МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Н.Р. БЕЛЯЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
I семестр

Конспект лекций для студентов физико-технического факультета

Харьков-2005

Литература

1. Зорич «Математический анализ» 1, 2 том.
2. Фихтенгольц «Курс дифференциального и интегрального исчисления» 1, 2, 3 том.
3. Кудрявцев «Математический анализ» 1, 2, 3 том.
4. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

А) Предмет математической логики.

Логика – анализ методов рассуждения, показывающий как надо рассуждать, для получения правильного вывода.

Математическая логика – логика использующая математические методы и направленная на наиболее удобные для анализа математические рассуждения.

Объектом и средством исследования в математической логике является теория множеств.

В) Простые и составные высказывания. Логические связки.

Повествовательное предложение, которое по смыслу истинно или ложно **называется высказыванием**:

$2 \times 2 = 4$ – истинное высказывание. $2 \times 2 = 5$ – ложное высказывание.

В дальнейшем простые высказывания обозначаются буквами A, B, C, D, … и **называются пропозициональными переменными**.

Из простых высказываний с помощью логических связок можно создавать более сложные высказывания или формулы.

Содержательно оправдано использование 5$^{\text{ти}}$ логических связок, которые указываются в порядке приоритета:

1° – унарная (одноместная) – отрицание « $\neg$ » ($\neg A$) (не A);
и бинарные:
2° – конъюнкция « $\wedge$ » ($A \wedge B$, A и B);
3° – дизъюнкция « $\vee$ » ($A \vee B$, A или B);
4° – импликация « $\Rightarrow$ » ($A \Rightarrow B$, если A то B);
5° – эквиваленция « $\Leftrightarrow$ » ($A \Leftrightarrow B$, A эквивалентно B).

Результаты применения этих операций к высказываниям приведены в следующих таблицах (таблицах истинности):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0

1	1	0	1	1	1	1

Здесь, и в дальнейшем, для простоты: истина – « 1 »; ложь – « 0 ».

* Исчислить составное высказывание, т.е. установить истинно оно или ложно при различных значениях пропозициональных переменных можно не только с помощью таблиц истинности, но и с помощью, так называемых, представляющих функций.

Если ввести функцию f на высказываниях такую, что f(истина) = 1; f(ложь) = 0 то:

$$f(\neg A) = 1 - f(A); \qquad f(B \vee A) = f(A) + f(A) - f(A)\cdot f(B);$$

$$f(A \wedge B) = f(A)\cdot f(B); \qquad f(B \Rightarrow A) = 1 - f(A) + f(A) + f(A)\cdot f(B),$$

$$f(A \Leftrightarrow B) = 1 - f(A) - f(B) + 2f(A)f(B).$$

При этом исчисление высказывания производится с помощью арифметических действий над 0 и 1.

* Дополнительные логические связки:

« | » – антиконъюнкция (штрих Шефера); $A \mid B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$;

« $\downarrow$ » – антидизъюнкция (стрелка Пирса). $A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$.

* Взаимосвязь логических связок:

Любую логическую связку можно выразить через три основные логические связки $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B);$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Законы де Моргана:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B;$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

*Алгебраические свойства связок:

1° Коммутативны все бинарные связки, кроме импликации;

2° Ассоциативны $\wedge$, $\vee$; неассоциативны $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;

3° Транзитивны $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;

4° Закон отрицания отрицания: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$;

5° Принцип тождества: $\neg A \vee A \Leftrightarrow$ «и», $\neg A \wedge A \Leftrightarrow$ «л»;

5° Правила поглощения: $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$.

С). Формулы и их классификация.

Def: Формула :: = {пропозициональная переменная $| \neg U \mid (U \wedge V) \mid (U \Rightarrow V) \mid (U \Leftrightarrow V)$}, где U и V – формулы.

Формула:

а) **выполнима** – если существует ($\exists$) набор параметров, при которых формула истинна;

б) тождественно-истинная или **тавтология** – если для любого ($\forall$) набора параметров формула истинна;

в) **опровержима** – если существует ($\exists$) набор параметров, при которых формула ложна;

г) тождественно-ложная или **противоречие** – если для любого ($\forall$) набора параметров формула ложна.

Формула **называется формулой с тесными отрицаниями**, если в ней нет связок $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$, и отрицания относятся только к пропозициональным переменным.

Произвольная конъюнкция (дизъюнкция) формул, каждая из которых есть пропозиционная переменная или ее отрицание **называется элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией).**

Def: Произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций **называется дизъюнктивной нормальной формой**, а произвольная конъюнкция элементарных дизъюнкций **называется конъюнктивной нормальной формой** (Д.Н.Ф. и К.Н.Ф.).

Def: Д.Н.Ф. **называется совершенной** (С.Д.Н.Ф.), если каждая переменная формулы входит в элементарную конъюнкцию ровно один раз – с отрицанием или без него.

Def: К.Н.Ф. **называется совершенной** (С.К.Н.Ф.), если каждая переменная формулы входит в элементарную дизъюнкцию ровно один раз – с отрицанием или без него.

Пример: Исчислить высказывание: $((A \underset{1}{\Rightarrow} B) \underset{5}{\Rightarrow} (\underset{3}{\neg} (C \underset{2}{\vee} A) \underset{4}{\Rightarrow} B))$.

Внизу указан порядок операций.

1) Таблицы истинности:

A	B	C	1	2	3	4	5
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

В $5^{\text{ом}}$ столбце указана истинность всего составного высказывания при различных значениях истинности A, B и C.

2) С помощью формулы: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ избавимся от импликаций:

$(\neg A \vee B) \Rightarrow (C \vee A \vee B)$

$\neg (\neg A \vee B) \vee C \vee A \vee B$ и применим один из законов де Моргана.

$(A \wedge \neg B) \vee C \vee A \vee B$ – получена формула с «тесными» отрицаниями.

Запишем последнюю формулу в виде:

* $(A \wedge \neg B) \vee (C) \vee (A) \vee (B)$, трактуя каждую скобку как элементарную конъюнкцию, видим: дизъюнкцию элементарных конъюнкций, т.е. Д. Н.Ф. она не является совершенной т.к. в каждую скобку входят не все переменные формулы.

Запишем последнюю формулу в виде:

$(A \wedge \neg B) \vee (C \vee A \vee B)$ и применим дистрибутивный закон

$(A \vee C \vee A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee B)$,

$(A \vee C \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee B)$, здесь последняя скобка есть тавтология, поэтому получаем: $(A \vee B \vee C)$ и, трактуя скобку как элементарную дизъюнкцию, делаем заключение, что перед нами К.Н.Ф., причем С.К.Н.Ф. т.к. в элементарную дизъюнкцию входят все три переменные.

Примечание: С.К.Н.Ф. позволяет сказать, что исходная формула ложна только в одном случае, если A, B, C – ложны. Зная С.К.Н.Ф. , легко написать и С.Д.Н.Ф если учесть, что отдельные элементарные конъюнкции описывают случаи истинности формы.

$$((A \vee B \vee C) \;\Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee$$
$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)) .$$

В записанной формуле слева от $\Leftrightarrow$ стоит С.К.Н.Ф. а справа С.Д.Н.Ф .

- Исчислить высказывание можно также, если смоделировать исходное составное высказывание эквивалентной электрической схемой.

Для этого, записав исходную формулу как формулу с тесными отрицаниями можно заменить ее эквивалентной электроцепью.

При этом: конъюнкция $A \wedge B$ может быть промоделирована последовательным включением в цепь двух выключателей A и B, а дизъюнкция $A \vee B$ – параллельным.

§ КВАНТОРЫ

Квантор – логическая операция, преобразующая утверждение о наличии некоторого свойства у объектов данного класса в утверждение о множестве объектов, обладающих этим свойством.

Очень важными являются следующие кванторы:
$\forall$ – квантор всеобщности;
$\exists$ – квантор существования;
$\exists!$ – квантор существования и единственности;

$\forall x A(x)$ – для всех x выполняется свойство $A(x)$;
$\exists x A(x)$ – существует x, для которого выполняется свойство $A(x)$;
$\exists! x A(x)$ – существует и притом только один x, для которого выполнено свойство $A(x)$.

Алгебраические свойства кванторов:

1°. $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\, \neg A(x)$,
$\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg A(x)$;

2°. Коммутирование кванторов с отрицанием:
$\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$,
$\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$;

3°. Коммутирование одноименных кванторов по разным переменным
$\forall x\, \forall y\, A(x, y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, A(x, y)$,
$\exists x\, \exists y\, A(x, y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, A(x, y)$;
Разноименные кванторы, вообще говоря, не перестановочны
$\exists x\, \forall y\, A(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, A(x, y)$;
Обратной импликации, вообще говоря, нет.

