10.02.10

Число частиц велико $N >> 1$

жидкости, газы, твердые тела

В этом семестре это классические частицы.

Воспринимаем как сплошную непрерывную среду,

Это математически значит

$$\underset{\overset{\wr}{Å}}{l} << \underset{\overset{\wr}{\geq мм}}{L}$$

def L – характерный размер на котором существенно не изменяются свойства систем.

def точка – малый объем по сравнению с характерными размерами L^3

$$l^3 << d^3r << L^3$$

сплошные среды ↗ текучие: $\overbrace{\text{жидкости, плазмо}}^{\text{жидкости}}$, газы
↘ нетекучие: твердые тела

def текучие – заполняют весь объем

1. Жидкости: Гидродинамика
2. твердые тела: Теория упругости

Литература:
1. Ландау, Лифшиц – Гидродинамика
2. —— " —— – Теория упругости

Используется феноменологический подход →

→ феноменологическая теор. физика. (by эксперимент)

Боголюбов – из первых принципов

Ландау – феноменологический

Адаменко – 2 пособия

8:30 1}
{1 8:50 9:15
9:35 9:20 2}
{2 9:40 10:05
10:25 10:15 3}
{3 10:30 11:00
11:15 11:05 4}
11:10

Методы описания жидкости. Метод Эйлера и Лагранжа.

det Полным описанием жидкости явл-ся задание в каждой физ точке жидкости ее термодинамических величин и скорости её движения.

Термодинамические величины:

плотность ρ - вес единицы объема , $\rho(\vec{r}, t)$

давление → p - сила действующая перпендикулярно на $\overset{един}{\vee}$ поверхн $p(\vec{r}, t)$

температура T

энтропия S

! Только две термодинамические величины явл. независимыми

$$\boxed{T = T(\rho, p) \qquad S = S(\rho, p)}$$ Ур-я состояния

{стационарные равновесные}

$\frac{l}{L}$ - малый термодинамический параметр

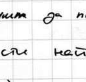
$\rho(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ - полное описание жидкости,
(5 функций)

задав в $t=0$ сможем найти в $t \neq 0$.

Соответственно нужно 5 уравнений.

Описание жидкости методом Эйлера - задает св-ва жидкости в каждой точке пространства

Берем конкретную точку



Лагранжа

$\vec{r}_н = r_н(t, \vec{r}_0)$

смотрит за помеченной частицей

метод Лагранжа дает возможности найти скорость $\frac{d\vec{r}}{dt}$

(только метод Лагранжа)

1) закон сохр массы × 1

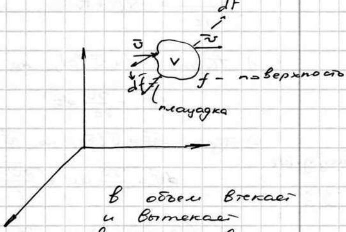
2) закон сохр импульса × 3 {уравнение движения}

3) закон сохр энергии × 1

Итак, начнем:

1) Закон сохранения массы.

В переменных Эйлера



$$\int_V \rho \, d^3r = M$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r = -\oint_f \rho \vec{v} \, d\vec{f}$$

в объем втекает
и вытекает
в единицу времени
через единицу поверхност ~~Ет~~
$\rho \vec{v} \, d\bar{f}$
округ жидкост

Считаем, что нет истоков.

Для получения дифференциального вида необходимо перейти к интегралу по объему в правой части.

$$-\oint_f \rho \bar{v} \, d\bar{f} = -\int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} \, d^3r$$

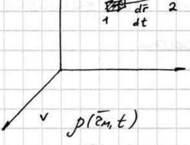
$$\Rightarrow \quad \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) d^3r = 0$$ Вып-ся в любом объемчике

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0}$$

Уравнение
непрерывности!

2)3)4) Закон сохр импульса

Начнем в переменных Лагранжа



$p(\bar{r}_M, t)$

$p(\bar{r}_M, t)$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_\rho$$

$$\vec{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$d\vec{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Лишь в методе Лагранжа можно так написать.

(Меченный объемчик)

некая сторонняя сила

$$\bar{F}_V = -\oint_f p \, d\bar{f} + \int_V F_V \, d^3r$$

снова из теореме Гаусса – Остроградского

$$-\oint_f p \, d\bar{f} = -\int_V \nabla p \, d^3r \qquad \bar{F}_V = \int_V \underbrace{(-\nabla p + F_V)}_{\equiv \bar{F}_\rho} d^3r$$

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p + \bar{F}_v$$

1) Пусть $\vec{v} = \vec{v}(t)$, но $\vec{v} \neq \bar{v}(\vec{r})$ {идти мимо озера}

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

2) Пусть $\vec{v} = \bar{v}(\bar{r})$, но $\vec{v} \neq \bar{v}(\bar{t})$ {река}

$d\bar{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz$

$i\ j\ k$ - орты осей

$$d\vec{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} dz$$

$$d\bar{v} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)}_{d\bar{r}\nabla} \vec{v}$$

градиент $\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$$d\bar{v} = (d\bar{r}\nabla)\vec{v}$$

3) $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}, t)$

$$d\bar{v} = \frac{\partial v}{\partial t} dt + (d\bar{r}\nabla)\bar{v}$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\nabla\right)\vec{v}$$

изменение во времени

$\dot{v}$ изменение скорости за счет того, что масса переходит в другой объем

$$\boxed{\rho \left\{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v}\right\} = -\nabla P + F_v}$$

ур-е движения жидкости

ур-е Эйлера

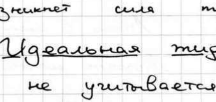
ускорение приращения скорости движущуюся массы ρ помеченного

изменение в пространстве

но здесь мы не учли силу возникающую при движении слоёв с разными скоростями — за счет вязкости возникнет сила трения.

<u>def</u> <u>Идеальная</u> <u>жидкость</u> — жидкость в которой не учитывается явление вязкости

Рассмотрим в газовой модели



тепловое движение - граница размоется за время преодоления расстояния свободного пробега

Уравнение движения идеальной жидкости написана в нулевом приближении $\frac{l}{L} = 0$ $l = 0$

При учете ~~д~~ вязкости в 1-м приближении может быть два варианта:

- малое изменение;
- принципиальное изменение хода решения.;

Написать дома x, y, z компоненты полученных уравнений.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)$$

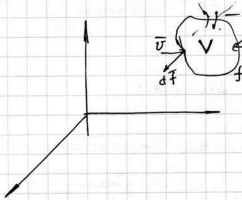
\- частная, индивидуальная производная

$$\cancel{\rho\left\{\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)v_x\right\} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_v}$$

ур-е непрерывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0$

ур-е Эйлера: $\rho\left\{\frac{\partial V_x}{\partial t} + \left(V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_y\frac{\partial}{\partial y} + V_z\frac{\partial}{\partial z}\right)V_x\right\} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_{vx}$

5) Закон сохранения энергии



— эффект теплопроводности нельзя учитывать, т.к 2-е уравнение написано в нулевом приближении и там уже не учтена вязкость

Если ед. массе передать δQ произойдет изм энтропии

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T}$$

17.02.10. S – энтропия единицы массы.

ρS – энтропия единицы объема

$$\underline{\left| S_v = \int_V \rho S\, d^3 r \right.}$$ – полная энтропия в объеме V.

Энтропия может измениться в объеме V (втекает и вытекает жидкость)

Изменение энтропии происходит только за счет втекания и вытекания жидкости

(т.к мы не учитываем теплопроводность (как и вязкость)

$$\underline{\left| S_v = -\oint_f \rho s \vec v\, d\vec f \right.}$$

$$\int_V \frac{\partial \rho s}{\partial t} d^3 r = -\int_V \operatorname{div} \rho s \vec v\, d^3 r$$

справедливо для любого объема, а это значит что подинтегральные выражения равны.

$$\boxed{\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \operatorname{div} \overbrace{\rho s \vec v}^{\vec A} = 0}$$

$$\operatorname{div} \varphi \vec A = \varphi \operatorname{div} \vec A + \vec A \operatorname{grad} \varphi$$

но в таком виде исп. редко

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial S}{\partial t} + S \operatorname{div} \rho \vec v + \rho \vec v \nabla s = 0$$

= 0 из ур-я непрерывности

можно сокр т.к не 0

$$\cancel{\rho}\left\{\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v}\nabla S\right\} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)S = 0$$

энтр. единицы массы

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)S = 0} \Rightarrow \text{из индив производной} \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = 0}$$

меченная масса сохраняет энтропию!

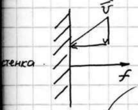
(нет механизмов передачи энергии)

$$S = S(p, \rho)$$

$\rho(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ — система задана полно

реализовать принцип причинности вообще говоря нельзя т.к разный сосуд... ?

Граничные условия для уравнений



$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{f}\,\Big|_f = 0}$$ гр. условие на неподвижной тв. стенке.

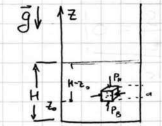
нормальная сост скорости возле стенки равняется 0. тангенциальная есть.

температура меняется скачком из постановки задачи. нет теплопроводности.

жидкость не может втекать и вытекать из стенки

Гидростатика. Закон Паскаля и закон Архимеда

Гидростатика → $\vec{v}=0$



Пишем ур-я.

1) $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \Rightarrow \rightarrow \rho \neq \rho(t)$

2) $0=-\nabla p+\vec{F_v}$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}=0 \rightarrow S \neq S(t)$

Зададим внешнюю силу

1) Пусть $\vec{F_v}=0$, тогда $0=-\nabla p \rightarrow p=const$

без учета силы тяжести → давление везде одинаково

→ Закон Паскаля.

2) Пусть $\vec{F_v}=\rho\vec{g}=(0,0,-\rho g)$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow p \neq p(x)$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y} \rightarrow p \neq p(y)$$

$$0=-\underset{\frac{dp}{dz}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial p}{\partial z}}}-\rho g \rightarrow \frac{dp}{dz}=-\rho g$$

$$\rightarrow p=p(z)$$

В поле силы тяжести поверхность жидкости должна быть плоской.

Гравитационные волны - не поверхности жидкости

Будем считать, что $\rho=const$ - это приближение.

$p=-\rho g z+const$

Найдем константу у г.у. → на поверхн давление атмосферное

$P_0=-\rho g H+const$

$const=P_0+\rho g H.$ $\Rightarrow$ $\boxed{P=P_0+\rho g\,\underbrace{(H-z)}_{H\text{ погружен}}}$ формула водолаза.

покажем что это закон Архимеда:

найдем силу выталкивания.

$$F_{выт} = \underset{\text{низ}}{P_н} \cdot S_{гр} - \underset{\text{верх}}{P_в} S_{гр}$$

$$F_{выт} = S_{гр}\{P_0 + \rho g(\cancel{H}-z_0) - P_0 \rho g(H - z_0 - a)\} = \rho g \overbrace{S_{гр}\, a}^{V_{кубика}}.$$

$$\boxed{F_{выт} = \rho g V_{куб}}$$ закон Архимеда.

если притереть кубик ко дну то он не всплывет.

$$F_{выт} = -\oint_f p\, d\vec{f} = -\int_V \nabla p\, d^3 r = -\int \vec{F_v}\, d^3 r = -\int_{V_T} \rho \vec{g}\, d^3 r$$

т.к ρ и $\vec{g}$ по договоренности константа

$$\boxed{\vec{F}_{выт} = -\rho\vec{g} \int_{V_T} d^3 r = -\rho\vec{g} \underset{\text{тело}}{V_T}}$$

Стационарное течение жидкости.

Уравнение Бернулли.

Пусть $\bar{v} \neq \bar{v}(t)$, т.е $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$

2) $(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p \frac{1}{\rho} + \frac{\vec{F_v}}{\rho}$ $\bar{F}$ – сила на единицу массы.

хотим переписать в виде $\nabla(\underbrace{\ldots}_{\to const}) = 0$

1) $\vec{F} = -\nabla\Phi$ - потенциал сил.

2) $\frac{1}{\rho}\nabla P = \nabla W$ - тепловая ф-я $\xrightarrow{\rho = const}$ $\nabla W = \nabla \frac{P}{\rho}$.

3) $(\vec{v}\nabla)\bar{v} = \frac{\nabla v^2}{2} - [\bar{v}\, rot\, \bar{v}]$ из вект. анализа.

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi\right) = [\bar{v}\, rot\, \bar{v}]$$

фокус не получился, но.

def 1) $rot\, \vec{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = \nabla\varphi$ → потенциальное течение жидкости → скорость течения можно представить в виде градиента потенциала..., если нет то движение вихревое.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi = const.$$

Сделаем в более общем. виде.

Вводим некий единичный вектор $\vec e = \frac{\vec v}{v}$ в каждой точке касательный к линии тока

и домножаем на него левую и правую часть.

$$\vec e \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi\right) = 0$$

т.к $\bar e$ перпендикулярно тому вектору.

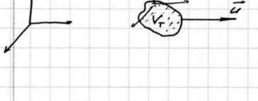
$$\vec e \nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial e}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial e} \underbrace{\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi\right)}_{\text{const при движении по линии тока!}} = 0$$

Выполняется везде только при потенц. движении.

Обтекание тел потенциальной несжимаемой жидкостью.

Парадокс д'Аламбера.



т.к границы движутся со скоростью

то перепишем гранусловия

В системе отсчета, где границы покоятся (T)

$$\vec v_T \vec f \Big|_f = 0$$

запишем Галилеевские преобразование $\vec v = \vec v_T + \vec u$ ск. дв жидк вокруг тт

$$\bar v_T = \bar v - \bar u$$

$\Rightarrow$ в лаб. системе $(\bar v - \bar u)\bar f\Big|_f = 0$

$\vec v_\infty = 0$ $\quad \vec v \vec f\Big|_f = \vec u \vec f\Big|_f \quad \vec v(\vec r \to \infty) = 0$

жидкость несжимаема $\rho = \text{const}$.

1) $\operatorname{div} \vec v = 0 \quad \vec v = \nabla\varphi$ требуем потенциальность

$$\left\{ \operatorname{div} \nabla \varphi = 0 \right.$$

$$\boxed{\Delta \varphi = 0}$$

2 г.у $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial f}\Big|_f = \vec u \cdot \vec f\Big|_f, \quad \varphi(r \to \infty) \to 0$ ← линейные

в самом общем виде решение выглядит как (из линейности)

$$\varphi = \alpha_i\big(\underset{\text{форма тт.}}{Ⓣ}, \vec r\big) u_i = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i$$

$x_1 \to x$
$x_2 \to y$
$x_3 \to z$

$$v_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} u_i$$

увлечённая жидкость должна обладать какой то кин энергией

$$E_* = \int\limits_{V_\infty - V_T} \frac{\rho v^2}{2}\, d^3 r = \text{(интеграл сходится)} = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{V_\infty - V_T} \overset{v^2}{\overset{\parallel}{v_k v_k}}\, d^3 r =$$

$$E_* = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{V_\infty - V_T} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} u_i \frac{\partial \alpha_e}{\partial x_e} u_e\, d^3 r.$$

$$E_m = \frac{1}{2} \left(\rho \int\limits_{V_\infty - V_T} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha_e}{\partial x_e} d^3 r \right) \cdot u_i u_e$$

$m_{ie}(\textcircled{T}) = m_{ie}$ – симметричный тензор
– тензор присоединенной массы.

зависит только от формы.

$$E_m = \frac{1}{2} m_{ie} U_i U_e$$

для шарика радиуса a $\quad m_{ie}^{(a)} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{4}{3} \pi a^3}_{V_a} \rho \delta_{ie}$ → полшарика

$$\frac{d\vec{P}_*}{dt} = \vec{F}_{T\to m} \qquad d\vec{P}_m = \vec{F}_{T\to m}\, dt \,/\vec{u}$$

$$\bar{u}\, d\bar{P}_* = \bar{F}_{T\to m} \quad dt\vec{u} = dE_m$$

$$u_i\, dP_{m i} = dE_m$$

$$dE_m = \frac{1}{2} m_{ie} U_i\, dU_e + \underbrace{\frac{1}{2} m_{ie} U_e\, dU_i}_{i \rightleftarrows e}$$

$$dE_m = \frac{1}{2} m_{ie} U_i\, dU_e + \frac{1}{2} \underset{m_{ie}}{\underset{\parallel}{m_{ei}}} U_i\, dU_e = m_{ie} U_i\, dU_e$$

$$dE_m = U_i\, dm_{ie} U_e$$

$$U_i\, dP_m = u_i\, dm_{ie} U_e \qquad P_{me} = m_{ie} U_e.$$

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = \vec{F}_{T\to m} = -\bar{F}_{m\to T} = -\bar{F}_c.$$

сила сопротивления

$$\frac{d\bar{P}_m}{dt} = -\vec{F}_c$$

Пусть $\bar{u} \neq \bar{u}(t)$, $\bar{u} = \text{const} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_c = 0}$

Парадокс д'Аламбера

это можно увидеть в сверхтекучих жидкостях

$$\vec{F_B} = \frac{d\vec{P_T}}{dt} + \frac{d\vec{P_m}}{dt} =$$

внешняя, двигатель

$$\vec{P_T} = m_T \vec{U}$$

$$\vec{F_{Bk}} = m_T \frac{dU_k}{dt} + m_{kl} \frac{dU_l}{dt}$$

Пусть $m_{kl} = m_{пр}\,\delta_{kl}$

$$\vec{F_B} = (m_T + m_{пр}) \frac{d\vec{U}}{dt}$$

$m_{пр}$ может оказаться $\gg m_{пр}$

24.02.
2010.

Наша система уравнений нелинейна, и не существует алгоритмов решения нел. системы уравнений в частных производных. Однако, если прибегнуть к малым отклонениям, то можно линеаризовать систему.

$\rho(\vec{r},t)$; $P(\vec{r},t)$ $\vec{v}(r,t)$ $S(\rho, P)$ или $P = P(\rho, S)$

Примером малых колебаний есть распространение звука.

Малые отклонения жидкости от состояния равновесия. Звук.

$S = S_0 = \text{const}$, при условии, что в t_0 все имели равную энтропию

это точное выражение

$$\underset{фон}{P_0} + \overset{отклонение}{P'} \quad\text{i.e.}\quad P = P_0 + P' \qquad |P'| \ll P_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \qquad |\rho'| \ll \rho_0$$

$$\vec{v} = 0 + \vec{v}'$$

v_0

Внешние силы не учитываем, чтобы константы удовл. уравнения

При некоторых условиях состояние будет устойчивым. Необходимо найти p', ρ', v' в любой точке пространства и в любой момент времени.

члены второго порядка малости выбрасываем

1) $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_0 \bar{v} + \cancel{\vec{v} \nabla \rho} + \cancel{\rho' \operatorname{div} \bar{v}} = 0$, т.к. $\operatorname{div}(\rho_0 + \rho')\bar{v} = \operatorname{div} \rho_0 \bar{v} + \operatorname{div} \rho' \bar{v} = \dots$

квадратичный член по скорости

2) $\rho_0 \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{(\bar{v} \nabla) \bar{v}} \right\} = - \nabla P'$

3) $S = S_0$

зададим жидкость.

нужно взять ρ_0 !

$P = P(\rho, S_0) \qquad dP = \frac{dP}{\partial \rho}\Big|_{S_0 = const} d\rho \rightarrow P' = \frac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_{S_0, 0} \rho'$

$\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$ → устойчивое состояние

1) $\frac{\delta P}{\delta \rho} > 0$ Пусть изначально ж. в сост равновесия

$\delta \rho > 0$ в некой точке

то и $\delta P > 0$ ⇒ жидкость начнет двигаться под действ перепада давления и уйдет и будет колебаться

2) $\frac{\delta P}{\delta \rho} < 0$

$\delta \rho > 0 \Rightarrow \delta P < 0$ – неустойчивое состояние

т.к жидкость будет приходить в точку, приходить и сколлапсирует.

