(x) & x \in (0,\ell) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\ell d\xi \cdot G(x,t,\xi,0) + \int_0^\ell d\xi \cdot G(x,t,\xi,0)\, \psi(\xi) \qquad \omega_n = \frac{\pi n}{\ell} \cdot a$$

$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{2}{\ell} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \xi\right)$ - ф-я Грина (ф-я влияния)

$t > \tau > 0$ описывает скор. стр. в т. x в мом. t,

if в точку ξ в мом. вр. τ был придан мгн. импульс

$\psi(x) = \delta(x-\xi)$ - скор. стр.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = 0 \quad u(\ell,t) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \quad u_t(x,0) = 0 \end{cases}, \quad t > 0$$

решим методом собственных функций.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \cdot x\right)$$ разложим в ряд по собств. ф-м

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} d\xi \cdot f(\xi,t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \xi\right)$$

$$\omega_n = \frac{\pi n}{\ell} a$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{u}_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \xi\right) = -a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \cdot \xi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t) \right\} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) = 0 \qquad x \in (0,\ell)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 \cdot u_n(t) = f_n(t) & t > 0 \quad \text{ур-е колеб. гармоника} \\ u_n(0) = 0 \quad \dot{u}_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \cdot \sin\frac{\pi n}{\ell} \cdot x = 0 \qquad x \in (0,\ell) \quad u_n(0) = 0$$ в силу лин. независ. набора $\{\sin\frac{\pi n}{\ell} x\}$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \cdot \sin\frac{\pi n}{\ell} \cdot x = 0 \qquad x \in (0,\ell) \quad \dot{u}_n(0) = 0$$

$$u_n(t) = \int_0^t d\tau \cdot \underbrace{\frac{1}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n (t-\tau)}_{g_n(t,\tau)} \cdot f_n(\tau)$$

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n(t-\tau) f_n(\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t d\tau \cdot \cos\omega_n(t-\tau) f_n(\tau) \Rightarrow \dot{u}_n(0) = 0, \quad \dot{u}_n(0) = 0$$

$$\ddot{u}_n(t) = \cos\omega_n(t-\tau) f_n(\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t d\tau \cdot (-\omega_n \cdot \sin\omega_n(t-\tau)) f_n(\tau) = f_n(t) - \omega_n^2 \int_0^t d\tau \cdot \frac{\sin\omega_n(t-\tau)}{\omega_n} f_n(\tau)$$

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} \cdot f_n(\tau) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \cdot x = \int_0^t d\tau \cdot \int_0^l d\xi \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \right) \cdot f(\xi, \tau)$$

реш-е зад. вынужд-х колеб. под действ. вн. силы

↓

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^t d\tau \cdot \int_0^l d\xi \cdot G(x,t,\xi,\tau) \cdot f(\xi,\tau)} \qquad 0 < \tau < t$$

1-ая краевая задача в общей постановке

задача о попер. колеб. струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,l), \ t > 0 \end{cases}$$

$f(x,t)$ — плотность вн. силы

$u(0,t) = \mu_1(t) \quad u(l,t) = \mu_2(t), \ t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x)$

$x \in (0, l)$

$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t)$ будем искать реш-е в виде суммы двух ф-й

$U(x,t) = \mu_1(t) + [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \cdot \frac{x}{l}$ ← выбираем ф-ю $U(x,t)$ таким обр.

$x = 0 \quad U(0,t) = \mu_1(t) \quad U(l,t) = \mu_2(t)$

$V_{tt} = a^2 \cdot V_{xx} + \{a^2 \cdot U_{xx} - U_{tt} + f(x,t)\}$, где $\{\ldots\} = \tilde{f}(x,t)$ — для ф.-ии V получ. ур-е такого же типа

$u(0,t) = U(0,t) + V(0,t) = \mu_1(t)$, $U(0,t) = \mu_1(t)$ | $V(0,t) = 0 \quad V(l,t) = 0 \quad \forall t > 0$

для V однор. гран. задача

$u(x,0) = U(x,0) + V(x,0) = \varphi(x)$ | $V(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) = \tilde{\varphi}(x)$

$V_t(x,0) = \psi(x) - U_t(x,0) = \tilde{\psi}(x)$

редукция задачи $\quad V(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где $\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot w_{xx} + \tilde{f}(x,t) \\ w(0,t) = 0 \quad w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = 0 \quad w_t(x,0) = 0 \end{cases}$

$v_{tt} + w_{tt} = a^2 \cdot v_{xx} + a^2 w_{xx} + \tilde{f}(x,t)$ $\quad v(0,t) = 0 \quad v(\ell,t) = 0$

$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \; v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x)$

$$u(x,t) = \mu_1(t) + [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \cdot \frac{x}{\ell} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\ell d\xi \cdot G(x,t,\xi,0)\,\tilde{\varphi}(\xi) +$$

$$+ \int_0^\ell d\xi \cdot G(x,t,\xi,0) \cdot \tilde{\psi}(\xi) + \int_0^t d\tau \cdot \int_0^\ell d\xi \cdot G(x,t,\xi,\tau) \cdot \hat{f}(\xi,\tau)$$

где $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu_1(0) - [\mu_2(0) - \mu_1(0)] \frac{x}{\ell}$ $\quad \hat{f}(x,t) = f(x,t) - \mu_1''(t) - [\mu_2''(t) - \mu_1''(t)] \frac{x}{\ell}$

$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \mu_1'(0) - [\mu_2'(0) - \mu_1'(0)] \cdot \frac{x}{\ell}$

Особенности 2-й краевой задачи

1) нулев. нулевое собств. знач.

2) произв. неоднор. из гран. усл. нельзя убрать с помощью лин-х по x ф-й

$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} \quad x \in (0,\ell), \; t > 0 \quad u_x(0,t) = 0 \quad u_x(\ell,t) = 0$ 2 краев. зад.

$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x)$

Метод разд. пер-х:

$u_2(x,t) = V(x) \cdot T(t)$ $\quad V''(x) + \lambda V(x) = 0 \quad T''(t) + \lambda a^2 \cdot T(t) = 0$

частные реш-е $\quad V'(0) \cdot T(t) = 0 \quad V'(\ell) \cdot T(t) = 0$

$$\begin{cases} V'(0) = 0 \quad V'(\ell) = 0 \quad x \in (0,\ell) \\ V''(x) + \lambda \cdot V(x) = 0 \end{cases}$$

1) $\lambda < 0$

$V(x) = A \cdot ch(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + B \cdot sh(\sqrt{-\lambda} \cdot x)$ $\quad V'(x) = \sqrt{-\lambda}\,(A \cdot sh\sqrt{-\lambda}x + B \cdot ch\sqrt{-\lambda}x)$

$V'(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \cdot (A \cdot 0 + B \cdot 1) = 0 \Rightarrow B = 0$ $\quad V(x) = A \cdot ch(\sqrt{-\lambda} \cdot x)$

$A \cdot \sqrt{\lambda} \cdot sh\sqrt{-\lambda} \cdot \ell = 0 \Rightarrow A = 0$ $\quad \boxed{V(x) = 0}$ тривиальное реш-е

2) $\lambda = 0$ $\quad V'(x) = 0 \quad V(x) = Ax + B \quad V'(x) = A, \quad A = 0$

$\boxed{V(x) = B = 1}$ $\quad V_0(x) = 1 \quad \exists$ нулевое собств. зн-е

3) $\lambda > 0 \quad V(x) = A \cdot \cancel{\sin\sqrt{+\lambda}\,x}^{\,0} + B \cdot \cos\sqrt{+\lambda}\cdot x \quad V'(x) = \sqrt{\lambda}\left(A\cdot\cos\sqrt{\lambda}\,x - B\cdot\sin\sqrt{\lambda}\,x\right)$

$V'(0) = 0 \quad \cancel{\sqrt{\lambda}}\,A = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}$

$V'(l) = 0 \Rightarrow \quad \cancel{\sqrt{\lambda}}\,(-\cancel{B})\sin\sqrt{\lambda}\cdot l = 0 \quad l\sqrt{\lambda_n} = \pi n \quad n = 1, 2, \ldots$

$V_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}\,x) = \cos\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right)$

$\lambda_0 = 0, \quad V_0(x) = 1 \quad T''(t) = 0 \quad T_0(t) = A_0\cdot t + B_0$

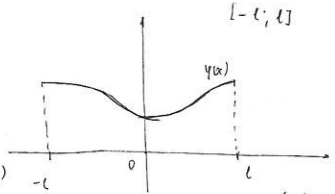
$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad n = 1,2,3,\ldots \quad V_n = \cos\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right) \quad T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot T_n(t) = 0 \quad T_n(t) = A_n\cdot\sin\frac{\pi n}{l}at +$

$+ B_n\cdot\cos\frac{\pi n}{l}at$

$$u(x,t) = (A_0\cdot t + B_0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cdot\sin\frac{\pi n}{l}at + B_n\cdot\cos\frac{\pi n}{l}\cdot at\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right)$$

27.10.11.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\cdot u_{xx} & x \in (0,l),\ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & u_x(l,t) = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in (0,l) \end{cases}$$



$\varphi(-x) = \varphi(x)$

четным обр-м

$$u(x,t) = A_0 + B_0\cdot t + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cdot\cos\frac{\pi n}{l}\cdot xt + B_n\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\cdot xt\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right)$$

$$u(x,0) = A_n + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right) = \varphi(x), \quad x \in (0,l) \qquad \left\{1, \cos\frac{\pi n}{l}x,\ n = 1,2,\ldots\right\}$$

$\left\{1, \cos\frac{\pi n}{l}x, \sin\frac{\pi n}{l}\cdot x\right\} \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\right)$ if $f(-x) = f(x)$, $b_n = 0 \quad \forall n$

$A_n = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l dx\cdot\cos\frac{\pi n}{l}\cdot x\ \varphi(x) \quad n = 1,2,\ldots$

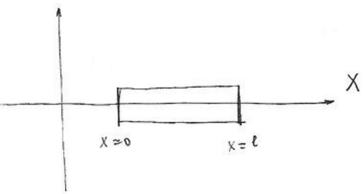
$A_0 = \frac{1}{l}\cdot\int_0^l dx\cdot\varphi(x) =$ среднее знач. смещения

$= \langle u(x,0)\rangle$

$$u_t(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \overset{\prime\prime}{} \psi(x) \qquad B_n = \frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi n a}\right)\int_0^l dx \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot \psi(x)$$

$$B_0 = \frac{1}{l}\cdot\int_0^l dx\cdot\psi(x) = \langle u_t(x,0)\rangle$$ ср. знач. скор.

$$u(x,t) = \underbrace{\langle u(x,0)\rangle}_{=X_0} + \underbrace{\langle u_t(x,0)\rangle}_{=V} t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dots\right)\cdot \cos\frac{\pi n}{l}x$$



собст. зн. $\lambda = 0$ → движение стержня „как целого"

$$X = X' + V\cdot t + X_0$$

2 краев. зад.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\cdot u_{xx} + f(x,t) & x\in(0,l),\ t>0 \\ u_x(0,t) = \nu_1(t),\ u_x(l,t) = \nu_2(t), & t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & x\in(0,l) \end{cases}$$

$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t)$ $\qquad U_x(0,t) = \nu_1(t)$ $\qquad U_x(l,t) = \nu_2(t)$

пусть $U(x,t) = C_1(t)x + C_2(t)$ ⇒ $U_x = C_1(t) = \nu_1(t)$ if $\nu_1 \neq \nu_2$, $\nexists\ C_1(t)$

$C_1(t) = \nu_2(t)$ $\quad$ $C_2(t) = \nu_1(t)$

будем искать зав-ть в след. виде: $U(x,t) = C_1(t)\cdot x^2 + C_2(t)\cdot x + C_3(t)$

$U_x(x,t) = 2C_1(t)\cdot x + C_2(t)$ ⇒ $\qquad 2C_1(t)\cdot l + C_2(t) = \nu_2(t)$

$$U(x,t) = \frac{[\nu_2(t) - \nu_1(t)]\,x^2}{2l} + \nu_1(t)\cdot x + C_3(t)$$ Напр. $C_3(t) = 0$

Частные случаи

Неоднородность вида: 1) стационарная неоднородность (зависимость только от x)

Искать частное реш-е ур-я и гран. усл. $u_2 = w(x)$

$u(x,t) = w(x) + v(x,t)$

2) $t \cdot g(x) + h(x)$ - линейная зав-ть по t

Искать частное реш-е в виде: $u_2(x,t) = t \cdot w_1(x) + w_2(x)$

3) $g(x) \cdot \cos \omega t \quad (\sin \omega t)$

$u_2(x,t) = W(x) \cdot \cos \omega t$

4) $g(x) \cdot e^{\alpha t}$ - неоднородность $u_2(x,t) = w(x) \cdot e^{\alpha t}$

Специфика 3-й краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} \quad x \in (0,l) \quad t>0 \quad u_x(0,t) = 0 \quad u(l,t) + h \cdot u_x(l,t) = 0, \quad t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad x \in (0,l) \end{cases}$$

$h>0$

Метод разделения переменных:

$u_1(x,t) = V(x) \cdot T(t) \qquad V''(x) + \lambda V(x) = 0 \qquad T''(t) + \lambda a^2 \cdot T(t) = 0$

$V'(0) \cdot T(t) = 0 \qquad (V(l) + h \cdot V'(l)) \cdot T(t) = 0 \qquad V''(x) + \lambda \cdot V(x) = 0 \quad x \in (0,l)$

$V'(0) = 0, \quad V(l) + h \cdot V'(l) = 0$

$\lambda > 0 \qquad V(x) = A \cdot \sin \sqrt{\lambda} x + B \cdot \cos \sqrt{\lambda} x \qquad V'(0) = A \cdot \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}$

$V(x) = B \cdot \cos\sqrt{\lambda}\cdot x \qquad B\cdot(\cos\sqrt{\lambda}\cdot l - h\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sin\sqrt{\lambda}\cdot l) = 0$

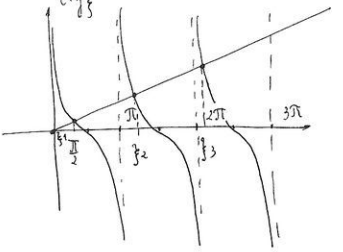
$h\sqrt{\lambda} = \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\cdot l)$ пол. пар. $\sqrt{\lambda}\,l = \xi > 0$

$\left(\operatorname{ctg}\xi = \frac{h}{l}\xi,\ \xi > 0\right)$ h - жесткость пружины

l - размер стержня

графически показано, что у этого ур. я

счетно ∞ - число реш-й



$\{\xi_n\}$ $n = 1,2,..$ $(\xi_n > 0)$

$\lambda_n = \frac{\xi_n^2}{l^2}$, $V_n(x) = \cos\xi\sqrt{\lambda_n}\cdot x \Rightarrow$