4°. Дистрибутивность $\forall$ относительно $\wedge$ и $\exists$ относительно $\vee$:
$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$,
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$;

5°. $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$,
$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$,
$\exists x\, (A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x)$,
$\forall x\, (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x)$;

6°. Свойства кванторов относительно отождествления:
$\forall x\, \forall y\, A(x, y) \Rightarrow \forall x\, A(x, x)$,
$\exists x\, A(x, y) \Rightarrow \exists x\, \exists y\, A(x, y)$;

7°. Дистрибутивность кванторов относительно $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ когда одно из высказываний не зависит от кванторной переменной:

$\forall x\ (A(x) \wedge B)\ \Leftrightarrow\ \forall x\ A(x) \wedge B,$

$\exists x\ (A(x) \wedge B)\ \Leftrightarrow\ \exists x\ A(x) \wedge B,$

$\forall x\ (A(x) \Rightarrow B)\ \Leftrightarrow\ \forall x\ A(x) \Rightarrow B,$

$\forall x\ (A \wedge B(x))\ \Leftrightarrow\ A \Rightarrow \forall x\ B(x);$

8°. Квантор существования и единственности $\exists!$

$\exists!\ xA(x) \Leftrightarrow \exists x\ A(x) \wedge \forall y\ (A(y) \Rightarrow y = x);$

9°. Релятивизованные кванторы:

$\forall_R\ x\ A(x) \Leftrightarrow \forall x\ (R(x) \Rightarrow A(x))$ «для всех x таких что $R(x)$»

$\exists_R\ x\ A(x) \Leftrightarrow \exists x\ (R(x) \wedge A(x))$. «существует x такое что $R(x)$ и $A(x)$»

§ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

С конца 19-го — начала 20-го века теория множеств становится универсальным языком математики.

Георг Кантор (Georg Cantor, 18 -1919, Германия), создатель теории бесконечных множеств и родоначальник теоретико-множественного языка в математике, писал: „под множеством мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашего восприятия или мысли“. Это высказывание не является определением понятия „множество“: оно лишь поясняет это понятие, связывая его с другими не менее сложными и не более определенными ранее понятиями. Понятие множества относится к основным, неопределяемым понятиям.

Созданную Кантором теорию обычно называют наивной теорией множеств. Основные положения наивной теории множеств следующие.

1. Множество может состоять из любых хорошо различимых элементов.
2. Множество вполне определяется совокупностью его элементов.
3. Всякое свойство множеств однозначно определяет класс тех и только тех множеств, которые им обладают.
4. Множества сами могут быть элементами множеств.
5. Включение объекта в ту или иную совокупность не отражается на его индивидуальных свойствах.
6. Допустимо мыслить бесконечные множества завершенными (актуальная бесконечность) и, соответственно, операции над ними — выполненными.

Процедура, порождающая неограниченную совокупность объектов в пренебрежении ограниченностью материальных, временных и энергетических ресурсов, а также законами физики, ассоциируется с понятием потенциальной бесконечности.

Математика не нуждается в объектах отличных от классов, вроде коров или молекул. Непринципиальная модификация теории множеств позволяет, при желании, включить и такие объекты в проводимые рассмотрения.

Будем стремиться обозначать элементы множеств, в основном, малыми (строчными) буквами из начала или из конца латинского алфавита:

$$a, b, c, \ldots; x, y, z, \ldots,$$

а множества — в основном, большими (заглавными) буквами из начала или из конца латинского алфавита:

$$A, B, C, \ldots; X, Y, Z, \ldots.$$

Конечно, последовательно выдерживать это соглашение, в общем, невозможно т.к. множества сами могут быть элементами других множеств.

Обозначения: $a \in A$ – элемент а принадлежит множеству A.

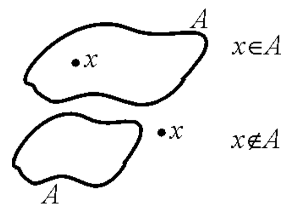
$x \notin A \Leftrightarrow \neg\ (x \in A)$ – x не принадлежит множеству A.

$A \ni x$ – множество A имеет элемент x.

$A \not\ni x$ – множество A не имеет элемента x.

Диаграммы Эйлера-Венна:

Множества: фигуры на плоскости, элементы множеств – точки.



Отношения равенства и включения:

1°. $A = B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

а) рефлексивность: $A = A$;

б) симметрия: $A = B \Rightarrow B = A$;

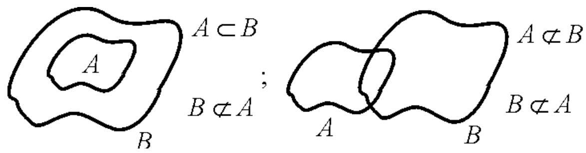
в) транзитивность: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

2°. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

«Множество A содержится в множестве B»,

A – подмножество, B – надмножество.

$A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$ – « A содержит B».



Отношение включения рефлексивно (множество содержит само себя $A \subset A$),
антисимметрично ($A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$),
транзитивно ($A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$).

Отношения равенства и включения определяют частичную упорядоченность.

Классификатор: множество M зачастую задается с помощью классификатора

$$M \equiv \{x \mid P(x)\}$$

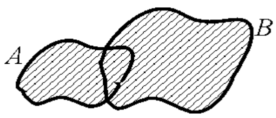
«Множество M есть множество объектов x для которых выполнено свойство $P(x)$».

Пустое множество $\varnothing$ – множество, которое не имеет элементов т.е.

а) $\forall x\ \ x \notin \varnothing$; б) $\forall X\ \ \varnothing \subset X$; в) $\forall X\ \ (X \subset \varnothing \Rightarrow X = \varnothing)$.

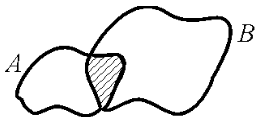
§ ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1°. $A \cup B \equiv \{x \in A \vee x \in B\}$



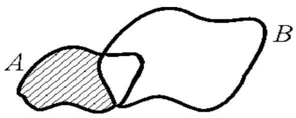
$A \cup B$ объединение множеств;

2°. $A \cap B \equiv \{x \in A \wedge x \in B\}$



$A \cap B$ пересечение множеств;

3°. $A \setminus B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$



$A \setminus B$ разность множеств;

4°. Объединение и пересечение множеств коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно по отношению друг к другу.

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $((A \cup B) \cup C) = (A \cup (B \cup C))$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C))$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C))$.

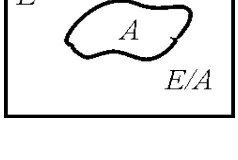
5°. Объединение и пересечение идемпотентны:

$A \cup A = A \cap A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \setminus \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $\varnothing \setminus A = \varnothing$; $A \setminus A = \varnothing$.

6°. Разность дистрибутивна по отношению к объединению, пересечению и разности:

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

7°. Дополнение множества в множестве E:



$$E \setminus A \equiv C_E A = \bar{A}.$$

При этом $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

8°. Декартово (прямое) произведение множеств:

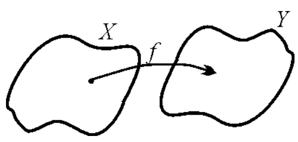
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

При этом: $A \times B \neq B \times A$ (если $B \neq A$); $A \times A = A^2$; $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$; $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$;

$$\left.\begin{aligned} A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \\ (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}\right\} \text{ дистрибутивность } \cup;$$

$$\left.\begin{aligned} A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \\ (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \end{aligned}\right\} \text{ дистрибутивность } \cap.$$

§ ОПЕРАЦИИ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

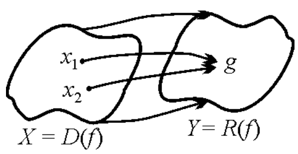


Пусть имеется два множества X и Y элементов, вообще говоря, произвольной природы. Пусть задан закон или правило f, по которому элементам множества X ставятся в соответствие элементы множества Y. Тогда говорят, что задана функция или отображение f между множествами X и Y. Если множество X числовое, то говорят о функции числового аргумента. Если множество Y числовое, то говорят о числовой функции .

Множество элементов $x \in X$, которым поставлены в соответствие элементы множества Y называется областью определения отображения f и обозначается $D(f)$; множество элементов $y \in Y$, которые поставлены в соответствие элементам множества X называется областью значений отображения f и обозначается $E(f)$;

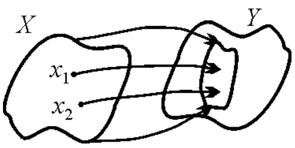
Физические типы соответствий:

1°. Сюръективное отображение (отображение «на»):



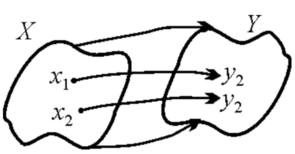
$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ y = f(x)$;
$\uparrow$ (не обязательно $\exists!$)

2°. Инъективное отображение (вложение):



$E(f) \subset Y$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

3°. Биективное отображение (и сюръективное, и инъективное):

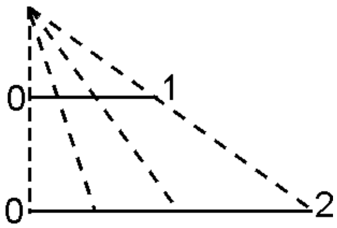


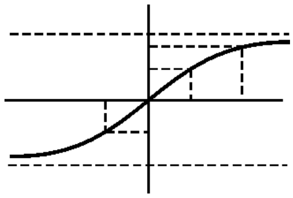
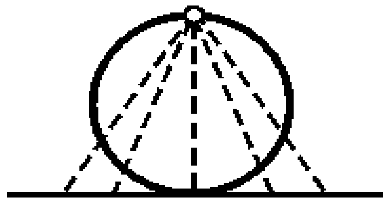
$D(f) = X$;
$E(f) = Y$; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

<u>Def:</u> Множества X и Y **называются равномощными**, если существует биективное отображение множества X на множество Y (взаимнооднозначное соответствие).

<u>Def:</u> Множество равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$ **называется счетным**.

Def: Множество равномощное множеству $X \equiv \{x \mid x \in (0,\ 1)\}$ **называется множеством мощности континуум**.



На рисунках приведены примеры биективных отображений, иллюстрирующих что:

а) множество чисел на интервале (0, 1) и множество чисел на интервале (0, 2) – равномощны.

б) множество чисел на интервале (0, 1) и множество чисел на вещественной оси – равномощны.