$\frac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_{S_0, 0} = c_0^2$ имеет размерность скорость.

$P' = \underbrace{c_0^2}_{\text{сжимаемость жидкости.}} \rho'$

получим полн. сист ур-й опис. мал. колеб.

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0} \qquad \rho'(\bar{r}, t) \text{ и } \bar{v}(\bar{r}, t)$$

~~[illegible]~~

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c_0^2 \nabla \rho'}$$

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S_0, 0}$$

мы можем разложить в ряд Фурье.

просто для размерности дальше

$$\rho'(\vec{r},t) = \int \tilde{\rho}_k e^{i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)} d^3k\, dW$$

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \int \tilde{v}_k e^{i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)} d^3k\, dw$$

если подставим в ур-е, то каждое решение из суммы будет удовлетворять в силу линейности.

Рассмотрим одну гармонику Фурье

$$\rho'(\bar{r},t) = \rho_k e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{v}(\bar{r},t) = \vec{v}_k e^{i(\bar{k}\vec{z}-\omega t)}$$

Всегда можем брать или реальную или мнимую часть в силу линейности!

Повернем ось x по заданному $\bar{k}$.

одномерн случай.

$$\rho' = \rho_k e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\vec{v} = \bar{v}_k e^{i(kx-\omega t)}$$

ω и k одни и те же

получится? $\omega = \omega(k)$ - закон дисперсии волны

Зная это найдем фазовую скорость волны $\vec{v}_F = \frac{\omega}{k} \frac{\vec{k}}{k}$

групповую скорость $\vec{v}_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}$

$v_k = v_k(\rho_k)$ или $\rho_k = \rho_k(v_k)$

Разложим возмущение в ряд Фурье и может оказаться, что гармоники могут ~~во~~ двигаться с разной скоростью.

волн Пакет будет расплываться → явление дисперсии.

1) $-i\omega\rho' + \rho_0 ik v_x = 0$

$2)_x$ $\rho_0(-i\omega) v_x = -c_0^2 (ik)\rho'$

$2)_y$ $\rho_0(-i\omega) v_y = 0$; $v_y = 0$

$2)_z$ $\rho_0(-i\omega) v_z = 0$; $v_z = 0$

это Продольная волна, если имеется сост. только по k.
поперечная – перпендик k.

1) $-\omega\rho' + \rho_0 k v_x = 0$

$\vec{2}_x$) $c_0^2 k\rho' - \rho_0 \omega v_x = 0$

такая система совместна, если определитель равен 0

$$\begin{vmatrix} -\omega & \rho_0 k \\ c_0^2 k & -\rho_0 \omega \end{vmatrix} = 0 \qquad \rho_0\omega^2 - \rho_0 c_0^2 k^2 = 0$$

$$\omega^2 - c_0^2 k^2 = 0$$

$$\underbrace{\omega^2 = c_0^2 k^2}$$ з-н дисперсии

один знак и ω 1) $\omega = +c_0 k$ — вдоль x в пол. направл.

разные знаки k и ω. 2) $\omega = -c_0 k$. — против оси x

Будем брать решение со знаком +

$$\boxed{\vec{v}_F = c_0 \frac{\vec{k}}{k}} = \boxed{\vec{v}_{gr} = c_0 \frac{\vec{k}}{k}}$$

все гармоники Фурье бегут с одной скоростью c_0 — скорость распространения сигнала.

подст в 1) ↑

$-c_0 k \rho' + \rho_0 k v_x = 0$

$$\boxed{v_x = \frac{\rho'}{\rho_0} c_0} \qquad v_x \ll c_0$$

Скорость колебаний частиц жидкости значительно меньше скорости распространения сигналов.

~~Получение волны~~

В уравнении стояло $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{(\vec{v}\nabla)\vec{v}}$ — выбросили, это можно было делать, если

$$\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| \gg |(\vec{v}\nabla)\vec{v}|$$

подставим полученное решение:

$$\omega \cancel{v} \gg \cancel{v} k v \Rightarrow v \ll \frac{\omega}{k} = c_0;$$

действительно можно выбросить второе слагаемое

Получение Волнового уравнения

эту систему ур-й можно свести к $4^{м}$ волн. ур-ия

„такой простой закон дисперсии получается в волновом уравнении"

Возьмем rot от правой и левой части ур-я.

$$\mathrm{rot}\,\Big|\ \rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -c_0^2 \nabla \rho'$$

$\{$ротор градиента $0\}$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{rot}\,\bar{v} = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{v} \neq \chi(t)$ иначе не будет колебаний

но он должен быть ф-ей от времени

$\rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = \nabla\varphi$ → движение потенциальное.

Итак, получение волн. ур-я:

продиф 1) уравнение по времени

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \Big/\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \,\mathrm{div}\, \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \qquad \text{из } 2^{\text{го}}\ \ \rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -c_0^2 \nabla \rho'$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \rho_0 \,\mathrm{div}\, \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla \rho' = 0}$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi = -c_0^2 \nabla \rho'$$

$$\nabla\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -c_0^2 \nabla \rho'$$

$\{\nabla\varphi$ и $\nabla(\varphi + \chi(t))\}$ дает тоже $v\}$

$$\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c_0^2 \rho'$$

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla \varphi = 0}$$

если одномерный случай.

Плоские и сферические волны.

$\varphi = \varphi_k e^{i(kx-\omega t)}$ в в.ур.е

$$-\omega^2\varphi - c_0^2(ik)^2\varphi = 0 \quad => \omega^2 = c_0^2k^2$$

получим то же, но. первый случай общий, а второй — специфич.

$$\boxed{\varphi(x,t) = \underbrace{\varphi_1(x-c_0t)}_{\text{возм. бег вперед}} + \underbrace{\varphi_2(x+c_0t)}_{\text{назад}}}$$ плоское решение

Сферические: r, θ, φ.

Пусть $\varphi = \varphi(r,t)$:

подставим в выр-е $\varphi_* = \frac{\varphi_r}{r}$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

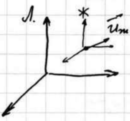
$$\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial r^2} = 0.$$

$$\varphi_r = \varphi_{r_1}(r-c_0t) + \varphi_{r_2}(r+c_0t)$$

$$=> \boxed{\varphi(r,t) = \underbrace{\frac{\varphi_{r1}(r-c_0t)}{r}}_{\text{сферич расходящ. волна}} + \underbrace{\frac{\varphi_{r2}(r+c_0t)}{r}}_{\text{сферич. сходящ. волна.}}}$$

и убывает как $\frac{1}{r}$.

Эффект Доплера.



в сист. коорд жидкости

$$\varphi = \varphi_к e^{i(\vec{k}_m \vec{r}_ж - \omega_m t)}$$

$$\omega_m = c_0 k_m$$

$$\vec{r}_л = \vec{r}_m + \vec{u}_m \cdot t\,; \quad \vec{r}_m = \vec{r}_л - \vec{u}_m t$$

$t_m = t_л = t.$ нерел. случай

$$k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} \qquad \lambda_m = \lambda_л$$

длины не меняются

$\vec{k}_m = \vec{k}_л = \vec{k}.$ Вектора не меняются

$$\omega_m = c_0 \vec{k}$$

в л. сист. отсчета

$$\varphi = \varphi_к e^{i(\vec{k}(\vec{r}_л - \vec{u}_m t) - \omega_m t)} \Rightarrow$$

$$\varphi = \varphi_к e^{i(\vec{k}\vec{r}_л - \underbrace{(\omega_m + \vec{k}\vec{u}_m)}_{\text{частота в л.}\ \omega_л} t)}$$

связь между частотами $\Rightarrow \boxed{\omega_л = \omega_m + \vec{k}\vec{u}_m}$ з-н Доплера

$$\omega_m = c_0 k$$

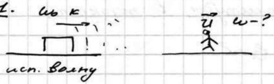
$$\vec{v}_F^{(л)} = \frac{\omega_л}{k}\frac{\vec{k}}{k} = \frac{k c_0 + \vec{k} u_m}{k}\frac{\vec{k}}{k} = \left(c_0 + \frac{\vec{k}\vec{u}_m}{k}\right)\frac{\vec{k}}{k}$$

$$\vec{v}_{gr}^{(л)} = \frac{\partial \omega_л}{\partial \vec{k}} = c_0 \frac{\vec{k}}{k} + \vec{u}_m$$

фазовая не равняется групповой.

Э.Д: Частота восприн. наблюдателем движущ~~егося~~имся отн. источника не совпадает с частотой источника.

Задача 1.



$$\omega_m = \omega_0$$

$$\omega_\lambda = \omega$$

$$\vec{u}_m = -\vec{u}$$

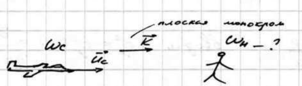
$$\omega = \omega_0 - \vec{k}\vec{u} \quad ; \quad \omega_0 = c_0 k \Rightarrow k = \frac{\omega_0}{c_0}$$

~~$\omega = c_0 k - \vec{k}\vec{u}$~~

$$\omega = \omega_0 - k u \cos\theta_{\vec{k}\wedge\vec{u}}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{c_0} \cos\theta_{\vec{k}\wedge\vec{u}}\right)}$$

Задача 2.



03.03.10

$$\omega_m = \omega_н$$

$$\omega_\lambda = \omega_c$$

$$\vec{u}_m = -\vec{u}_c$$

$$\omega_c = \omega_н - \vec{k}\vec{u}_c$$

$$\omega_н = \vec{k} \cdot c \rightarrow k = \frac{\omega_н}{c}$$

$$\omega_c = k\omega_н - \frac{\omega_н}{c} u_c \cdot \cos\theta_{\vec{k}\wedge\vec{u}_c}$$

$$\omega_c = \omega_н \left(1 - \frac{u_c}{c} \cos\theta_{k\wedge u_c}\right)$$

$$\boxed{\omega_н = \frac{\omega_c}{1 - \frac{u_c}{c} \cos\theta_{k\wedge u_c}}}$$

Если летит на н то ω выше
против → ниже

Если параллельно.

$$\omega_н = \frac{\omega_c}{1 - \frac{u_c}{c}}$$

если $u_c \rightarrow \overset{\text{скор звука}}{c}$, то $\omega_н \rightarrow \infty$
$\lambda \rightarrow 0$

все остается с самолётом, накапливается

сверхзвук
если $u_c > c$, то
звук последующего момента будет слышен раньше

Волны конечной амплитуды в жидкости

Пример таких отклонений — взрыв.

(нелинейные уравнения)

Сделаем некоторые упрощения:

1 в $t=0$ $S = S_0 = \text{const}$ — все единицы массы жидкости имеют одну энтропию и носят ее с собой

2. Одномерный случай, x и $v_x \neq 0$, $v_y = 0$, $v_z = 0$

$$① \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x = 0$$

$$② \ \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \overset{0}{\cancel{F_x}}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

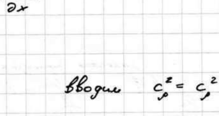
$$P = P(\rho, S_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_{S_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \qquad \text{вводим } c_\rho^2 = c_\rho^2(\rho) = \frac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_{S_0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho v_x}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = -\dfrac{c_\rho^2}{\rho} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} \end{cases}$$

Часто бывает, что получают такие же уравнения только не с ρ а с другой физ величиной

К примеру: жидкость на подложке



Если волны на мелкой глубине $\frac{H}{\lambda} \ll 1$ $v_z = 0$ $v_x \neq 0$; $v_y = 0$

$\boxed{H(x,t) \mid v_x(x,t)}$. Эти ур-я можно вывести, мы напишем ответ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{\partial H v_x}{\partial x} = 0; \qquad c_H^2 = gH \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = -\dfrac{c_H^2}{H} \dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

— похоже на ↑

Будем решать задачу в терминах H v_x, а потом перепишем в терминах ρv_x

Легко решается класс решений наз-ый решение <u>Римана</u> (или простые волны) — когда 1) $\underbrace{v_x = v_x(H)}$; 2) $H = (x,t)$

1) $v_x = v_x(H)$.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\left(v_x + H\frac{\partial v_x}{\partial H}\right) = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{c_H^2}{H}\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial H}\right)^{-1}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial H} + \frac{c_H^2}{H}\right)\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{v_x} + H\frac{\partial v_x}{\partial H} = \cancel{v_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial H}\right)^{-1}\cdot\frac{c_H^2}{H}$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial H}\right)^2 = \frac{c_H^2}{H^2} \qquad v_x(H)$$

$$\frac{dv_x}{dH} = \pm\frac{c_H}{H}$$

$$v_x = \pm\int\frac{c_H}{H}dH \qquad v_x = \pm\int\frac{c_\rho}{\rho}d\rho$$

Сделаем предельный переход к малым колебаниям:

Пусть $\rho = \rho_0 + \rho'$ $\quad |\rho'| << \rho_0$ $\qquad$ Это позволит нам определить пределы интегр.

$$v_x = \pm v_H$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x = \pm\int_{H_0}^{H}\frac{c_H}{H}dH = \pm v_H} \qquad v_H = \int_{H_0}^{H}\frac{c_H}{H}dH$$

2) $H = (x,t)$

$$v_x + H\frac{\partial v_x}{\partial H} = \pm v_H \pm H\frac{c_H}{H} = \pm(v_H + c_H)$$

введем $u(H) = c_H + v_H$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} \pm u(H)\frac{\partial H}{\partial x} = 0}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_x\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_t^{-1} = \mp u(H)$$

при постоянном

с помощью Якобиана перепишем:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_x = \frac{\partial(H,x)}{\partial(t,x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial t}\Big|_x & \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_t \\ \frac{\partial x}{\partial t}=0 & \frac{\partial x}{\partial x}=1 \end{vmatrix} = \frac{\partial H}{\partial t}\Big|_x$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_t = \frac{\partial(H,t)}{\partial(x,t)} = -\frac{\partial(H,t)}{\partial(t,x)}$$

Якобианы можно сокращать как дроби:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_x \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_t^{-1} = -\frac{\partial(H,x)}{\cancel{\partial(t,x)}}\cdot\frac{\cancel{\partial(t,x)}}{\partial(H,t)} = -\frac{\partial(H,x)}{\partial(H,t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(H,x)}{\partial(H,t)} = \pm u(H)$$

$$\frac{\partial(H,x)}{\partial(H,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial H}=1 & \frac{\partial H}{\partial t}=0 \\ \frac{\partial x}{\partial H}\Big|_t & \frac{\partial x}{\partial t}\Big|_H \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial t}\Big|_H$$

$\frac{\partial x}{\partial t}\Big|_H = \pm u(H)$ где $H = H(x,t)$, то если найдём отсюда $x = x(H,t)$

$$x(H,t) = \pm u(H)t \pm \Psi_\pm(H)$$

Посмотрим первое решение:

1) $\Psi_+(H) = \overbrace{x - u(H)t}^{\xi_0} \Rightarrow H = H(\xi) = H(x - u(H)t) \Rightarrow$

$\Rightarrow H = \varphi_1(x - u(H)t)$

Второе

2) $\Psi_-(H) = x + u(H)t$ 2) $H = \varphi_2(x + u(H)t)$

Пусть малое отклонение:

$\rightarrow H = \varphi_1(x - cH_0 t)$ → в волны полож. и отриц. направл.

$\leftarrow H = \varphi_2(x + cH_0 t)$

$\rho' = \varphi_1(x - c_{\rho_0} t)$

$$\boxed{H_f = \varphi_1(x - u(H_f)t)}$$

фиксир

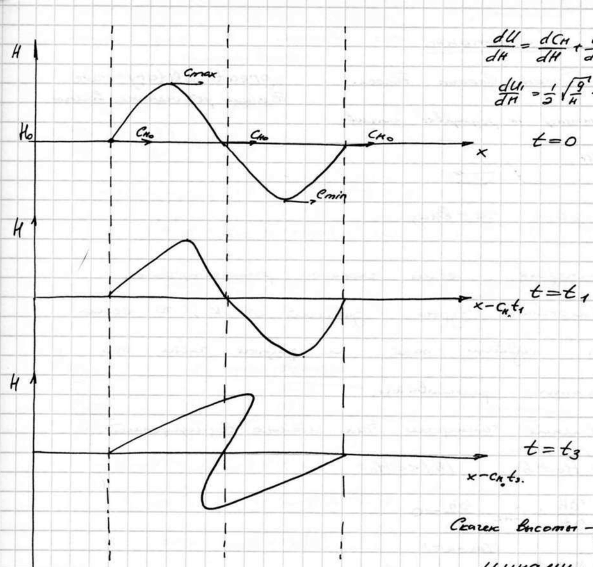
$$c_\rho^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_{S_0}$$

Будет два решения: 1) $\rho = \varphi_1(x - u(\rho)t)$

2) $\rho = \varphi_2(x + u(\rho)t)$

$$\frac{dU}{dH} = \frac{dC_H}{dH} + \frac{dv_H}{dH} = \frac{dC_H}{dH} + \frac{C_H}{H}.$$

$$\frac{dU_1}{dH} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{H}} + \sqrt{\frac{g}{H}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{H}} > 0$$



Скачек высоты — ударная волна цунами.

$$\frac{dU(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\,\frac{dc_\rho \rho}{d\rho} > 0. \qquad \frac{dU(\rho)}{d\rho} = \frac{dc_\rho}{d\rho} + \frac{c_\rho}{\rho}$$

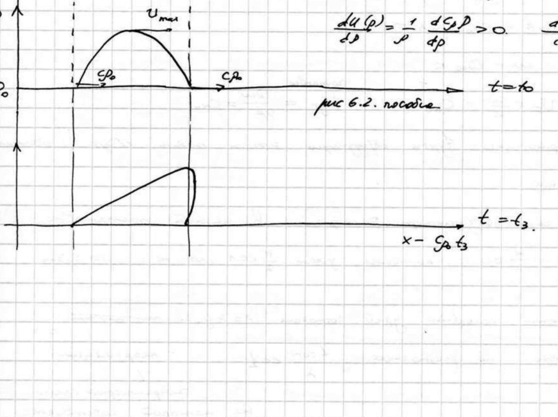


рис 6.2. пособие

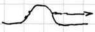
Солитоны.

Джон Скотт Рассел. great solitary wave

большие уединенные волны

инженер по регулировке каналов

1834г



10.03.10 Картевег де-Вриз.

Дисперсия, если скорость распространения гармоники Фурье зависит от k, то если мы создадим пакет и разные части его волны расплываются.

Явление дисперсии для малых возмущений.

$H = H_0 + h \qquad |h| << H_0$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + C_{H0} \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$h = h_k e^{i(kx - \omega t)}$$

$$-i\omega h + C_{H0} ikh = 0$$

з-н дисперсии: $\omega = C_{H0} k$

$$v_F = \frac{\omega}{k} = C_{H0} \qquad \overset{\text{групповая}}{v_{gr}} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = C_{H0}$$

Все гармоники Фурье образующие этот пакет идут с одинаковой скоростью.

Из-за чего возникает дисперсия: В нашей постановке задачи $\frac{H}{\lambda} \approx 0$, но если учтем $\frac{H}{\lambda} << 1$, но не 0. то будет

Мы можем пользоваться ур-ей состояния $P = P(\rho, S_0)$ ~~мы можем~~ пользоваться на расстояниях $\frac{L_{corr}}{\lambda} << 1$ - корреляции.

характерная длина на которой чувствуется изменение плотности вызвано соседней точки.

, сжимает

Построим ур-е в котором есть и нелинейность (малую)

, растягивает

и дисперсию (малую).

Возьмем 2ю произв: $h = h_k e^{i(kx-\omega t)}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + C_{H0}\frac{\partial h}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$$

$$-i\omega h + C_{H0} i k h + \alpha i^2 k^2 h = 0$$

$$-\omega + C_{H0} k + \alpha i k^2 = 0$$

$$\frac{\omega}{k} = C_{H0} + \alpha i k$$

– Вторая производная нам не подходит потому как возникает затухание во времени, а у нас этого явлен (вязкости) нет.