$V_n(x) = \cos\left(\frac{\xi_n x}{l}\right)$ $n = 1,2,.$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\cdot V_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n\cdot\cos\left(\frac{\xi_n}{l}\cdot at\right) + B_n\cdot\sin\left(\frac{\xi_n}{l}\cdot at\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{\xi_n}{l}x\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n\cdot\cos\left(\frac{\xi_n}{l}x\right)\right] = \psi(x) \qquad x\in(0,l)$$

$$\int_0^l dx\cdot V_n(x)\cdot V_k(x) = 0, \quad n\neq k \qquad V_n''(x) + \lambda_n\cdot V_n(x) = 0 \;\Big|\cdot V_k(x) \qquad V_k''(x) + \lambda_k\cdot V_k(x) = 0 \;\Big|\cdot V_n(x)$$

1 ⊖ 2

$V_k(x)\cdot V_n''(x) - V_n(x)\cdot V_k''(x) = (\lambda_k - \lambda_n)\cdot V_n(x)\cdot V_k(x) \Rightarrow$

$$\int_0^l dx\,\frac{d}{dx}\left[V_k\cdot V_n' - V_n\cdot V_k'\right] = \int_0^l(\lambda_k - \lambda_n)\,V_n\cdot V_k\,dx$$

$$\left|\begin{matrix} V_k(x) & V_n(x) \\ V_k'(x) & V_n'(x)\end{matrix}\right|_0^l = (\lambda_k - \lambda_n)\cdot\int_0^l dx\,V_n(x)\cdot V_k(x) = 0 \Rightarrow \text{ортогональность} \qquad \text{if } n\neq k$$

$$\left|\begin{matrix} V_k(l) & V_n(l) \\ V_k'(l) & V_n'(l)\end{matrix}\right| = \left\{\begin{matrix} V_n(l) = -h\cdot V_n'(l) \\ V_k(l) = -h\cdot V_k'(l)\end{matrix}\right\} = \left|\begin{matrix} -h\cdot V_k'(l) & -h\cdot V_n'(l) \\ V_k'(l) & V_n'(l)\end{matrix}\right| = 0$$

аналог. на нижн. пределе $(x=0)$

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \cos\left(\frac{\xi_n}{l}\cdot x\right) = \psi(x)$$

$$\underset{V_n(x)}{\parallel}; \quad A_n = \frac{\int_0^l dx \cdot \psi(x) \cdot V_n(x)}{\|V_n(x)\|^2} \text{ - квадрат нормы}$$

245 ауд. Кононенко – „плазма"

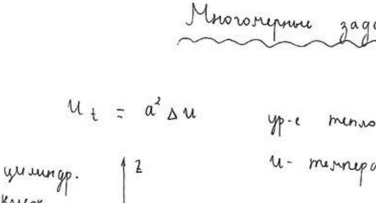
01. 11. 11.

Многомерные задачи

$u_t = a^2 \Delta u$ ур-е теплопроводности, a - коэф. теплопров-ти

u - температура $u = u(\vec{r}, t)$

цилиндр. кусок



ρ, φ, z

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u \\ u\Big|_{\Sigma} = 0, \ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \psi(\vec{r}) \end{cases}$$

темп-ра на пов-ти в $\forall t > 0$ поддерж-ся $= 0$

ур-е параболич. типа, 1-ая краев. зад.

„остывание консервной банки"

решим задачу методом раздел. пер-х.

$U_\lambda(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cdot T(t)$

$V(\vec{r}) \cdot T'(t) = a^2 T(t) \Delta V(\vec{r}) \quad \Big| : a^2 \cdot T(t) \cdot V(\vec{r})$

$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(\vec{r})}{V(\vec{r})} \Rightarrow$

$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ - врем. зав.

$-\Delta V(\vec{r}) = \lambda V(\vec{r})$ - простр. зав.

$V(\vec{r})\Big|_{r \in \Sigma} \cancel{T(t)} = 0$

$$\begin{cases} V(\vec{r})\Big|_{\Sigma} = 0 \\ -\Delta V(\vec{r}) = \lambda \cdot V(\vec{r}) \end{cases} \sim \text{ур-е Гельмгольца}$$

$V(\vec{r}) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \cdot L(z)$

$$\Delta V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$\Delta V + \lambda V = 0$

$$\frac{\Phi(\varphi) L(z)}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{L(z) R(\rho)}{\rho^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + R(\rho)\Phi(\varphi) \cdot \frac{d^2 L(z)}{dz^2} + \lambda R \Phi L = 0$$

$$\frac{\varphi(\varphi)L(z)}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{R(\rho)}{d\rho}\right)+\frac{L(z)R(\rho)}{\rho^2}\frac{d^2\varphi(\varphi)}{d\varphi^2}+R(\rho)\varphi(\varphi)\cdot\frac{d^2L(z)}{dz^2}+\lambda R\varphi L=0 \quad \Big| : R\varphi L$$

$$\frac{1}{R(\rho)\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{1}{\varphi(\varphi)}\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}}_{=-\nu^2}+\underbrace{\frac{1}{L(z)}\frac{d^2L(z)}{dz^2}}_{=-\lambda_3}+\lambda=0 \qquad \Big|\cdot R(\rho)$$

$$L''(z)+\lambda_3 L(z)=0$$

$$\begin{cases}\varphi''(\varphi)+\nu^2\cdot\varphi(\varphi)=0\\ \varphi(\varphi+2\pi)=\varphi(\varphi)\end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(\lambda-\lambda_3-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0$$

граница описыв-ся 3 ур-ми:

$$\sum=\begin{cases}1)\ z=0 \quad \forall\varphi,\ 0\le\rho\le\rho_0 & \Sigma_1\\ \rho_0\text{ - рад. цилиндра}\\ 2)\ z=l \quad \forall\varphi\ 0\le\rho\le\rho_0 & \Sigma_2\\ 3)\ 0<z<l \quad \forall\rho,\ \rho=\rho_0 & \Sigma_3\end{cases}$$

$$V(\vec{r})\Big|_{\Sigma_1}=0 \Rightarrow R(\rho)R(\varphi)\cdot L(0)=0$$
$$\forall\varphi,\ 0\le\rho\le\rho_0$$

$$\boxed{L(0)=0}$$

$$V(\vec{r})\Big|_{\Sigma_2}=0 \Rightarrow \boxed{L(l)=0}$$

$$V(\vec{r})\Big|_{\Sigma_3}=0$$

$$R(\rho_0)\varphi(\varphi)L(z)=0 \qquad \boxed{R(\rho_0)=0}$$
$$\forall\varphi,\ \forall\ 0\le z\le l$$

$$\begin{cases}L''(z)+\lambda_3 L(z)=0\\ L(0)=0 \quad L(l)=0\\ z\in[0,l]\end{cases}$$

φ - цикл. переменная для $\varphi(\varphi+2\pi)=\varphi(\varphi)$

ур-е 2π - периодичности

$$\varphi(l)=A\cdot\cos\nu\varphi+B\cdot\sin\nu\varphi \qquad \varphi\to\varphi+2\pi$$
$$\cos\nu\varphi\longrightarrow\cos(\nu\varphi+2\pi\nu)\Rightarrow$$
$$2\pi\nu=2\pi\text{ (целое число)}$$
$$\nu=\text{целое число}$$

$$\varphi_\nu(\varphi)=\begin{cases}\cos\nu\varphi\\ \sin\nu\varphi\end{cases},\ \nu=0,1,2,..$$

$$\begin{cases}\lambda_{3p}=\left(\frac{\pi p}{l}\right)^2 \quad p=1,2,..\\ L_p(z)=\sin\left(\frac{\pi p}{l}\cdot z\right)\end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(\underbrace{\lambda-\lambda_3}_{\|\,k^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0 \qquad \Big|\rho^2$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(k^2\rho^2-\nu^2\right)R=0 \qquad \text{пусть } k>0 \quad (k - \text{вещ. число})$$

$k\rho = x, \quad R(\rho) = y(x)$

$$\boxed{x\cdot\frac{d}{dx}\left(x\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right)+(x^2-\nu^2)y(x)=0}$$ → ур-е для цилиндр. ф-й порядка ν

∀ реш-е эт. ур-я наз. цилиндр. ф-ей

$x^2\cdot y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0 \qquad y=y_\nu(x)$

нет реш-й в виде элемент-х ф-й

представим реш-е в виде рядов эл-х ф-й:

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}dt\cdot e^{-t}\cdot t^{s-1}, \quad \mathrm{Re}\,s>0$$

1. $\Gamma(s+1)=\Gamma(s)\cdot s$ 3. $\Gamma(n+1)=n!$
2. $\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}$ 4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

1) Бесселева ф-я пор. ν – это сумма след. ряда:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

Пр-ка:

ф-я Бесселя явл. цилиндр. ф-я пор. ν

$$x^2\cdot J_\nu''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)(2k+\nu-1)}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)2^{2k+\nu}}x^{2k+\nu} \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}=e^{(2k+\nu)\ln\frac{x}{2}}$$

3. $\Gamma(n+1)=n! \qquad n=0,1,2,3,\ldots$

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

$\Gamma(s)$ – аналит. ф-я

$$\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}\cdot\frac{1}{\Gamma(s)}$$

пусть $\Gamma(s_0)=0$

$s_0\neq 0,\pm1,\pm2$

$s\to s_0 \quad \Gamma(1-s_0)\to\infty \qquad 1-s_0=\{0,-1,-2\ldots\}$

$\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$ аналит. прод-е в обл. $-1<\mathrm{Re}\,s<0$

$\Gamma(s)\neq 0 \quad \forall s\in\mathbb{C}$

$\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ – целая ф. переменного $s\in\mathbb{C}$

$s\to 0, \quad \Gamma(s)\simeq\dfrac{\Gamma(1)}{s}=\dfrac{1}{s}$

$\dfrac{1}{\Gamma(-n)}=0, \quad n=0,1,2,\ldots$

в т. $s=0$ Γ-ф-я имеет полюс

$\mathrm{res}_{s=0}\,\Gamma(s)=1$

в т. $s=0,-1,-2\ldots$ $\Gamma(s)$ имеет простые полюса

Целая ф-я – не имеющая особенностей во всей комп-й пл-ти, дифф. во всей об-ти

08.11.11.

$x^2 y''(x) + x \cdot y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0$ $\quad \nu$ - вещественный пар-р

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = x^\nu f(x^2)$$

ф-я Бесселя пор. ν

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \frac{z^k}{2^{2k+\nu}} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

$(x^2 = z)$

$x \cdot J_\nu'(x) =$

покажем, что об-ти сход-ти эт. ряда – вся комплексная плоскость

ряд сх. для $\forall z$, применим признак сход-ти Даламбера:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|z|^{k+1} \cdot k!\,\Gamma(k+1+\nu)\,2^{2k+\nu}}{(k+1)!\,\Gamma(k+1+\nu+1) \cdot 2^{2k+2+\nu} \cdot |z|^k} = \frac{|z|}{(k+1)\cdot(k+1+\nu)} \longrightarrow 0$$

$\forall z \in \mathbb{C}$
$\forall \nu \in \mathbb{C}$

$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$

для любого фиксир. z это отношение м.б. сколь угодно малым

Целая ф-я – дифф-ма во всей комплексной пл-ти $\to f(x^2)$

$$x \cdot J_\nu'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) \cdot x^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)\,2^{2k+\nu}}$$

+

$$x^2 \cdot J_\nu''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k+\nu)(2k+\nu-1)}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)\,2^{2k+\nu}} x^{2k+\nu}$$

$$x^2 \cdot J_\nu''(x) + x \cdot J_\nu(x) - \nu^2 \cdot J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \left[\frac{\left[(2k+\nu)^2 - 2k - \nu + 2k + \nu - \nu^2\right]}{k!\,\Gamma(k+1+\nu) \cdot 2^{2k+\nu}} \right] \cdot x^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4k \cdot (k+\nu)}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)\,2^{2k+\nu}} x^{2k+\nu} = \left| \begin{array}{l} k = n+1 \\ \uparrow \\ 1 \end{array} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4(n+1)(n+\nu+1)}{(n+1)!\,\Gamma(n+1+\nu+1) \cdot 2^{2n+\nu}} \frac{x^{2n+\nu} \cdot x^2}{2^2}$$

т.к при $k=0$ вклада не дает

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ $\qquad \Gamma(\underbrace{n+1+\nu}+1) = (n+1+\nu)\cdot \Gamma(n+1+\nu)$

$$= -x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\nu)} = -x^2\cdot J_\nu(x) = x^2\cdot J_\nu''(x) + x\cdot J_\nu'(x) - \nu^2\cdot J_\nu(x)$$

зависимость от ν аналитическая в $J_\nu(x)$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$ – тоже цилиндр. ф-я пор. ν

покажем, что ф. Бесселя пор. $-n$ выраж. ч-з ф. Бес. пор. n → $J_{-n}(x) = (-1)^n\cdot J_n(x)$ $\qquad \Gamma(-n) = \infty$ ~~n=1,2,3~~,..