в) множество точек на окружности с выколотой точкой и множество чисел на вещественной оси – равномощны.

г) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел – счетно.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & \to & 2 & & 3 & \to & 4 & & 5 & & 6 & \dots \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{6}{2} & \dots \\
\downarrow & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{1}{3} & \nearrow & \frac{2}{3} & \swarrow & \frac{3}{3} & \nearrow & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \frac{6}{3} & \dots \\
\swarrow & \dots & \nearrow & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & & &
\end{array}$$

В таблице приведен один из возможных способов нумерации рациональных чисел, что и является доказательством счетности множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел .

5) Множество вещественных чисел $x \in (0,\ 1)$ не счетно.

Δ Доказательство проведем от противного. Допустим, что множество вещественных чисел $x \in (0,\ 1)$ счетно и, следовательно, их можно пронумеровать. Запишем все эти числа в порядке нумерации:

1. $0,\alpha_1^1\alpha_1^2\alpha_1^3\dots\dots$
2. $0,\alpha_2^1\alpha_2^2\alpha_2^3\dots\dots$
3. $0,\alpha_3^1\alpha_3^2\alpha_3^3\dots\dots$
4. ………………
   ………………

Запишем еще одно число из промежутка (0, 1).

$$0,\beta_1\beta_2\beta_3\dots\dots$$

При этом, пусть $\alpha_1^1 \neq \beta_1$; $\alpha_2^2 \neq \beta_2$; $\alpha_3^3 \neq \beta_3$; …..

Тогда, совершенно ясно, что это число не совпадает ни с одним из чисел приведенных в списке, несмотря на то, что оно принадлежит промежутку (0, 1). Следовательно, по крайней мере одно из чисел промежутка (0, 1), не получило никакого номера. Это противоречит предположению о счетности множества чисел $x \in (0,\ 1)$. Противоречие и доказывает теорему. ▲

Def: Множества, равномощные множеству точек, принадлежащих интервалу (0, 1) называются множествами мощности континиум.

Пример: Множество вещественных чисел **R** является множеством мощности континиум.

Одной из проблем, возникших в теории множеств и долгое время ожидавших своего решения, являлась так называемая проблема "континиума": существуют ли множества с мощностью большей мощности счетного множества, но меньшей мощности континиума?

Проблема была решена американским математиком Полем Коэном. Он доказал, что существование или отсутствие таких множеств не вытекает из аксиом теории множеств и может быть принято в качестве еще одной аксиомы теории множеств.

РАЗДЕЛ 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

1° Множество X называется ограниченным сверху (снизу) если существует вещественное L (l) число такое, что L больше (l меньше) любого элемета X.

Ограниченное сверху: $\exists L\in\mathbf{R}\quad \forall x\in X\quad x\le L.$

Ограниченное снизу: $\exists l\in\mathbf{R}\quad \forall x\in X\quad x\ge l.$

При этом L называется верхней, а l нижней гранями множества X.
Любое число большее верхней грани, естественно, также является верхней гранью.
Любое число меньшее нижней грани, естественно, также является нижней гранью.
Множество называется ограниченным, если оно ограничено сверху и ограничено снизу.

$\exists L,\, l\in\mathbf{R}\quad \forall x\in X\quad l\le x\le L$ или, что то же самое, $\exists A\in\mathbf{R}\quad \forall x\in X\quad |x|<A$.

2° Множество X называется неограниченным сверху, если $\forall L\in\mathbf{R}\quad \exists x\in X\quad x>L.$
Множество X называется неограниченным снизу, если : $\forall l\in\mathbf{R}\quad \exists x\in X\quad x<l.$
Множество называется неограниченным если оно неограничено сверху или снизу.

3° Наименьшая из верхних граней множества, если она существует, называется точной верхней гранью L^* множества X и обозначается : $L^* = \sup X$

L^* : 1. $\forall x\in X\quad x\le L^*$ 2. $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in X\ \ x>L^*-\varepsilon.$

Наибольшая из нижних граней множества, если она существует, называется точной нижней гранью l^* множества X и обозначается : $l^* = \inf X$

l^* : 1. $\forall x\in X\quad x>l^*$ 2. $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in X\ \ x<l^*-\varepsilon.$

4° Если $L^*\in X$, то L^* называется максимальным элементом множества X.

$L^* = \sup X = \max X.$

Аналогично, если $l^*\in X$, то l^* называется минимальным элементом множества X.

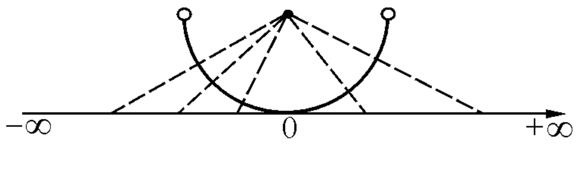
$l^* = \inf X = \min X.$

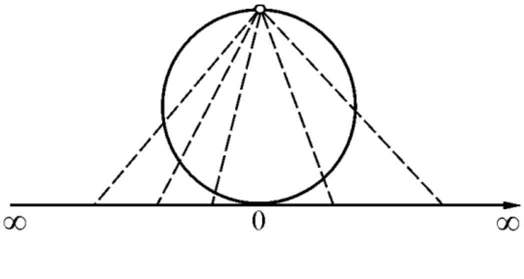
Из этих определений ясно, что максимальный элемент множества X одновременно является и точной верхней гранью множества а минимальный элемент множества X одновременно является и точной нижней гранью множества. Обратное, вообще говоря, неверно.

Примеры.
1° $X=[\,a, b]$. $a=\inf X=\min X$, $b=\sup X=\max X$.
2° $X=(\,a, b)$. $a=\inf X$, $b=\sup X$. Наибольшего и наименьшего элементов интервала не существует.

Т$^\circ$ Если непустое числовое множество ограничено сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Δ ▲

- Числовую прямую **R** можно расширить.





Рисунки иллюстрируют тот факт, что числовая прямая **R**, расширенная $+\infty$ и $-\infty$ топологически эквивалентна полуокружности с включенными крайними точками дуги или отрезку, а числовая прямая **R**, расширенная ∞ топологически эквивалентна окружности.

T$^\circ$ На числовой прямой **R**, расширенной $+\infty$ и $-\infty$ всякое непустое числовое множество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань (может быть несобственную). Δ ▲

Примеры.
1° X= **N**. $\inf X = \min X = 1$, $\sup X = +\infty$, $\max X$ не существует.
2° X= **Q**. $\inf X = -\infty$, $\sup X = +\infty$, $\max X$ и $\min X$ не существуют.

§ ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ И ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК

Характеристическое свойство промежутка – вместе с любыми двумя точками промежутка в нем содержится и всякий промежуток, лежащий между ними.
Основные типы промежутков:
а) интервал : $(a, b) = \{x\in \mathrm{R} \mid a < x < b\}$;
б) полуинтервал: $[a, b) = \{x\in \mathrm{R} \mid a \le x < b\}$ или $(a, b] = \{x\in \mathrm{R} \mid a < x \le b\}$; ;
б) сегмент: $[a, b] = \{x\in \mathrm{R} \mid a \le x \le b\}$.

Def. Открытой окрестностью точки a называется любой, содержащий ее, интервал. Открытая окрестность точки a обозначается U_a.. Интервал является открытой окрестностью любой своей точки.

Def. Открытой ε-окрестностью точки a называется множество $O(a,\varepsilon)$:

$$O(a,\varepsilon) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{ x\in \mathrm{R} \mid |x-a| < \varepsilon \}.$$

Def. Проколотой окрестностью точки a называется множество $\widehat{U}_a = U_a \setminus \{a\}$.

Def. Проколотой ε-окрестностью точки a называется множество

$$\widehat{O}(a,\varepsilon) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\} = \{ x\in \mathrm{R} \mid 0 < |x-a| < \varepsilon \}.$$

Def. Односторонней окрестностью точки a называется пересечение окрестности a с одной из полупрямых, на которые она разбивает числовую прямую:

$$U_a^+ = U_a \cap [a,+\infty] \quad , \quad U_a^- = (-\infty, a] \cap U_a;$$

$$\widehat{U}_a^+ = U_a \cap (a,+\infty] \quad , \quad \widehat{U}_a^- = (-\infty, a) \cap U_a .$$

Def. Для бесконечно удаленных точек окрестности определяются следующим образом:
Левая полуокрестность точки $+\infty$: $O(+\infty, \varepsilon) \equiv (\varepsilon, +\infty)$,
Правая полуокрестность точки $-\infty$: $O(\varepsilon, -\infty) \equiv (\varepsilon, -\infty)$.

§ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА

Def. Точка a называется внутренней точкой множества M, если она входит в множество M вместе с некоторой своей окрестностью: $\exists U_\mathrm{a} \mid U_\mathrm{a} \subset M$.

– множество всех внутренних точек множества M называется внутренностью множества ($\overset{\circ}{M}$).

– множества совпадающие со своей внутренностью называются открытыми, т.е. множество является открытым если все его точки внутренние (пример открытого множества – интервал).

Def. Точка a называется точкой прикосновения множества M, если любая ее окрестность имеет точки общие с множеством M: $\forall U_{\mathrm{a}} \ | \ U_{\mathrm{a}} \cap M \neq \varnothing$.

– совокупность точек прикосновения множества называется замыканием множества. ($\overline{M}$).

– множество совпадающее со своим замыканием называются замкнутым (пример замкнутого множества – сегмент).

Def. Точка a называется точкой сгущения множества M (предельной точкой), если любая ее проколотая окрестность имеет с M общие точки: $\forall \hat{U}_a \ | \ \hat{U}_a \cap M \neq \varnothing$.