Возьмем 3ю производную

$$\frac{\partial h}{\partial t} + C_{H0}\frac{\partial h}{\partial x} + \overbrace{\beta\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}}^{\text{это слагаемое учитывает дисперсию.}} = 0$$

распывание в пространстве.

$$-\cancel{i}\omega\cancel{h} + C_{H0}\cancel{i}k\cancel{h} + \beta i^{\cancel{3}\,2} k^3 \cancel{h} = 0$$

$$-\omega + C_{H0} k - \beta k^3 = 0$$

$$\omega = C_{H0}k - \beta k^3$$

$$\frac{\omega}{k} = C_{H0} - \beta k^2 \Rightarrow V_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = C_{H0} - 3\beta k^2$$

Учтем первый нелинейный член разложени

$$\frac{\partial h}{\partial t} + C_{H0}\frac{\partial h}{\partial x} + \gamma h\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\gamma = \frac{\partial U(H)}{\partial H}\Big|_{H=H_0} > 0$$

$\beta > 0$ почти всегда.

Теперь напишем ур-е в котором есть и распывание и опрокидыван

это почти ур-е КдФ.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + C_{H0}\frac{\partial h}{\partial x} + \underbrace{\beta}_{\text{дисп параметр}}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \underbrace{\gamma}_{\text{нелинейный параметр.}} h\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$\beta > 0$, $\gamma > 0$ const.

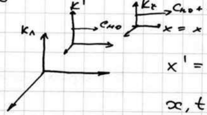
преобразуем и получим ур-е КдФ

Большое кол-во ур-й имеют солитонный вид.

Введём $q = \gamma h$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + C_{но}\frac{\partial q}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + q\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

уже один параметр.



$x = x'$ ~~$C_{но}t$~~ $+ C_{но} t$

$x' = x - C_{но} t$

$x, t \to x', t'$

можно показать, что $\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{x'} = \left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{x} + \overset{''}{C}_{но}\frac{\partial q}{\partial x}$

$$\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{x'} = \frac{\partial(q,x')}{\partial(t,x')} = \frac{\partial(q,x')}{\partial(t,x)}\underbrace{\frac{\partial(t,x)}{\partial(t,x')}}_{1} = \left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{x} + C_{но}\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{x'} + \beta\left.\frac{\partial^3 q}{\partial x'^3}\right|_t + q\left.\frac{\partial q}{\partial x'}\right|_t = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3 q}{\partial x'^3} + q\frac{\partial q}{\partial x'} = 0}$$

Уравнение Картевега-де-Фриза. (КдФ)

оно точное.

координата в системе координат, движущ. от лев. со скор. $C_{но}+S_c$

константы интегрирова

Введем переменную $\tau = x' - S_c t$

Считаем, что $q = q(\tau)$ и тогда получим ур-е в полных производных, которое умеем решать

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -S_c\frac{\partial q}{\partial \tau}$$

т.к $\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{dq}{d\tau}$

$$-S_c\frac{dq}{d\tau} + \beta\frac{d^3 q}{d\tau^3} + q\frac{dq}{d\tau} = 0.$$

проинтегрируем и положим константу (фактически сдвижка) равной нулю

$$-S_c q + \beta\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{q^2}{2} = 0$$

$$\beta\frac{d^2 q}{d\tau^2} = S_c q - \frac{q^2}{2}$$

Введем ф-ю u: $-\frac{du}{dq} = S_c q - \frac{q^2}{2}$

$$U(q) = \frac{q^3}{6} - S_c \frac{q^2}{2}.$$

$$\beta \frac{d^2 a}{d^2 \tau^2} = -\frac{du}{dq}$$

$$\frac{da}{d\tau} = \dot{q}$$ это система с одной степенью свободы

Это мех. системс, т.к $q, \dot{q}$.

А значит запишем ф-ю Лагранжа.

$$\underset{\text{ф-я}}{L} = \frac{\beta \dot{q}^2}{2} - \mathcal{U}(q) \qquad \text{в} \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

урe ↗ Лагранжа даст исх ур-е.

τ не входит $\overset{\text{в}\, L}{}$ → интеграл движения → энергия.

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const}$$

<u>Солитон</u> - механическая система с одной степенью свободы.

$$\underbrace{E = \frac{\beta \dot{q}^2}{2} + u(q) = \text{const.}}$$

уже уравнение первого порядка с константой интегрирования E.

$$\dot{q}^2 = \frac{2}{\beta}(E - U(q))$$

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{\beta}(E - U(q))}$$ это не арифметический корень, нужно понимать ±

$$\tau = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{2}{\beta}(E - U(q))}} \; \tau_A$$ - конст. интегрирован. начальный момент...

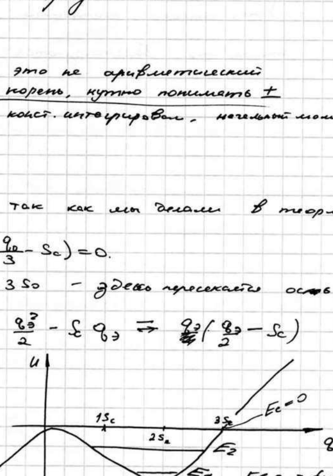
Посмотрим $U(q)$, так как мы делали в теормехе

Нули: $U(q_0) = \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{q_0}{3} - S_c\right) = 0.$

$q_0 = 0 \qquad q_0 = 3S_0$ - здесь пересекается ось τ.?

Экстремумы. $\frac{\partial u}{\partial q_э} = \frac{q_э^2}{2} - S_c q_э \Rightarrow q_э\left(\frac{q_э}{2} - S_c\right)$

$$\overset{\max}{q_{э1} = 0} \qquad \overset{\min}{q_{э2} = 2S_c}$$



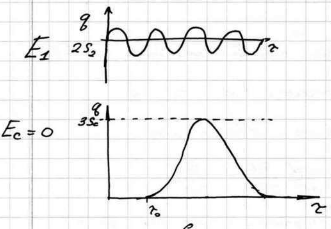
инфинитные движения в нашей задаче нас не интересуют.

$E \le 0$ → финитные

$\tau = x - (C_{\text{но}} + S_c)t.$

$x' = x - C_{\text{но}}t$

рис - 8.2. стр 52.



Солитон.

$\tau_0 \; 0 < q(\tau_0) << S_c$

$\dot{q} > 0$

Напишем решение интеграла для в терминах h. ($q = \gamma h$)

$$\boxed{h = \frac{\overbrace{h_a}^{\text{высота солитона}}}{\mathrm{ch}^2\left\{\dfrac{x - \underbrace{(C_{\text{но}} - S_c)}_{\text{скорость движения}}t - \tau_A}{\underbrace{\Delta}_{\text{ширина солитона}}}\right\}}}$$

$h_a = \frac{3S_c}{\gamma}$ $\quad \Delta - 2\sqrt{\frac{\beta}{S_c}}$

солитона

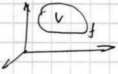
У нас такое соотношение высоты, ширины и скорости такое, что балансируются силы стяжения и расплывания

Запись уравнений идеальной жидкости в виде законов сохр массы.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0 \\ \rho\left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} \right\} = -\nabla P + \vec{F}_v \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \cancel{\operatorname{div}\rho}\,(\vec{v}\nabla)S = 0 \end{cases}$$

На самом деле здесь лишь 2е в ф-ле з.с.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho\vec{v} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, d^3r = -\int \operatorname{div}\rho\bar{v}\, d^3r = -\oint_f \rho\vec{v}\, d\bar{f}$$



а 3е $\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0$ (нет истоков)

$$\left.\begin{array}{l} x \to x_1 \\ y \to x_2 \\ z \to x_3. \end{array}\right\} \longrightarrow \operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

Если индекс повторяется дважды, то по нем суммируем

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

$$\boxed{\frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\partial J v_k}{\partial x_k} + Q_J}$$

Q_J — исток (сток) в данной точке

закон сохр-я для любой ф-и сохраняющейся величины.

$\hookrightarrow \rho,\ \rho S.$

Запишем З-н сохр импульса из общ. соотн.

$$J\begin{cases} \rho \\ \rho S \\ \rho v_i \equiv j_i \end{cases}$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} + Q_j$$

Q_j — источники ≡ внешние силы.

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + F_{vi}$$

а теперь проверим, получив из нашей системы ур-й.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{v} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0}_{} \quad \Big| \times v_i \text{ и складываем}$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v} \right\} = -\nabla p + \vec{F}_v \Rightarrow \rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\bar{v}\nabla) v_i \right\} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + F_{vi}$$

$$\underbrace{\rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i \right\} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + F_{vi}}_{}$$

$$\underline{v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underline{v_i \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k}} + \underline{\rho \frac{\partial v_i}{\partial t}} + \underline{\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + F_{vi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_i \rho) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k v_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + F_{vi}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + F_{vi}}_{} \text{ — получили то, что и раньше.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho \bar{v} \\ \dfrac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\dfrac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} - \dfrac{\partial P}{\partial x_i} + F_{vi} \\ \dfrac{\partial \rho s}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho \bar{v} s \end{cases} \qquad J = \begin{cases} \rho \\ \rho s \\ \rho v_i \end{cases} \qquad \frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\partial J v_k}{\partial x_k} + Q_J$$

Далее феноменологически дополним ур-я вязкости и теплопроводности:

1) <u>Вязкость</u>

~~[illegible]~~

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{(\rho v_i v_k + P \delta_{ik})}_{} + F_{vi} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$ — входит так, потому как должен был выполн. З.С.И.

симметричный тензор второго ранга

Π_{ik} – тензор потока импульса.

Внутри объема импульс никуда не девается

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i \, d^3 r = -\underset{\substack{\text{по Т. Остро-} \\ \text{градского} \\ \text{Гаусса}}}{\oint} \Pi_{ik} \, df_k + \int_V F_{vi} \, d^3 r$$

i-я комп. импульса утекающая через 1^0 поверхность ⊥ k-й оси

Следовательно с вязкостью 17.03.10

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho v_i\, d^3r = -\oint\limits_f \Pi_{ik}\, df_k + \oint \sigma_{ik}\, df_k + \int\limits_V F_{v_i}\, d^3r$$

σ_{ik} – тензор вязкости.

з.с.и. исток

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_{v_i}}$$

уравнение точное!

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{v_i\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v_i\frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k}}_{\equiv \text{первое уравнение} \times v_i \equiv 0} - \rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_{v_i}$$

$$\boxed{\rho\left\{\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right\} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_{v_i}}$$

2е ур-ие в тензорной записи.

кинет. энергия

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{\rho v^2}{2}\, d^3r = -\oint\limits_f \vec{Q}_E\, d\vec{f} + \int\limits_V \dots\, d^3r$$

вектор потока энергии

за счет этого кин энергия убывает.

Для того чтобы преобразовать от инт по объему к интегралу пов-ти нужно выразить производные по времени через производные по координатам –

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{\rho v^2}{2}\, d^3r = -\oint\limits_f \vec{Q}_E\, d\vec{f} - \int\limits_V \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, d^3r$$

необратимая

$$\boxed{\frac{\partial E_n}{\partial t} = -\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}$$

кин. энергия в единице объема исчезает.

Рассмотрим 5е уравнение:

$$\delta S_v = \frac{\delta Q}{\delta t} \qquad \delta Q = \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{3}\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

приращение энтропии в единицу времени в единицу объема

появление тепловой энергии в един времени в единичном объеме.

и в точности до знака равняется изм кин энергии

$$\boxed{\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho\vec{v}s + \frac{1}{T}\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}$$

Проверим верность полученного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho s\, d^3r = -\oint_f \rho s\vec{v}\, d\vec{f} + \int_V \frac{1}{T}\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, d^3r$$

эксперимент: $\vec{v} \equiv 0$

$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho S d^3r = 0$ энтропия вечна теорет.

$T_v > T_{out}$ => а на практике температура выровняется (из-за переноса тепла)

=> явление теплопроводности не учитывает изменение температуры в целом неподвижной жидкости.

Теплопроводность описывается вектором

$\vec{q}$ 

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int \rho s d^3r = -\oint_f \rho s\vec{v} d\vec{f} + \int_V \frac{1}{T}\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} d^3r - \frac{1}{T}\oint_f \bar{q} d\bar{f}$$

~~$\int_V \frac{\partial \rho s}{\partial t} d^3r = -\int_V \operatorname{div} \rho s\vec{v}\, d^3r +$~~

$$\boxed{\frac{\partial \rho S}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho s\vec{v} + \frac{1}{T}\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{T}\operatorname{div}\vec{q}}$$

$5^{\underline{e}}$ уравнение → абсолютно точное

Через → $\rho, p, \vec{v}, T(\rho,p), S(\rho,p)$ → надо получить $\sigma_{ik}, \vec{q}$

σ_{ik} обязат должно содержать произв по коорд.

{ при $v=0 \Rightarrow \sigma_{ik}=0$; $v=\text{const} \Rightarrow \sigma_{ik}=0$

схема

1) $\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{1}{L}$ Пусть $\frac{1}{L^2} <<< \frac{1}{L}$ и т.д. (при большом L)

2) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$; $\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{1}{L^2}$

3) $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{1}{L^3}$

4) ... 5) ... .

$\frac{l}{L} \ll 1$ гидродинамический малый параметр.

Если учтем первый член, то получим первое приближение.

ур-е Навье-Стокса

В вакууме на магнитной подвеске находится сосуд жидкости

и вращается с $\vec{\Omega}$

и образуется

$\vec{v} = [\vec{\Omega}\vec{r}]$

. . . .

2 комбинации удовл. этому требованию $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$ $\qquad \operatorname{div} \vec{v} \equiv \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$

$$\Rightarrow \sigma_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + b\,\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}$$

a, b — характеристики жидкости — заданные

Пишут другие коэф-ты.

$$\sigma_{ik} = \eta\underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right)}_{\text{тензор с } Sp = 0} + \underbrace{\zeta\,\frac{\partial v_l}{\partial x_i}\delta_{ik}}_{\text{мало}}$$

это когда $i=k$; $\delta_{kk}=3$

из-за сжимаемости жидкости. А если затухание звука, то имеет большое значение

сдвиговая вязкость → η — коэф первой вязкости

сжимаемость → ξ — коэф второй вязкости

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = \underbrace{-\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{>0} \qquad \eta \geqslant 0,\ \zeta \geqslant 0$$

Если $t = \text{const} \Rightarrow \vec{q} = 0$

$$\vec{q} = -\varkappa \nabla T; \qquad \varkappa \geq 0$$

коэф теплопроводности

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right) + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} + F_i$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} v_i \equiv \Delta v_i \qquad (\Delta \vec{v})_i \equiv \Delta v_i$$

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \mathrm{div}\, \vec{v}$$

запишем в векторном виде

$$\boxed{\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right\} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \mathrm{div}\, \vec{v} + \vec{F}_v}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{q} = \mathrm{div}\, (-\varkappa \nabla T)$$

заменим $\varkappa$ на средн значен и вынесем за знак произв

$$\mathrm{div}\, \vec{q} = -\varkappa\, \mathrm{div}\, \nabla T = -\varkappa \Delta T$$

перепишем в виде индив производ:

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\mathrm{div}\, \rho s \vec{v} \longrightarrow \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -s\, \mathrm{div}\, \rho \vec{v}}_{=0 \text{ из } 1^{\text{го}} \text{ ур-я}} - \rho (\vec{v} \nabla) s$$

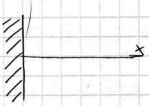
$$\rho \left\{ \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) s \right\} = \frac{1}{T} \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{T} \varkappa \Delta T$$

$$\boxed{\overset{\text{изм. энтр движ массы}}{\rho T \left\{ \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) s \right\}} = \overset{\text{превр кин энергии в тепловую} \geq 0}{\sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \underset{\text{теплопроводность жидкости}}{\varkappa \Delta T}}$$

причины изм тепл энергии в ед времени в ед объеме

в первом приближении по малому гидродинамическому параметру $\frac{l}{L} \ll 1$

Граничные условия



норм. компонента

$$v_x\Big|_{x=0} = 0$$ жидкость не втекает в стенку.

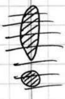
одного условия мало.

$\varkappa_s$ $\varkappa$

Тангенциальная сост тоже должна быть равна 0.

(жидкость на границе прилипает)

$$v_y\Big|_{x=0} = 0 \qquad v_z\Big|_{x=0} = 0 \qquad \boxed{\vec{v}\Big|_{x=0} = 0}$$



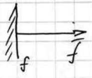
$$\vec{q}_s = -\varkappa_s \nabla T_s$$
$$\vec{q} = -\varkappa \nabla T$$

Сколько вытекло слева столько и втекло

$$\varkappa_s \frac{\partial T_s}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

А вот это доказать не можем:

$$T_s = T\Big|_{x=0}$$



1) $\vec{v}\Big|_f = 0$

2) $\varkappa_s \frac{\partial T_s}{\partial f} = \varkappa \frac{\partial T}{\partial f}$

3) $T_s = T\Big|_f$

$\boxed{\rho = \text{const}}$

$1^{й}$ тип задач

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{0} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$P(\vec{r},t)\ \vec{v}(\vec{r},t)$$

$$\rho\left\{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right\} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \cancel{\ }$$

а $5^{е}$ ур-е просто выброшу. ; $p, \vec{v}$
(т.к это будет противоречить остальным)

$$\vec{v}|_f = 0$$

$2^{й}$ тип задач

Положим $v = 0$, покоящейся жидкости

→ останется только $5^{е}$ уравнение

$3^{й}$ тип

Нельзя восп-ся никаким ур приближением,

тогда малые отклонение от сост равновесия

→ линейно

24.02.2010

$I^{й}$ тип:

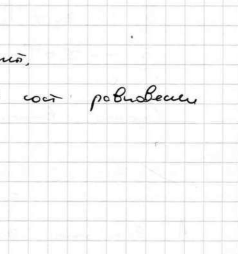
$\rho = \text{const}$

$P(\vec{r},t)\ \vec{v}(\vec{r},t)$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ \rho\left\{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right\} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} \\ \vec{v}|_f = 0 \end{cases}$$

система $4^{х}$ ур-й отн $4^{х}$ искомых функций.

$P_1 > P_2$



Формула Пуазейля

$$\begin{cases} 1)\ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ \vec{2})\ \rho(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} \\ \vec{v}|_f = 0 \end{cases}$$

труба
сечение = const;

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Найти $P(x,y,z)$; $\vec{v}(x,y,z)$

Давайте рассуждать

Выполняется теорема единственности

$v_z \neq 0,\ v_x = v_y = 0$

$$1)\ \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}}^{0} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}}^{0} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z \neq v_z(z)$$

$$\underline{v_z = v_z(x,y)}$$

2x) $\rho(\vec{v}\nabla)\cancel{v_x}^{\nearrow 0} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\Delta\cancel{v_x}^{\nearrow 0} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ $\quad \underline{P \neq P(x)}$

2y) $\underline{P \neq P(y)}$

$$\Rightarrow \quad P = P(z)$$

2z) $\rho\left(\cancel{v_x\frac{\partial}{\partial x}}^{\nearrow 0} + \cancel{v_y\frac{\partial}{\partial y}}^{\nearrow 0} + \underbrace{v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_z}_{=0} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\Delta v_z$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \eta\Delta v_z$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{dP}{dz}}_{f_1(z)} = \eta\underbrace{\Delta v_z}_{f_2(x,y)}} = C_1$$

такое может быть. если константе равно одной и той же

1) $\frac{dP}{dz} = C_1 \Rightarrow P = C_1 z + C_2$

$P(z=0) = P_1 \to P_1 = C_2$

$P(z=L) = P_2 \to C_1 L + P_1 = P_2 \Rightarrow C_1 = \frac{P_2 - P_1}{L} = -\frac{P_1 - P_2}{L}$

Введем перепад давлений $\boxed{\delta P = P_1 - P_2 > 0.}$

$P(z) = P_1 + \frac{\delta P z}{L}$ $\quad \boxed{P(z) = P_1 - \frac{\delta P z}{L}}$

2) $\eta\Delta v_z = C_1 ;= -\frac{\delta P_1}{L}$

Цилиндрическая система координат: $r, \overset{\text{симметрия}}{\cancel{\varphi}, \cancel{z}}. \Rightarrow v = v(r)$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\delta P}{L\eta}$$

$$r\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\delta P}{2L\eta}r^2 + C_3$$

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\delta P}{2L\eta}r + \frac{C_3}{r} \Rightarrow \boxed{v_z = -\frac{\delta P}{4L\eta}r^2 + C_3\ln r + C_4}$$

$C_3 = 0$, т.к $r \to 0$ $\ln r \to \infty$!