$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0 \quad n = 0,1,2,3,..$

$n = 1,2,3,..$ $\qquad \underline{\underline{J_{-n}(x)}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-n)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} =$

$= \Big|$ при $k = \underbrace{0,1,\dots,n-1}_{n \text{ чисел}}$, первые n членов эт. ряда $= 0 \Big| = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-n)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} =$

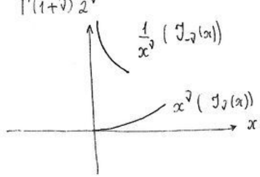
$$= \left\{ \begin{matrix} k = p+n \\ p = 0,1,.. \end{matrix} \right\} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+n}}{(p+n)!\,\Gamma(p+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} = (-1)^n \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+n+1)\,p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} =$$

$\Gamma(p+1) = p!$ $\qquad = \underline{\underline{(-1)^n\cdot J_n(x)}}$

$\nu > 0$ Ф-ции Бесселя пор-в $-n$ и n линейно связаны:

$(\nu \neq 1,2,..)$

$$J_\nu(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^\nu}{\Gamma(1+\nu)\,2^\nu} + O(x^{2+\nu}),\ x \to 0 \qquad J_{-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\cdot 2^{-\nu}}\cdot\frac{1}{x^\nu} + O(x^{2-\nu}),\ x\to 0$$



ф-ции Бес. пор. ν и ф. Бес. пор. $-\nu$, if $\nu \neq 0, \pm1, \pm2$ образуют полную фундамент-ю сист. решений

Любая цилиндр. ф-я пор. ν м.б. выражена в виде лин. комбинации

$$Y_\nu(x) = A_\nu \cdot J_\nu(x) + B_\nu \cdot J_{-\nu}(x)$$

↑ общее реш-е

Th. Лиувилля: (Лиув.- Остроградского):

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

вронскиан

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)\,dx}$$

$p(x) = \frac{1}{x}$ $\quad W[y_1(x), y_2(x)] = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x + C} = \frac{C}{x}$ считаем C_ν посредством пред. перехода

$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \frac{C_\nu}{x}$ найдем C_ν: $C_\nu = x \cdot W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] \longrightarrow$

$$C_\nu = \lim_{x\to 0} x \cdot W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \lim_{x\to 0} x \begin{vmatrix} \frac{x^\nu}{\Gamma(1+\nu)2^\nu} & \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)\cdot 2^\nu} \\ \frac{\nu x^{\nu-1}}{\Gamma(1+\nu)2^\nu} & -\frac{\nu x^{-\nu-1}}{\Gamma(1-\nu)2^{-\nu}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-\nu}{\Gamma(1+\nu)\cdot\Gamma(1-\nu)} - \frac{\nu}{\Gamma(1+\nu)\cdot\Gamma(1-\nu)} = \frac{-2\nu}{\nu\cdot\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = \frac{-2}{\Gamma(\nu)\cdot\Gamma(1-\nu)} = \frac{-2\sin\pi\nu}{\pi}$$

$\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}$

$$\boxed{W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = -\frac{2}{\pi x}\cdot\sin\pi\nu}$$

if $W \neq 0$, то $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ – есть лин. независ. реш-я

вронскиан ф-й Бесселя пор. ν и $-\nu$. (if ν - не явл. целым числом)

ф-я Неймана: $N_\nu(x) = \frac{\cos\pi\nu\cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$ 1. $N_\nu(x)$ - цилиндр. ф-я пор. ν ($\nu \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$)

(ф-я Вебера $Y_\nu(x)$)

if $\nu \to n$ $\quad \frac{(-1)^n\cdot J_n(x) - (-1)^n\cdot J_n(x)}{0}$

$$\frac{(-1)^n \cdot J_n(x) - (-1)^n J_n(x)}{0}$$

посчитаем вронскиан:

$$W\left[J_\nu(x), N_\nu(x)\right] = W\left[J_\nu(x), \frac{\cos\pi\nu \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}\right] =$$

$$= \frac{\cos\pi\nu}{\sin\pi\nu} W\left[J_\nu(x), J_\nu(x)\right] - \frac{1}{\sin\pi\nu} W\left[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\right] = \frac{2}{\pi x}$$

$$\boxed{W\left[J_\nu(x); N_\nu(x)\right] = \frac{2}{\pi x}}$$

$J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ всегда линейно независимы

$$\boxed{y_\nu(x) = C_\nu \cdot J_\nu(x) + D_\nu \cdot N_\nu(x)}$$ общее решение $\forall \nu$

$x^2 \cdot y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) \cdot y(x) = 0$ $\quad J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$

$J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$ $\quad N_\nu = \frac{\cos\pi\nu \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$

$W\left[J_\nu(x), N_\nu(x)\right] = \frac{2}{\pi x}$ $\quad y(x) = A_\nu \cdot J_\nu(x) + B_\nu \cdot N_\nu(x)$

рассмотрим асимптотику: $J_\nu(x)$ $N_\nu(x)$ в нуле

$$J_{-\nu}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{2^\nu}{x^\nu} + O(x^{2-\nu}), \quad x \to 0 \quad \nu > 0$$

1) $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$N_\nu(x) \approx -\frac{1}{\sin\pi\nu} J_{-\nu}(x) + O(x^\nu) = \frac{1}{\sin\pi\nu} \cdot \frac{2^\nu}{\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{1}{x^\nu} + \ldots + \delta_n =$$

по ф. с этим

$$= \left| \Gamma(\nu)\cdot\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin\pi\nu} \right| = -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \cdot 2^\nu x^{-\nu} + \ldots, \quad x \to 0 \qquad N_\nu(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \ldots \quad x \to 0, \ \nu > 0,$$

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \ldots, \quad x \to 0, \ \nu \geq 0$$

обр. в бесконечность $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$\nu = 0$ это ещё $= 1$

2) Рассмотрим асимптотики при целых ν:

$\nu = 0$ по опред. $N_0(x) = \lim\limits_{\nu \to 0} \dfrac{\cos \pi\nu \cdot J_\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} = \lim\limits_{\nu \to 0} \dfrac{-\pi \cdot \sin \pi\nu \cdot J_\nu + \cos \pi\nu \cdot \frac{d}{d\nu} J_\nu - \frac{d}{d\nu} J_{-\nu}}{\pi \cdot \cos \pi\nu} =$ (по правилу Лопиталя)

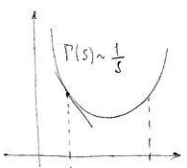
$= \dfrac{1}{\pi} \left(\dfrac{d}{d\nu} J_\nu - \dfrac{d}{d\nu} J_{-\nu} \right)\Big|_{\nu \to 0} = \dfrac{1}{\pi} \left[\dfrac{d}{d\nu} J_\nu + \dfrac{d}{d(-\nu)} \cdot J_{-\nu} \right]\Big|_{\nu \to 0} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{d}{d\nu} J_\nu =$

$= \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{d}{d\nu} \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k} \cdot e^{\nu \ln\left(\frac{x}{2}\right)} \right)\Big|_{\nu=0} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \ln \dfrac{x}{2} - \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k} e^{\nu} =$

$= \dfrac{2}{\pi} \left\{ \ln \dfrac{x}{2} J_0(x) + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu^0} \cdot \dfrac{d}{d\nu} \left(\dfrac{1}{\Gamma(k+1+\nu)} \right)\Big|_{\nu=0} \right\}$

1) $\Gamma(1) = -\gamma$, γ - постоянная Эйлера

$\gamma = 0{,}577\ldots$



Асимптотика $N_0(x)$ при $x \to 0$

$N_0(x) = \dfrac{2}{\pi} \left\{ \ln \dfrac{x}{2} \left(1 + O(x^2)\right) + \dfrac{d}{d\nu} \dfrac{1}{\Gamma(1+\nu)}\Big|_{\nu=0} + O(x^2) \right\}$ $x \to 0$

$\ln \to \infty$ $\quad O(x^2) \ll O(x^2) \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$N_0(x) = \dfrac{2}{\pi} \cdot \left\{ \ln \dfrac{x}{2} + O(x^2 \ln x) + \left(-\dfrac{1}{\Gamma^2(1+\nu)} \cdot \dfrac{d}{d\nu} \Gamma(1+\nu)\Big|_{\nu=0} \right\} =$

$= \dfrac{2}{\pi} \left\{ \ln \dfrac{x}{2} + O(x^2 \ln x) - \dfrac{1}{\Gamma^2(1)} \cdot \Gamma'(1) \right\} = \dfrac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \gamma + O(x^2 \ln x) \right\}$

$N_0(x) \underset{x \to 0}{=} \dfrac{2}{\pi} \cdot \left\{ \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \gamma \right\} + O(x^2 \ln x)$ $\quad \gamma = 0{,}577\ldots$ трансцендентное число

$N_n(x) = -\dfrac{(n-1)!}{\pi} \cdot \left(\dfrac{2}{x}\right)^n + \ldots$, $x \to 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Рекуррентные соотношения для Бесселевых функций

$\dfrac{d}{dx}\left(x^\nu \cdot J_\nu(x)\right) = \dfrac{d}{dx} \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \cdot \dfrac{x^{2k+2\nu}}{2^{k+\nu}} \right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k 2(k+\nu)}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \cdot \dfrac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{k+\nu}} =$

$= \left| \Gamma(k+1+\nu) = \Gamma(k+\nu)(k+\nu) \right| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k \cdot 2(k+\nu)}{k!\,(k+\nu)\cdot\Gamma(k+\nu)} \cdot \dfrac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{k+\nu}} = x^\nu \cdot \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}$ $\quad \ominus$

$\ominus x^\nu J_{\nu-1}(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

аналогично можно доказать, что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^\nu} J_\nu(x)\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

} рекуррентные ф-лы, верные $\forall \nu$

$$\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J_\nu'(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad | : x^{\nu-1}$$

$$-\frac{\nu}{x^{\nu+1}} J_\nu(x) + \frac{1}{x^\nu} J_\nu'(x) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \quad | \cdot x^{\nu+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nu J_\nu(x) + x \cdot J_\nu'(x) = x J_{\nu-1}(x) \\ -\nu \cdot J_\nu(x) + x \cdot J_\nu'(x) = -x \cdot J_{\nu+1}(x) \end{cases}$$

(1) − (2) $\quad 2\nu J_\nu(x) = x\left(J_{\nu+1} + J_{\nu-1}\right)$

(1) + (2) $\quad 2x J_\nu'(x) = x\left(J_{\nu-1} - J_{\nu+1}\right)$

$$\begin{cases} 2\nu J_\nu(x) = x\left(J_{\nu+1} + J_{\nu-1}\right) \\ 2 J_\nu'(x) = \left(J_{\nu-1} - J_{\nu+1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu - J_{\nu-1} \\ J_\nu'(x) = -\frac{1}{2}\left(J_{\nu+1} - J_{\nu-1}\right) \end{cases}$$

рекуррентные формулы для функции Бесселя

$J_0' = -J_1(x)$

$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$

Используя определение ф-ии Неймана, получить рекуррентные соотн. // должны получиться такие же //

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu N_\nu(x)\right) = x^\nu N_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^\nu} N_\nu(x)\right) = -\frac{1}{x^\nu} N_{\nu+1}(x)$$

Производящая функция функции Бесселя

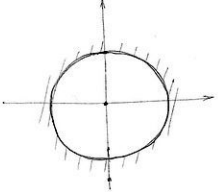
рассмотрим выражение:

$$\varphi(x,\zeta) = e^{\frac{x}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)}, \quad x > 0, \ \zeta \in \mathbb{C}$$

ф - дифференцируема всюду, кроме 0 и ∞ по ζ

ф. аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$

в $\zeta = 0$ - сущ. особая точка



разложим в ряд Лорана:

$$\mathcal{P}(x,\zeta) = e^{\frac{x}{2}\zeta} \cdot e^{-\frac{x}{2}\frac{1}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \zeta^n \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{\zeta^m} =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{n!\,m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} \zeta^{n-m} = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} \cdot \zeta^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{n!\,m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} \zeta^{n-m} = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} \cdot \zeta^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)} \Bigg(\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} \zeta^{n-m}}_{p = n-m} \Bigg) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)} \cdot \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \zeta^p \right) =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \zeta^p \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\cdot\Gamma(m+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \right)$$

$$\mathcal{P}(x,\zeta) = e^{\frac{x}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x) \cdot \zeta^p$$

$$J_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta^{p+1}} e^{\frac{x}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} = \left| \zeta = e^{iy} \right| = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dy\, e^{i(x\sin y - py)} = J_p(x)$$

17.11.11

$$e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,\zeta^n \qquad \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i$$

$p > 0$

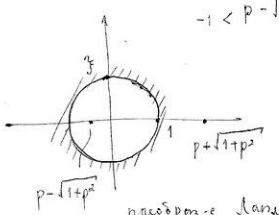
$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}\, e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}$$

1) $\zeta = e^{i\varphi}$ $\quad e^{i\frac{x}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\,e^{in\varphi} \Rightarrow e^{ix\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\,e^{in\varphi}$

$$I(p) = \int_0^{+\infty} dx\cdot e^{-px}\,J_0(x) = \left| J_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta}\,e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)} \right| = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^{+\infty} dx\, e^{x\left[-p+\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta}\cdot\frac{1}{\left[-p+\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]}\cdot e^{x\left[-p+\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]} = \frac{1}{\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\left[2p\zeta-\zeta^2+1\right]} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\zeta^2-2p\zeta-1=0\\ (\zeta-p)^2-p^2-1=0\\ \zeta = p\pm\sqrt{1+p^2}\end{array}\right\} = 2\,\mathrm{Res}\,\frac{1}{(2p\zeta-\zeta^2+1)} = 2\cdot\frac{1}{(2p-2\zeta)}\Big|_{\zeta\,=\,p-\sqrt{1+p^2}}$$



$$-1 < p-\sqrt{1+p^2} < 0$$

$$\sqrt{1+p^2} < p+1$$

$$1+p^2 < p^2+1+2p$$

$$0 < 2p$$

$$0 < p$$

$$\int_0^{+\infty} dx\, J_0(x)\,e^{-px} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\sqrt{1+p^2}\Big|_{p=0} = 1$$

преобраз-е Лапласа производной

$$J_1(x) = -J_0'(x) \Rightarrow F_1(p) = -\left[p\cdot F_0(p) - J_0(0)\right]$$

$$\int_0^{+\infty} dx\cdot J_1(x)\,e^{-px} = \frac{\sqrt{1+p^2}-p}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$F_1(p) = 1 - p\,F_0(p) = 1 - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

преобразование Лапласа
первого Бесселя

$$\int_0^{+\infty} dx\, J_n(x)\,e^{-px} = \frac{\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)^n}{\sqrt{1+p^2}} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

символ соответствия

$$\left\{\begin{array}{l} f(t) \neq F(p) \\ f'(t) \neq pF(p) - f(0)\end{array}\right.$$

преобраз. Лапласа

$f(t) \to F(p)$
оригинал изображение

преобраз. Лапласа: $f(t) \Rightarrow F(p) = \int_0^{+\infty} dt\, f(t)\,e^{-pt}$

прообраз. Лапласа производной:

$f(t) \neq F(p)$ $\quad f'(t) = \int_0^{+\infty} dt\, f'(t) e^{-pt} = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} dt\, f(t)(-p) e^{-pt} =$

предполагаем, что оригинал $f(t)$ растет не быстрее экспоненты e^{-pt}; делая p дост. большим всегда можно загнать на ∞

$= p \cdot \int_0^{+\infty} d(f(t) e^{-pt} - f(p)$

$f(t) \neq F(p) \quad f'(t) \neq pF(p) - f(0)$

Сидоров, Федорюк, Шабунин

„Введение в ТФКП" (прообраз. Лапласа)

$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} \cdot \frac{x^{2k+\frac{1}{2}}}{2^{2k+\frac{1}{2}}} = \longrightarrow$

$\Gamma(k+\frac{1}{2}+1) = (k+\frac{1}{2}) \cdot \Gamma((k+\frac{1}{2})-1+1) = (k+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2}-1) \cdot \Gamma(k+\frac{1}{2}-1) = \ldots$ (k+1 раз)

$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ $\quad = \underbrace{(k+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2}-1)\ldots(k+\frac{1}{2}-k)}_{k+1 \text{ сомножителей}} \Gamma(k+\frac{1}{2}-k) = \frac{(2k+1)(2k-1)\ldots 3\cdot 1}{2^{k+1}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) =$ ($\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$)

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} \cdot (2k+1)!!$ частично - ф-я от полуцелого числа

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} dt\, e^{-t} e^{s-1}$

$\longrightarrow = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \cdot 2^{k+1}}{\underbrace{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}_{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2} (2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1 \cdot 2^{2k+1} 2^k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

k 2

$2k \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 1$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x$

$\boxed{J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x}$ $\qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x$

к стр. 54 (окончание)

Вычислим вронскиан:

$$W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = W\left[J_\nu(x), \frac{\cos\pi\nu \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}\right] = \frac{\cos\pi\nu}{\sin\pi\nu} W[J_\nu(x), J_\nu(x)] -$$

$$- \frac{1}{\sin\pi\nu} W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \frac{2}{\pi x}$$

$$\boxed{W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = \frac{2}{\pi x}}$$

$J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ лин. независ. т.к. т.к., потому что $W \neq 0$

$$Y_\nu(x) = C_\nu \cdot J_\nu(x) + D_\nu \cdot N_\nu(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad * \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}} = -\frac{d}{x\,dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) \quad \forall\nu \qquad \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{d}{x\,dx}\left(\frac{J_{\nu-1}(x)}{x^{\nu-1}}\right)$$

$$\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}} = \left(-\frac{d}{x\,dx}\right)\left(-\frac{d}{x\,dx}\right)\left(\frac{J_{\nu-1}(x)}{x^{\nu-1}}\right) \qquad \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}} = \left(-\frac{d}{x\,dx}\right)^k \left(\frac{J_{\nu+1-k}(x)}{x^{\nu+1-k}}\right) \quad \forall k = 1,2,3,\ldots \quad \forall\nu$$

пусть $\nu = n + \frac{1}{2}$ полуцелое число $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$k = n$ **

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \left(-\frac{d}{x\,dx}\right)^k \cdot \left(\frac{J_{\nu-k}(x)}{x^{\nu-k}}\right) \qquad \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \left(-\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{J_{n+\frac{1}{2}-n}(x)}{x^{n+\frac{1}{2}-n}}\right) \Rightarrow$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(-1)^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

ф-ции Бесселя остальных порядков не выражаются через элементарные ф-ции.