– множество всех предельных точек множества М называется производным множеством (M').

Def. Точка a называется изолированной точкой множества M , если существует ее окрестность не имеющая с M общих точек, кроме точки a:

$$\exists U_{\mathrm{a}} \ | \ U_{\mathrm{a}} \cap M = \{ a \} \quad \Leftrightarrow \quad a \in M \quad \exists \hat{U}_a \ | \ \hat{U}_a \cap M = \varnothing.$$

Def. Точка a называется граничной точкой множества M , если любая ее окрестность имеет точки принадлежащие множеству M и точки не принадлежащие множеству M :

$$\forall U_{\mathrm{a}} \ | \ \exists x \in U_{\mathrm{a}} \cap M \quad \wedge \quad \exists y \in U_{\mathrm{a}} \ | \ y \notin M .$$

– совокупность граничных точек множества называется границей множества.

Def. Точка a называется внешней точкой множества M, существует ее окрестность, не имеющая с множеством общих точек : $\exists U_{\mathrm{a}} \ | \ U_{\mathrm{a}} \cap M = \varnothing$.

Кроме того, числовая прямая обладает двумя важнейшими свойствами, принятыми в качестве аксиом:
1°. Полуотделимость точек – $\forall a, b \in \mathrm{R} \ \wedge \ a \neq b \ \ \exists U_{\mathrm{a}} \ | \ b \notin U_{\mathrm{a}}$.
2°. Отделимость точек – $\forall a, b \in \mathrm{R} \ \wedge \ a \neq b \ \ \exists U_{\mathrm{a}}, \ \exists U_{\mathrm{b}} \ | \ U_{\mathrm{a}} \cap U_{\mathrm{b}} = \varnothing$.

§ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО КОШИ

Рассматриваются числовые функции числового аргумента:

$$f : D(f) \to E(f); \qquad D(f) \subset \mathbf{R}, \qquad E(f) \subset \mathbf{R},$$
$$g : D(g) \to E(g); \qquad D(g) \subset \mathbf{R}, \qquad E(g) \subset \mathbf{R}.$$

Операции над числовыми функциями числового аргумента вводятся поточечно, т.е.
1°. $(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x)$, $\qquad D(f + g) = D(f) \cap D(g)$;
2°. $(\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x)$, $\qquad D(\alpha f) = D(f)$;
3°. $(f \cdot g)(x) \equiv f(x) \cdot g(x)$, $\qquad D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$;
4°. $(f/g)(x) \equiv f(x)/g(x)$, $\qquad D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus \{ x | \ g(x) = 0 \}$;
5°. $(f \circ g)(x) \equiv f(g(x))$, $\qquad D(f \circ g) = D(g) \setminus \{ x | \ g(x) \notin D(f) \}$;
Последнее равенство определяет суперпозицию двух функций f и g.

Теперь дадим определение предела числовой функции. Мы приведем несколько определений, которые эквивалентны, но сформулированы с применением несколько различных форм записи:

Def. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a, где a точка сгущения области определения функции $f(x)$, если для любой окрестности U_{b} точки b

найдется проколотая окрестность $\hat{V}_a$ точки a, образ которой содержится в заданной окрестности точки b $f\,(\hat{V}_a) \subset U_b$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b :\Leftrightarrow \ a\in D(f)' \wedge \forall U_b \ \exists \hat{V}_a \mid f\,(\hat{V}_a) \subset U_b.$$

Def. Еще одно определение предела функции:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b :\Leftrightarrow \ a\in D(f)' \wedge \forall U_b \ \exists \hat{V}_a \ \forall x\in D(f) \cap \hat{V}_a \Rightarrow f\,(x) \subset U_b.$$

Def. То же самое:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b :\Leftrightarrow \ a\in D(f)' \wedge \forall U_b \ \exists \hat{V}_a \ \forall x\in D(f) \ \ x\in \hat{V}_a \Rightarrow f\,(x) \subset U_b.$$

Def. И вновь:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b :\Leftrightarrow a\in D(f)' \wedge \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid \forall x\in D(f) \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Def. И, наконец, определение предела функции для несобственных элементов:

* если $a\in\mathbf{R}$, $b=\infty$: $\quad a\in D(f)' \wedge \forall U_b \ \exists \hat{V}_a \mid f\,(\hat{V}_a) \subset U_b$

$a\in D(f)' \wedge \forall \varepsilon \ \ \exists \delta>0 \mid \forall x\in D(f) \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$

* если $a\in\mathbf{R}$, $b=-\infty$: $\quad a\in D(f)' \wedge \forall U_b \ \exists \hat{V}_a \mid f\,(\hat{V}_a) \subset U_b$

$a\in D(f)' \wedge \forall \varepsilon \ \ \exists \delta>0 \mid \forall x\in D(f) \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon.$

* если $a=\infty$, $b\in\mathbf{R}$: $\quad a\in D(f)' \wedge \forall U_b \ \exists \hat{V}_a \mid f\,(\hat{V}_a) \subset U_b$

$a\in D(f)' \wedge \forall \varepsilon>0 \ \ \exists \delta \mid \forall x\in D(f) \ |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

* если $a=+\infty$, $b\in\mathbf{R}$: $\quad a\in D(f)' \wedge \forall U_b \ \exists \hat{V}_a \mid f\,(\hat{V}_a) \subset U_b$

$a\in D(f)' \wedge \forall \varepsilon>0 \ \ \exists \delta \mid \forall x\in D(f) \ \ x > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

Примечание: Предел функции определяется поведением функции в произвольно малой проколотой окрестности предельной точки и не зависит ни от частного значения функции в предельной точке ни от поведения функции вне произвольно малой окрестности предельной точки.

Примечание: Два слова о существовании и не существовании предела функции:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) :\Leftrightarrow \ \exists b\in \overline{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \mid \lim_{x\to a} f(x) = b;$$

$$\neg\exists \lim_{x\to a} f(x) :\Leftrightarrow \neg\exists b\in \overline{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \mid \lim_{x\to a} f(x) = b;$$

- Запишем еще раз определение предела функции на языке ε–δ:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b :\Leftrightarrow a\in D(f)' \wedge \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid \forall x\in D(f) \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

************ ºººººººººº ——— .... ºººººººººººº ....

Внимательно рассмотрев определение предела нетрудно установить, что:

а) подчеркнутое звездочками указывает на то, какой предельный процесс описывается;

б) подчеркнутое кружечками указывает на то, что точка a обязательно должна быть точкой сгущения и значения x выбираются из области определения функции. При сокращенной записи, это зачастую не пишут несмотря на обязательность.

И отметим, что при $a\in D(f)'$ о пределе имеет смысл говорить, а при $a\notin D(f)'$ о пределе вообще не имеет смысла говорить;

в) подчеркнутое сплошной линией указывает куда стремится функция $f(x)\to b$;

б) подчеркнутое линией из точек указывает куда стремится аргумент $x\to a$.

- Запишем теперь сокращенное определение того, что $f(x)\to b$ при $x\to a$ на языке ε–δ:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b :\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \;\mid\; 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \;|f(x)-b|<\varepsilon.$$

************* ——— .... —————————

Если изменяется характер стремления функции или аргумента то записать модифицированное определение предела поможет нам

- **Словарик**

А)

$f(x)\to b$	$\forall\varepsilon>0$	....	$\|f(x)-b\|<\varepsilon$;
$f(x)\to b+0$	$\forall\varepsilon>0$	....	$b\le f(x)<b+\varepsilon$;
$f(x)\to b-0$	$\forall\varepsilon>0$	....	$b-\varepsilon<f(x)\le b$;
$f(x)\to\infty$	$\forall\varepsilon$	....	$\|f(x)\|>\varepsilon$;
$f(x)\to+\infty$	$\forall\varepsilon$	....	$f(x)>\varepsilon$;
$f(x)\to-\infty$	$\forall\varepsilon$	....	$f(x)<\varepsilon$.

Б)

$x\to a$	$\exists\delta>0$ |	$0<\|x-a\|<\delta\Rightarrow$
$x\to a+0$	$\exists\delta>0$ |	$a<x<a+\delta\Rightarrow$
$x\to a-0$	$\exists\delta>0$ |	$a-\delta<x<a\Rightarrow$
$x\to\infty$	$\exists\delta$ |	$\|x\|>\delta\Rightarrow$
$x\to+\infty$	$\exists\delta$ |	$x>\delta\Rightarrow$
$x\to-\infty$	$\exists\delta$ |	$x<\delta\Rightarrow$

Пользование этим словариком может существенно упростить процесс записи определения предела функции.

Примеры.

1°. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x},\quad x\neq 0. \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$

В самом деле: $|f(x)-0|=|f(x)|=|x\sin\dfrac{1}{x}|=|x|\cdot|\sin\dfrac{1}{x}|\le\;|x|<\varepsilon.$

2°. $f(x)=\text{Const} \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=\text{Const}.$

Действительно: $|f(x)-\text{Const}|=|\text{Const}-\text{Const}|=0<\varepsilon.$

Т° (О единственности предела) Предел функции при $x\to a$, если он существует, определяется однозначно.

Δ Доказательство проводится от противного и основано на свойстве отделимости точек числовой прямой ▲

§ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Def. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции равен значению функции в точке. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Def. Функция, по определению, считается непрерывной в каждой изолированной точке своей области определения.

Def. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0

$$:\Leftrightarrow\ x_0 \in D(f)' \wedge \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \mid\ \forall x \in D(f)\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Def. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Def. Точки замыкания области определения функции в которых функция не является непрерывной называются точками разрыва функции.