$v_z(r=a) = 0 \Rightarrow C_4 = \frac{\delta P}{4L\eta}a^2$

$$v_z = -\frac{\delta P}{4L\eta}r^2 + \frac{\delta P}{4L\eta}a^2$$

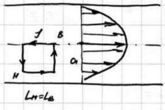
$$\boxed{v_z = \frac{\delta P}{4L\eta}(a^2 - r^2)}$$

Смотрим предельные случаи:

1) идеальная жидкость -> вязкость ноль -> $v_z \to \infty$

Рисуем годограф скоростей:

Течение вихревое!



1) Вихревое $\text{rot}\,\vec{v} \neq 0$ и $\vec{v} \neq \nabla\varphi$

$$\oint_{J} \vec{v}\, d\vec{r} = \int_{f_s} \text{rot}\,\vec{v}\, d\vec{f} \Rightarrow \quad \oint_{J} \vec{v}\, d\vec{r} = L_н \left(v_z(r_н) - v_z(r_в)\right) \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{v} \neq 0$$

Получим саму формулу Пуазейля.

Найти массу жидкости переносимую за единицу времени через сечение

$$Q = \int_0^a \rho v_z \cdot 2\pi r\, dr = 2\pi \frac{\delta P}{4L\eta} \rho \int_0^a (a^2 - r^2) r\, dr =$$

$$Q = \frac{\delta P}{2L\eta} \pi \rho \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{\pi\, \delta P}{8\, L\eta} \rho\, a^4$$

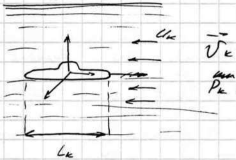
$$\boxed{Q = \frac{\pi \rho \delta P}{8L\eta} a^4}$$ Формула Пуазейля

Закон подобия

Подводный корабль на глубине

Пусть $u_к = const$.

Найти распределение давлен, скоростей и сопротивления



$\vec{V}_к(\vec{r}_к)$

$P_к(\vec{r}_к)$

Необходимо промоделировать - берем маленькую модель и все меряем. Но нужно знать как перейти от маленькой модели к кораблю!

$\vec{v}_м(\vec{r}_м),\ P_м(\vec{r}_м)$

def Два течения <u>подобные</u>, если одно получается из второго простым изменением масштаба всех величин.

$$\Rightarrow \vec{v}_к(\vec{r}_к) = \alpha \vec{v}_м(\vec{r}_м). \qquad \vec{r}_к = \beta \vec{r}_м \qquad P_к(\vec{r}_к) = \gamma P_м(\vec{r}_м)$$

Когда течение будет подобным? α, β, γ - ?

Предположим, что для модели:

$$\vec{v}_м = U_м \cdot \overset{\text{безразмерное.}}{\tilde{\vec{v}}}$$

$$\vec{r}_м = L_м \cdot \tilde{\vec{r}}$$

$$P_м = \rho_м U_м^2 \tilde{P}$$

1) $\operatorname{div} \vec{v}_м = 0 \Rightarrow \frac{1}{L_м} U_м \widetilde{\operatorname{div}}\, \tilde{\vec{v}} = 0 \Rightarrow \boxed{\widetilde{\operatorname{div}}\, \tilde{\vec{v}} = 0}$

$$\rho_м \frac{U_м^2}{L_м} (\tilde{\vec{v}} \tilde{\nabla}) \tilde{\vec{v}} = -\frac{1}{L_м} \rho_м U_м^2 \tilde{\nabla} \tilde{P} + \overset{\text{может быть разная обтекающая жидкость}}{\eta_м} \frac{1}{L_м^2} U_м \tilde{\Delta} \tilde{\vec{v}} \quad \Big| \times \frac{1}{\rho_м U_м^2}$$

$$(\tilde{\vec{v}} \tilde{\nabla}) \tilde{\vec{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{\eta_м}{\rho_м U_м L_м} \tilde{\Delta} \tilde{\vec{v}}$$

Введем <u>число</u> <u>Рейнольдса</u> $\boxed{R_м = \frac{\rho_м U_м L_м}{\eta_м}}$ ← безразмерная величина

$$\begin{cases} \widetilde{\operatorname{div}}\, \tilde{\vec{v}} = 0 \\ (\tilde{\vec{v}} \tilde{\nabla}) \tilde{\vec{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{1}{R_м} \tilde{\Delta} \tilde{\vec{v}} \\ \tilde{\vec{v}} \big|_{\tilde{f}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \tilde{\vec{v}} &= \tilde{\vec{f}}(\tilde{\vec{r}}, R_м) \\ \tilde{P} &= \tilde{\varphi}(\tilde{\vec{r}}, R_м) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_M = U_M \,\tilde{\vec{f}}\left(\frac{\vec{r}_M}{L_M}, R_M\right) \qquad P_M = \rho_M U_M^2 \,\hat{\varphi}\left(\frac{\vec{r}_M}{L_M}, R_M\right)$$

А теперь для корабля

$$\tilde{\vec{v}}_k = U_k \tilde{\vec{v}} \;; \quad \vec{r}_k = L_k \tilde{r}$$

Решения будут тождественны, если $R_M = R_k = R$ и тогда подобны

$$\vec{v}_k(\vec{r}_k) = U_k \,\tilde{\vec{f}}\left(\frac{\vec{r}_k}{L_k}, R_k = R_M\right) \Big| \; P_k = \rho_k U_k^2 \varphi\left(\frac{\bar{r}_k}{L_k}, R_k = R_M\right)$$

Пусть $\underset{\beta}{\underset{\shortparallel}{\frac{r_k}{L_k} = \frac{r_M}{L_M}}}$ тогда $\bar{v}_k(\bar{r}_k) = \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{\frac{U_k}{U_M}}} \vec{v}_M(\vec{r}_M)$

$$P_k^{(r_k)} = \underbrace{\frac{\rho_k U_k^2}{\rho_M U_M^2}}_{=\gamma} P_M(r_M)$$

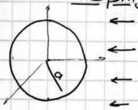
$$\alpha = \frac{U_k}{U_M} \qquad \beta = \frac{L_k}{L_M} \qquad \gamma = \frac{\rho_k U_k^2}{\rho_M U_M^2}$$

$R_k = R_M \Rightarrow \quad \dfrac{\rho_M U_M L_M}{\eta_M} = \dfrac{\rho_k U_k L_k}{\eta_k}$ чем меньше модель, тем выше скорость.

Если не стационарная задача
Разгон за τ_k. (и соотв t_M)

и получим число Струхова $S = \frac{U\tau}{L}$

Формула Стокса.



Найти распределение скоростей.

$$\vec{v}(\vec{r},\vec{u}); \quad P(\vec{r},\vec{u})$$

Нужно выбросим нелинейный член из второго уравнения (все остальные линейные), тогда у нас есть алгоритм решения.

$$|(\vec{v}\nabla)\vec{v}| << \eta\,|\Delta\vec{v}|$$

31.03

С прошлой недели:

$$\rho = \text{const}; \quad \underbrace{\vec{v}(\vec{r},t), \quad p(\vec{r},t)}_{\text{искомые}}$$

1) $\operatorname{div}\vec{v} = 0$

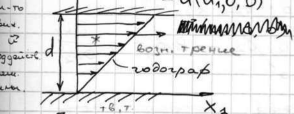
2) $\rho\left\{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right\} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v}$

г.у $\vec{v}|_f = 0$

поверхн. одного тв.т. скользит по пов-ти другого.

Задача о смазке.

Чтобы уменьшить трение, промежут между поверхностями заполн. смазкой



удовлетв.

$P = \text{const}$

$\vec{v}(v_1, 0, 0) \rightarrow$ скор. движ. жидк

Стационарная задача
плоская задача

Тогда:
*-то движ только вдоль x_1

1) $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}} + \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_3}} = 0$

$v_1 \neq v_1(x_1)$ тогда

$v_1 = v_1(x_2)$

стационарное движение

$2_1)$ $\rho\left\{\cancel{\frac{\partial v_1}{\partial t}} + \left(v_1\cancel{\frac{\partial}{\partial x_1}} + \cancel{v_2\frac{\partial}{\partial x_2}} + \cancel{v_3\frac{\partial}{\partial x_3}}\right)v_1\right\} =$

$= \eta\left(\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}}\right)v_1$

$2_1)$ $0 = \eta\frac{d^2 v_1}{dx_2^2}$ $\quad \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = 0 \Rightarrow \boxed{v_1 = C_1 x_2 + C_2.}$

Шишков

гру $\begin{cases} v_1 (x_2 = 0) = 0 \quad \rightarrow 0 = 0 + c_2 \rightarrow c_2 = 0 \\ v_1 (x_2 = d) = u_1 \quad \rightarrow u_1 = c_1 d \rightarrow c_1 = \dfrac{u_1}{d} \end{cases}$

$$\boxed{v_1 = \frac{u_1}{d} x_2}$$

Запишу з-н сохр. импульса в тензорном виде:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \frac{\partial (-\Pi_{ik} + \sigma_{ik})}{\partial x_k}$$

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$ остальные члены равны нулю.

$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P \delta_{ik}$ изменение импульса только за счет воздействия окруж. жидкос

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i \, d^3 r = \oint_f (-\Pi_{ik} + \sigma_{ik}) d f_k$$

$$F_{ik} = -\Pi_{ik} + \sigma_{ik}$$

F_{ik} – это $i^{\text{ая}}$ компонента силы, действ на единицу поверхности перпендикулярной $k^{\text{ой}}$ оси.

F_{12} – $1^{\text{я}}$ компонента силы, действ на ед $S \perp x_2$.

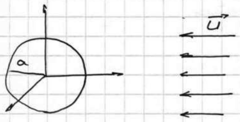
$$F_{12} \Big|_{x_2 = 0} = -\Pi_{12} + \sigma_{12} = -\rho v_1 \overset{0}{\cancel{v_2}} - P \cdot \overset{0}{\cancel{\delta_{12}}} + \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$\boxed{F_{12} = \eta \frac{u_1}{d}}$ – формула, коэфф. сопротивлени на единицу поверхности

$$F_{22} \Big|_{x_2 = 0} = -\Pi_{22} + \sigma_{22} = -\rho \overset{0}{\cancel{v_2}} v_2 - P \cdot \overset{1}{\delta_{22}} + \eta \overset{0}{\cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}}}$$

$\boxed{F_{22} = -P}$ вдоль x_2 кроме давл ничего не действ

Формула Стокса.



Интересует:

Распределение скоростей, давление

Вокруг шарика, и сила,

действ на шарик (сопротивление)

стационарна

От t ничего не зависит.

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r}) - ? \\ P(\vec{r}) \end{cases} \qquad \text{г.у} \quad \begin{array}{l} \vec{v}\,(r=a)=0 \\ \vec{v}\,(r\to\infty)=\vec{u} \end{array}$$

$\operatorname{div}\vec{v}=0$

$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right)=-\nabla p+\eta\Delta\vec{v}$

Сравним Слагаемое $\rho(\vec{v}\nabla)\vec{v}$ и $\eta(\Delta\vec{v})$

$$\rho\,|(\vec{v}\nabla)\vec{v}| \ll \eta\,|\Delta\vec{v}|$$

$$\rotatebox{90}{$\approx$}$$

$$\rho u\frac{u}{a} \ll \eta\frac{u}{a^2} \quad \longrightarrow \quad \underset{\overset{\equiv}{R}}{\boxed{\frac{\rho u a}{\eta} \ll 1}}$$

=> Если число Рейнольдса мало, то это слагаемое можно

Выбросить. ща

(c) Ландау

Готовый ответ: $\vec{v}=\vec{u}-\frac{3a}{4}\frac{\vec{u}+\vec{n}(\vec{u}\vec{n})}{r}-\frac{a^3}{4}\frac{\vec{u}-3\vec{n}(\vec{u}\vec{n})}{r^3}$

$P=P_0-\frac{3}{2}\eta\frac{\vec{u}\vec{n}}{r^2}a$

$$\boxed{\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}}$$

Ищем силу:

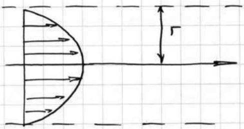
$$F_i=\oint F_{ik}\,df_k=\oint\Big(-\rho\overset{=0}{v_i}\overset{=0}{v_k}-p\,\delta_{ik}+\overbrace{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)}^{\sigma_{ik}'}\Big)df_k$$

$$\boxed{\vec{F}=6\pi\eta a\vec{u}} \qquad \vec{F}_{\text{сопр}}=-6\pi\eta a\vec{u}$$

Шишков

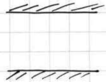
Турбулентность

Когда получали формулу Пуазейля:

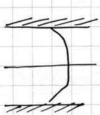


$\vec{v}_0(\vec{r}),\quad P_0(\vec{r})$

С увеличением скорости в трубе в жидкости пропадает пуазейлевское течение.



Средняя →



отличный годограф от Пуазейля.

def. Устойчивое течение — при котором малые отклонения от течения затухают со временем.

def. Неустойчивое течение ← малые отклонения нарастают со временем.

Рассмотрим сильнонеустойчивое течение.

Возникает динамическое равновесие между нарастающими и гаснущими возмущениями.

Это т

Задачи:

1. Исследовать течения на устойчивость
2. Описание турбулентного движения

① $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ $\qquad P = P_0 + P'$

$|\vec{v}'| << |\vec{v}_0| \qquad |p'| << P_0$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \nabla)\vec{v}' + \cancel{(\vec{v}_0 \nabla)\vec{v}_0} + (\vec{v}' \nabla)\vec{v}_0 + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\cancel{(\vec{v}' \nabla)\vec{v}'}}_{2^{\text{го}}\text{ порядка малости.}} \right\} = -\nabla P_0 - \nabla p' + \eta \Delta \vec{v}_0 + \eta \Delta \vec{v}'$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \nabla)\vec{v}' + (\vec{v}' \nabla)\vec{v}_0 = \right.$$

$$= -\nabla p' + \eta \Delta \vec{v}'$$

$$\underbrace{\cancel{\operatorname{div} \vec{v}_0}}_{0} + \operatorname{div} \vec{v}' = 0$$

$$\vec{v}'\big|_f = 0$$

Разложим $\vec{v}' = \sum_k \vec{v}_k (\vec{r}) e^{-i\omega_k t}$

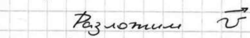
$$p'(\vec{r}, t) = \sum_k p_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t}$$

$$\omega_k = Re\,\omega_k + i\, Im\,\omega_k$$

1) $Im\,\omega_k < 0$ для любого k.

2) $Im\,\omega_{k_1} > 0$ для k_1. неустойчив.

Идеальная жидкость разрешает.



~~проказ~~ проскальзывание слоёв

Шишков

② $\vec{v} = \overline{\vec{v}} + \vec{v}_п$ $v_п$ – скорость пульсаций.

$P = \vec{P} + P_п$

$\tau_{пульс} \ll \tau_{ср} \ll \tau_{задачи}$

$$\overline{\vec{v}}(\vec{r},t) = \frac{1}{\tau_{ср}} \int\limits_{t-\frac{\tau_{ср}}{2}}^{t+\frac{\tau_{ср}}{2}} \vec{v}(\vec{r},t')\,dt'$$

(на расст ≈ диаметру трубы).

$$\overline{\vec{v}_п} = 0$$

по времени.

1) $\operatorname{div} \overline{\vec{v}} = 0$

$\vec{2})$ $\rho \left\{ \overline{\frac{\partial \overline{\vec{v}}}{\partial t}} + \cancelto{0}{\overline{\frac{\partial \vec{v}_п}{\partial t}}} + \overline{(\overline{\vec{v}}\nabla)}\,\overline{\overline{\vec{v}}} + \overline{(\overline{\vec{v}}\nabla)}\,\overline{\vec{v}_п} + \right.$

$\left. + \overline{(\vec{v}_п\nabla)}\,\overline{\overline{\vec{v}}} + \overline{(\vec{v}_п \nabla)\vec{v}_п} \right\} =$

$= -\nabla\overline{\vec{P}} - \nabla\overline{\vec{p}_п} + \eta \Delta \overline{\overline{\vec{v}}} + \eta \Delta \overline{\vec{v}_п}$

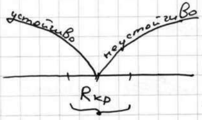
$\overline{\overline{\vec{v}}} = \overline{\vec{v}}, \quad \overline{\vec{v}_п} = 0$

$\Rightarrow$ 1) $\operatorname{div} \overline{\vec{v}} = 0$

$\vec{2})$ $\rho \left\{ \frac{\partial \overline{\vec{v}}}{\partial t} + (\overline{\vec{v}}\nabla)\overline{\vec{v}} \right\} = -\nabla \overline{p} + \eta \Delta \overline{\vec{v}} - \overline{\rho(\vec{v}_п\nabla)\vec{v}_п}$

→ нет замкнутого ур-я для $\overline{\vec{v}}$.

Необходимо знать $\vec{v}_п$



→ $R_{кр} = 2000$

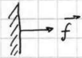
Теплопроводность в жидкости.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

$$\rho\left\{\frac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v\nabla)\vec v\right\} = -\nabla p + \vec F_v + \eta\Delta\vec v + \left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\vec v$$

$$\rho T\left\{\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec v\nabla)s\right\} = \underset{\overset{\vee}{0}}{\sigma_{ik}}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \varkappa\Delta T$$

$$\vec v\big|_f = 0$$



$$\varkappa_s\frac{\partial T_s}{\partial f} = \varkappa\frac{\partial T}{\partial f}, \quad T_s = T\big|_f$$

Пусть $\vec v = 0$. $P = Const \equiv P_0$

$$\rho T\frac{\partial s}{\partial t} = \varkappa\Delta T \Rightarrow s = s(T, P_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial T}\Big|_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T\frac{\partial s}{\partial t} = \underbrace{\left|\frac{\overset{=\partial Q}{T\partial s}}{\partial T}\right|_p}_{=\,C_p\ \text{теплоемкость при}\ p=const}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\underbrace{\rho C_p}_{\overset{\parallel}{\chi}}}\Delta T$$

χ – коэфф. температуропроводности.

$\chi = Const$ ← положим. → ур-е линейное.

→ $\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\Delta T}$ уравнение теплопроводности (выравн температуры)

{ур-е Фурье} и {ур-е диффузии}

описывается таким же ур-ем, с точн до замены пост

Задача.

в $t=0$.