используя формулу * можно получить:

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \cdot \left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Асимптотическое поведение ф-ции Бесселя полуцелых порядков при больших x:

$x \to \infty$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (-1)^n \cdot x^{n+\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{x\,dx}\right)\left(\frac{d}{x\,dx}\right)\cdots\left(\frac{d}{x\,dx}\right)}_{n \text{ раз}} \left(\frac{1}{x}\sin x\right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n \cdot x^{n+\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{x\,dx}\right)\cdots\left(\frac{d}{x\,dx}\right)}_{n-1 \text{ раз}} \left(\frac{1}{x^2}\cdot\sin x' - \frac{1}{x^3}\cdot\sin x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot(-1)^n \cdot \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}} \cdot \sin^{(n)}(x) + \ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot (-1)^n \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n - \pi n\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right); \qquad J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}(n+1) - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$x \to \infty$

$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$

$$\boxed{J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad x \to \infty \quad \forall \quad -\infty < \nu < +\infty}$$

асимптотика ф-ции Неймана:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos\pi\nu \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{\sin\pi\nu}\left\{\cos\pi\nu \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) - \right.$$

$$\left. \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{\sin\pi\nu} \cdot \mathrm{Re}\left\{\cos\pi\nu \cdot e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{\sin\pi\nu}\,\mathrm{Re}\left\{e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}\left(\cos\pi\nu - e^{i\pi\nu}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) =$$

$\cos\pi\nu + i\sin\pi\nu$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \mathrm{Re}\left(-i\,e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad x \to +\infty$$

$-\infty < \nu < +\infty$

$$\boxed{N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)} \qquad \begin{array}{l} x \to +\infty \\ -\infty < \nu < +\infty \end{array}$$

необх. считать $x \gg |\nu|$, чтобы выполн. эти ф-лы $x \gg \max\{1, |\nu|\}$

22.11.11. ✓

Ортогональность и квадрат нормы для цилиндр. ф-ий

$x \cdot \frac{d}{dx}\left[x \cdot \frac{dy}{dx}\right] + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0$ $\quad y(x) =$ м.б. ф-я Бесселя, м.б. ф-я Неймана, или их лин. комбин.

$x \to \alpha x$ $\quad y(\alpha x) = Z_\nu(\alpha x)$ $\quad Z_\nu(\alpha x)$ - цилиндр. ф-я порядка ν

$x \cdot \frac{d}{dx}\left[x \cdot \frac{d Z_\nu(\alpha x)}{dx}\right] + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) Z_\nu(\alpha x) = 0 \qquad (x > 0) \quad \Big| \cdot Z_\nu(\beta x)$

$x \cdot \frac{d}{dx}\left[x \cdot \frac{d Z_\nu(\beta x)}{dx}\right] + (\beta^2 x^2 - \nu^2) Z_\nu(\beta x) = 0 \qquad (\beta > 0) \quad \Big| \cdot Z_\nu(\alpha x)$

$Z_\nu(\beta x) \cdot \frac{d}{dx}\left[x \frac{d}{dx} Z_\nu(\alpha x)\right] - Z_\nu(\alpha x) \cdot \frac{d}{dx}\left[x \cdot \frac{d}{dx} Z_\nu(\beta x)\right] = (\beta^2 - \alpha^2)\, x\, Z_\nu(\alpha x) \cdot Z_\nu(\beta x)$

$\frac{d}{dx}\left[Z_\nu(\beta x)\left(x \frac{d}{dx} Z_\nu(\alpha x)\right) - Z_\nu(\alpha x) \cdot \left(x \cdot \frac{d}{dx} Z_\nu(\beta x)\right)\right] = (\beta^2 - \alpha^2)\, x\, Z_\nu(\alpha x) \cdot Z_\nu(\beta x)$

$\int_0^1 dx \ldots \Rightarrow \left[Z_\nu(\beta x)\, x \frac{d}{dx} Z_\nu(\alpha x) - Z_\nu(\alpha x)\, x \cdot \frac{d}{dx} Z_\nu(\beta x)\right]\Big|_0^1 = (\beta^2 - \alpha^2)\, x \cdot Z_\nu(\alpha x) \cdot Z_\nu(\beta x)$

$\nu \geq 0$ $\quad$ пусть $Z_\nu(0) \neq \infty$ $\quad \frac{d}{dx}\left[Z_\nu(\alpha x)\right]\Big|_{x=1} = \frac{d}{d(\alpha x)}\left[Z_\nu(\alpha x)\right]_{x=1} \cdot \alpha =$

$= \alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} Z_\nu(\alpha)$ $\qquad \alpha x\Big|_{x=1} = \alpha$

$\left[Z_\nu(\beta) \cdot \alpha \cdot Z'_\nu(\alpha) - Z_\nu(\alpha) \cdot \beta \cdot Z'_\nu(\beta)\right] = (\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 dx \cdot x \cdot Z_\nu(\alpha x) \cdot Z_\nu(\beta x)$

пусть $Z_\nu(x) = J_\nu(x)$

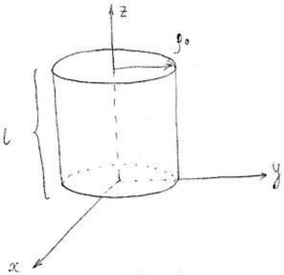
$\int_0^1 dx\, x J_\nu(\alpha x) \cdot J_\nu(\beta x) = \frac{J_\nu(\beta)\alpha J'_\nu(\alpha) - J_\nu(\alpha)\beta \cdot J'_\nu(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2} \qquad \nu \geq 0; \quad \alpha, \beta \geq 0$

$\beta \to \alpha \qquad \int_0^1 dx \cdot x \cdot J_\nu^2(\alpha x) = \frac{\frac{d}{d\beta}\left[J_\nu(\beta)\alpha J'_\nu(\alpha) - J_\nu(\alpha)\beta \cdot J'_\nu(\beta)\right]\Big|_{\beta=\alpha}}{2\beta\Big|_{\beta=\alpha}} =$

$= \frac{\alpha\left[J'_\nu(\alpha)\right]^2 - J_\nu(\alpha) \cdot \frac{d}{d\alpha}\left[\alpha J'_\nu(\alpha)\right]}{2\alpha} = \left| \frac{d}{dx}\left[x \cdot J'_\nu(x)\right] + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) \cdot J_\nu(x) = 0 \right| =$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left\{\alpha\left[J_\nu'(\alpha)\right]^2 - \left(\frac{\nu^2}{\alpha} - \alpha\right)\cdot J_\nu^2(\alpha)\right\}$$

$$\int_0^1 dx\cdot x\cdot J_\nu^2(\alpha x) = \frac{1}{2}\left\{\left[J_\nu'(\alpha)\right]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\cdot J_\nu^2(\alpha)\right\} \quad \forall \alpha \geqslant 0$$



$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u \\ u\big|_\Sigma = 0, \; t > 0 \quad \text{гр. усл.} \\ u\big|_{t=0} = f(\rho, y, z) \quad \text{н.у.} \end{cases}$$

$u = T(t)\cdot v(\vec r)$

$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$

$$\begin{cases} \Delta v(\vec r) + \lambda v(\vec r) = 0 \\ v\big|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

$$V_n(\vec r) = R(\rho)\cdot \Phi(y)\cdot L(z) \qquad \begin{cases} \Phi''(y) + \nu^2\Phi(y) = 0 \\ \Phi(y + 2\pi) = \Phi(y) \end{cases} \Rightarrow \quad \nu = n = 0, 1, 2, \ldots \quad \Phi_n(y) = \{\cos ny, \sin ny\}$$

$$\begin{cases} L''(z) + K_{3}^2 L(z) = 0 \\ L(0) = L(l) = 0 \end{cases}$$

$$\rho^2\cdot \Big| \; \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2} - K_{3p}^2\right)R(\rho) = 0 \qquad R(\rho_0) = 0, \quad R(0) < \infty$$

$K_{3p} = \frac{\pi p}{l} \qquad p = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = 0$$

$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Rightarrow -n^2 v$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right) + \left[(\lambda - k_{3p}^2)\rho^2 - n^2\right]R(\rho) = 0$$

1) Пусть $\lambda - K_{3p}^2 > 0$ ($k^2 > 0$, k - вещест.) $R(\rho) = y(x)$; $k\rho = x$

$$x\cdot\frac{d}{dx}\left[x y'(x)\right] + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \qquad |y(0)| < \infty$$

общее реш-е эт. ур-я: $y(x) = A\cdot J_n(x) + B\cdot N_n(x)$ $\quad |y(0)| < \infty$ (1-е гран. усл-е), $N_n(0) = \infty$ $\Rightarrow B = 0$

$R(\rho) = A\cdot J_n(k\rho)$ $\quad$ 2-е гран. усл. $R(\rho_0) = 0 \Rightarrow A\cdot J_n(k\rho) = 0$ $\quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$A \neq 0 \qquad k\rho_0 = \mu_m^{(n)}, \quad J_n(\mu_m^{(n)}) = 0 \qquad \mu_m^{(n)} > 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\boxed{k_{n,m} = \frac{1}{\rho_0}\mu_m^{(n)}}$$

μ - нули ф-ции Бесселя n-го порядка; заданные числа

собств. ф-ции $R_{n,m}(\rho) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)$ $\qquad \lambda = \frac{1}{\rho_0}\left(\mu_m^{(n)}\right)^2 + k_{3p}^2 = \lambda_{nmp}$

$\lambda - k_{3p}^2 = k^2$

$$u_{nmp}(\rho, \varphi, z, t) = E_{nmp} \exp\left\{-a^2\left[\left(\frac{\pi p}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)^2\right]t\right\} \cdot$$

$T(t) = E \cdot e^{-\lambda a^2 t}$

$$\cdot J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\cdot\rho\right)\left[F_{nmp}\cdot\cos n\varphi + D_{nmp}\cdot\sin n\varphi\right]\sin\left(\frac{\pi}{\ell}p\cdot z\right)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad p = 1, 2, \ldots$

решение полной задачи зад. суммой частных реш:

$$u(\bar{r}, t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m,p=1}^{+\infty} e^{-\left[\left(\frac{\pi p}{\ell}\right)^2 + \left[\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right]^2\right]a^2 t} \cdot \left(F_{nmp}\cdot\cos n\varphi + D_{nmp}\cdot\sin n\varphi\right) \cdot$$

$$\cdot J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\cdot\rho\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi p}{\ell}\cdot z\right)$$

Найти F_{nmp} и D_{nmp}: расс. частный случай (для простоты)

Пусть $u\big|_{t=0} = f(\rho, z)$ (нет зав-ти от φ)

Тогда остается в сумме лишь значение $n = 0$

$$u(\rho, z, t) = \sum_{m,p=1}^{+\infty} e^{-\left[\left(\frac{\pi p}{\ell}\right)^2 + \frac{\mu_m^{(0)2}}{\rho_0^2}\right]a^2 t} \cdot G_{mp} \cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi p}{\ell}\cdot z\right)$$

$D_{nmp} = 0; \qquad F_{nmp} = G_{mp}$

$$\sum_{m,p=1}^{+\infty} G_{mp}\cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi p}{\ell}z\right) = \tilde{f}(\rho, z) \quad \Big| \cdot \sin\left(\frac{\pi q}{\ell}\cdot z\right) \text{ и инт. по } z$$

далучим такое разложение возможно

$$\sum_{m,p=1}^{+\infty} G_{mp}\cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right)\cdot\int_0^{\ell} dz \underbrace{\sin\frac{\pi p}{\ell}z\cdot\sin\frac{\pi q}{\ell}\cdot z}_{=\frac{\ell}{2}\delta_{pq}} = \int_0^{\ell} dz\cdot\tilde{f}(\rho, z)\sin\frac{\pi q}{\ell}\cdot z$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} G_{mq}\cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right) = \frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} dz\cdot\tilde{f}(\rho, z)\cdot\sin\left(\frac{\pi q}{\ell}z\right) = F(\rho)$$

24.11.11

$$\sum_{m=1}^{+\infty} G_{mq} \cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right) = \frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} dz\ \tilde{f}(\rho,z)\cdot\sin\left(\frac{\pi q}{\ell}z\right) = \overline{f}_q(\rho) \qquad \left|\cdot\rho\cdot J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right)\right.$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} G_{mq}\cdot\int_0^{\rho_0} d\rho\cdot\rho\cdot J_0\cdot\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right) = \frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} dz\cdot\int_0^{\rho_0}\rho\, d\rho\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\cdot\rho\right)\cdot\tilde{f}(\rho,z)\sin\left(\frac{\pi q}{\ell}\cdot z\right)$$

определяем коэф. G_{mq}

$\tilde{f}(\rho,z)$ - нач. темп-ра

$J_0(\mu_m^{(0)}) = 0 \quad m=1,2,\dots\ \mu_m>0$

$$\int_0^1 dx\cdot x\cdot J_\gamma(\alpha x)\cdot J_\gamma(\beta x) =$$

$$= \frac{J_\gamma(\alpha)\beta\, J_\gamma'(\beta) - J_\gamma(\beta)\alpha\cdot J_\gamma'(\alpha)}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\int_0^1 dx\cdot x\cdot J_\gamma^2(\alpha x) = \frac{1}{2}\left\{\left[J_\gamma'(\alpha)\right]^2 + \left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)J_\gamma^2(\alpha)\right\}$$

$\alpha = \mu_m^{(0)};\quad \beta = \mu_n^{(0)} \quad x = \frac{\rho}{\rho_0}$

$$\frac{1}{\rho_0^2}\cdot\int_0^{\rho_0} d\rho\cdot\rho\cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}\rho}{\rho_0}\right)\cdot J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}\rho}{\rho_0}\right) = 0,\ m\neq n$$