Примечание: Непрерывность функции означает, что знак функции и знак предела перестановочны: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$.

§ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

– Базисные (основные) элементарные функции это – константы, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические функции и функции обратные к ним.

– Элементарные функции это функции, полученные из базисных элементарных функций с помощью конечного числа операций (арифметических действий) и суперпозиций.

- Элементарные функции непрерывны в области определения.

Чрезвычайно важный факт, который будет доказан по мере расширения наших знаний по теории непрерывных функций. А пока несколько примеров.

Примеры элементарных функций:

1°. $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$;

2°. $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2} \cdot \sqrt[3]{x} + \dfrac{x - |x|}{2} = \left[\begin{array}{ll} x^{4/3} & x \ge 0 \\ x & x < 0 \end{array}\right.$;

3°. $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \left[\begin{array}{ll} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{array}\right.$;

и

Примеры неэлементарных функций:

1°. $f(x) = [x]$; Целая часть x – наибольшее целое число не превосходящее x.

Функция имеет точки разрыва при целочисленных значениях x.

2°. $f(x) = \{x\} = x - [x]$; Дробная часть x. Также разрывна в целочисленных точках.

3°. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \left[\begin{array}{ll} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{array}\right.$.

И маленькое *примечание*: функции $f(x) = [x]$, $f(x) = \{x\}$ и $f(x) = \mathrm{sgn}\, x$ не элементарные, а функция $f(x) = \arcsin(\log_7(2^x + \cos\pi x))\cdot\exp\dfrac{\pi x}{4}$ элементарная.

§ ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Def. Вещественно-значная функция натурального аргумента называется последовательностью.

$f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ – каждому натуральному числу n ставится в соответствие $x_n = x(n)$.

Обозначается $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$.

x_n – элемент последовательности. Величина $x_n = x(n)$ рассматриваемая как функция от n, называется общим членом последовательности.

Единственная точка сгущения у последовательности : $+\infty$.

Def. $b\in\overline{\mathbf{R}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b \;:\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0 \;\; \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \;\; | \;\; \forall \mathrm{n} > \mathrm{N} \;\; |x_n - b| < \varepsilon.$ или

$b\in\overline{\mathbf{R}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b \;:\Leftrightarrow\; \forall U_b \;\; \exists\, \mathrm{N} \;\; | \;\; \forall \mathrm{n} > \mathrm{N} \;\; x_n \in U_b.$

- Если последовательность имеет предел то она называется сходящейся, иначе – расходящейся.
- Предел последовательности зависит от поведения в произвольно малой окрестности $+\infty$ (т.е. при достаточно больших n), и не изменится если поменять (или вообще отбросить или добавить) любое конечное число членов.

Примечание. Учитывая, что у последовательности, единственной точкой сгущения является $+\infty$, в обозначении предела можно не указывать, что $n \to +\infty$.

Примеры:

1°. $\lim\left[1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right] = 1.$

Действительно отметим, что: $x_1 = 0$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 2/3$, $x_4 = 5/4$, ….

А теперь: $\forall\varepsilon>0 \;\; |x_n - b| = |\,1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\,| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

т.е. $\forall\varepsilon>0 \;\; \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) = \dfrac{1}{[\varepsilon]} \;\; | \;\; \forall \mathrm{n} > \mathrm{N} \;\; |x_n - b| < \varepsilon.$

2°. Нетрудно понять, что $\lim(-1)^n$ не существует.

3°. $\lim q^n = +\infty$ (если $q > 1$).

В самом деле, если $q = 1 + \Delta$ (где $\Delta>0$)

то $q^n = (1+\Delta)(1+\Delta)(1+\Delta)\ldots. = 1 + n\Delta + \dfrac{n(n+1)}{2}\Delta^2 + \ldots. > 1 + n\Delta > \varepsilon.$

РАЗДЕЛ 3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И ДР. ВЕЛИЧИНЫ

§ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПРИМЕРЫ

Def. Величина $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

(Обозначается : $f(x) = o(1)$, читается : $f(x)$ есть O-малое от единицы или $f(x)$ есть бесконечно малая величина).

$f(x) = o(1)\ :\quad \Leftrightarrow\quad a \in D(f)'\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \widehat{V}_a\ \ \forall x \in D(f) \mid x \in \exists \widehat{V}_a \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

*. Существование конечного предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ равносильно утверждению, что функция $\varphi(x) = f(x) - b$ есть бесконечно малая величина при $x \to a$.

*. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ то $f(x) = b + \varphi(x)$, где $\varphi(x) = o(1)$ при $x \to a$.

Примеры :

1^0. $f(x) = x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$. Для указанной функции $f(x) = o(1)$ при $x \to 0$.

2^0. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Для данной последовательности $x_n = o(1)$ при $n \to +\infty$.

Def. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то величина $f(x)$ называется бесконечно большой величиной.

*. Если функция имеет предел равный $+\infty$ или $-\infty$, то она является бесконечно большой, но бесконечно большая величина не обязательно стремиться к бесконечности определенного знака, т.е.: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \ \vee\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Примеры :

1^0. $x_n = (-1)^n \cdot n$ Для данной последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ бесконечно большая величина.

2^0. $x_n = n^{(-1)^n}$. Элементы этой последовательности: 1, 2, 1/3, 4, 1/5, 6,…
Величина не ограниченна, хотя бесконечно большой не является.

Def. Числовая функция называется ограниченной сверху, снизу, ограниченной если таковым является её множество значений.

$f(x)$ ограничена сверху $\Leftrightarrow\ \exists M \quad \forall x \in D(f) \quad f(x) \le M$

$f(x)$ ограничена снизу $\Leftrightarrow\ \exists m \quad \forall x \in D(f) \quad f(x) \ge m$

$f(x)$ ограничена $\Leftrightarrow\ \exists m, M \quad \forall x \in D(f) \quad m \le f(x) \le M$

$\Leftrightarrow\ \exists A \quad \forall x \in D(f) \quad |f(x)| \le A$

$f(x)$ неограничена сверху $\Leftrightarrow\ \forall M \quad \exists\ x \in D(f) \quad f(x) > M$

$f(x)$ неограничена снизу $\Leftrightarrow\ \forall m \quad \exists\ x \in D(f) \quad f(x) < m$

$f(x)$ неограничена $\Leftrightarrow\ \forall A\ \exists\ x \in D(f)\ |f(x)| > A$

$\Leftrightarrow\ \forall M\ \ \exists\ x \in D(f)\ \ f(x) > M\ \vee\ \forall m\ \ \exists x \in D(f)\ \ f(x) < m$.

Def. Числовая функция называется ограниченной …. на множестве X, если таковым является её сужение на множество X.

Сужение : $\quad f(x)|_X = f(x) \quad \forall x \in D(f|_X) = D(f) \cap X$).

Def. Функция $f(x)$ называется (финально) ограниченной … в точке a сгущения её области определения если $\exists \widehat{V}_a$ на которой функция ограничена …

$f(x)$ ограничена … – ограничена в любой точке и на любом множестве.

$f(x)$ неограничена … в некоторой точке или на некотором множестве – неограниченна.

В данном определении вместо многоточия указывается характер ограниченности (сверху, снизу, …).
Ограниченность функции обозначается $f(x) = O(1)$, (читается : $f(x)$ есть О-большое от единицы или $f(x)$ есть ограниченная величина).

Примеры :

1⁰. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

ограничена сверху, снизу, ограничена сама по себе, в любой точке на любом множестве.

2⁰. $f(x) = \frac{1}{x}$.

На $(0,1)$ – ограничена снизу, неограниченна сверху.
На $[1,100)$ – ограничена сверху, ограничена снизу, ограничена.
На $[-1,1]$ – неограничена сверху, неограничена снизу, неограничена.

Def. Величина $f(x)$ называется отделенной от нуля если

$$\exists\varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D(f) \;\; |f(x)| > \varepsilon$$

Def. Функция $f(x)$ называется отделенной от нуля на множестве X если таково её сужение на X .

Def. Функция $f(x)$ финально отделена от нуля в точке $x = a$ если $\exists\widehat{V}_a$ такая, что функция отделена от нуля в этой проколотой окрестности.

*. Функция отделена от нуля $\Rightarrow$ отделена от нуля на любом подмножестве и в любой точке. Но…отделена от нуля в каждой точке не обязательно отделена от нуля.
*. Ненулевая бесконечно малая не отделена от нуля.
*. Функция, имеющая в точке ненулевой предел финально отделена от нуля в этой точке.
*. Если $f(x)$ отделена от нуля $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{f(x)}$ – ограничена.

Примеры :

1⁰. $f(x) = 1 + x^2$ (место для рисунка) отделена от нуля.
2⁰. $f(x) = x^2$ Для $\forall x \neq 0$ функция финально отделена от нуля.

§ ЛЕММЫ О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

1^0.Сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.
2^0.Произведение бесконечно малой на ограниченную есть величина бесконечно малая.
3^0.Величина арифметически обратная к бесконечно большой есть бесконечно малая, а арифметически обратная к бесконечно малой есть бесконечно большая.

Δ 1^0. Пусть a – точка сгущения для $D(f)$ и $D(g)$ и, кроме того $f(x) = o(1)$ и $g(x) = o(1)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\widehat{U}_a \quad \forall x \in D(f) \cap \widehat{U}_a \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\widehat{V}_a \quad \forall x \in D(g) \cap \widehat{V}_a \quad |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Теперь возьмём $\widehat{W}_a = \widehat{U}_a \cap \widehat{V}_a$.

Получим:

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\widehat{W}_a \quad \forall x\in D(f)\cap D(g)\cap\widehat{W}_a \quad |f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

что и т. д.