Дано: $\overset{=0}{t_0}$; $T_0 = T_0(\vec{r})$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$$

Найти: $t > t_0 \mid T(\vec{r}, t) - ?$

$$\chi = \text{const}$$

$$T(\vec{r}, t) = \int T_k(t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k$$

гармоники Фурье

должно удовлетв. подставим в ур-е

$$\int \frac{dT_k(t)}{dt} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k = \int \chi (i\vec{k})^2 T_k(t) e^{i\bar{k}\bar{r}} d^3k$$

$$\int \underbrace{\left(\frac{dT_k(t)}{dt} + \chi k^2 T_k(t)\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}} e^{i\bar{k}\bar{r}} d^3k = 0$$

$$\frac{dT_k(t)}{dT} + \chi k^2 T_k(t) = 0.$$

07.04. 2010. $$T_k(t) = T_{k0} e^{-\chi k^2 t}$$

Подставим в $T(\bar{r}, t)$

$$T(\bar{r}, t) = \int T_{k0} e^{-\chi k^2 t} e^{i\bar{k}\bar{r}} d^3k$$

подставим в ~~начальное~~ гранигн. условия:

$$T_0(\bar{r}, t=0) = \int T_{k0} e^{i\bar{k}\bar{r}} d^3k$$

просто разложение в интеграл Фурье, это просто гармоники Фурье.

обратное преобразование Фурье.

$$T_{k0} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T_0(\vec{r}') e^{-i\bar{k}\bar{r}'} d^3r'$$

$$T(\bar{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint T_0(\vec{r}') e^{-i\bar{k}\bar{r}'} e^{ik\bar{r}} e^{-\chi k^2 t} d^3r' d^3k =$$

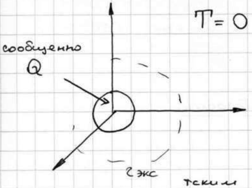
Возьмем $\int$ по k

$$= T(\bar{r}, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int T_0(\bar{r}') e^{-\frac{1}{4\chi t}(\bar{r}-\bar{r}')^2} d^3r'$$

удовл. и решению и гранигн. условиям

Возьмем и рассмотрим начальное условие, для которого этот интеграл легко берется

$T = 0$



область очень маленькая,

область стремим к 0

а Q фиксируем.

таким образом в $r=0$ $Q \to \infty$,

$r \neq 0$ $Q \to 0$. $\to$ δ-функция

$$T_0(\vec{r}) = const\, \delta(\bar{r})$$

$$T(\bar{r}, t) = \frac{Const}{8(\pi \chi t)^{3/2}} \int \delta(\bar{r})\, e^{-\frac{1}{4\chi t}(\bar{r} - \bar{r}')^2} d^3 r'$$

$$T(\bar{r}, t) = \frac{Const}{8(\pi \chi t)^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4\chi t}}$$

– дает физ. смысл рассасывания температуры.

Время выравнивания температуры.

$$\frac{L_0^2}{4\chi t_{\text{эк}}} \approx 1 \Rightarrow t_{\text{экс}} \approx \frac{L_0^2}{4\chi}.$$

$$\boxed{\chi = \frac{\text{æ}}{\rho c_p}}$$

Взяли $t_ф$ зафиксированное время.

$$\frac{r_{\text{экс}}^2}{4\chi t_ф} \approx 1 \; ; \quad r_{\text{экс}} \approx \sqrt{4\chi t_ф}$$

Малые отклонения. от состояния равновесия (ЗВУК)

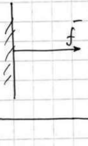
Линейная система уравнений

Малые колебания вязкой жидкости.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\bar{v} = 0$$

$$\rho\left\{\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v}\right\} = -\nabla p + \eta\Delta\bar{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\bar{v} = 0$$

$$\rho T\left\{\frac{\partial S}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)S\right\} = \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \varkappa\Delta T$$



$$\vec{v}\big|_f = 0 \qquad \varkappa_s\frac{\partial T_s}{\partial f} = \varkappa\frac{\partial T}{\partial f}\bigg|_f$$

$$T_s = T\big|_f$$

точка задается 5-ю константами

$\vec{v} \equiv 0$, $P = P_0 = Const$ $T = T_0 = Const$

положение устойчивого равновесия

$\vec{v} = 0 + \vec{v}'$, $P = P_0 + P'$, $|P'| << P_0$, $T = T_0 + T'$ $|T'| <<$

очень малое, т.е квадратами и произведен можно пренебречь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\operatorname{div}\bar{v} = 0 \\ \rho_0\dfrac{\partial\vec{v}^*}{\partial t} = -\nabla P' + \eta\Delta\bar{v} + \left(\zeta + \dfrac{\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\bar{v} \\ \rho_0 T_0\dfrac{\partial S'}{\partial t} = \varkappa\Delta T' \end{cases}$$

система незамкнута, должно быть ур-е состояния. $\rho = \rho(P, T)$ $S = S(P, T)$, нужно выразить

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P dT$$

$$\Rightarrow \rho' = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{T,0} P' + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{P,0} T'$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT$$

$$\Rightarrow S' = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,0} P' + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,0} T'$$

$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{T\partial S}{\partial T}\right)_P \frac{1}{T} = \frac{C_P}{T}$ – теплоемкость при пост давлении

$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_T^{-1} = \frac{1}{C_T^2}$ – изотермическая скорость звука $C_T^2 = \frac{C_V}{C_P}\underset{\text{изоэнтропическ скорость звука}}{C_S^2} \approx C_0^2$

$$\Rightarrow \underline{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_T = \frac{1}{c_0^2}\,\frac{c_p}{c_v}}$$ ← перешли к константам которые можно померить.

$V_м = \dfrac{1}{\rho}$ объем единицы массы жидкости.

конст., тепловое расширение.

$$\alpha = \left(\frac{\partial V_м}{\partial T}\right)_p \backslash\backslash \left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$$

$$\Rightarrow \underline{\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = -\alpha\rho^2}$$

+ оказывается, что $\underline{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_T = -\alpha}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho' = \dfrac{1}{c_T^2}\,P' - \alpha\rho_0^2\,T' \\ S' = -\alpha P' + \dfrac{c_p}{T_0}\,T' \end{cases}$$

Сделаем систему замкнутой

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_T^2}\dfrac{\partial P'}{\partial t} - \alpha\rho_0^2\dfrac{\partial T'}{\partial t} + \rho_0\,\mathrm{div}\,\bar v = 0 \\ \rho_0\dfrac{\partial \bar v}{\partial t} = -\nabla P' + \eta\Delta\vec v + \left(\zeta + \dfrac{\eta}{3}\right)\nabla\,\mathrm{div}\,\vec v \\ \rho_0 T_0\left(-\alpha\dfrac{\partial P'}{\partial t} + \dfrac{c_p}{T_0}\dfrac{\partial T'}{\partial t}\right) = \varkappa\Delta T' \end{cases}$$ $\vec v,\ P',\ T'$

$\bar v,\ P',\ T' \sim e^{i(\bar k\bar r - \omega t)}$ гармоника фурье.

повернем ось x по k.

$\bar k(k, 0, 0)$

$\vec v' = \bar v_k e^{i(kx-\omega t)}$ $\quad P' = P_k\,e^{i(kx-\omega t)}$, $T' = T_k e^{i(kx-\omega t)}$

Найти $k = k(\omega)$, может, оказаться, что $k_1 = k_1(\omega)$, $k_2 = k_2(\omega)$

oy) $\rho_0\dfrac{\partial v_y}{\partial t} = -\cancelto{0}{\dfrac{\partial P'}{\partial y}} + \eta\Delta v_y + (\zeta + \eta/_3)\cancelto{0}{\dfrac{\partial}{\partial y}}\,\mathrm{div}\,\vec v$

$$\rho_0\frac{\partial v_y}{\partial t} = \eta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right)v_y$$

$$v_y = v_{ky} e^{i(kx-\omega t)}$$ подстовим

$$\Rightarrow \rho_0(-\cancel{i}\omega)\cancel{v_{ky}} = \eta \cancel{v_{ky}} i^{\cancel{2}} k^2$$

$$\Rightarrow (\rho_0\omega + i\eta k^2)\, \underset{\Rightarrow \text{ комб нет}}{v_{ky}} = 0$$

$$\Rightarrow v_{ky} \neq 0$$

$$\Rightarrow \rho_0\omega + \eta i k^2 = 0$$

одно из возм решений

$k(\omega)$

$$\rho_0\omega = -\eta i k_\eta^2 \rightarrow \text{связанное с вязкостью.}$$

$$k_\eta^2 = \frac{i\rho_0\omega}{\eta} \Rightarrow k_\eta = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\rho_0\omega}{2\eta}} \equiv \tilde{k}_\eta \qquad \tilde{k}_\eta \equiv \sqrt{\frac{\rho_0\omega}{2\eta}}$$

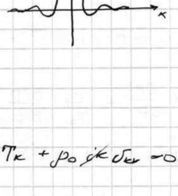
$$v_y = v_{ky}^{(1)} e^{-\tilde{k}_\eta x} e^{i(\tilde{k}_\eta x - \omega t)} + v_{ky}^{(2)} e^{\tilde{k}_\eta x} e^{-i(\tilde{k}_\eta x + \omega t)}$$

волна бегущ по оси x против

ассимптот. затухают на длине волны

листик вверх низ

поперечные колебани



$$\lambda_\eta = \frac{1}{\tilde{k}_\eta} = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho_0\omega}}$$

1) $\frac{1}{c_T^2}(-\cancel{i}\omega)P_k - \alpha\rho_0^2(-\cancel{i}\omega)T_k + \rho_0\cancel{i}k v_{kx} = 0$

2x) $\rho_0(-\cancel{i}\omega)v_{kx} = -\cancel{i}kP_x + \eta i^{\cancel{2}}k^2 v_{kx} + (\varsigma + \frac{\eta}{3}) i^{\cancel{2}} k^2 v_{kx}.$

3) $-\rho_0 T_0 \alpha(-i\omega)P_k + \rho_0 T_0 \frac{c_p}{T_0}(-i\omega)T_k = \varkappa i^2 k^2 T_k$

1) $a_{11} v_{kx} + a_{12} P_k + a_{13} T_k = 0$

$a_{ik}(k, \omega, \overset{\text{равновес}}{0})$

2x) $a_{21} v_{kx} + a_{22} P_k + a_{23} T_k = 0$ Совместно, если

3) $a_{31} v_{kx} + a_{32} P_k + a_{33} T_k = 0$ $|a_{ik}(k,\omega,0)| = 0$

$$k_1 = \frac{\omega}{c_0} + i\,\frac{\omega^2}{2\rho_0 c_0^3}\left\{\frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right)\right\}$$

продольная волна, звук.

$$k_2 = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$$

тепловая волна – т.к. сжимается T ↗, расшир T ↘

$k_1 = k_1(\omega)$

В вязкой жидкости: 3 волны

1) вязкая волна поперечная

2) обычная затухающая (звук) продольная

3) тепловая волна – ~~поперечная~~ продольная

Магнитная гидродинамика.

14.04.2010

- жидкий металл;
- плазма;
- космические газы.

полн. набор $\vec v, \rho, S$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec v = 0 \\ \rho\left\{\dfrac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v\nabla)\vec v\right\} = -\nabla p + \eta\Delta\vec v + (\zeta + \eta/3)\,\cancel{\mathrm{rot}}\operatorname{div}\vec v + \overbrace{\dfrac{1}{c}[\vec j\,\vec H]}^{\text{сила Лоренца.}} \\ \rho T\left\{\dfrac{\partial s}{\partial t} + (\vec v\nabla)s\right\} = \sigma_{ik}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} + \varkappa\Delta T + \underbrace{\dfrac{j}{\sigma}}_{\text{Джоулево тепло}} \end{cases}$$

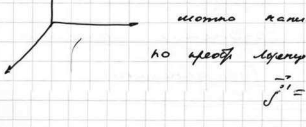
Система ур-й Максвелла:

$\vec H, \vec E, \rho_e$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec H = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec D}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec j \\ \operatorname{rot}\vec E = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec B}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\vec{\mathcal{D}} = 4\pi\rho_e \\ \operatorname{div}\vec B = 0 \leftarrow \text{дополн. ур-е нет магн. зарядов} \end{cases}$$

1) $\vec D = \varepsilon\vec E$ 2) $\vec B = \mu\vec H$; в плазме $\mu = 1 \Rightarrow \vec B = \vec H$

состояни



$\Rightarrow$ в K' проводник покоится. значит

можно написать $\vec j\,' = \sigma\vec E\,'$.

но преобр. Лоренц $\vec E\,' = \vec E + \frac{1}{c}[\vec v\vec H]$

ск. света

$\vec j\,' = \vec j + \cancel{O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}$ малое нелинейное от $\vec v$

$\Rightarrow$ 3) б $\vec{j} = \left[\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}]\right]\sigma$

состояни

E также содержит 1/c ↔ из с. ур. М, поэтому нельзя нулевое прибл. ↔ они одного порядка

Сделаем упрощения. это ток смещения в плазме он мал по сравнению с $\vec{j}$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

1) Электрическое поле выразится через магнитное:

$\vec{1_м})\ \text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \longrightarrow \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\text{rot}\,\vec{H} \xrightarrow{в} 3с): \frac{c}{4\pi}\text{rot}\,\vec{H} = \sigma(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}]$

$\vec{2_м})\ \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \Rightarrow \vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma}\text{rot}\,\vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}]$

$3_м)\ \text{div}\,\vec{B} = 0$

$4_м)\ \text{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho_e \longrightarrow \rho_e = \frac{\varepsilon}{4\pi}\text{div}\,\vec{E} = \rho_e = \frac{-\varepsilon}{4\pi c}\text{div}[\vec{v}\vec{H}]$

$$\boxed{\text{div}\,\text{rot} = 0}\,!!$$

Нужно получить замкн. сист. ур-й содерж. магн. поле

$3_м)\ \text{div}\,\vec{H} = 0$

$2_м):\ \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c\left[\left(\frac{c}{4\pi\sigma}\right)\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{H} - \frac{1}{c}\text{rot}[\vec{v}\vec{H}]\right]$$

$$\boxed{\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{A} = \text{grad}\,\text{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}}$$

$\text{div}\,\vec{H} = 0 \Rightarrow \text{rot}\,\text{rot}\,\vec{H} = -\Delta\vec{H}$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = +\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\vec{H} + \cancel{\frac{1}{c}}\,\text{rot}[\vec{v}\vec{H}]$$

Напишем замкн. сист. ур-й в которую входит только $\vec{H}$.

$$\vec{v}, \rho, S, \vec{H}\quad \begin{cases} \rho\left\{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right\} = -\nabla p + \eta\Delta v + (\zeta+\eta)\nabla\,\text{div}\,\vec{v} + \frac{1}{4\pi}[\text{rot}\,\vec{H}\times\vec{H}] \\ \rho T\left\{\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)S\right\} = \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \varkappa\Delta T + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\text{rot}\,\vec{H})^2 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\rho\vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\vec{H} + \text{rot}[\vec{v}\vec{H}] \\ \text{div}\,\vec{H} = 0 \end{cases}$$

Уравнения Магнитной Гидродинамики.

$P = P(\rho, S, \vec{H})$

Магнитодинамические следствия.

1) Задача о просачивании магнитного поля

Жидкость покоится

$\vec{v} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \underbrace{\frac{c^2}{4\pi\sigma}}_{\chi_H} \Delta \vec{H}$ ← похоже на ур-е теплопроводности.

$t = 0 \qquad \vec{H}_0(\vec{r}, t=0)$

$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T.$

$t > 0 \qquad \vec{H}(\vec{r}, t) - ?$

а мы его решали, поэтому можно просто переписать ответы, но мы так делать не будем

$t_{конечн.}$

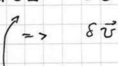
по размерности

$$\frac{1}{t_{кон}} \approx \frac{\chi_н}{L^2} \longrightarrow t_{кон} \approx \frac{L^2}{\chi_н} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} L^2$$

просачивание магн. поля

2) Теорема о вмороженных магнитных полях

Лагранжевый отрезок



помеченной частицы

Интересует как он деформируется (за счет разной скорости течения головы и хвоста)

$d\delta\vec{L} = \delta\vec{v}\, dt \qquad \vec{v}(\vec{r}, t), \quad \delta\vec{L}(\delta L_x, \delta L_y, \delta L_z)$

$$\Rightarrow \quad \delta\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\delta L_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\delta L_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\delta L_z.$$

$$\delta\vec{v} = \left(\delta L_x \frac{\partial}{\partial x} + \delta L_y \frac{\partial}{\partial y} + \delta L_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v} = (\delta\vec{L}\nabla)\vec{v}$$

$$\delta\vec{v} = (\delta\vec{L}\nabla)\vec{v}$$

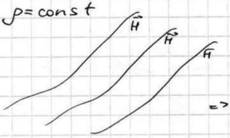
$$\frac{d\delta\vec{L}}{dt} = (\delta\vec{L}\nabla)\vec{v}$$

$$\sigma \to \infty \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\vec{v}\vec{H}] \\ \mathrm{div}\bar{H} = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0$ => если покрутим, на что нет времени

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\right)}_{\frac{d}{dt}}\frac{\vec{H}}{\rho} = \left(\frac{\vec{H}}{\rho}\nabla\right)\vec{v}$$

$\rho = \text{const}$



В $t=0$ магн сил. линии и жидк сил. линии совп. => они будут двигаться тождественно одно => <u>магн. поле</u> <u>вморожено</u> в вещ-во: двигая магн. линии двигаем жидкость и наоборот.

При движ $\overset{\text{провод.}}{\text{вещ-ва}}$ в магн. поле, то возникает ток индукции, поле которого противодействует изменению. А.т.к мы устремим $\sigma \to \infty$, то противодействие бесконечно.

Магнито - гидродинамические волны в плазме.

$\eta \to 0$; $\zeta \to 0$; $\varkappa \to 0$ диссипативные процессы

$$R = \frac{1}{\sigma} \to 0 \Rightarrow \sigma \to \infty$$

уйдет т.к квадратичное

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v} = 0 \\ \rho\left\{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right\} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\vec{H}\times\vec{H}] \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)s = 0 \Rightarrow S = S_0 \text{ точное утверждение.} \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\vec{v}\vec{H}] \\ \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \end{cases}$$

Состояние (точка) равновесия (устойчивое)

$\vec{v} = 0$; $\rho = \rho_0 = const$; $S = S_0 = Const$; $\vec{H} = \vec{H}_0 = Const.$

Делаем малое отклонение:

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$; $\rho = \rho_0 + \rho'$; $S = S_0$; $\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}'$

$$|\rho'| \ll |\rho_0|; \quad |\vec{H}'| \ll |H_0|$$

т.к вектор, то может быть только в квадрате.

$$P = P(\rho, S, \vec{H}) \approx P(\rho, S)$$

$P' = c_s^2 \rho'$., где $c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_{S,0}$ скорость звука

берется ρ_0

1) $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ полная система ур-ий

2) $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c_s^2 \nabla \rho' + \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\vec{H}'\vec{H}_0]$

3) $\frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} = \mathrm{rot}[\vec{v}\vec{H}_0]$

4) $\mathrm{div}\,\vec{H}' = 0$ берем одну гармонику Фурье...

$\vec{v} = \vec{v}_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$; $\rho' = \rho_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$; $\vec{H}' = \vec{H}_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

1) $-\cancel{i}\omega\rho' + \rho_0(\cancel{i}\vec{k}\vec{v}') = 0$

$\vec{2})$ $\rho_0(-\cancel{i}\omega)\vec{v} = -c_s^2\cancel{i}k\rho' + \frac{1}{4\pi}[[\cancel{i}\vec{k}\vec{H}']\vec{H}_0]$

$\vec{3})$ $-\cancel{i}\omega\vec{H}' = [\cancel{i}\vec{k}[\vec{v}\vec{H}_0]]$

4) $\cancel{i}\vec{k}\vec{H}' = 0$ →

$\vec{H}'$ и $\vec{k}$ всегда взаимно перпендикулярны

=> поперечны!