ортогональность

$\delta_{mn}\cdot\frac{\rho_0^2}{2}\cdot J_1^2(\mu_n^{(0)})$

$$\int_0^{\rho_0} d\rho\cdot\rho\cdot J_0^2\left(\frac{\mu_n^{(0)}\cdot\rho}{\rho_0}\right) = \left|\frac{\rho}{\rho_0}=x\right| = \rho_0^2\cdot\int_0^1 dx\cdot x\ J_0^2\left(\mu_n^{(0)}x\right) =$$

$\rho = \rho_0 x$

$$= \frac{\rho_0^2}{2}\cdot\left[\ J_0'\left(\mu_n^{(0)}\right)\right]^2 + J_0^2\left(\mu_n^{(0)}\right)\Big\} = \frac{\rho_0^2}{2}\cdot J_1^2\left(\mu_n^{(0)}\right)$$

$$G_{mq}\cdot\frac{\rho_0^2}{2}\cdot J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} dz\int_0^{\rho_0} d\rho\ J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi q}{\ell}\cdot z\right)\cdot\tilde{f}(\rho,z)$$

$$u(\rho,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} G_{nq}\exp\left\{-\left[\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{\rho_0}\right)^2+\left(\frac{\pi q}{\ell}\right)^2\right]\cdot a^2 t\right\} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}\rho}{\rho_0}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi q}{\ell}\cdot z\right)$$

$n=1,\ q=1$ самая важная экспонента

$$\tau = \frac{1}{a^2\left[\left(\frac{\mu_1^{(0)}}{\rho_0}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\right]},\qquad e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Время релаксации (характерное время остывания)

Вычисление некоторых интегралов с ф-ми Бесселя

$$\int_0^{\rho_0} d\rho\cdot\rho^3 J_0\left(\frac{\alpha}{\rho_0}\cdot\rho\right) = \left|\begin{array}{l}\frac{\alpha}{\rho_0}\cdot\rho = x\\ \rho = \frac{\rho_0}{\alpha}x\end{array}\right| = \left(\frac{\rho_0}{\alpha}\right)^4\cdot\int_0^{\alpha} dx\cdot x^3 J_0(x) = \left|\begin{array}{l}\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)\\ \text{используем рекуррентные соотношения}\end{array}\right| =$$

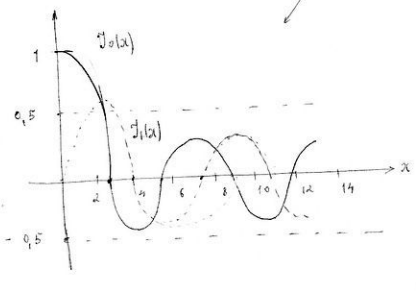
$$= \left|x\cdot J_0(x)\,dx = d[x J_1(x)]\right| = \left(\frac{\rho_0}{\alpha}\right)^4\cdot\left\{\int_0^{\alpha} dx^2\cdot d(x J_1(x))\right\} = \left(\frac{\rho_0}{\alpha}\right)^4\left\{x^2\cdot x\cdot J_1(x)\Big|_0^{\alpha} -\right.$$

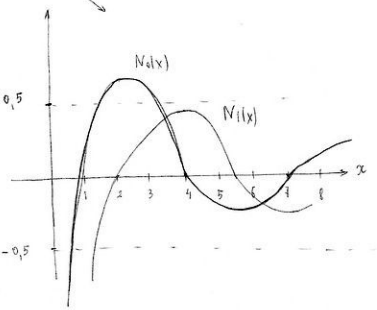
$$\left. - 2\cdot\int_0^{\alpha} dx\cdot x^2 J_1(x)\right\} = \left(\frac{\rho_0}{\alpha}\right)^4\left\{\alpha^3 J_1(\alpha) - 2x^2 J_2(x)\Big|_0^{\alpha}\right\} = \left(\frac{\rho_0}{\alpha}\right)^4\left\{\alpha^3 J_1(\alpha) - 2\alpha^2 J_2(x)\right\}$$

$\nu = 2 \quad x^2 J_1(x) = \frac{d}{dx}[x^2 J_2(x)]$

$\int dx\cdot x^q J_p(x)$, q-p - целочисленные числа

Графики ф-й Бесселя и Неймана





$J_0'(x) = -J_1(x)$

$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ $\quad \Gamma(k+1) = k!$

$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots$, $|x| \ll 1$ $\qquad J_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots$ $|x| \ll 1$

$J_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$, $x \to +\infty$

$N_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\ln\frac{x}{2} + O(1)$, $x \to 0$

$N_1(x) = \frac{2}{\pi x} + O(1)$, $x \to 0$

Модифицированные цилиндрические ф-ции

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(\lambda-k_3^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0$$

1) $\lambda - k_3^2 > 0 \quad (k^2 = \lambda - k_3^2,\ k>0)$

$R(\rho) = A\cdot J_\nu(k\rho) + B\,N_\nu(k\rho)$

2) Пусть $\lambda - k_3^2 < 0$, тогда $\lambda - k_3^2 = -k^2$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{dR}{d\rho}\right)-\left(k^2+\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0 \qquad k\rho = x;\ R(\rho)=y(x)$$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{dy}{dx}\right]-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

$$x^2\cdot y''(x)+x\,y'(x)-(x^2+\nu^2)y=0$$

ур-е для модифицированных цил. ф-ий

$x\to ix$

$$x^2y''(x)+x\,y'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0$$

цилиндр. ф.

$y(x) = A\cdot J_\nu(x) + B\cdot N_\nu(x)$

$\tilde{y}(x) = A\cdot J_\nu(ix) + B\,N_\nu(ix)$

$J_\nu(ix)$, $N_\nu(ix)$ — комплекс. ф.

"кривой Бессель"

$$1)\ J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \left| i^{2k+\nu} = i^{2k}\cdot i^\nu = i^{2k}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}\nu} \right| =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\right)\cdot e^{i\frac{\pi}{2}\nu} =$$

модифицир. ф-я Бесселя

$$= e^{i\frac{\pi}{2}\nu}\,I_\nu(x)$$

↓

мод. ф Б I прямой Бессель)

$$\boxed{J_\nu(ix)\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} = I_\nu(x)}$$

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$ - есть

одно из решений, вещ. при вещ. x

$x^2\tilde{y}''(x)+x\cdot\tilde{y}'(x)+(x^2-\nu^2)\cdot\tilde{y}(x)=0$

$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\cdot N_\nu(x)$ - ф. Ханкеля 1-го рода

$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\cdot N_\nu(x)$ - 2-го рода

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) \pm i \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$x \to \infty$

$$\boxed{H_\nu^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{\pm i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \dots \quad |x| \to \infty}$$

ф-я Ханкеля 1-го рода на ∞ будет соотв. т. цилиндр. расходящ. волны (в нач. коорд.)

ф-я Ханкеля 2-го рода - сходящ. волна

$Ae^{i(kx - \omega t)}$ - плоская волна

$\frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}$ - сфер. волна

$\omega = ak$ ($a^2 \Delta u = u_{tt}$)

точное реш-е ↗ этого волн. ур-я

$\omega = ak$

$\frac{A}{\sqrt{\rho}} \cdot e^{i(k\rho - \omega t)}$ - цилиндр. волна - не явл. точным реш-м волнового ур-я

Точным реш-м явл. ф-ции Ханкеля.

$a^2 \Delta u = u_{tt}$

$u(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) e^{-i\omega t}$

$a^2 \Delta V - (-i\omega)^2 V(\vec{r}) = 0$ $\quad \frac{\omega}{a} = k$ волн. вектор

$\boxed{\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0}$ ур-е Гельмгольца, if k - изначально задан

1) $\frac{d^2}{dx^2} V(x) + k^2 V(x) = 0$ $\quad V(x) = Ae^{\pm ikx}$ $\quad u(x,t) = Ae^{\pm ikx - i\omega t}$

$V = V(x)$

2) $V = V(r)$ $\quad \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) + k^2 V(r) = 0$ $\quad rV = Ae^{\pm ikr}$ $\quad V(r) = \frac{A}{r} e^{\pm ikr}$

$r > 0$

$u(r,t) = \frac{A}{r} \cdot e^{\pm ikr - i\omega t}$

3) $V = V(\rho)$ $\quad V(\rho) = H_0^{(1)}(k\rho)$ $\quad u(\rho,t) = H_0^{(1,2)}(k\rho) e^{-i\omega t}$ цилиндр. волны

точное реш-е

$\rho > 0$ в нуле особенность

29.11.11.

$$\rho^2 \cdot \frac{d^2}{d\rho^2} R(\rho) + \rho \cdot \frac{d}{d\rho} R(\rho) + (k^2\rho^2 - \nu^2) R(\rho) = 0$$

$R(\rho) = A \cdot J_\nu(k\rho) + B \cdot N_\nu(k\rho)$ - общее реш. $\forall\ \nu, k, \rho$

пусть $k = i$ (мнимое) $\rho = x$ $\quad J_\nu(ix),\ N_\nu(ix) \quad x \in (0, \infty)$

$J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x) = e^{i\frac{\pi}{2}\nu} I_\nu(x) \qquad I_\nu(x) = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_\nu(x)$

прямой Бессель (модифицированная ф. Бесселя пор. ν)

↓

$x^2 \frac{d}{dx^2} y(x) + x \frac{d}{dx} y(x) + (-x^2 - \nu^2) y(x) = 0$ удовлетв. эт. ур-ю

$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ - монотонно растущая ф. при $x > 0,\ \nu \geq 0$

хотим построить 2-е вещественн. реш-е

$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i N_\nu(x) \qquad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i N_\nu(x)$

ф. Ханкеля 1 рода

ф. Ханкеля 2-го рода (отличаются комп. сопряжением ! только для вещ-х x)

$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right)$ линейно незав. ф-ции → ф. Х. 1 и 2 родов

$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right)$

общее реш-е ур-я для цилиндр. ф-й:

$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0$

$y(x) = C \cdot H_\nu^{(1)}(x) + D \cdot H_\nu^{(2)}(x)$

возьмем комплекснозначную ф. Ханк. от мнимого арг.

$H_\nu^{(1)}(ix) = J_\nu(ix) + i N_\nu(ix) =$

$= J_\nu(ix) + i \cdot \frac{[\cos\pi\nu\, J_\nu(ix) - J_{-\nu}(ix)]}{\sin\pi\nu} = \frac{(\sin\pi\nu + i\cos\pi\nu) J_\nu(ix) - J_{-\nu}(ix)\, i}{\sin\pi\nu} =$

$$= \frac{i\left[e^{-i\pi\nu} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}\nu} I_\nu(x) - e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} I_{-\nu}(x)\right]}{\sin \pi\nu} = ie^{-i\frac{\pi}{2}\nu} \underbrace{\frac{[I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)]}{\sin\pi\nu}}_{\text{веществ. при вещ. } x},$$

вводится след. определение:

ф-я Макдональда $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i e^{i\frac{\pi}{2}\nu} \cdot H_\nu^{(1)}(ix) = -\frac{\pi}{2} \frac{[I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)]}{\sin \pi\nu}$

$I_\nu(x) = e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} J_\nu(ix)$

$K_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ – вещ. (при вещ. x) модифицированные цилиндр. ф-ции

$y(x) = A \cdot I_\nu(x) + B \cdot K_\nu(x)$ – общее реш-е

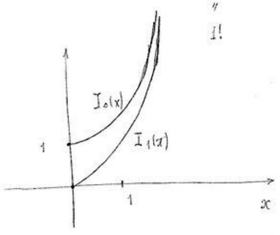
$x^2 y''(x) + xy'(x) + (-x^2 - \nu^2) y(x) = 0$

посмотрим асимптотики этих функций:

$I_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu} x^\nu + O(x^{2+\nu})$, $x \to 0$ $\quad \Gamma(n+1) = n!$

$I_0(x) = 1 + \frac{1}{1! \, \Gamma(1+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots = 1 + \frac{x^2}{4} + \ldots$, $x \to 0$

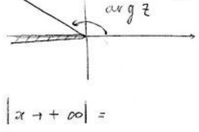
$\Gamma(1+1) = 1!$



Асимптотика модиф. ф. Бесселя при $x \to +\infty$

$$H_\nu^{(1)(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad |z| \to \infty$$

$|\arg z| < \pi$



$$I_\nu(x) = e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} J_\nu(ix) = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} \frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(ix) + H_\nu^{(2)}(ix)\right\} = |x \to +\infty| =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \left\{ e^{i\left(ix - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(ix - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \right\} \sqrt{\frac{2}{\pi x e^{i\pi/2}}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \left\{ e^{-x} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{x} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}\nu + \frac{\pi}{4}\right)} \right\} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} + \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$x \to +\infty$

Асимптотики ф-ции Макдональда

$x \to +\infty$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i\, e^{i\frac{\pi}{2}\nu} \sqrt{\frac{2}{i\pi x}}\, e^{i\left(ix - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2} i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$\boxed{K_{\nu(\nu\in\mathbb{R})} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{-x}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ x \to +\infty}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i\, e^{i\frac{\pi}{2}\nu} \left(J_\nu(ix) + i N_\nu(ix)\right) \underset{x\to 0}{\asymp} -\frac{\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}\nu} N_\nu(ix) + \ldots O(1)$$

$\ln \frac{1}{2}$ умно в const

$\nu = 0$: $K_0(x) = -\frac{\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}\cdot 0} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \ln \frac{ix}{2} + O(1) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \ln x + O(1) = -\ln x + O(1)$, $x \to 0$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(\ln \frac{x}{2} + \gamma\right) + \ldots,\ x \to 0$$

пост. Эйлера

$\nu = 0$

$$\boxed{K_0(x) = -\ln x = \ln \frac{1}{x} + O(1),\ x \to 0}$$

$\nu = 1$

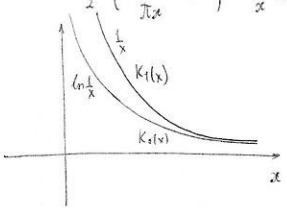
$$K_1(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} N_1(ix) + \ldots =$$

$$= -\frac{\pi}{2} i \left(\frac{-2}{\pi x} + \ldots\right) = \frac{1}{x} + \ldots,\ x \to 0$$

$$N_1(x) = -\frac{2}{\pi x} + \ldots,\ x \to 0$$

$$\boxed{K_1(x) = \frac{1}{x} + O(1),\ x \to 0}$$

$\nu = 1$



$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\lambda - K_3^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0 & R(\rho) - \text{хорош. ф-я (конеч. двойная диф)} \\ 0 \le \rho \le \rho_0,\ R(\rho_0) = 0 \quad \text{(первая крав. задача)} \end{cases}$$

1) $\lambda - K_3^2 > 0$ (уже рассматривали) реш-е через Бесселя

2) $\lambda = K_3^2$ $\quad \frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \cdot R = 0\right)$