2^0.Теперь пусть $g(x) = O(1)$ и $f(x) = o(1)$.

$$\exists A \quad \exists\widehat{V}_a \quad \forall x\in D(g)\cap\widehat{V}_a \quad |g(x)|<A,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \qquad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\widehat{U}_a \quad \forall x\in D(f)\cap\widehat{U}_a \quad |f(x)|<\frac{\varepsilon}{A}.$$

Вновь возьмём $\widehat{W}_a=\widehat{U}_a\cap\widehat{V}_a$.

Тогда:

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\widehat{W}_a \quad \forall x\in D(f)\cap D(g)\cap\widehat{W}_a \quad |f(x)\cdot g(x)|=|f(x)|\cdot|g(x)|<A\cdot\frac{\varepsilon}{A}<\varepsilon$ что и т. д.

3^0. $f(x) = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Получаем:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\widehat{U}_a\ \forall x\in D(f)\cap\widehat{U}_a \quad |f(x)|<\varepsilon \ \Rightarrow\frac{1}{f(x)}>\varepsilon.$$ что и т. д. ▲

§ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

T°. Если существуют и конечны пределы стоящие справа в следующих равенствах, то также существуют и конечны пределы, стоящие слева и равенства выполняются :

$1^0.\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) \Leftarrow\!| \ \lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

$2^0.\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) \Leftarrow\!| \ \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

$3^0.\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} \Leftarrow\!| \ \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ne 0$.

Δ 1^0. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=c$.

Тогда $f(x)=b+\varphi_1(x)$ и $g(x)=c+\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)=o(1)$ $\varphi_2(x)=o(1)$.

Следовательно: $f(x)+g(x)=b+c+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=b+c+\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ бесконечно мала .

Значит $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=b+c=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

2^0,3^0 доказываются аналогично. ▲

T°. (о пределе сложной функции).

Пусть $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$; $\lim\limits_{y\to b} f(y)=c$. Тогда $\lim\limits_{y\to b} f(y)=\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$.

Δ По условию теоремы: $\lim\limits_{y\to b} f(y)=c \Leftrightarrow b\in D(f)' \quad \forall U_c \quad \exists\widehat{V}_b \quad f(\widehat{V}_b)\subset U_c$,

$$\lim_{x\to a} g(x)=b \Leftrightarrow a\in D(g)' \quad \forall U_b \quad \exists\widehat{W}_a \quad g(\widehat{W}_a)\subset U_b .$$

Получаем:

$$a\in D(f\circ g)' \ \wedge\ \forall U_c \quad \exists\widehat{W}_a \quad (f\circ g)(\widehat{W}_a)=f(g(\widehat{W}_a))\subset U_c \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to a} f(g(x))=c$$

что и т. д.▲

Def. Действия с несобственными элементами :

$* \; a+\infty=\infty \qquad * \; (\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=+\infty \qquad * \; a+(\pm\infty)=\pm\infty$

$* \; (\pm\infty)\cdot(\mp\infty)=-\infty \qquad * \; (\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty \qquad * \; \infty\cdot\infty=\infty$

$* \; a\cdot\infty=\infty$ (если $a\neq 0$) $\qquad * \; \infty\cdot(\pm\infty)=\infty$

$* (\pm\infty)\cdot a = \{\pm\infty$ е. $a>0$, $\mp\infty$ е. $a<0$ $\}$

$* \; \frac{a}{\infty}=\frac{a}{\pm\infty}=0 \qquad * \; \frac{a}{0}=\infty$ е. $a\neq 0 \qquad * \; \frac{a}{\pm\infty}=\{\pm 0$ е. $a>0$, ∓ 0 е. $a<0$ $\}$.

Δ. Докажем например что $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$

Тогда $\qquad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\widehat{U}_a \quad \forall x\in D(f)\cap\widehat{U}_a \quad |f(x)|>\varepsilon$,

и $\qquad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\widehat{V}_a \quad \forall x\in D(g)\cap\widehat{V}_a \quad |g(x)|>\varepsilon$.

Теперь возьмём $\quad \widehat{W}_a=\widehat{U}_a\cap\widehat{V}_a$.

Получим:

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\widehat{W}_a \quad \forall x\in D(f)\cap D(g)\cap\widehat{W}_a \quad f(x)+g(x)>\varepsilon+\varepsilon>2\varepsilon$ что и т. д.

аналогично доказываются остальные соотношения.▲

Введя операции над несобственными элементами, обратим внимание на то, что не всяким действиям с несобственными элементами даны определения. В таких случаях говорят, что мы имеем дело с неопределенностями. Неопределенностями они называются потому, что результат этих действий может быть различным в зависимости от величин учавствующих в операции.

Рассматривается (пока) четыре типа неопределённостей:

$$\infty-\infty, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}\ .$$

Первые две неопределённости сводятся, путем арифметических преобразований, к последним двум, а для раскрытия последних двух предназначено правило Лопиталя:

Правило: Если функции и обе стремятся к нулю или бесконечности, то предел отношения функций равен пределу отношения производных этих функций, если предел стоящий справа существует и конечен. $\qquad \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \Leftarrow\!| \quad \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\qquad \Delta$ ▲

Конечно, такая формулировка правила Лопиталя, мягко говоря, оставляет желать лучшего. Аккуратная формулировка и доказательство этого, очень важного и удобного в применении правила будет приведено несколько позже, по мере нашей готовности к этому. Формулировка же приводится для того, чтобы позволить применять это правило, пусть и в весьма приблизительном виде, для вычисления пределов.

РАЗДЕЛ 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ Арифметические действия над непрерывными функциями. суперпозиция непрерывных функций

T⁰. Сумма, произведение и частное непрерывных функций непрерывны (частное при условии, что знаменатель отличен от нуля).

$\Delta\ \lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=f(x_o)+g(x_0)=(f+g)(x_0)$.

(для произведения и частного аналогично).▲

Следствия:

1^0.Любая натуральная степень непрерывна : $f(x)=x$ непрерывна $\Rightarrow$ $f^n(x)=x^n$. непрерывна.

2^0.Любой многочлен $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k$ непрерывен.

3^0.Любая рациональная функция $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ непрерывна в своей области определения.

T^0.Суперпозиция непрерывных функций непрерывна.

Δ Справедливость следует из теоремы о пределе сложной функции▲

§ ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Def. Сужением функции на множество M или ограничением функции $f(x)$ на множество M называется:

$$f\big|_M(x)=f(x)\quad \forall x\in D(f\big|_M)=D(f)\cap M\ .$$

Def. Частичным пределом функции $f(x)$ по множеству M называется предел ограничения этой функции на множество M .

$$\lim_{x\to x_0}f\Big|_M(x)=\lim_{M\ni x\to x_0}f(x).$$

T^0. Если в точке $x=a$ существует предел функции, то в этой точке существует и равен ему всякий частичный предел, о котором имеет смысл говорить.

$\Delta\qquad \lim\limits_{x\to a}f(x)=b\ \Leftrightarrow\ a\in D(f)'\ \ \forall \underset{b}{U}\ \exists\widehat{V}_a\ \ f(\widehat{V}_a)\subset U_b\ \Rightarrow\ f(\widehat{V}_a\cap M)\subset U_b$,

а это значит, что: $\qquad \lim\limits_{x\to a}f\big|_M(x)=b$ ▲

Примечание: Из существования частичного предела и, даже, бесконечного числа равных частичных пределов не следует существование предела функции.

Пример: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=1,\ x\in\left\{x\,|\,x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z\right\}$, но $\neg\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$.

T°(об односторонних пределах)**.** Если существуют и равны между собой оба односторонних предела, то существует и равен их общему значению предел функции в данной точке.

$\Delta\ \ a\in D(f\big|_{[a,+\infty)})'\quad \forall U_b\ \ \exists\widehat{V}_a^+\ \ \forall x\in D(f)\cap\widehat{V}_a^+\ \ f(x)\subset U_b$,

$a\in D(f\big|_{(-\infty,a\ ]})'\quad \forall U_b\ \ \exists\widehat{V}_a^-\ \ \forall x\in D(f)\cap\widehat{V}_a^-\ \ f(x)\subset U_b$.

Возьмём $\quad \widehat{V}_a=\widehat{V}_a^+\cup\widehat{V}_a^-\quad$ и получим $\quad \lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ ▲

§ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В РАВЕНСТВАХ И НЕРАВЕНСТВАХ

1^0. Если функции, имеющие предел в некоторой точке совпадают на множестве сгущающемся в этой точке, то их пределы равны.

2⁰. Если последовательности, имеющие предел, содержат совпадающие подпоследовательности, то их пределы равны.

3⁰. Если функции совпадают в проколотой окрестности предельной точки, то их пределы равны в случае существования .

4⁰. Если две последовательности совпадают, начиная с некоторого номера, то их пределы существуют или не существуют одновременно, и в случае существования равны.

5⁰. Если из двух функций одна не превышает другой в проколотой окрестности предельной точки, то предел первой не превосходит предела второй в случае их существования.

6⁰. Если предел одной функции больше предела второй в некоторой точке, то существует проколотая окрестность этой точки, в которой первая функция больше второй.