1) $\omega\rho' - \rho_0\vec{k}\vec{v}' = 0$

$\vec{2})$ $\rho_0\omega\vec{v} = c_s^2\vec{k}\rho' + \frac{1}{4\pi}[\underset{a}{\vec{H}_0}[\underset{в}{\vec{k}}\underset{c}{\vec{H}}]]$ $=$ в(a c) $-$ c(a в)

$\vec{3})$ $\omega\vec{H}' = -[\vec{k}[\vec{v}\vec{H}_0]]$

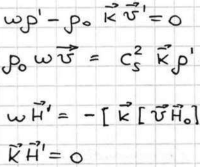
4) $\vec{k}\vec{H}' = 0$

1) $\omega\rho' - \rho_0\vec{k}\vec{v}' = 0$

$\vec{2})$ $\rho_0\omega\vec{v} = c_s^2\vec{k}\rho' + \frac{1}{4\pi}\vec{k}(\vec{H}_0\vec{H}') - \frac{1}{4\pi}\vec{H}'(\vec{k}\vec{H}_0)$

$\vec{3})$ $\omega\vec{H}' = -\vec{v}(\vec{k}\vec{H}_0) + \vec{H}_0(\vec{k}\vec{v})$

4) $\vec{k}\vec{H}' = 0$



Выбираем систему координат:

$\vec{k}(k, 0, 0)$

$\vec{H}_0(H_{0x}, H_{0y}, 0)$

1) $\omega\rho' - \rho_0 k v_x = 0$

$2_x)$ $\rho_0\omega v_x = c_s^2 k\rho' + \frac{1}{4\pi}k(\cancel{H_{0x}H'_x + H_{0y}H'_y}) - \cancel{\frac{1}{4\pi}H'_x k H_{0x}}$

$2_y)$ $\rho_0\omega v_y = -\frac{1}{4\pi}H'_y H_{0x} k$

$2z)$ $\rho_0\omega v_z = -\frac{1}{4\pi}H'_z k H_{0x}$

$3_x)$ $\omega H'_x = -\cancel{v_x k H_{0x}} + \cancel{H_{0x} k v_x} \rightarrow H'_x = 0$

совпадает с $4^м$

$3_y)$ $\omega H'_y = -v_y k H_{0x} + H_{0y} k v_x$

$3_z)\ \omega H_z' = -v_z k H_{0x} + \cancel{H_{0z} k v_x} \rightarrow 0$

$4)\ k H_x' = 0 \Rightarrow H_x' = 0$

Если положим $\rho' = 0 \Rightarrow$ несжимаемая жидкость,

тогда останется только 2_z и 3_z описывающ

Альфреновск. волну.; v_z, H_z' только колеблются.

$$2_z)\ \rho_0 \omega v_z + \frac{1}{4\pi} H_z' k H_{0x} = 0$$

$$3_z)\ k H_{0x} v_z + \omega H_z' = 0$$

совместно, только, если определитель = 0.

$$\begin{vmatrix} \rho_0 \omega & \frac{1}{4\pi} k H_{0x} \\ k H_{0x} & \omega \end{vmatrix} = \rho_0 \omega^2 - \frac{1}{4\pi} k^2 H_{0x}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \pm k H_{0x} \sqrt{\frac{1}{4\pi\rho_0}}$$ Закон дисперсии.

Возьмем с + (волна бежит в полож напр. оси x)

$$\omega = \frac{H_{0x} k}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$$

$\vec{U}_A = \vec{v}_{AF} = \frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{k}$ $\qquad \vec{U}_A = \frac{H_{0x}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\frac{\vec{k}}{k}$

Альфрен.

$\vec{v}_{agr} \equiv \vec{v}_A = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} = \frac{\vec{H}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ $\qquad \omega = \frac{\vec{H}_0 \vec{k}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$

перен. сигнал.

групповая напр по H_0

фазовая напр по k

в разные стороны и разные по величин

$$1)\ \rho_0 \frac{\cancel{H_{0x} k}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} v_z + \frac{1}{4\pi} \cancel{k H_{0x}} H_z' = 0$$

$$H_z' = -\frac{4\pi\rho_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} v_z \Rightarrow H_z' = -\sqrt{4\pi\rho_0}\, v_z.$$

$H_{0x} = U_A \sqrt{4\pi\rho_0}$ $\qquad v_A^2 = \frac{1}{4\pi\rho_0}(H_{0x}^2 + H_{0y}^2)$

$$H_{0y}^2 = 4\pi\rho_0 v_A^2 - \frac{H_{0x}^2}{\cancel{4\pi\rho_0}} = 4\pi\rho_0 v_A^2 - U_A^2 4\pi\rho_0$$

$$\Rightarrow H_{0y} = \sqrt{4\pi\rho_0 (v_A^2 - U_A^2)}$$

осталось: v_x, v_y, ρ', H_y' и 1) 2x) 2y) 3y)

$$1)\quad a_{1} v_x + a_{12} v_y + a_{13}\rho' + a_{14} H_y' = 0$$

$a_{ik}(\omega, k, u_A, v_A, 0)$ $\quad a_{11} = -\rho_0 k;\quad a_{13} = \omega.$

$$2x)\quad a_{21} v_x + a_{22} v_y + a_{23}\rho' + a_{24} H_y' = 0$$

$$2y)\quad a_{31} v_x + a_{32} v_y + a_{33}\rho' + a_{34} H_y' = 0$$

$$3y)\quad a_{41} v_x + a_{42} v_y + a_{43}\rho' + a_{44} H_y' = 0$$

$$|a_{ik}(\omega, k, u_A, v_A, 0)| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) = 0 \quad \text{, где}$$

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{u_1^2};\quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{u_2^2}$$

$$u_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left\{ c_s^2 + v_A^2 \pm \sqrt{(c^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 u_A^2} \right\}$$

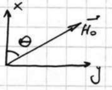
3 типа волн в пров. плазме

1) Волна Альфвена, только z комп скорости жидк и z комп магн. поле колеблятся (поперечная).

2) 3) магнитно-динамич. волн

$u_1 \Rightarrow +$ ускоренная волна

$u_2 \Rightarrow -$ замедленн волна



$\theta = 0$:

$u_1 = \max$ (c_s или v_A)

$u_2 = \min$ (c_s или v_A)

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $u_A = 0$ $\quad u_1^2 = c_s^2 + v_A^2$

$u_2^2 = 0.$

$\Rightarrow$ $\quad\max$ (c_s или v_A) $\le u_1 \le \sqrt{c_s^2 + v_A^2}$

$0 \le u_2 \le \min$ (c_s или v_A)

Многокомпонентные жидкости. 21. 04. 2010.

Для простоты рассматриваем 2^x компонентную жидкость

Возьмем конкретные жидкости: вода и спирт.

В каждой точке пространства: $\underset{\text{спирт}}{\rho_1(\vec{r},t)}$; $\underset{\text{вода}}{\rho_2(\vec{r},t)}$, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$,

P ⇒ 9 переменных.

Остальные: $T(\rho_1, \rho_2, P)$

Явление диффузии.

Найдем импульс единицы объема жидкости.

$$\vec{j} = \rho_1 \vec{v_1} + \rho_2 \vec{v_2} ; \qquad \underset{\text{полная плотность}}{\rho = \rho_1 + \rho_2}$$

Вектор скорости $\vec{v}$. $\vec{j} = \rho \vec{v}$, где $\rho\vec{v} = \rho_1 \vec{v_1} + \rho_2 \vec{v_2}$

Пусть жидкость покоится ⇒ $\vec{j} = 0$

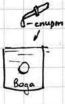
Тогда $\rho_1 \vec{v_1}^{(0)} + \rho_2 \vec{v_2}^{(0)} = 0$

1) $\vec{v_1}^{(0)} = 0$ и $\vec{v_2}^{(0)} = 0$

2) $\vec{v_1}^{(0)} \neq 0$, тогда $\rho_2 \vec{v_2}^{(0)} = -\rho_1 \vec{v_1}^{(0)}$

Жидкость покоится, а компоненты движутся с противоположной скоростью.

Поставим эксперимент.

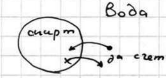


Эксперимент говорит да.

def Диффузия – изменение плотности какой-то компоненты со временем в целом неподвижной жидкости.

Вводим вектор диффузии $\vec{i_1} \equiv \rho_1 \vec{v_1}^{(0)} \equiv \vec{i}$ описывает изменения плотности первой комп.

$$\vec{i_2} = -\vec{i_1}$$



Мех. сплошных сред не объяснять причину этого явления.

Чисто диссипативный процесс.

Напишем полный набор переменных и соотв. уравнения.

$$\vec{v}_1 = \overset{\text{конвективное движение}}{\vec{v}} + \overset{\text{– диффузионная скорость}}{\vec{v}_1^{(0)}}$$

скорость движ. раствора как целого

$$\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{v}_2^{(0)}$$

проверим $\rho_1 \vec{v}_1 + \rho_2 \vec{v}_2 = \rho_1 \vec{v} + \underbrace{\underline{\rho_1 \vec{v}_1^{(0)}} + \rho_2 \vec{v} + \underline{\rho_2 \vec{v}_2^{(0)}}}_{=0} - (\rho_1 + \rho_2)\vec{v} = \rho\vec{v}.$

$\rho_1, \rho_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2, P.$

но оказывается более удобным другой набор

$\rightarrow \rho = \rho_1 + \rho_2,\ \underset{\text{концентрация, } 0 \le c \le 1}{c = \frac{\rho_1}{\rho}},\ \vec{v},\ \vec{i},\ P.$ полная система ф-й.

1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0$ остается таким же

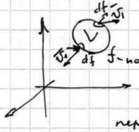
2) $\rho\left\{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right\} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} + (\zeta + \eta/3)\nabla\operatorname{div}\vec{v} + \vec{F}_v$

3) $\rho T\left\{\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)S\right\} = \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \cancel{+ \varkappa\Delta T} - \underset{\text{теплопроводность}}{\operatorname{div}\vec{q}} + \mu \operatorname{div}\vec{i}$

коэф. пропорциональн
хим. потенциал смеси

но вып-ся еще з-н сохранения компонент в отдельности:

Запишем з-н сохранения спирта.



$\int\limits_V \rho_1(\vec{r}, t) \cdot d^3r = M$ полная масса спирта

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho_1(\vec{r}, t)\,d^3r = -\oint \rho_1 \vec{v}_1\, d\vec{f}$$

перейдем к диффер. форме.

$$\int\limits_V \frac{\partial \rho_1}{\partial t}\,d^3r \underset{\text{т. Гаусса}}{=} -\int\limits_V \operatorname{div}\rho_1\vec{v}_1\,d^3r$$

перепишем в новых терминах ↓

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_1\vec{v}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_1 (\vec{v} + \vec{v}_1^{(0)}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \operatorname{div} \rho c \vec{v} + \operatorname{div} \underbrace{\rho_1 \vec{v}_1^{(0)}}_{\equiv \vec{i}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \operatorname{div} \rho c \vec{v} = - \operatorname{div} \vec{i}$$

$$\underbrace{c \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial c}{\partial t} + c \operatorname{div} \rho \vec{v}}_{\equiv 0} + \rho \vec{v} \nabla c = - \operatorname{div} \vec{i}$$

$$\rho \left\{ \underbrace{\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) c}_{\underbrace{\text{изм. конц. в двит един. массе.}}_{\text{объеме}}} \right\} = - \operatorname{div} \vec{i}$$

=> уже 6 уравнений.

Допишем ур-я состояния $S = S(\rho, c, P)$, $T = (\rho, c, P)$

$$\boxed{q = - \varkappa \nabla T + \gamma_{\vec{i}} \vec{i}}$$

– коэф. теплопровод. обусловл. диффузией.

$\eta, \varsigma, \varkappa, \gamma_i, \mu$ – должны быть заданны.

средние

Нужно задать вектор диффузии $\vec{i}$.

C, P, T

Эксперименты: 1) $\overset{t=0}{C = c(\vec{r})}$, $P = const$, $T = Const.$

$\frac{l}{L} \ll 1$ видим, что $\vec{i} = \alpha \nabla C$ сооружаем вектор из скаляра.

2) $t = 0$

$c = Const.$ ~~$P = Const$~~, $P = P(\vec{r})$, $T = const.$

да возникает.; → бародиффузия –

– возникновение. давлен. диффузии к от разного давл.

$$\vec{i} = \beta \nabla \vec{P}$$

3) $\overset{t=0}{C} = Const$; $P = Const$, $T = T(\vec{r})$

=> да, возникает $\vec{i}$. => термодиффузия

$$\vec{i} = \gamma \nabla T.$$

4) $\overset{t=0}{C} = C(\vec{r})$, $P = P(\vec{r})$, $T = T(\vec{r})$, тогда.

перекрестных быть не может, т.к $l/L \ll 1$

$$\vec{i} = \underbrace{\alpha \nabla c}_{\text{за счёт град. конц.}} + \underbrace{\beta \nabla p}_{\text{бародиффуз.}} + \underbrace{\gamma \nabla T}_{\text{термодиффузия}}$$

Неудобно, берут 3 другие константы:

Коэф. зависят от термодин. величин

$$\alpha, \beta, \gamma \longrightarrow \mathcal{D}, K_T, K_p.$$

Вектор диффузии: $\boxed{\vec{i} = -\rho\mathcal{D}\left(\nabla c + \frac{K_p}{p} \nabla p + \frac{K_T}{T} \nabla T\right)}$ 7.8.9^{е} ур-я.

$$\alpha = -\mathcal{D} \qquad \beta = -\mathcal{D}\frac{K_p}{p} \qquad \gamma = -\mathcal{D}\frac{K_T}{T}$$

$\mathcal{D} > 0$ $\qquad$ K_p, K_T - безразмерные.

$\mathcal{D}$ - коэффициент диффузии.

K_T - термодиффузионное отношение

коэффициент термодиффузии.

K_p - бародиффузионное отношение

коэффициент бародиффузии.

$c \to 0$; $\vec{i} \to 0$.

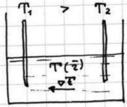
$\nabla c \to 0 \to \mathcal{D} \to \mathcal{D}_0 = \text{Const}$

$K_p, K_T \to 0$

$\vec{i} = -\rho\mathcal{D}\left(\nabla c + \frac{K_p}{p} \nabla p + \frac{K_T}{T} \nabla T\right)$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $c = \frac{\rho_1}{\rho}$, $\vec{v}$, $\vec{i}$, p

ρ, $\vec{v}$, $\vec{i}$, c, p - функции.

Термодиффузионное разделение смеси.



$t=0$ $\qquad P=const$ в $\forall t$.

$C = Const.$

Включили пластин.

$T=T(\vec r,t)$; $C=C(\vec r,t)$.

В стац. сост. $\vec i=0$. (на больших ~~расст.~~ временах)

=> перенос за счет разности концентрации

компенсируется переносом за счет термодиффузии

$$0 = -D\left(\nabla c + \frac{k_T}{T}\nabla T\right)$$

$$\nabla c = -\frac{k_T}{T}\nabla T$$

Таким способом разделяется смесь, концентрированная компонента будет собираться у одной пластины, где ее можно слить.

~~2)~~ Уравнение диффузии и его решение.

$\vec v=0$

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec i \qquad P = Const;\ T = Const$$

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}\rho D\nabla c$$

$c \ll 1 \Rightarrow D \approx D_0 = Const.$ $\qquad \rho=\rho_1+\rho_2 = \rho c+\rho_2.$

когда подставим получится квадратичный и выкинем

$$\cancel{\rho}\frac{\partial c}{\partial t} = \cancel{\rho} D_0\Delta c$$

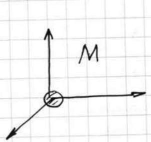
$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D_0\Delta c}$$

Напишем общее решение

$t=0$; $c_0(\vec r)$

Найти: $c(\vec r,t)$, $t>0$

$$c(\vec r,t) = \frac{1}{8(\pi D_0 t)^{3/2}}\int c_0(\vec r)\,e^{-\frac{(\vec r-\vec r\,')^2}{4D_0t}}\,d^3r'$$



$$\int\rho_1\,d^3r = \int\rho c(\vec r,t)\,d^3r = M.$$

$$\int c(\vec r,t)\,d^3r = \frac{M}{\rho}$$ нормировка концентрации

$\rho=\rho_2$ растворитель.

$$\boxed{C_0(\vec{r}) = \delta(\vec{r})\frac{M}{\rho}}$$

Сразу берем интеграл.

$$C(\vec{r},t) = \frac{M}{\rho\, 8(\pi D_0 t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4D_0 t}}$$

$$\frac{L^2}{4D_0 t_{\text{раз}}} \sim 1$$ когда смешается. и можно разливать.

$$t_{\text{разл}} \approx \frac{L^2}{4D_0}$$

На какое расстояние уйдет капелька через какое-то вр. $\mathcal{L}_t$

$$\frac{\mathcal{L}_t^2}{4D_0 t_{\text{изм}}} \approx 1 \Rightarrow \mathcal{L}_t^2 \approx 4D_0 t_{\text{изм}}$$

Диффузия взвешенных в жидкости частиц.

В объеме растворенная масса M.

Плотность вероятности $W(\vec{r},t) = \frac{\rho_1(\vec{r},t)}{M}$

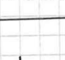
нормировка $\int W(\vec{r},t)\,d^3r = \frac{1}{M}\int \rho_1(\vec{r},t)\,d^3r = 1.$

$$W(\vec{r},t) = \frac{\rho \cdot c(\vec{r},t)}{M}$$ малые концентрации $c \ll 1$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_0 \Delta c \quad \Big| \times \frac{\rho}{M}$$

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = D_0 \Delta W}$$ это ур-е описывает Броуновское движение одной частицы

$t=0$



$$W_0(\vec{r}, t=0) = \delta(\vec{r})$$

$$W(\vec{r},t) = \frac{1}{8(\pi D_0 t)^{3/2}} e^{\frac{-r^2}{4D_0 t}}$$

$$\overline{\vec{r}} = \int \vec{r}\, W(\vec{r},t)\,d^3r = 0$$ все направления равновероятны

$$\overline{r^2} = \int r^2 w(r,t)\, d^3r = 6 D_0 t$$

не сильно отличается от $\leftarrow L^2 t$.

Расст. на которое уйдет частица броуновская

Подвижность частицы в вещ-ве.

Как найти коэфф. диффузии D_0 -? 28.04.2010

Нужно выразить через подвижность, которую легко эксп: померять или выразить (дать) теоретически -> соотн. Эйнштейна.

Имеем взвешенную частицу в ~~[illegible]~~ растворителе.