ур-е Эйлера

$$\boxed{\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} R + \rho \cdot \frac{d}{d\rho} R - \nu^2 R = 0}$$

Ищем реш-е в виде: $R \sim \rho^{\sigma}$; $\sigma(\sigma-1)\rho^{\sigma} + \sigma\rho^{\sigma} - \nu^2\rho^{\sigma} = 0$

$(\sigma^2 - \nu^2)\rho^{\sigma} = 0$

Общ. реш-е: $\sigma = \pm\nu$

$R(\rho) = A\rho^{\nu} + B\cdot\rho^{-\nu} \quad (\nu \neq 0)$

if $\nu = 0$

$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{dR}{d\rho}\right) = 0, \quad \rho\frac{dR}{d\rho} = A \Rightarrow R(\rho) = A\ln\rho + B$

а) $\nu = 0$; $R(\rho) = A\ln\rho + B$ $\quad |R(0)| < \infty \Rightarrow A = 0 \quad R(\rho) = B$

Из усл. $R(\rho_0) = 0 \Rightarrow B = 0$ $\quad \boxed{R(\rho) = 0}$ тривиальные реш-я

б) $\nu > 0 \quad R(\rho) = A\cdot\rho^{\nu} + B\cdot\rho^{-\nu} \quad |R(0)| < \infty \Rightarrow B = 0$

$R(\rho) = A\rho^{\nu} \quad A\rho_0^{\nu} = 0 \quad A = 0$ трив. реш-я

(3) $\lambda - k_3^2 < 0 \quad \lambda - k_3^2 = -k^2 \quad (k > 0) \quad \rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}R(\rho) + \rho\frac{d}{d\rho}R(\rho) + (-k^2\rho^2 - \nu^2)R = 0$

$k\rho = x \quad R(\rho) = y(x)$

$x^2y''(x) + xy'(x) + (-x^2 - \nu^2)y(x) = 0$ общ. реш-е: $y(x) = A\,I_{\nu}(x) + B\cdot K_{\nu}(x)$

$R(\rho) = A\,I_{\nu}(k\rho) + B\,K_{\nu}(k\rho) \quad 0 \le \rho \le \rho_0 \quad R(\rho_0) = 0$

$k > 0, \rho_0 > 0$

$|R(0)| < \infty \Rightarrow B = 0 \quad R(\rho) = A\,I_{\nu}(k\rho)$

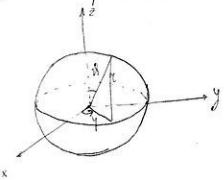
(усл-е огранич-ти в нуле) гр. усл. $R(\rho_0) = 0 \quad A\,I_{\nu}(k\rho_0) = 0 \Rightarrow A = 0$

ф-я Макд. бесконечна в нуле

$I_{\nu}(k\rho_0)$ не имеет положит. нулей

$A, B \equiv 0$ (трив. реш-я) аналог. для 2,3 краев. задачи

Задача сферич. симметрии. Метод разделения переменных. Полиномы Лежандра.



$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u \\ u\big|_{r=r_0} = f(\theta,\varphi) \\ u\big|_{t=0} = g(r,\theta,\varphi) \end{cases}$$

Пусть $t \to \infty$

$u(r,\theta,\varphi,t) \to \tilde{u}(r,\theta,\varphi)$

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}(r,\theta,\varphi) = 0 \quad 0 \le r \le r_0 \\ \tilde{u}(r_0,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \end{cases}$$

1-ая краев. задача для ур. Лапласа (задача Дирихле) - внутренняя задача Дирихле, if область включает ∞ - внешняя задача Дирихле

решим методом разделения пер-х

ищем частные реш-я:

$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)$

$$0 = \Delta u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)Y(\theta,\varphi) +$$

ф-я, которая удовлетворяет ур-ю Лапласа наз. гармонической

$$+\frac{R(r)}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{R(r)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \Big| \; R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)\cdot r^2$$

$$\frac{1}{R(r)}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right\}}_{=-\lambda} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) - \lambda R(r) = 0 \qquad R(r) \text{ - хорошая ф-я}$$

$$\overbrace{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}}^{-\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)} + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0$$

$r^2R''(r) + 2r\cdot R'(r) - \lambda R(r) = 0$ - ур-е Эйлера Y - опред-т угловую зав-ть

$0 \le \theta \le \pi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ $\quad Y(\theta,\varphi)$ - хорош. ф и λ, когда такие ф. $\exists$

$$(-\Delta_{\theta,\varphi})Y(\theta,\varphi) = \lambda Y(\theta,\varphi)$$

оператор Бельтрами (мат.)

(оператор квадрата углов. момента квантово-мех. частицы) $\hat{\vec{l}}^2$

$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$

$$\frac{1}{\sin\theta\cdot\Theta(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\underbrace{\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}_{=-\mu,\ \text{const}} + \lambda = 0$$

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\mu\cdot\Phi(\varphi)=0\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)\end{cases}$$

$\mu = m^2$ - магн. квант. число $\quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots$

$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$

$\Phi_m(\varphi) = \{\cos m\varphi, \sin m\varphi\}\quad m = 0,1,2,3,\dots$

$$\begin{cases}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0 \qquad \theta\in[0,\pi]\\ \cos\theta = x \quad x\in[-1,1],\ \Theta(\theta)=P(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x)=0 \qquad x\in[-1,1]\\ \text{ур-е для присоединенных ф-й Лежандра}\end{cases}$$

if $m=0$ нет зав-ти от φ азимутальная (экваториальная) симметр.

ур-е Лежандра: $\quad x\in[-1,1]$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right]+\lambda P(x)=0$$

покажем, что у этого ур-я имеются полиномиальные по x реш-я (полиномы Лежандра):

При $\lambda = n(n+1)$, $n = 0,1,2,\dots$

имеются реш-я:

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ - полиномы Лежандра

$w(x) = (x^2-1)^n \qquad w'(x) = 2n(x^2-1)^{n-1}\cdot x \quad \Big|\cdot x^2-1 \qquad (x^2-1)\cdot w'(x) = 2n\cdot x\cdot w(x)$ $\quad n+1$ раз

ф-ла Лейбница:

$$\left(u(x)v(x)\right)^{(n)} = u\cdot v^{(n)} + n\cdot u'(x)v^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}u''(x)v^{n-2} + \dots + C_n^k u^k(x)v^{(n-k)}(x) + \dots + u^{(n)}(x)v(x)$$

$$\left[(x^2-1)^n\right]^{(n+1)} = 2n\left[x\cdot w(x)\right]^{n+1}$$

$$(x^2-1)\cdot w^{(n+2)}(x) + (n+1)\cdot 2x\cdot w^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot 2w^{(n)}(x) = 2nx\cdot w^{(n+1)}(x) + 2n(n+1)w^{(n)}(x)$$

$$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}w^{(n)}(x) + 2x\cdot\frac{d}{dx}w^{(n)}(x) - n(n+1)w^{(n)}(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\cdot\frac{dw^{(n)}(x)}{dx}\right] - n(n+1)w^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!}w^{(n)}(x) = P_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + \underbrace{n(n+1)}_{\lambda}P_n(x) = 0$$

2) об-во ортогональности: пусть $P_\lambda(x)$ и $Q_{\lambda'}(x)$ - хорошие реш-я (конечны на концах)

ур-я Лежандра: $\int_{-1}^{1} dx\, P_\lambda(x)\cdot Q_{\lambda'}(x) = 0 \qquad \lambda' \neq \lambda$ (ортогональность)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\lambda(x)}{dx}\right] + \lambda P_\lambda(x) = 0 & \Big|\cdot Q_{\lambda'}(x) \\ \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dQ_{\lambda'}(x)}{dx}\right] + \lambda' Q_{\lambda'}(x) = 0 & \Big|\cdot P_\lambda(x) \end{cases} -$$

$$Q_{\lambda'}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\lambda}{dx}\right] - P_\lambda\cdot\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dQ_{\lambda'}}{dx}\right] = (\lambda'-\lambda)P_\lambda(x)\cdot Q_{\lambda'}(x)$$

$$\int_{-1}^{1} dx\cdot\frac{d}{dx}\left\{Q_{\lambda'}(1-x^2)P'_\lambda - P_\lambda(1-x^2)Q'_{\lambda'}\right\} = (\lambda'-\lambda)\cdot\int_{-1}^{1} dx\, P_\lambda(x)\,Q_{\lambda'}(x)$$

$$\left(Q_{\lambda'}\cdot P'_\lambda - P_\lambda\cdot Q'_{\lambda'}\right)(1-x^2)\Big|_{-1}^{1} = (\lambda'-\lambda)\int_{-1}^{1} dx\, P_\lambda(x)\,Q_{\lambda'}(x)$$

Следствие: $\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0 \qquad n \neq m$ полиномы Леж. образ-т ортогон. систему на промежутке от -1 до 1

по теор. Вейерштрасса

сист. полиномов Леж. — плотная и полная сист. ф-й

Св-во 3: полнота полиномов Лежандра

$f(x) \quad x \in [-1; 1] \qquad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x)$ — ряд сходится равном.

$\forall$ ф. можно разложить в ряд по полиномам Лежандра

найдем коэф. f_n, $\quad \Big| \cdot P_k(x)$ — квадрат нормы полинома Лежандра

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_k(x)\, dx = f_k \left(\int\limits_{-1}^{1} dx\, P_k^2(x) \right)$$

$$f_k = \frac{\int\limits_{-1}^{1} dx\, f(x) P_k(x)}{\int\limits_{-1}^{1} dx\, P_k^2(x)}$$

Св-во 4: производящая ф-я полин. Лежандра

$$\Pi(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \xi^n$$

ξ — некое комплексн. малое число

$0 < \xi < 1$

$-1 < x < 1$

ф-ла Коши:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - x} \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - x)^{n+1}}$$

пусть $f(x) = (x^2-1)^n$

$$\Pi(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{(\zeta^2-1)^n d\zeta}{(\zeta - x)^{n+1}} \xi^n =$$

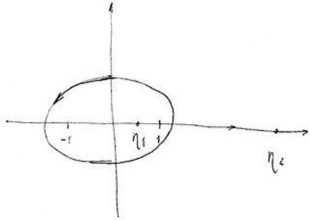
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(\zeta^2-1)\xi}{(\zeta - x) 2} \right]^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - x} \frac{1}{\left[1 - \frac{(\zeta^2-1)}{2(\zeta - x)}\xi\right]} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \oint \frac{d\zeta}{2(\zeta - x) - (\zeta^2 - 1)\xi};$$

06.12.11.

$$\Pi(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\cdot\xi^n=\frac{1}{\pi i}\oint_\gamma\frac{d\eta}{2(\eta-x)-\xi(\eta^2-1)} \;(=)$$



$$2(\eta-x)-\xi\eta^2+\xi=0 \qquad -2(\eta-x)+\xi\cdot\eta^2-\xi=0$$

$$\eta^2-\frac{2\eta}{\xi}+\frac{2x}{\xi}-1=0$$

$$\left(\eta-\frac{1}{\xi}\right)^2=1-\frac{2x}{\xi}+\frac{1}{\xi^2}\Rightarrow\eta=\frac{1}{\xi}+\sqrt{1-\frac{2x}{\xi}+\frac{1}{\xi^2}} \qquad \eta=\frac{1+\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}}{\xi}$$

$$\sqrt{1-2x\cdot\xi+\xi^2}\Big|_{\xi=0}=1 \qquad \eta_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}}{\xi} \qquad \text{Пусть } 0<\xi<1$$

$$\eta_1=\frac{1-\sqrt{1-2x\cdot\xi+\xi^2}}{\xi}\approx\frac{1-\left(1+\frac{1}{2}(-2x\xi+\xi^2)\right)\ldots}{\xi}=x+O(\xi) \qquad \xi\text{ - мало}$$

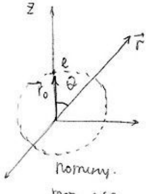
первый корень лежит вблизи x

$$\eta_2=\frac{1+\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}}{\xi}=\frac{2}{\xi}-x+O(\xi)$$

η_2 - далеко лежит

$$(=)\;\frac{2\pi i}{\pi i}\operatorname{res}_{\eta=\frac{1-\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}}{\xi}}\frac{1}{(2(\eta-x)-\xi(\eta^2-1))}=2\cdot\frac{1}{2-2\xi\cdot\eta}\Bigg|_{\eta=\frac{1-\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}}{\xi}}=\frac{1}{\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,\xi^n=\frac{1}{\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}}} \qquad x\in(-1;1),\quad |\xi|<1$$



потенц. точ. зар.

$$\frac{e}{|\vec r-\vec r_0|}=\frac{e}{\sqrt{(\vec r-\vec r_0)^2}}=\frac{e}{\sqrt{r^2-2r\cdot r_0\cos\theta+r_0^2}}$$

1) пусть $r>r_0$

$$\varphi\Big|_{r>r_0}=\frac{e}{r\sqrt{1-2\frac{r_0}{r}\cdot\cos\theta+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}}=\frac{e}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(\cos\theta)\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^n$$

на расст.-х, превышающих расст. от точ. зар. до нач. коорд.