Δ $1^0,2^0$: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)$ и имеется множество M :

$$\forall x\in M \quad f(x)=g(x) \ \wedge \ \exists a\in M'.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f\big|_M(x)=\lim\limits_{x\to a} g\big|_M(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$3^0,4^0$: Во-первых: $\forall \widehat{W}_a \quad \lim\limits_{x\to a} f\big|_{\widehat{W}_a}(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Во-вторых: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f\big|_{\widehat{W}_a}(x)=\lim\limits_{x\to a} g\big|_{\widehat{W}_a}(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

6^0: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$; $b>c$, тогда

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \iff \forall\varepsilon>0 \ \exists \widehat{V}_a \ \forall x\in \widehat{V}_a \ \Rightarrow \ b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=c \iff \forall\varepsilon>0 \ \exists \widehat{U}_a \ \forall x\in \widehat{U}_a \ \Rightarrow \ c-\varepsilon<g(x)<c+\varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon=\dfrac{b-c}{2}$; $\widehat{W}_a=\widehat{V}_a\cap\widehat{U}_a$,

тогда $\forall x\in \widehat{W}_a \qquad g(x)<c+\varepsilon<b-\varepsilon<f(x)$.

5^0: Пусть $f(x)\ge g(x) \ \forall x\in \widehat{W}_a$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ge \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Доказательство здесь проведем от противного.

Допустив, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)<\lim\limits_{x\to a} g(x)$, получим по п.$6^0$ $\exists \widehat{W}_a \quad f(x)<g(x)$,

а это противоречит условию теоремы. ▲

и, наконец

T⁰. (Принцип двустороннего ограничения, теорема о двух милиционерах).

Если две функции имеют общий предел и в окрестности предельной точки третья функция заключена между ними, то она имеет тот же предел.

Δ следует из 5^0 и 6^0.

Пусть $f(x)\le k(x)\le g(x) \qquad \left(\forall x\in \widehat{W}_a\right)$,

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \iff \forall U_b \quad \exists \widehat{V}_a \quad \forall x\in \widehat{V}_a\cap D(f) \quad f(x)\subset U_b,$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=b \iff \forall U_b \quad \exists \widehat{W}_a \quad \forall x\in \widehat{W}_a\cap D(g) \quad g(x)\subset U_b$$

и, т.к. $k(x)\le g(x)$ и $k(x)\ge f(x)$, то $\qquad \forall x \in \widehat{V}_a \cap \widehat{W}_a \cap D(f) \cap D(g) \qquad k(x) \subset U_b$

т.е. $\lim\limits_{x\to a} k(x) = b$. ▲

§ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1⁰. $f(x) = \sin x$,

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0| < \varepsilon .$$

Выбрав $\delta = \varepsilon$ получим, что

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ (\delta = \varepsilon) \ | \, 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

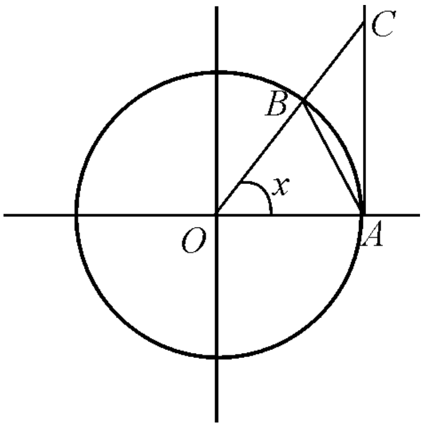
т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. Функция $y = \sin x$ непрерывна $\forall x \in R$.

2⁰. $f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$-суперпозиция линейной функции и $\sin x$, $f(x) = \cos x$ непрерывна как суперпозиция двух функций непрерывных $\forall x \in R$.

3⁰. Функции tg$x$, ctg$x$ непрерывны $\forall x \in$**R**, кроме точек, в которых знаменатель обращается в ноль (как частное двух непрерывных функций),
т.е. функции y = tg$x$ и y = ctg$x$ непрерывны в своей области определения.

РАЗДЕЛ 5. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

§ ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ



Рассмотрим: $\qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Тогда: $\qquad 0 < S_{\Delta AOB} < S_{\text{сек.}AOB} < S_{\Delta AOC}$,

$$0 < \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}R \cdot Rx < \frac{1}{2}R \cdot R \cdot \mathrm{tg}\, x,$$

$$0 < \sin x < x < \mathrm{tg}\, x ,$$

$$0 < \frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x},$$

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

Учитывая, что при $x \to +0$: $\quad \lim\limits_{x\to +0} \cos x = 1 - 0$,

$\lim\limits_{x\to +0} 1 = 1$ по принципу двустороннего ограничения получаем: $\lim\limits_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Для $x < 0$ вывод проводится аналогично. Получаем: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Этот предел называется **первым замечательным пределом**.

§ МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

1⁰. Функция $f(x)$ называется возрастающей на множестве $X \subset D(f)$ если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \Big| \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$, или, что тоже самое
$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \equiv \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \ .$$

2^0. Функция $f(x)$ называется неубывающей на множестве $X \subset D(f)$ если
$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \Big| \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$, или, что тоже самое
$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \equiv \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge 0 \ .$$

3^0. Функция $f(x)$ называется убывающей на множестве $X \subset D(f)$ если
$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \Big| \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$, или, что тоже самое
$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \equiv \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \ .$$

4^0. Функция $f(x)$ называется не возрастающей на множестве $X \subset D(f)$ если
$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \Big| \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$, или, что тоже самое
$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \equiv \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le 0 .$$

Из приведенных определений ясно, что понятие возрастания и убывания функции является понятием глобальным, в отличие от, скажем, непрерывности являющейся понятием локальным.
Функции возрастающие на множестве X или убывающие на множестве X называются монотонными функциями.

Для последовательностей:

1^0. Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если
$$\forall m,n \in \mathbf{N} \quad | \quad m > n \ \Rightarrow \ x_m > x_n .$$
2^0. Последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей, если
$$\forall m,n \in \mathbf{N} \quad | \quad m > n \ \Rightarrow \ x_m < x_n .$$
3^0. Последовательность $\{x_n\}$ называется не возрастающей, если
$$\forall m,n \in \mathbf{N} \quad | \quad m > n \ \Rightarrow \ x_m \le x_n .$$
4^0. Последовательность $\{x_n\}$ называется не убывающей, если
$$\forall m,n \in \mathbf{N} \quad | \quad m > n \ \Rightarrow \ x_m \ge x_n .$$

Для монотонных функций:

*.Если функция монотонна на множестве, то она монотонна на всяком его подмножестве.
*.Если функция одноименно монотонна на промежутках с общей точкой, то она одноименно монотонна на их объединении.
*.Максимальным промежутком монотонности называется такой промежуток монотонности, который не содержится ни в каком большем промежутке монотонности.
*.Максимальные промежутки одноименной монотонности либо совпадают, либо не имеют общих точек.
*.Максимальные промежутки монотонности (разноименной) могут быть смежными и иметь общий конец.

§ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД МОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ.

*. Сумма одноименно монотонных функций одноименно монотонна со слагаемыми.

*. Произведение положительных одноименно монотонных функций одноименно монотонно с сомножителями.

*. Изменение знака монотонной функции (умножение на “-1”) меняет тип монотонности на противоположный.

*. Изменение знака аргумента меняет тип монотонности на противоположный.

*.Переход от положительной монотонной функции $f(x)$ к арифметически обратной ей функции $\frac{1}{f(x)}$ меняет тип монотонности на противоположный.

*. Взаимно-обратные функции одноименно монотонны.

*. Суперпозиция одноименно монотонных функций не убывает.

*. Суперпозиция разноименно монотонных функций не возрастает.
(При этом суперпозиция не строгая, если не строго монотонна хотя бы одна из функций).

Т. (о существовании предела монотонной ограниченной последовательности):
Монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.
Монотонная последовательность всегда имеет предел (возможно не собственный).
Δ Пусть к примеру x_n не возрастает и ограничена снизу .

$$\forall n \;\; x_n \ge x_{n+1} \qquad \text{и} \qquad \inf x_n = l^* .$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; l^* > x_N > l^*+\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; \forall n > N \quad l^* < x_n \le x_N < l^*+\varepsilon$ ▲.

Пример: Рассмотрим последовательность : $x_n = \frac{c^n}{n!}$.

1) $c > 0$. Тогда $0 < \frac{c}{n+1} < 1$ начиная с некоторого номера .

$x_{n+1} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c}{n+1} \cdot \frac{c^n}{n!} = \frac{c}{n+1} \cdot x_n$, т.е. $x_{n+1} < x_n$ и последовательность монотонно убывает. При этом она ограничена снизу, т.к. $x_n = \frac{c^n}{n!} > 0$.

Следовательно $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \in R$.

В равенстве: $x_{n+1} = \frac{c}{n+1} \cdot x_n$ перейдем к пределу при $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} x_n \;\; \Rightarrow \;\; b = 0 \cdot b = 0 \;\; \Rightarrow \;\; b = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad .$$

2) c – любое: $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{c^n}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|c^n|}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|c|^n}{n!} = 0$, и отсюда : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Т.к. величина является бесконечно малой тогда и только тогда, когда бесконечно малым является её модуль.

§ ПЕРЕСТАНОВКИ, РАЗМЕЩЕНИЯ И СОЧЕТАНИЯ

Пусть имеется набор из n различных объектов.

Правило, по которому объектам $A, B, C, \ldots$ ставятся в соответствие элементы $f(A), f(B), \ldots$ из того же набора, причем каждый только один раз, называется

перестановкой из n элементов $\begin{pmatrix} A & B & C & D & .... \\ f(A) & f(B) & f(C) & f(D) & .... \end{pmatrix}$ и количество перестановок обозначается P_n.

Количество перестановок из n элементов: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Чтобы установить справедливость этой формулы представим себе, что необходимо заполнить n пронумерованных ящичков n различными шарами по одному в каждый ящичек. Тогда, первый ящичек можно заполнить любым из имеющихся n шаров, второй ящичек – любым из оставшихся n–1 шаров, следующий – любым из оставшихся n–2 шаров и т.д. Перемножая эти числа, мы и получим уже приведенную выше формулу.