Какая-то внешняя сила: $\vec{f}$

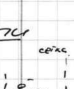
При увеличении (т. к ускорение, 2й закон Ньютона) скорости будет увеличиваться сопротивление и в какой-то момент времени они уравняются -> стационарный режим

$\vec{f} + \vec{f}_{сопр} = 0 \Rightarrow$ Скорость будет постоянна $\vec{v}_f$

Эта $\vec{v}_f = \vec{v}_f(\vec{f})$ Если невелика сила, то можно разложить в ряд:

$\vec{v}_f = b\vec{f}$; b — коэфф. подвижности

Меряется $t_{пролёта}$ и длину L $\Rightarrow v_f = \frac{L}{t_{прол}} \Rightarrow$



$v_f = bf \Rightarrow b = \frac{L}{t_{про.} f}$ напр. для зар. частиц $q/\!\!E$

Но легко и посчитать

$\vec{f} = -\vec{f}_{сопр}$, поэтому ~~$b = [illegible]_{сопр}$~~ $b = \frac{v_f}{f_{сопр}}$

если маленький шарик с радиусом a, то по формуле Стокса. $f_{сопр} = 6\pi\eta a v_f$

, тогда $\boxed{b = \frac{1}{6\pi\eta a}}$

Пусть $N \overset{1}{\uparrow}$ взвешенных частиц, но $c \ll 1$ → взаим. с друг с друго- пренебречь

Под действием f возникнет поток частиц равный

$$\vec{i}_f = \rho_1 \vec{v}_f = \rho c \vec{v}_f$$

$$c = \frac{\rho_1}{\rho} \nearrow$$

под действием градиента: $\vec{i} = -\rho \mathcal{D}_0 \nabla c$

Имеем полный поток:

$$\vec{i}_\Sigma = \vec{i}_f + \vec{i} = \rho c \vec{v}_f - \rho \mathcal{D}_0 \nabla c$$

$$\vec{i}_\Sigma = \rho c B \vec{f} - \rho \mathcal{D}_0 \nabla c.$$

Стационарная ситуация: нет потока.

$$\vec{i}_\Sigma = 0$$

$$\rho c_{ст} B \vec{f} = \rho \mathcal{D}_0 \nabla c_{ст}$$

Если внешн. сила потенциальная, то $\vec{f} = -\nabla \varphi$,

тогда выполняется распределение Больцмана

$$c_{ст} = \text{Const}\, e^{-\frac{\varphi}{\underbrace{k_B T}_{}}} \text{ пост. больцман}$$

$$\nabla c_{ст} = c_{ст} \frac{-\varphi}{k_B T} = c_{ст} \frac{\vec{f}}{k_B T}$$

$$\cancel{\rho} \cancel{c_{ст}} B \cancel{\vec{f}} - \cancel{\rho} \mathcal{D}_0 \cancel{c_{ст}} \frac{\cancel{\vec{f}}}{k_B T} = 0$$

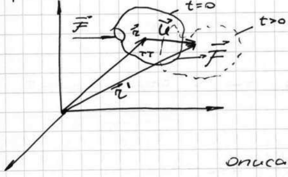
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_0 = k_B T B}$$

Соотношение Эйнштейна.

Твердое тело.

Теория упругости.

Строится на трех понятиях!!!...



Сила прилож. к тв. телу задана.

Отклик может быть полностью описан вектором смещения.

Посмотрим в $t=0$ на это тело.

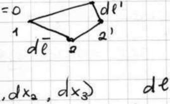
Под действ вн. силы тело будет как деформироваться так и смещаться.

Хочу найти смещение каждой точки $\vec r$ ТТ в t. (естесственно относит t_0). Нам нужно пометить все точки в $t=0$. В ТТ используется метод описания Лагранта!

Ⓘ $\boxed{\text{Вектор смещения} \quad \vec u = \vec r\,'(t) - \vec r(t=0); \quad \vec u(\vec r, t)}$

Если $\vec u(\vec r, t)$ задана, то отклик тоже задан.
Недостатки: 1. деформацию + смещение 2. размерная (м)

Вводится тензор деформации.



$d\vec l \neq d\vec l'$

Если нет деформ. $d\bar l = d\bar l'$

$d\vec l(dx_1, dx_2, dx_3)$ $\quad dl^2 = \sum_i dx_i^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i\, dx_i = dx_i^2$

$d\vec l'(dx_1', dx_2', dx_3')$ $\quad dl'^2 = dx_i'^2$

$$u_i = x_i' - x_i \qquad du_i = dx_i' - dx_i$$

$$dx_i' = dx_i + du_i$$

Получим $dl'^2 = (dx_i + du_i)^2 = dx_i^2 + 2dx_i\, du_i + du_i^2 =$

$u_i(\vec r, t), \xrightarrow{\cancel{dl}} du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$

$\dot{x}$

$$dl'^2 = dl^2 + 2dx_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l$$

Причем:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k$, можем переобозначить =>

$$\Rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_k dx_i$$

Напишем одно слагаемое так, а второе поменяв.

Далее:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l \underset{i \rightleftarrows l}{=} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_k dx_i$$

$$\Rightarrow \underset{\text{после}}{dl'^2} = dx_i^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_k dx_i + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_k dx_i =$$

$$= \underset{\text{до}}{dl^2} + dx_i dx_k \overbrace{\underbrace{\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right\}}_{\text{описывает величину деформ}}}^{\equiv 2u_{ik}}$$

Вся деформация ТТ задана этим тензором второго ран

II Тензор деформации:

i-ая комп. в. смещ в t фиксир

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)$$

симм. тензор — $u_{ik} = u_{ki}$

описывает только деформацию, безразмерна => можно описывать ма деформации

Отклик описывается либо вектором смещения, либо тензором деформации, они эквивалентны и используются где какой удобно

Обсудим тензор деформации. Можно привести к диаг. виду в конкр. точке.

$$u_{ik} = \begin{pmatrix} u^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & u^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & u^{(3)} \end{pmatrix}$$

тогда получим, что

$$dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 +$$

$$+ 2u^{(1)} dx_1^2 + 2u^{(2)} dx_2^2 + 2u^{(3)} dx_3^2$$

$$\Rightarrow dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 = dx_1^2 (1 + 2u^{(1)}) + dx_2^2 (1 + 2u^{(2)}) + dx_3^2 (1 + 2u^{(3)})$$

деформацию по трем осям независим

$$\boxed{dx_i' = \sqrt{1 + 2u^{(i)}}\, dx_i}, \ (\text{где } i = 1, 2, 3)$$

Относительное изменение длины:

$$\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

Ограничимся рассмотрением малых деформаций, т.к. балка ломается задолго до больших.

Малая деформация

$$\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} \ll 1, \text{ т.е } u^{(i)} \ll 1$$

тогда берем только лин. члены по $u^{(i)}$

$$\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} = 1 + \frac{1}{2} 2u^{(i)} - 1 = u^{(i)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} = u^{(i)}}$$

Возьмем какой-то объем.

$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad t = 0$$

$$dV' = dx'\, dx_2'\, dx_3' \qquad t > 0$$

$$dx_i' = (1 + u^{(i)}) dx_i$$

$$dV' = (1+u^{(1)})\,dx_1(1+u^{(2)})\,dx_2\ \ (1+u^{(3)})\,dx_3 =$$

$$= (1+u^{(1)})(1+u^{(2)})(1+u^{(3)})\,\underbrace{dx_1\,dx_2\,dx_3}_{dV}$$

квадратичные члены оставлять не можем!

$$dV' = (1+\underbrace{u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}})\,dV$$

сумма диаг. элементов это шпур

$$dV' = (1 + Sp\,U_{ik})\,dV$$

относит элемент объема
(не надо приводить к диаг. виду!)

Катд

$$\boxed{\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} = u^{(i)} \qquad \frac{dV' - dV}{dV} = Sp\,U_{ik}}$$

<u>Деформация всестороннего</u> <u>сжатия</u> => тело преобразуется в подобно

=> диаг. элементы одинаковы

$$U_{ik} = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$$

<u>Сдвиговая</u> <u>деформ</u> => объем тела не меняется, меняется лишь форм

=> $Sp\,U_{ik} = 0$

Любая деформация это сумма этих двух! И никак иначе...

$Sp\,U_{ik} = U_{ll}$

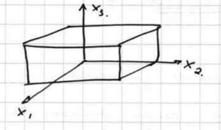
$$U_{ik} = \underbrace{\left(U_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}U_{ll}\right)}_{Sp\,=\,0} + \underbrace{\frac{1}{3}\delta_{ik}U_{ll}}$$

деформация всестороннего сжатия

$Sp = 0$
$\Downarrow$
сдвиговая деформация.

Порешаем задачи: <u>1 тип</u>

$t=0$



$\Delta x_1 = 10$ см

$\Delta x_2 = 8$ см

$\Delta x_3 = 5$ см.

Произошла однородная деформация

$t>0$. $u_{ik} \neq u_{ik}(\vec{r})$; $\overset{\text{-расстяжение}}{u_{11} = 0,01}$ $\overset{\text{сжатие}}{u_{22} = -0,02}$

$u_{33} = 0,07$

Чему равняется длина трех граней параллелепипеда после растяжения. $\Delta x_1'$, $\Delta x_2'$, $\Delta x_3'$.

$u_{ik} = 0$ при $i \neq k$

$$\frac{\Delta x_i' - \Delta x_i}{\Delta x_i} = u^{(i)} \rightarrow \Delta x_i' = (1+u^{(i)})\Delta x_i$$

$\Delta x_1' = (1+0,01)\cdot 10 = 10.1$ см. и т.д.

<u>2 тип</u>

Тензор деформации приведен к диаг. виду:

$u^{(1)} = 0,05$.
Дописать остальные: ↗ Всест. сжатие $u_{ik} = \begin{pmatrix} 0,05 & & 0 \\ & 0,05 & \\ 0 & & 0,05 \end{pmatrix}$

↘ сдвиговая $Sp\, u_{ik} = 0$

$\Rightarrow u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} = 0$

$u^{(2)} = -0,02$ $u^{(3)} = -0,03$

$$u_{ik} = \begin{pmatrix} 0,05 & & 0 \\ & -0,02 & \\ 0 & & -0,03 \end{pmatrix}$$

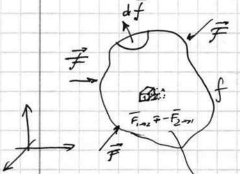
<u>3 тип</u>

Даны: $u_{11} = 0,01$ $u_{22} = -0,02$ $u_{33} = 0,04$.

$u_{12} = \ldots$ $u_{13} = \ldots$ $u_{23} = \ldots$

Дописать недостающие и найти. относит. изм. объем.
Он симметричный! $u_{12} = u_{21}$ и т.д. $Sp\, u_{ik} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$.

Тензор напряжения.



Возьмем дл объем и найдем силу дейст на него $\vec{F}_V(\vec{r})$.

Полная сила действ на весь объем

$$\vec{F}_{\Sigma} = \int_V \vec{F}_V(\vec{r})d^3r = \oint .$$

тензор ~~дефор~~ напряжения.

$$F_{\Sigma i} = \int_V F_{Vi}(\vec{r})\, d^3 r = \oint_f \sigma_{ik}\, df_k$$

это может быть если что то там дивергенция

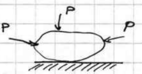
$$\boxed{F_{Vi} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}} \quad \text{(III)}$$

по Th Остр – Гаусса.

Тензор напряжения σ_{ik} – i-ая комп. силы, действующая на ~~[illegible]~~. единицу поверхности ⊥ $k^{ой}$ оси

Пусть $i = 1$. $\sigma_{11} df_1 + \sigma_{12} df_2 + \sigma_{13} df_3$

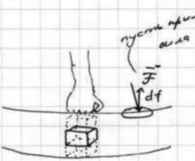
?

На дно морское положили ТТ:  σ_{ik} -?

σ_{ik} - не зависит от материала.

Уравнения равновесия деформированного тела.

05.05.2010



В сост. равновес

Силы, с которыми действ. нижн и верхн. объемчик равны по модулю и противоп. по направлению

$$\vec{F}_v = 0.$$

тогда получим, что $\vec{F}_v = 0 \rightarrow \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$

$F_i df = \sigma_{ik} df_k |_f$ i-я комп. силы действ на поверхн df.

: получим г.у условие на поверхн тв тела

$$F_i\, df = \sigma_{ik}\, df_k |_f$$

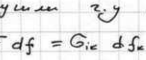
перепишем аккуратней: ; $d\vec{f} = df\,\vec{n}$ ед. вектор нормали

$$\Rightarrow F_i \cancel{df} = \sigma_{ik} n_k \cancel{df}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_i = \sigma_{ik} n_k |_f} \text{ г.у.} \qquad \boxed{\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0} \text{ ур-е. равновесия деф тела.}$$

Порешаем задачи:

① На морское дно положили тт!



σ_{ik} - ?

Напишем г.у: Сила $\vec{F} = -p\vec{n}$ прилож к пов. тел

$$-pn_i = \sigma_{ik} n_k \Big/_f$$

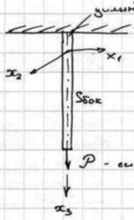
г.у во всех точках одно и тоже.

Будем искать решен $\sigma_{ik} \neq \sigma_{ik}(\vec{r})$; $\sigma_{ik} = \text{const}$. →

→ это удовлетв. ур-ию $\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$. Осталось ~~найти~~ удовлетворить гр-му условию: $\underline{\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}}$

$$-pn_i = -p\delta_{ik} n_k = -pn_i$$

②



стержень невесомый

$\mathcal{P}$ - сила. действ на др торца.

Распишем г.у: 1) боковая поверхн $S_{бок}$: $0 = \sigma_{ik} n_k \big|_{S_{бок}}$;

2) нижний торец $S_н$: $P = \sigma_{3k} n_k \big|_{S_н}$;

3) верхн. торец. $S_в$: $-\mathcal{P} = \sigma_{3k} n_k \big|_{S_в}$

$\sigma_{ik} \neq \sigma_{ik}(r) \rightarrow \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0.$

Найдем такие σ_{ik} удовл. г.у.

1) $\vec{n}(n_1, n_2\ 0) \rightarrow \sigma_{i1} = 0;\ \sigma_{i2} = 0. \rightarrow \sigma_{1i} = 0; \sigma_{2i} = 0.$

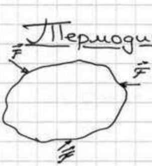
2) $\vec{n}(0,\ 0,\ \cancel{\pm} 1) \rightarrow \sigma_{33} = \mathcal{P}$

3) $\vec{n}(0,\ 0,\ -1) \rightarrow -\sigma_{33} = -\mathcal{P}. \rightarrow \sigma_{33} = \mathcal{P}$

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}$$

Нужно найти связь между u_{ik} и σ_{ik}. Эта связь называется законом Гука.

Термодинамика деформированного тела.



Если убрать вн. силу то возм два вариан

1) def. Упругая деформация - после того, как убрать внешнюю силу, тело вернется в исходное состояни

2) def Неупругая (пластическая) деформация - тело не возвр в исх. состояние

Ограничимся рассмотрением упругой деф-ии.

Уберем силу. δR - работа

δu_{ik} - изменение тензора деформации

$$\delta R = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \cdot \delta u_i$$

работа сила пути

$$\int\limits_V \delta R\, d^3r = \int\limits_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i\, d^3r = \underbrace{\int\limits_V \frac{\partial(\sigma_{ik} \delta u_i)}{\partial x_k} d^3r}_{I} - \underbrace{\int\limits_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} d^3r}_{II}$$

$$I = \oint\limits_f \sigma_{ik} \delta u_i\, df_k = \oint \underbrace{\sigma_{ik} n_k}_{F_i \equiv 0} \delta u_i\, df = 0.$$

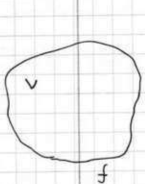
поменяли местами т.к. и то и то малое пр-ращ

$$II = -\int\limits_V \sigma_{ik}\, \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d^3r = -\int\limits_V \sigma_{ik}\, \delta \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) d^3r =$$

= { Давайте будем считать u_{ik} - малыми, тогда $\frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$ - квадратичное и выбросим! } =

~~$\Rightarrow \int\limits_V \delta R\, d^3r = \int\limits_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i\, d^3r = \int \frac{\partial(\sigma_{ik} \delta u_i)}{\partial x_k} d^3r$~~

$$\Rightarrow \int\limits_V \delta R\, d^3r = -\int\limits_V \sigma_{ik}\, \delta u_{ik}\, d^3r$$



Возьмем ТТ и сообщим ему $dQ = TdS$ на ед. объема

$$TdS = d\mathcal{E} + dR$$

приращ. внутр. энергии

работа по расширению

$$d\mathcal{E} = TdS - dR$$

Минимум имеет свободн. энерг. 1-цы объем св. тела $F_{св} = \mathcal{E} - TS$

$$dF_{св} = d\mathcal{E} - TdS - SdT.$$

$$\Rightarrow dF_{св} = \cancel{TdS} - dR - \cancel{TdS} - SdT$$

$$dF_{св} = \sigma_{ik}\, \delta u_{ik} - SdT$$

произв своб. энергии по δu_{ik} в изотермич. процессе $\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F_{св}}{\partial u_{ik}}\right)_{T=const}$

Сделаем допущение, что $T = Const$ – изотермический процесс.

Прошли термодинамику, теперь Закон Гука.

Недеформир. тело : $F_{св} = F_{св}^{(0)}$

Деформирую. : $F_{св}(u_{ik}) > F_{св}^{(0)}$

Т.к u_{ik} – малое, то нужно разложить в ряд:

$F_{св}(u_{ik}) = F_{св}^{(0)} + \ ?$ $\Rightarrow$

Если линейный член, то $\frac{\partial F_{св}}{\partial u_{ik}} \neq \varphi(u_{ik})$. Тогда линейного члена быть не может. (по [illegible])

Считаем тв. тело изотропным.

Задача: сооружать все возможные независимые квадратичных скаляра. Утверждается, что их всего 2:

1) $(Sp\,(u_{ik}))^2 = u_{ll}^2$

2) u_{ik}^2

$$\Rightarrow \quad F_{св}(u_{ik}) = F_{св}^{(0)} + \frac{\lambda}{2} u_{ll}^2 + \mu u_{ik}^2 .$$

Любое ТТ задается двумя константами:

λ – коэф. Ламе

μ – ~~второй коэф. Ламе~~, Модуль сдвига

Учтем, что любая деформ. это сумма двух:

$$u_{ik} = \underbrace{\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right)}_{Sp = 0} + \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}$$

$$u_{ik}^2 = \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right)^2 + 2\underbrace{\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right)\delta_{ik}}_{Sp = 0} \frac{1}{3} u_{ll} + \frac{1}{3} u_{ll}^2$$

$$\Rightarrow F_{св}^{(u_{ik})} = F_{св}^{0} + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3}\right) u_{ll}^2$$

$\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} \equiv \frac{K}{2}$ – Модуль всестороннего сжатия.

$$\boxed{F_{св}(u_{ik}) = F_{св}^{(0)} + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2}$$

$K, \mu \geqslant 0$

$$dF_{св} = \underbrace{2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)\left(du_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)}_{Sp=0 \;\Rightarrow 0} + K u_{ll}\,du_{ii}$$

$$dF_{св} = 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)du_{ik} + K u_{ll}\,\delta_{ik}\,du_{ik}$$

$$\sigma_{ik} = 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) + K\delta_{ik}u_{ll}$$ → Закон Гука. одна из записей

$$\sigma_{ii} = 3K u_{ll} \Rightarrow u_{ll} = \frac{1}{3K}\sigma_{ll}.$$

$$\Rightarrow \sigma_{ik} = 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right) + \frac{\cancel{K}}{3\cancel{K}}\delta_{ik}\sigma_{ll}$$

$$\Rightarrow u_{ik} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} + \frac{2\mu}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right) - \frac{\delta_{ik}}{3}\sigma_{ll} \Big\} =$$

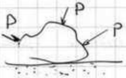
$$\Rightarrow \cancel{u_{ik} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} + \delta_{ik}\sigma_{ll}\left(\frac{2\mu}{3K} - \frac{1}{3}\right)\right)}$$

$$\boxed{u_{ik} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right) + \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll}}$$

Закон Гука: связь между u_{ik} и σ_{ik}

Вернемся к задаче о дне морском.

①



$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik}$$

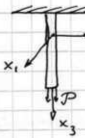
$$u_{ik} = \frac{1}{2\mu}\underbrace{\left(-P\delta_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}(-3P)\right)}_{=0} + \frac{1}{9K}\delta_{ik}(-3P) =$$

$$\Rightarrow u_{ik} = \frac{-1}{3K}\delta_{ik}P$$ ⇒ деформ. всестороннего сжатия.