2) $r<r_0$

$$\varphi\Big|_{r<r_0}=\frac{e}{r_0}\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \qquad \Delta\varphi=-4\pi e\,\delta(\vec r-\vec r_0)$$

Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\cdot\zeta^n = \frac{1}{\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot P_n(x)\zeta^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(-2x+2\zeta)}{(1-2x\zeta+\zeta^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-2x\zeta+\zeta^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot P_n(x)\cdot\zeta^{n-1} = (x-\zeta)\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\cdot\zeta^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n\cdot P_n(x)\zeta^{n-1} - 2x\cdot n\cdot P_n(x)\zeta^n + n P_n(x)\zeta^{n+1} = -x P_n(x)\cdot\zeta^n + P_n(x)\cdot\zeta^{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+1)P_n(x)\cdot\zeta^{n+1} - (2n+1)x\cdot P_n(x)\zeta^n + n\cdot P_n(x)\cdot\zeta^{n-1}\right] \equiv 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\zeta^{n+1}(n+1) - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x\cdot P_n(x)\zeta^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot P_n(x)\zeta^{n-1} = 0$$

сделаем замену $(n+1=k)$; $n\equiv k$; $(n=1)$; $(n-1=k)$ — можно суммир. с $n=1$, т.к. при $n=0$ нулевой вклад

$$\sum_{\substack{k=1\\(k=0)}}^{+\infty}(k\cdot P_{k-1}(x)\zeta^k - \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)x P_k(x)\cdot\zeta^k + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)P_{k+1}(x)\zeta^k = 0$$

$$k P_{k-1}(x) - (2k+1)x P_k(x) + (k+1)\cdot P_{k+1}(x) = 0 \qquad k = 0,1,2,3,\dots$$

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)x P_n(x) + n\cdot P_{n-1}(x) = 0}$$

$n = 0,1,2,\dots$

рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \qquad P_0(x) = 1$$

$(n=0)$ $P_1(x) - x P_0(x) = 0$

$P_1(x) = x$

$(n=1)$ $2\cdot P_2(x) - 3x P_1(x) + 1\cdot P_0(x) = 0$

$P_2(x) = (3x^2-1)\cdot\frac{1}{2}$

Св. ва:

1 $\boxed{P_n(-x) = (-1)^n\cdot P_n(x)}$

2. Полиномы Лежандра нормированы так, чтобы при $x=1$ $P_n(1)=1$

$P_n(1)$: вычислим при $x=1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)\zeta^n = \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta)^2}} = \frac{1}{1-\zeta} = \sum_{n=0}^{+\infty}\zeta^n \qquad \boxed{P_n(1) = 1}$$

$P_n(-1) = (-1)^n$

3. Квадрат нормы полиномов Лежандра

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} dx \cdot P_n(x) \cdot P_n(x) = (P_n, P_n) = \int_{-1}^{1} dx\, P_n(x) \cdot \left(\frac{2n-1}{n}\right) x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} \int_{-1}^{1} dx\, P_n(x) \cdot P_{n-2}(x) =$$

$$= \frac{2n-1}{n} \cdot \int_{-1}^{1} x\, dx\, P_n(x) \cdot P_{n-1}(x) =$$

$$= \frac{(2n-1)}{n} \cdot \frac{n}{(2n+1)} \cdot \int_{-1}^{1} dx\, P_{n-1}(x)\, P_{n-1}(x)$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \|P_{n-1}\|^2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$(2n+1) \cdot \|P_n\|^2 = (2(n-1)+1) \|P_{n-1}\|^2 = (2(n-2)+1) \|P_{n-2}\|^2 = \ldots = 3 \|P_1\|^2$$

$$\|P_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} dx \cdot P_1^2(x) = \int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \qquad (2n+1) \|P_n(x)\|^2 = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$$\boxed{\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{(2n+1)}, \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \end{matrix} \quad \text{и при } n = 0 \text{ справедливо}}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_k(x)\, dx = 0 \qquad \text{ортогон.}$$

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot P_n(\cos\theta) \qquad \cdot P_k(\cos\theta) \cdot \sin\theta$$

$\theta \in [0, \pi]$

$$\int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta \cdot f(\theta) \cdot P_k(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta \cdot P_n(\cos\theta) \cdot P_k(\cos\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \cdot P_n(\cos\theta) \cdot P_k(\cos\theta)$$

замена $\cos\theta = x$

$$\int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta \cdot f(\theta) P_k(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot \int_{-1}^{1} dx \cdot P_n(x) P_k(x) = f_k \|P_k\|^2$$

$$f_k = \frac{(2k+1)}{2} \cdot \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta\, f(\theta) P_k(\cos\theta) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{f_n = \frac{(2n+1)}{2} \cdot \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta \cdot f(\theta) \cdot P_n(\cos\theta)}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \underbrace{n(n+1)}_{\lambda} y(x) = 0 \\ x \in [-1,1] \end{cases}$$

об-ть орт-ти

$$\int_{-1}^{1} dx\, Q_\lambda(x) \cdot Q_{\lambda'}(x) = 0 \qquad \lambda' \neq \lambda$$

$|Q_\lambda(\pm 1)| < \infty$ решения (конечные)

$\lambda = n(n+1) \qquad n = 0,1,2,\ldots$

$y(x) = P_n(x)$

покажем, что полиномы Леж. исчерпывают все хорошие реш-я

08.12.11.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\cdot\frac{dy_\lambda(x)}{dx}\right] + \lambda y_\lambda(x) = 0 \qquad x \in [-1;1] \qquad \lambda = n(n+1) \quad n = 0,1,2,\ldots \quad y_\lambda(x) = P_n(x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \qquad y''_\lambda(x)(1-x^2) - 2x y'_\lambda(x) + \lambda y_\lambda(x) = 0$$

$x = \pm 1$ - особые точки этого ур-я (т.е. точки, в которых коэф. при старшей производной диф. ур. обращ. в 0)

$$\int_{-1}^{1} y_{\lambda_1}(x)\cdot y_{\lambda_2}(x)\,dx = 0 \quad \text{if} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad |y_{\lambda_1}(\pm 1)| < \infty, \quad |y_{\lambda_2}(\pm 1)| < \infty$$ - эти усл. гарантируют ∃ 2-х производных, не обращ. в ∞

$W[y_1(x), y_2(x)] = e^{-\int p(x)dx}$, if $y''(x) + \underline{p(x)}y'(x) + q(x)\cdot y(x) = 0$ (Смирнов)

$$p(x) = \frac{(1-x^2)'}{(1-x^2)}$$

Пусть $y_\lambda(x)$ и $z_\lambda(x)$ - реш-я ур-я Лежандра, такие что $|y_\lambda(\pm 1)| < \infty$ и $|z_\lambda(\pm 1)| < \infty$

Th. О структуре общ. решения справедлива: $\begin{vmatrix} y_\lambda(x) & z_\lambda(x) \\ y'_\lambda(x) & z'_\lambda(x) \end{vmatrix} = W[y_\lambda, z_\lambda] =$

$$= e^{-\int \frac{(1-x^2)'}{(1-x^2)}dx} = C\cdot e^{\ln(1-x^2)} = \frac{C}{1-x^2} \qquad y_\lambda(x)\cdot z'_\lambda(x) - y'_\lambda(x)\cdot z_\lambda(x) = \frac{C}{1-x^2}$$

λ - одно и то же

$x \in [-1;1]$

y_λ, z_λ - два реш-я ур. Лежандра, кот-е не имеют особенностей, а правая часть ур-я при $C \neq 0$ имеет особенность $\Rightarrow$ $C = 0$ - должно быть 0

вронскиан $W[y_\lambda(x), z_\lambda(x)] = 0 \Rightarrow y_\lambda(x) = D\cdot z_\lambda(x)$, где $D = \text{const}$

Пример:

пусть $\lambda = 0$ $(n=0)$ $y_0(x) = P_0(x) = 1$ $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy_0}{dx}\right] = 0$

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{C_1}{1-x^2} \qquad y_0(x) = C_1\int\frac{dx}{(1-x^2)} + C_2\cdot 1 = \left\{\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\right\} =$$

$$= C_1\cdot\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} + C_2\cdot 1 \qquad x \in (-1;1)$$

($C_2 \cdot 1 = P_0(x)$, $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \to Q_0(x)$)

дв. реш-е содержит две лин. незав. ф-ции

$Q_0(x)$ - ф-я Лежандра 2-го рода

в общем случае: $P_\lambda(x)$, $Q_\lambda(x)$ $P_\lambda(1) = 1$ ф. Леж. 1 рода

в т(-1) ф. Леж. обращ. в ∞, кроме случая $\lambda = n(n+1)$, а в т. 1 для $P_\lambda(1)$ можно выбрать так, чтобы $P_\lambda(1) = 1$

$\lambda \neq n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3.$

Докажем, что $\nexists$ реш-й всюду непр-но дифф-х, включая т. ± 1

Пусть $\lambda \neq n(n+1)$ $n = 0, 1, 2, 3, ..$ тогда

(от противного) пусть нашлось хорошее реш-е $y_\lambda(x)$ $x \in [-1, 1]$ ур-я Лежандра.

Но $\forall$ хорошее реш-е можно разложить в ряд по полиномам Лежандра

$$y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot P_n(x) \qquad (y_\lambda(x), P_n(x)) = 0 \quad \forall \text{ реш-е ортогон. } \forall \text{ полиному Лежандра}$$

$$0 = (y_\lambda(x), P_n(x)) = C_n \cdot \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \qquad C_n = \frac{(y_\lambda(x)\cdot P_n(x))}{\|P_n(x)\|^2} = 0$$

вы $C_n = 0$; $\boxed{y_\lambda(x) \equiv 0}$

$x = \cos\theta$ — ур-е для присоед-х ф-й Лежандра

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0}$$

$\varphi''(y) + m^2\varphi(y) = 0$ $\varphi(y + 2\pi) = \varphi(y)$

if $m \neq 0$ - присоединенные ф-ции Лежандра $m = 1, 2, 3, ..$

$m = 0, 1, 2, ..$

$\varphi(y) = \{\sin my, \cos my\}$

$m \neq 0 \qquad m = 1, 2, \ldots$

Докажем, что для $\lambda = n(n+1) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

имеются реш-я $y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \dfrac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ $\qquad$ $y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot z(x)$

$y'(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} z'(x) + \dfrac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}(-2x) \cdot z(x)$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'(x)\right] = \dfrac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} \cdot z'\right.$ +

$\left. - mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}} z \right\} = \left(\dfrac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{\frac{m}{2}}(-2x) z' + (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} \cdot z'' - mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}} z' - mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}$

$\cdot \left(\dfrac{m}{2}\right)(-2x) z = (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} \cdot z'' - x(1-x^2)^{\frac{m}{2}}(m+2+m) z' + m^2 x^2 (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot z - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot z =$

$(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} \cdot z'' - x(m+1)(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot z' + m^2 x^2 (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot z - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot z +$

$+ \lambda (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot z - m^2 \cdot (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot z = 0$

$(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} \cdot z'' - 2(m+1)x(1-x^2)^{\frac{m}{2}} z' - m^2 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot z - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}} z + \lambda (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot z = 0$

$(1-x^2) \cdot z''(x) - 2(m+1)x \cdot z' + (\lambda - m(m+1))\, z(x) = 0 \quad \Big| \; (1-x^2)^m$

$(1-x^2)^{m+1} z''(x) - 2(m+1)x(1-x^2)^m \cdot z'(x) + (\lambda - m(m+1))(1-x^2)^m z(x) = 0$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{m+1} \cdot \frac{dz(x)}{dx}\right] + \left[\lambda - m(m+1)\right](1-x^2)^m z(x) = 0, \qquad y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot z(x)}$$

if $\lambda = n(n+1)$, $\quad z(x) = \dfrac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ $\qquad$ $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$

m раз продифф-м это ур-е: $(1-x^2)\left(P_n^{(m+2)}(x)\right) + m\left(1-x^2\right)^1 \cdot P_n^{(m+1)}(x) + \dfrac{m(m-1)}{2} \cdot P_n^{(m)}(x) +$

$+ (-2x) \cdot P_n^{(m+1)}(x) + (-2x)' m P_n^{(m)}(x) + n(n+1) P_n^{(m)} = 0$

$(1-x^2)\left(P_n^{(m)}\right)'' - 2x(m+1) \cdot \left(P_n^{(m)}\right)' + \left[n(n+1) - m(m+1)\right] \cdot P_n^{(m)} = 0$

докажем, что при $\lambda = n(n+1)$ $\qquad$ $y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \dfrac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра

$P_{nm}^{\text{ж}}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \dfrac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} \left[(x^2-1)^n\right]$

↑ ф-ла Родрига

Св-ва присоед-х полиномов Лежандра

$x = \cos\theta$ $\quad P_{nm}(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}(\sin\theta)^m \frac{d^{n+m}}{d(\cos\theta)^{m+n}}\left[(\cos^2\theta - 1)^n\right]$ $\quad m \le n$, чтобы получить нетрив-е реш-я

присоед-е полиномы Лежандра (полиномы по sin и cos)

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

if n - фиксировано и мы меняем m, при $\underline{m > n}$:

$P_{nm}(x) \equiv 0$

$P_{n0}(x) = P_n$ при $m = 0$ обычн. полиномы Лежандра

13.12.11.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right)y = 0, \quad x \in [-1; 1]$$

$m \ne 0$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ $\quad y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} z(x)$ $\quad z(x) = P_n^{(m)}(x)$ при $\lambda = n(n+1)$

$y(x)$

$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ присоед. полиномы (не всегда полиномы) Лежандра

$m = 1$
$n = 0$

$\underline{m \le n}$

$m = 1$
$n = 1$ $\quad P_{11}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \overset{x}{P_1(x)} = \sqrt{1-x^2}$

$x = \cos\vartheta$ $\quad P_{11}(x) = \sin\vartheta$, $(\vartheta \in [0, \pi])$

$P_{01} = 0$

Ортогональность и квадрат нормы присоед-х полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_{n\underline{m}}(x) P_{k\underline{m}}(x) = \int_{-1}^{1} dx \cdot (1-x^2)^m \cdot P_n^{(m)}(x) \cdot \underbrace{P_k^{(m)}(x)}_{\frac{d}{dx} P_k^{(m-1)}(x)} = \cancelto{0}{(1-x^2)^m} \cdot P_n^{(m)}(x)\, P_k^{(m-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} -$$

$m = 1, 2, \ldots$

$$- \int_{-1}^{1} dx\, P_k^{(m-1)}(x) \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m \cdot P_n^{(m)}(x)\right] =$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{m+1} \frac{dz(x)}{dx}\right] + \left[n(n+1) - m(m+1)\right](1-x^2)^m P_n^{(m)}(x) = 0 \qquad \lambda = n(n+1)$$

$m \to m-1$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m \cdot P_n^{(m)}(x)\right] = -\left[n(n+1) - m(m-1)\right]\cdot(1-x^2)^{m-1} P_n^{(m-1)}(x)$$

$$\textcircled{=} \left[n^2+n-m^2+m\right] \int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)^{m-1} P_n^{(m-1)}(x)\, P_k^{(m-1)}(x) \cdot$$

$$\boxed{\left(P_{nm}(x),\ P_{km}(x)\right) = (n+m)(n-m+1)\left(P_{n,m-1}(x),\ P_{k,m-1}(x)\right)}$$

рекуррентная ф-ла

$m \to m-1$ $\qquad \left(P_{n,m-1}(x),\ P_{k,m-1}(x)\right) = (n+m-1)(n-m+2)\left(P_{n,m-2},\ P_{k,m-2}\right)$

$$\left(P_{nm},\ P_{km}\right) = \underbrace{(n+m)(n+m-1)}\underbrace{(n-m+1)(n-m+2)}\left(P_{n,m-2}, P_{k,m-2}\right) = (n+m)(n+m-1)\cdot\ldots$$

$$\cdot\underbrace{[n+m-(m-1)]}\cdot[n-m+1][n-m+2)\cdot\ldots\cdot(n-m+m)\cdot\left(P_{n,m-m},\ P_{k,m-m}\right) =$$

$$= \frac{n!}{n!}\underbrace{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)}\underbrace{(n-m+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}_{(n-m)!}^{(n-m)!}(P_n, P_k) = \frac{(n+m)!}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{2}{(2n+1)}\delta_{nk} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

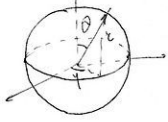
$$\boxed{\left(P_{nm}(x),\ P_{km}(x)\right) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\cdot\frac{2}{(2n+1)}\delta_{nk}}$$

if $n=k$, то это совпадает с квадратом нормы

Св-во ортогональности присоед-х полиномов Лежандра

$m=0$ $\quad \{P_{n0}(x) = P_n(x),\quad n=0,1,2,\ldots\}$

$m=0,1,2,\ldots$ $\{P_{nm}(x),\quad n=m, m+1,\ldots\}$ – полная и ортогональная сист.



$\Delta u = 0$, $\quad r < r_0$ $\qquad u\big|_{r=r_0} = f(\theta,\varphi)$

упр-е Даламбера

$u_r = R(r)\cdot\underbrace{Y(\theta)\cdot\Phi(\varphi)}_{Y(\theta,\varphi)}$ $\qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)Y(\theta,\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi) = 0$

$$\frac{1}{R(r)r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\cdot\frac{dR(r)}{dr}\right)+\underbrace{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)}}_{=-\lambda}=0 \qquad \theta\in[0,\pi] \quad \varphi\in[0,2\pi]$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)\,r+\lambda Y(\theta,\varphi)=0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\cdot\frac{dR(r)}{dr}\right)-\lambda\cdot R(r)=0 \qquad \left.\begin{array}{l} Y(\theta,\varphi)=P_{nm}(\cos\theta)\cdot\cos m\varphi \\ P_{nm}(\cos\theta)\cdot\sin m\varphi \end{array}\right\}\ 2\text{ набора решений}$$

сферическими функциями пор. n наз. следующие ф-ции

$$Y_{nm}(\theta,\varphi)=\begin{cases} P_{n|m|}(\cos\theta)\cdot\cos m\varphi, & -n\le m\le 0 \\ P_{nm}(\cos\theta)\cdot\sin m\varphi, & 0<m\le n \end{cases} \qquad \begin{array}{l} n=0,1,2,3,\dots \\ m=-n+1,-n,\dots n \end{array}$$

⇐ сферич. ф. пор. n имеет $2n+1$ компоненту

Сферич. ф-ции на сфере образуют ортогон. сист.

определим нормировку:

$$\int_0^{\pi}d\theta\cdot\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot Y_{nm}(\theta,\varphi)\,Y_{kp}(\theta,\varphi)=(Y_{nm},Y_{kp})$$

покажем ортогональность по обоим индексам

частный случай $m>0$, $p>0$: $\int_0^{\pi}d\theta\cdot\sin\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot P_{nm}(\cos\theta)\cdot\sin m\varphi\cdot P_{kp}(\cos\theta)\cdot\sin p\varphi=$

интеграл факторизуется

$=\left\{\text{делаем замену } \cos\theta=x\right\}=-\int_{-1}^{1}dx\cdot P_{nm}(x)P_{kp}(x)\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi\,\sin m\varphi\cdot\sin p\varphi}_{\text{if } p\neq m,\ \int=0\ \sim\ \delta_{pmp}}=$

$=\delta_{mp}\underbrace{\frac{2\pi}{2}}_{(p=m)}\cdot\int_{-1}^{1}dx\cdot P_{nm}(x)\cdot P_{km}(x)=\frac{2\pi}{2}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\cdot\frac{2}{(2n+1)}\cdot\delta_{nk}\,\delta_{mp}$

Интеграл от квадрата $\sin$

$$(Y_{nm},Y_{ip})=\int_0^{\pi}d\theta\cdot\sin\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot Y_{nm}(\theta,\varphi)\,Y_{kp}(\theta,\varphi)=\frac{2\pi\cdot(1+\delta_{m0})}{2}\cdot\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}\cdot\frac{2}{(2n+1)}\,\delta_{nk}\,\delta_{mp}$$

$$(Y_{nm}, Y_{kp}) = \frac{2\pi \cdot (1+\delta_{m0})(|m|+n)!}{(2n+1)(n-|m|)!}\,\delta_{nk}\delta_{mp}$$

$n, k = 0, 1, 2, \ldots$

$-n \le m \le n$

$-k \le p \le k$

Полная сист. функций

сферич. сист. ф-й (Y_{nm}, Y_{kp}) образуют полную ортогональную систему

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{m=0}^{+\infty} f_{nm}\cdot Y_{nm}(\theta,\varphi)\right) \quad \forall f(\theta,\varphi)$$ сферич. ф образуют базис

явного вида ф-ции

$$Y_{nm}(\varphi) = P_{n|m|}(\cos\theta)\cdot e^{im\varphi}, \quad m = -n, -n+1, \ldots, n$$

в квантов. мех. комплексные сферич. ф-ции

угловая завис. волнов. ф-

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + 2r\cdot\frac{dR}{dr} - n(n+1)R(r) = 0$$ ур-е Эйлера

решение ищем в виде: $R(r) = r^\sigma$

$$\sigma(\sigma-1)r^\sigma + 2\sigma\cdot r^\sigma - n(n+1)r^\sigma = 0$$

$$\sigma(\sigma-1) + 2\sigma - n(n+1) = 0$$

$$\sigma^2 - \sigma + 2\sigma - n^2 - n = 0$$

$$\sigma^2 + \sigma - n^2 - n = 0$$

$$(\sigma - n)(\sigma + n) + (\sigma - n) = 0$$

$$(\sigma - n)(\sigma + n + 1) = 0$$

$$\sigma = n, \quad \sigma = -(1+n)$$

Общее реш-е:

$$R(r) = A\cdot r^n + B\cdot\frac{1}{r^{n+1}}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

внутренняя задача Дирихле (для шара) - внутри шара

$$u_{nm}(\theta,\varphi) = \begin{cases} r^n Y_{nm}(\theta,\varphi) \\ \dfrac{1}{r^{n+1}}\cdot Y_{nm}(\theta,\varphi) \end{cases} \qquad \Delta u_{nm}(r,\theta,\varphi) = 0$$

} шаровые функции

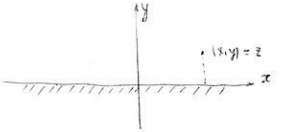
Шаровые функции: $r^n Y_{nm}(\theta,\varphi)$, $\frac{1}{r^{n+1}} Y_{nm}(\theta,\varphi)$ $\quad n = 0,1,2,\dots$
$m = -n, -n+1, \dots, n$

они удовлетвор-т ур-ю Лапласа
явл. гармонич. ф-ми:

$\Delta(r^n \cdot Y_{nm}(\theta,\varphi)) = 0$,

$\Delta\left(\frac{1}{r^{n+1}} Y_{nm}(\theta,\varphi)\right) = 0 \qquad r \neq 0$

22.12.11.



$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \\ u(x,0) = \text{задана} \end{cases}$$

интеграл типа Коши

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt\ u(t,0)}{t-z}\right\},\quad z = x+iy$$

1. $u(x,y)$ - гармонична в $y>0$
(удовлетвор. ур-ю Лапласа в верхн. полуплоскости)

2. $$\lim_{y\to+0} u(x,y) = \lim_{y\to+0}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\cdot\frac{u(t,0)}{z-x-iy}\right\} = \lim_{y\to+0}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt\cdot u(t,0)\,[(t-x)+iy]}{(t-x)^2+y^2}\right\} =$$

$$= \lim_{y\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt\ u(t,0)\,y}{(t-x)^2+y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\cdot\delta(t-x)\,u(t,0) = u(x,0)$$

$\boxed{\lim_{y\to+0} u(x,y) = u(x,0)}$ доказана

ф-ла Пуассона

$$\lim_{y\to+0}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{y\to+0}\varphi_y(x) = \begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ \infty, & x=0 \end{cases}$$

δ-образная последовательность

последовательность, кот. сходится к δ-функции

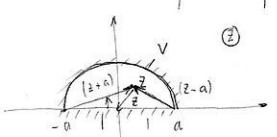
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\varphi_y(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx\cdot y}{x^2+y^2} = \left|\ x = y\cdot t\ \right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

Пример (на применение ф-лы Пуассона):

Найти гармон. ф-ю в обл-ти

$$\Delta u(z) = 0,\quad z\in\{\operatorname{Im} z>0,\ |z|<a\} = D$$



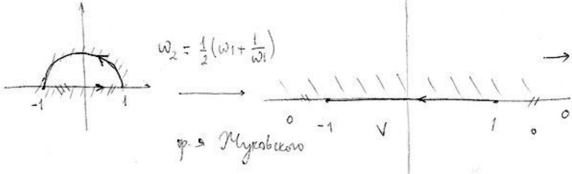
потенциал

Найти конформное преобразование, переводящее это в верхн. полуплоскость

1. конформно преобр. D → на верхнюю полуплоскость

$w_1 = \frac{z}{a}$

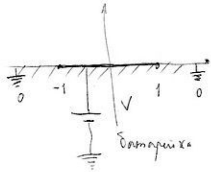
масштабируем



$W = -W_2$

$W_1 = e^{iy}$ $y \in [0, \pi] \to W_2 = \cos y$

$W_1 = x$ $x \in (0,1) \to W_2 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$



$\xi = W = -\frac{1}{2}\left(W_1 + \frac{1}{W_1}\right) = \underline{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)}$ ф-я дает конф. отобр. обл. P на верхн. полупл-ть

$\Delta \tilde{u}(\xi) = 0$ $\quad \tilde{u}\Big|_{\Gamma}$ - задано $\quad \hat{u}(\xi) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt \cdot \tilde{u}(t,0)}{t - \xi} =$, $\mathrm{Im}\,\xi > 0$

$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt \cdot V}{t - \xi}\right) = \mathrm{Re}\, \frac{V}{\pi i} \ln(t - \xi)\Big|_{-1}^{1} = \mathrm{Re}\left(\frac{V}{\pi i} \ln \frac{1-\xi}{-1+\xi}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{V}{\pi i} \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)$

как выбирается ветвь ln

Пусть $\xi \to 0$ $\quad \ln\left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)\Big|_{\xi = 0} = \ln(-1) = \pi i + 2\pi k$ $\quad k \in \mathbb{Z}$, $k = 0$

$\ln\left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)\Big|_{\xi = 0} = \pi i$ $\quad \xi = h(z)$ $\quad u(z) = \tilde{u}(\xi)\Big|_{\xi = h(z)} = \mathrm{Re}\, \frac{V}{\pi i} \ln\left(\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right) - 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right) + 1}\right)\Bigg|_{\cdot 2az} =$

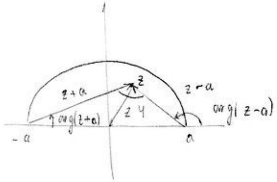
$=$

учли многозначность

$u(z) = \mathrm{Re}\, \frac{V}{\pi i} \ln\left(\frac{z^2 + a^2 + 2az}{z^2 + a^2 - 2az}\right) = \mathrm{Re}\, \frac{V}{\pi i} \ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^2 = \mathrm{Re}\, \frac{V}{\pi i}\left\{2 \ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right) + \underline{\underline{2\pi i k}}\right\} =$

$= \frac{2V}{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i} \ln \frac{z+a}{z-a} + \pi i k\right) = \frac{2V}{\pi} \cdot \mathrm{Re}\left\{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| + i \arg \frac{z+a}{z-a} + \pi i k\right\} =$

$= \frac{2V}{\pi}\left\{\arg(z+a) - \arg(z-a) + \pi i k\right\}$



$z \to x, \quad x \in (-1;1)$

$\arg(z+a)\Big|_{z=x} = 0 \qquad \arg(z-a)\Big|_{z=x} = \pi$

$u(z) = \frac{2V}{\pi}\{\arg(z+a) - \arg(z-a) + \pi k\}$ $\qquad u = \frac{2V}{\pi}[\pi - \psi]$

$u(z)\Big|_{z=x} = \frac{2V}{\pi}\{0-\pi+\pi k\} = 0 \Rightarrow k=1$

ответ можно представить геометрически

из Δ:

$\arg(z+a)+\psi+\pi-\arg(z-a)=\pi$

$\arg(z+a)-\arg(z-a) = -\psi$

$$\boxed{u(z) = \frac{2V}{\pi}\cdot(\pi-\psi)}$$

$u(z)\Big|_{z=x} = \frac{2V}{\pi}[\pi-\pi]=0$ гран. усл. выполн-ся

$u(z)\Big|_{z=e^{i\psi}} = \frac{2V}{\pi}[\pi - \frac{\pi}{2}] = V$

Можно решить эту задачу методом разд пер-х

$u = R(\rho)\cdot\Phi(\psi) \qquad \psi \in [0,\pi]$

$\frac{1}{\rho R(\rho)}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\Phi''(\psi)}{\Phi(\psi)} = 0$ $\quad \left(\frac{\Phi''(\psi)}{\Phi(\psi)} = -\mu\right)$

$\Phi''(\psi) + \mu\Phi(\psi) = 0$

$\Phi(0) = 0 \quad \Phi(\pi) = 0$

$\Phi_n(\psi) = \sin\left(\frac{\pi n}{\pi}\cdot\psi\right) \quad l=\pi$

$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right] - \frac{n^2}{\rho^2}\cdot R(\rho) = 0 \qquad R(\rho) = A_n\rho^n + B\cdot\rho^{-n} \quad n=1,2,.. \quad \rho\in[0,a]$

$|R(0)| < \infty \Rightarrow B = 0$

$u(a,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot a^n \sin n\psi = V \qquad A_n a^n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_a^{\pi} V\cdot\sin n\psi\, d\psi = \frac{2V}{\pi n}\cos n\psi\Big|_{\pi}^{a} = \frac{2V}{\pi n}(1-(-1)^n)$

$u(\rho,\psi) = \frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\sin(n\psi) \underset{n=2k+1}{=} \frac{4V}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k+1}\cdot\sin(2k+1)\psi$

3) Классификация уравнений в частных производных второго порядка.

4) Инвариантность при замене координат.

7) Характеристические уравнения.

12) Классификация ур-я для одной искомой функции от 2х независ переменных. (ур-е 2ого порядка в частных произв)

13) Теорема об инвариантности характеристик.

17) Постановка задач матфизики.

19) 1ая краевая задача.

20) 2ая краевая задача. Наклон струны на концах.

21) 3я краевая задача.

22) Формула Даламбера.

26) 1ая и 2ая краевая задачи для полубесконечной струны.

35) Физ смысл ф. Грина.

35) Задача о свободных колебаниях конечной свободной струны.

40) Энергия струны.

43) 1ая кравевая задача в общей постановке.

44) Особенности 2й краевой задачи.

47) Частные случаи.

47) СПецифика 3й краевой задачи.

49) Многомерные задачи.

54) Теорема Лиувилля-Остроградского.

56) Рекурентные соотношения для Бесселевых функций.

57) Производящая функция функции Бесселя.

67) Вычисление некоторых интегралов с ф-ми Бесселя.

67) Графики ф-й Бесселя и Неймана.

68) Модифицированные цилиндрические функции "кривой Бессель".

71) Асимптотика модиф ф Бесселя при x->бесконечности.

72) Асимптотики ф-ии Макдональда.

74) Задача сферич. симметрии. Метод разделения переменных. Полиномы Лежандра.

79) Рекурентные соотношения для полиновом Лежандра.

84) Сво-ва Присоед полиномов Лежандра.

84) Ортогональность и квадрат нормы присоединенных полиномов Лежандра.