②

12.05.10.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона.



$$\sigma_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} \end{vmatrix}$$

давайте искать u_{ik}.

$$u_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k.$$

$$u_{ik} = \frac{1}{9K} \sigma_{ll} \delta_{ik} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ik}\right)$$

$$u_{11} = \frac{1}{9k} \mathcal{P} \cdot 1 + \frac{1}{2\mu} \left(0 - \frac{1}{3} \mathcal{P} 1\right) = \mathcal{P} \left(\frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu}\right) =$$

$$= -\frac{\mathcal{P}}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3k}\right) = u_{22}.$$

$$u_{33} = \frac{1}{9k} \mathcal{P} \cdot 1 + \frac{1}{2\mu} \left(\mathcal{P} - \frac{1}{3} \mathcal{P}\right) = \mathcal{P} \left(\frac{1}{9k} + \frac{1}{3\mu}\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{P}}{3} \left(\frac{1}{3k} + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{\mathcal{P}}{E}$$

E – модуль Юнга

$$\boxed{E = \frac{9k\mu}{3k + \mu}} = \left[\frac{H}{м^2}\right] \text{ такая же, как и } \mathcal{P}$$

Если $E = \mathcal{P}$, то $u_{33} = 1 \to$ растяжение вдвое.

Модуль Юнга – та сила, которую нужно приложить к единице поверхности, чтобы тело растянулось в 2 раза

Коэффициент Пуассона. $\boxed{\sigma = -\frac{u_{11}}{u_{33}}} = \frac{1}{2} \frac{3k - 2\mu}{3k + \mu}$

– относительное сжатие к относительному удлинению

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3k}}{\frac{1}{3k} + \mu} = \frac{1}{2} \frac{3k - 2M}{3k + M}$$

$k, \mu \geq 0$, тогда $\underbrace{E \geq 0,}$ $\quad -1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$, но для всех тел

$$\underbrace{0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}}$$

Напишем обратные преобразования: $\underbrace{\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}}$ $\underbrace{K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}}$

Перепишем закон Гука.

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}\delta_{ik}\right) \\ u_{ik} &= \frac{1}{\mu}\left\{(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\, \sigma_{ll}\delta_{ll}\right\} \end{aligned}}$$

Уравнения движения деформированного тела.

Это не что иное как II-й закон Ньютона.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = F_{v_i} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

. Выбираем описание через u_{ik}.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}\delta_{ik}\right\}\right. = \left\{\frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i}\right)\right\} =$$

$$= \left\{ u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \overset{\text{квадратично и это выбрасываем}}{\cancel{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}}}\right) \text{при получении з-на Гука} \right\} =$$

$$= \left\{\frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}}} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}}_{=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{1}{2(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}\right) =$$

$$= \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\Delta u_i + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla_i \operatorname{div}\vec{u}\right)$$

$$\Rightarrow \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\Delta u_i + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla_i \operatorname{div}\vec{u}\right).$$

{деформируемое тело}

В вект. виде

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla \operatorname{div}\vec{u}\right)}$$

Нужны гран. условия: $\sigma_{ik} n_k\big|_f = F_i$ ← это тоже надо выразить через u_{ik}, а затем через $\vec{u}$.

Линейное уравнение в частных производных.

Продольные и поперечные волны в твердых телах.

Давайте считать ТТ безграничным. Задача одномерная:

$\vec{u}(x_1, t)$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

$$1)\ \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{1-2\sigma}\underset{\partial x_1^2}{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_1}}\right) = 2\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0$$

вводим $\boxed{c_l^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}$

$$① \Rightarrow \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_l^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0$$

а это волн

В т.т. может распространяться волна, монохроматическая $(u_2, u_3 = 0)$ с з-ном дисперсии $k = \omega c_l$, волна продольная

$$Sp\, u_{ik} = \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = \operatorname{div}\vec{u}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \neq 0 \Rightarrow$$ продольная волна сжатия-разрежения

$$2)\ \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + 0.$$

$$\boxed{c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}$$

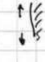
$$② \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c_t^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = 0$$

Волн. ур-е со скор. c_t^2; поперечная.

Для 3-го такое же ↘ сдвиговая

от x_2 ничего не зависит

$$\operatorname{div}\vec{u} = \underset{0,\ \text{т.к. } u_1=0}{\frac{\partial \cancel{u_1}}{\partial x_1}} + \cancel{\frac{\partial u_2}{\partial x_2}} + \cancel{\frac{\partial u_3}{\partial x_3}} = 0$$



Если переписать через μ, K, то $c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}$;

$$\boxed{c_l^2 = \frac{1}{3\rho}(3K+4\mu)}$$

скорости звука

Возьмем отношение

$$\frac{c_t^2}{c_l^2} = \frac{\cancel{E}\,\cancel{\rho(1+\sigma)}\,(1-2\sigma)}{2\cancel{\rho(1+\sigma)}\,\cancel{E}(1-\sigma)} = \left\{ 0 \le \sigma \le \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$0 \le \frac{c_t^2}{c_l^2} \le \frac{1}{2}.$$

Поперечный звук распространяется медленнее продольной как минимум в $\overset{?}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ раз.

Запись уравнений движения в виде волновых ур-й.

Через c_l и c_t:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = c_t^2 \Delta \vec{u} + (c_l^2 - c_t^2)\nabla \operatorname{div} \vec{u}$$

$$A = \nabla\varphi + \operatorname{rot}\vec{B}$$

$$\vec{u} = \underbrace{\nabla\varphi}_{\vec{u}_l} + \underbrace{\operatorname{rot}\vec{B}}_{\vec{u}_t} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t}$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}\vec{u}_l = 0}\quad \underbrace{\operatorname{div}\vec{u}_t = 0}$$

вращ-е [illegible] поворот без изм. объема.

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = c_t^2 \Delta(\vec{u}_l + \vec{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2)\nabla \operatorname{div}\vec{u}_l \quad \Big|\ \begin{matrix}\operatorname{div}\\ \operatorname{rot}\end{matrix}$$

$$\operatorname{div}\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = c_t^2\, \cancel{\operatorname{div}\Delta\vec{u}_l} + (c_l^2 - \cancel{c_t^2})\,\Delta \operatorname{div}\vec{u}_l$$

$$= \operatorname{div}\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \operatorname{div}\Delta\vec{u}_l = 0$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta\vec{u}_l\right) = 0\ ;\quad \operatorname{rot}\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta\vec{u}_l\right) = 0$$

Это константа, нас устроит только константа = 0.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \vec{u}_l = 0.}$$

Для $\vec{u}_t$ возьмем rot, а не дивергенцию

$$\operatorname{rot} \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = c_t^2 \operatorname{rot} \Delta \vec{u}_t + \overset{\operatorname{rot} \nabla = 0}{0}$$

$$\left.\operatorname{rot}\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \vec{u}_t\right) = 0\right\} \quad \uparrow \operatorname{div}?$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \vec{u}_t\right) = 0.$$

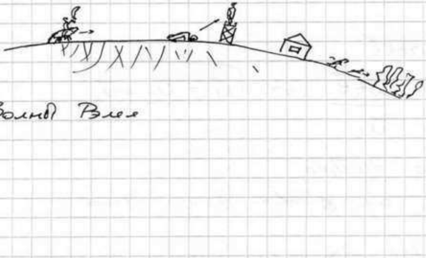
$\Rightarrow$ константа $= 0$, т.к если $u_t = 0 \Rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \vec{u}_t = 0.$$

Потом написать два волновых ур-я решения и в виде сумм u_l, u_t

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}_{l,t}}{\partial t^2} - c_{l,t}^2 \Delta \vec{u}_{l,t} = 0}$$

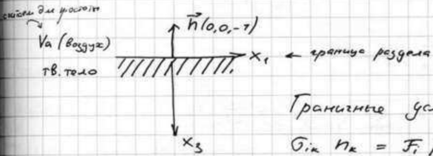
$\Rightarrow$ две волны $\underset{l}{\underline{\text{продольная}}}$ и $\underset{t}{\underline{\text{поперечная}}}$.



Волны Рэлея

Волны Рэлея

Мы должны написать к ур-ям граничные условия.



Решаем плоскую задачу

(от x_2 ничего не зависит)

Граничные условия.

$$\sigma_{ik} n_k = F_i\Big|_f \; ; \quad F_i = 0 , \; \vec{n}(0,0,-1)$$

$$\sigma_{ik} n_k = 0\Big|_{x_3=0} \rightarrow \boxed{\sigma_{i3} = 0}\Big|_{x_3=0}$$

$$1)\; \sigma_{13}\Big|_{x_3=0} = \sigma_{31}\Big|_{x_3} = 0 \; ; \; 2)\, \sigma_{33}\Big|_{x_3=0} = 0$$

(σ_{23} тождеств $=0$)

$$1)\; \sigma_{13}\Big|_{x_3=0} \Rightarrow 0 = \frac{E}{1+\sigma}\,(u_{13} + 0)\Big|_{x_3=0} \Rightarrow u_{13}\Big|_{x_3=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{1)\, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0\Big|_{x_3=0}}$$

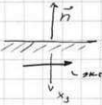
$$2)\; \sigma_{33}\Big|_{x_3=0} = 0 = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{33} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(u_{11} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{u_{22}}} + u_{33})\right) \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\right)u_{33} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\, u_{11} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2)(1-\sigma)\, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \sigma \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|_{x_3=0} = 0}$$

$$\sigma = \sigma(c_t, c_l)$$

Еще необходимо начальное условие.



эксперимент: видно так, что бежит вдоль x_1, тогда.

$$\vec{u}_{l,t} = \vec{f}_{l,t}(x_3)\, e^{i(kx-\omega t)}$$

1) $\vec{f}_{l,t}(x_3)$ - ? 2) $k = k(\omega)$ - ?, причем k - веществ, $k \in \mathbb{R}$.

т.к нет диссипации

подставим в ур-е:

$$1)\ -\omega^2 \vec{f}_{l,t} + C_{l,t}^2 k^2 \vec{f}_{l,t} - C_{l,t}^2 \frac{d^2 \vec{f}_{l,t}}{dx_3^2} = 0$$

$$\frac{d^2 \vec{f}_{l,t}}{dx_3^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{C_{l,t}^2}\right) \vec{f}_{l,t}$$

решается просто: $\vec{f}_{l,t} = \vec{A}_{l,t} e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{l,t}^2}} x_3} + \cancel{\vec{B}_{l,t} e^{+\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{l,t}^2}} x_3}}$ → тоже но, рост

Под корнем больше 0 и тогда будет ассимптотическое затухание внутрь тела, это возникает в следствии суперпозиции этих двух волн

$$\vec{f}_{l,t}(x_3) = \vec{A}_{l,t} e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{l,t}^2}} x_3}$$

$$\vec{u} = \left(\vec{\alpha}_l e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}} x_3} + \vec{A}_t e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}} x^3}\right) e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

u_l u_t

$$\operatorname{div} \vec{u}_t = \underbrace{\frac{\partial u_{t1}}{\partial x_1} + \cancel{\frac{\partial u_{t2}}{\partial x_2}}^{0} + \frac{\partial u_{t3}}{\partial x_3} = 0}$$

$$\Rightarrow A_{t1} ik + A_{t3}\left(-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}\right) = 0$$

$$\underbrace{A_{t3} = \frac{A_{t1} ik}{\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{u}_l = \begin{vmatrix} \cancel{x_1}\vec{e}_1 & \cancel{x_2}\vec{e}_2 & \cancel{x_3}\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_{l1} & u_{l2} = 0 & u_{l3} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

1) 0

2) $\underbrace{\frac{\partial u_{l3}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{l1}}{\partial x_3} = 0}$

3) 0.

$$\Rightarrow A_{l3} = \alpha_l A_{l1}, \quad \alpha_l = \alpha_l(k, \omega, c_l)$$

⇒ всего 2 независ. коэф: A_{t1}, A_{l1}

$\Rightarrow$ 1) $a_{11} A_{l1} + a_{12} A_{t1} = 0$ $\quad a_{ik} = a_{ik}(k, \omega, c_l, c_t)$

2) $a_{21} A_{l1} + a_{22} A_{t1} = 0$

Причем, опред должен быть = 0

$$|a_{ik}| = 0$$

Получается мерзкое ур-е,

но его решил Рэлей:

Закон дисперсии получили из гр.у.

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c_t \xi}} ; \quad \xi\left(\frac{c_t}{c_l}\right); \quad 0,874 \le \xi \le 0,955.$$

=> поэтому такое решение есть, т.к. под корнем > 0.

c_l быстрее затухает

Детектирование микротрещин:

Отражение волн от границы раздела ТТ - Вакуум.

Постановка: генератор излучает продольные волны на бесконечности и бесконечно широкий

$$\exists \; \vec{u}_{fl} = \vec{A}_f \, e^{i(\vec{k}_f \vec{r} - \omega t)} \quad ⊜$$

fall - падающая

$$\vec{k}_f \, (k_1, 0, k_{f3})$$

Необх, чтобы $k_l^2 = k_1^2 + k_{f3}^2$; $k_l = \frac{\omega}{c_l}$

$$k_{f3} = +\sqrt{k_l^2 - k_1^2}$$

т.к. против x_3

$$⊜ \; \vec{A}_f \, e^{-k_{f3} x_3} e^{i(k_1 x_1 - \omega t)}$$

чтобы удовл. двум условиям, нужно считать, что наряду с падающей есть 2 отраженных: продольная и поперечная

$\vec{u}_{rl}$ A, u_{rt} B

$$\vec{u} = \vec{u}_{fl} + \vec{u}_{rl} + \vec{u}_{rt}$$

$$\vec{u}_{rl} = \vec{A}_r \, e^{i(\vec{k}_r^{(l)} \vec{r} - \omega t)} ; \quad \vec{k}_r^{(l)} (k_1, 0, k_{l3})$$

$$k_l^2 = k_1^2 + k_{l3}^2 ; \quad k_{l3} = \sqrt{k_l^2 + k_1^2} = k_{f3}, \quad \underline{Q_{rl} = Q_f}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{re} = \vec{A}_2\, e^{i(\bar{k}_2^{(\ell)}\bar{r}-\omega t)} = \vec{A}_2\, e^{ik_{\ell 3}x_3}\, e^{i(k_1x_1-\omega t)}$$

$$\vec{u}_{2t} = \vec{B}_2\, e^{i(\bar{k}_2^{(t)}\bar{r}-\omega t)} \quad \textcircled{=} \quad \bar{k}_2^{(t)}(k_1, 0, k_{t3})$$

$$k_1^2 + k_{t3}^2 = k_t^2 \;;\quad k_t^2 = \frac{\omega}{c_t}$$

$$k_{t3} = \sqrt{k_t^2 - k_1^2}$$

$$\textcircled{=} \quad \vec{B}_2\, e^{ik_{t3}x_3}\, e^{i(k_1x_1-\omega t)}$$

$$k_1 = k_e \sin\theta_f = k_t \sin\theta_{2t}$$

$$\frac{\cancel{\omega}}{c_e}\sin\theta_f = \frac{\cancel{\omega}}{c_t}\sin\theta_e$$

ЗАКОН
СНЕЛИУСА $\rightarrow \dfrac{\sin\theta_{2t}}{\sin\theta_e} = \dfrac{c_t}{c_e} \Rightarrow \sin\theta_{2t} = \overset{<1}{\dfrac{c_t}{c_e}}\sin\theta_e$

1) $B_{11}A_{21} + B_{12}B_{21} + B_{13}A_{f1} = 0.$

2) $B_{21}A_{21} + B_{22}B_{21} + B_{23}A_{f1} = 0.$

$$\begin{cases} A_{21} = \gamma_e A_{f1} \\ B_{21} = \gamma_t A_{f1}. \end{cases}$$

Если бы был воздух возникла бы прошедшая волна.

Смысловой модуль 1. Идеальная жидкость

Тема 1. Уравнения идеальной жидкости. ст 2
Макроскопическое описание сплошной среды.
Переменные Эйлера и Лагранжа.
Уравнение, выражающее закон сохранения массы.
Уравнение движения (Уравнение Эйлера).
Уравнение, выражающее закон сохранения энергии.
Граничные условия. ст 7

Тема 2. Стационарное и потенциальное течение жидкости.
Гидростатика. «Законы» Паскаля и Архимеда. ст 8
Стационарное течение жидкости. Уравнение Бернулли.
Потенциальное обтекание твердого тела несжимаемой жидкостью.
Парадокс Даламбера. ст 10

Тема 3. Звук в идеальной жидкости.
Уравнения малых колебаний в идеальной жидкости. ст 12
Закон дисперсии и связь между амплитудами для малых колебаний.
Волновое уравнение. Плоские, сферические и цилиндрические волны. ст 17
Распространение звука в движущейся идеальной жидкости.
Эффект Доплера. ст 18

Тема 4 . Возмущения конечной амплитуды в идеальной жидкости.
Одномерные уравнения для волн конечной амплитуды.
Длинные гравитационные волны.
Решения Римана (одномерные бегущие волны).
Образование разрывов в одномерных бегущих волнах.
Солитоны: эксперимент и теория. ст 24
Простейшие решения уравнения Кортевега де Фриза.

Смысловой модуль 2 . Вязкая жидкость.

Тема5. Уравнения вязкой жидкости.
Запись уравнений движения идеальной жидкости в виде законов сохранения. ст 29
Уравнение движения вязкой жидкости (уравнение Навье Стокса). Диссипация энергии в несжимаемой
жидкости.
Уравнение, выражающее закон сохранения энергии.
Граничные условия.

Тема 6. Стационарное течение вязкой жидкости.
Типы задач в вязкой жидкости.
Стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости по трубе. Формула Пуазейля.
Стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости между плоскостями.
Сила сопротивления при обтекании шара вязкой жидкостью (формула Стокса). ст 41, 43
Закон подобия.

Тема 7. Турбулентность. ст 44
Устойчивое и неустойчивое течение жидкости.
Турбулентность.
Методы описания турбулентного движения.

Тема 8. Теплопроводность в жидкости. ст 47
Уравнение теплопроводности. ст 47
Общее решение уравнения теплопроводности в неограниченной среде.
Выравнивание температуры в неравномерно нагретой жидкости.

Тема 9. Малые колебания в вязкой жидкости. ст 50
Поперечные вязкие волны.
Затухание звука.
Температурные волны.

Тема 10. Проводящая жидкость.
Уравнения магнитной гидродинамики. ст 53
Магнитогидродинамические эффекты: «просачивание» магнитного поля сквозь вещество и «вмороженные»
магнитные поля.
Малые колебания в проводящей жидкости, находящейся во внешнем магнитном поле.
Волны Альфвена, ускоренная и замедленная магнитогидродинамические волны. ст 59

Тема 11. Многокомпонентные жидкости. ст 61
Явление диффузии в двухкомпонентной жидкости.
Вектор диффузии и термодиффузионное разделение смеси двух жидкостей. ст 65
Уравнения гидродинамики для смеси двух жидкостей.
Уравнение диффузии и его решение.
Диффузия взвешенных в жидкости частиц. ст 66
Соотношение Эйнштейна.

Смысловой модуль 3. Твердое тело. ст 69

Тема 12. Основные понятия теории упругости.
Вектор смещения. ст 69
Тензор деформации. ст 70
Сдвиговая деформация и деформация всестороннего сжатия.
Тензор напряжений. ст 74

Тема 13. Однородные напряжения.
Уравнение равновесия деформированного тела. ст 75
Тензор напряжений, возникающий при всестороннем сжатии твердого тела.
Тензор напряжений, возникающий при растяжении стержня.

Тема 14. Связь между тензором напряжений и тензором деформации.
Термодинамика деформирования. ст 76
Свободная энергия при малых деформациях.
Закон Гука. ст 79

Тема 15. Однородные деформации.
Деформация при всестороннем сжатии твердого тела.
Деформация, возникающая при растяжении стержня.
Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. ст 80

Тема 16. Упругие волны в твердом теле. ст 82
Уравнение движения упругой среды.
Решения уравнения движения упругой среды в одномерном случае. Скорость продольного и поперечного
звуков.
Получение волновых уравнений из уравнения движения упругой среды. Граничные условия на границе