Пусть требуется произвести выборку k элементов из набора в n различных элементов и, при этом считаются различными выборки не отличающиеся составом выбранных элементов, а отличающиеся только порядком, в котором выбираются эти k элементов. Такие выборки называются размещениями из n элементов по k и, количество таких выборок обозначается: A_n^k. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Установить справедливость этой формулы легко, если применить рассуждения аналогичные рассуждениям, приведенным при выводе формулы для перестановок из n элементов.

Выборки k элементов из набора в n элементов, когда различными считаются только выборки, имеющие разный состав, называются сочетаниями из n элементов по k.

Их количество обозначается C_n^k, и при этом : $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Замечание: при вычислении количества сочетаний мы иногда сталкиваемся с необходимостью вычислить $0!$. Чтобы не записывать для этих случаев отдельные формулы, условились считать, что: $0! \equiv 1$. Оказалось, что такая договоренность не приводит к неприятностям, а позволяет вычислять C_n^k и в тех случаях, когда в знаменателе стоит $0!$.

Примеры:

1. Каково количество различных вариантов расположения команд в итоговой турнирной таблице футбольного чемпионата , если в нем принимают участие 16 команд? Ответ: Таких способов: $P_{16} = 16!$.
2. Каково количество различных вариантов распределения призовых мест (золото, серебро, бронза)? Ответ: При распределении призовых мест важным является не только то кто из участников стал призером, но и каким именно.
   Поэтому, получаем :
   $$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360.$$
3. Каково количество различных вариантов определения двух неудачников сезона, занявших два последних места (покидают высшую лигу) Ответ: При определении неудачников важным является только то кто из участников занял последние два места и абсолютно неважно какое именно , ибо все равно обе команды покидают элитный дивизион.
   Поэтому, получаем :

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16\cdot 15}{2} = 120.$$

§ БИНОМ НЬЮТОНА

Приведем и докажем очень важную формулу, предназначенную для возведения суммы двух слагаемых в натуральную степень. Эта формула называется формулой бинома Ньютона.

$$\left(a+b\right)^n = (a=b)(a+b)...(a+b) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \quad .$$

Δ Доказательство теоремы проведем по методу математической индукции:

а) При $n=1$ имеем

$$\left(a+b\right)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k} = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a+b$$

т. е. при $n=1$ равенство выполняется.

б) Допустим равенство выполняется при $n=n$ т.е. $\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Рассмотрим:

$$\left(a+b\right)^{n+1} = \left(a+b\right)^n\left(a+b\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\right)\left(a+b\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} =$$

$$= C_n^n a^{n+1} b^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + C_n^0 a^0 b^{n-0+1} =$$

$$= C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + C_{n+1}^0 a^0 b^{n-0+1} =$$

$$= C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} + C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1-0} = \ldots$$

$$\left| \begin{array}{c} C_n^{k-1} + C_n^k = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \\ = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\dfrac{1}{n-k+1} + \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\dfrac{n+1}{k(n-k+1)}\right) = \\ \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k \end{array} \right|$$

$$\ldots = C_{n+1}^n a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n-k} + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^0 = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n-k} \quad .$$

т.е. из справедливости формулы при $n=n$ следует её справедливость при $n=n+1$. По методу математической индукции формула бинома Ньютона доказана. ▲

Следствия из формулы бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0.$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Свойство сочетаний: $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, полученное выше даёт способ вычисления коэффициентов разложения $(a+b)^n$. Эти коэффициенты

1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
… … … … ...

называются биноминальными.
Этот способ демонстрирует, так называемый, треугольник Паскаля:

§ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО ГЕЙНЕ (ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ)

Пределом функции $f(x)$ по последовательности $\{ x_n \}$ называется $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Пример: Рассмотрим $f(x)=\sin x$. Для этой функции $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует.

Однако при $x_n = n\pi$ $\quad f(x_n)=\sin n\pi = 0$ и , следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

T°. Если существует предел функции $f(x)$ по всякой последовательности $x_n \to a \quad (x_n \in D(f))$ отличной от a то все эти пределы равны и существует равный их общему значению предел функции в точке a.

Δ

а) Пусть : $\quad x_n \to a \quad (x_n \neq a)$ и $x'_n \to a \ (x'_n \neq a)$.

и пусть : $\quad \lim f(x_n) = b$; $\quad \lim f(x'_n) = b'$; и $\quad b \neq b'$.

Рассмотрим новую последовательность $\{x''_n\}$ такую, что: $x''_{2k-1} = x_k$ а $x''_{2k} = x'_k$ ($k\in\mathbf{N}$) т.е. между элементами последовательности $\{x_n\}$ вставим элементы последовательности $\{x'_n\}$.

Учитывая, что $x''_n \neq a$, для этой последовательности получим: $\exists \lim f(x''_n)$.

Но … $\quad f(x''_{2k-1}) = f(x_k) \in U_b$ $\quad$ начиная с некоторого номера k_1.

$f(x''_{2k}) = f(x'_k) \in U_{b'}$ $\quad$ начиная с некоторого номера k_2.

Тогда $\quad \forall k > k_1 \wedge k > k_2 \quad f(x''_k) \in U_b \wedge f(x''_k) \in U_{b'}$.

Из свойства отделимости точек числовой прямой следует, что $\quad \exists U_b \cap U_{b'} = \varnothing$ и значит не существует $\lim f(x''_n)$, если $b \neq b'$.Значит: $b = b'$.

б) Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$. Здесь b общее значение пределов функции по всем последовательностям . Тогда:

$$a \notin D(f)' \vee \exists U_b \ \forall \widehat{V}_a \ \exists x \in D(f) \cap \widehat{V}_a \ \ f(x) \notin U_b .$$

Построим последовательность $\{x_n\}$ такую, что: $\quad \forall n \in \mathbf{N} \quad 0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$.

Для нее $f(x_n) \notin U_b$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x_n) \neq b$, что вновь противоречит условию теоремы. Как говорится, противоречие доказывает теорему. ▲

Доказанная теорема свидетельствует о том, что:
Предел функции по Гейне и по Коши – понятия эквивалентные.

§ ЧИСЛО e.

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045... \qquad e \text{ -иррациональное число.}$$

Δ $\qquad$ Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$:

1^0. $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots.$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Тогда:

$$x_n<1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Из последнего неравенства следует, что:

$$2{,}5<x_n<3.$$

Т.е. последовательность $\{x_n\}$ -ограничена.

2^0. $x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots>1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots=x_n$,

т. е. $x_{n+1}>x_n$ и, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Таким образом, установлено, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастающая и ограниченна сверху . Следовательно, существует и конечен предел этой последовательности: $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in\mathbf{R}$.

Предел этой последовательности называется числом e . Некоторое количество первых значащих цифр его численного значения приведено выше.
Для их запоминания часто применяют следующее мнемоническое правило: запомните число 2,7 ; далее два раза напишите год рождения Льва Толстого 1828;
и два раза половина прямого угла 45, между которыми стоит прямой угол 90.

Обозначение e ввел Я. Эйлер (e - первая буква в слове exponenta). Обозначение стало общеупотребительным, так как напоминает и об Я. Эйлере (e - первая буква фамилии Euler Leonard, 1707-1783).

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Эйлер ввел также π (греч. περιπχερια - окружность) в 1736 г. И хотя еще в 1706 г. то же сделал У. Джонсон (W. Johnson), только после Эйлера обозначение стало обще употреби-тельным.

$$\pi\approx\sqrt{2+\sqrt{3}}\text{, 3.141…3.146}$$

Тот же результат можно получить, воспользовавшись неравенством Я. Бернулли:

$$(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x \quad \text{если } x>-1 \text{ и } \alpha>0\text{, причем } "=" \Leftrightarrow x=0\vee n=1.$$

Для натурального n, $n\in N$, и положительного $x>0$ неравенство очевидно из формулы бинома:

$(1+x)^{n+1}=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\ldots>1+nx$. Для натурального n, $n\in N$, и $-1<x<0$ доказывается методом математической индукции: первый шаг индукции $(1+x)^1\ge 1+1-x$, предположение индукции $(1+x)^n \ge 1+nx$, индуктивный шаг $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \ge (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$.

В общем случае (для вещественных показателей) легко доказывается методами дифференциального исчисления.

Для последующего рассуждения требуется только доказанное здесь (n натуральное).

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n >$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) > 1+\frac{1}{n+1}-\frac{n+1-1}{(n+1)^2}-\frac{n+1-1}{(n+1)^3} =$$

$$= \quad 1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

- последовательность x_n возрастает ($x_n > 0$).

Далее определим последовательность:

$$z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > x_n. \quad \text{Тогда для нее:} \quad \frac{z_n}{z_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > \left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right) >$$

$$> \quad 1-\frac{1}{n+2}+\frac{n+1}{n(n+2)}-\frac{n+1+1-1}{n(n+2)^2} = 1+\frac{1}{n(n+2)^2} > 1.$$

- последовательность z_n убывает. Очевидно $\forall n \ \ x_n < z_n$.

Если $n'' > n', n$, то $\forall n, n' \quad x_1 \le x_n < z_{n'} \le z_1$ - любой член одной последовательности ограничивает другую последовательность.

Следовательно: $\exists \lim x_n \le \lim z_n$. Но $z_n = x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim x_n = \lim z_n$.

§. РЯД ДЛЯ e. SERIES FOR e.

Отбрасывая в выражении $(*)$ для x_n все (положительные) слагаемые после k+1 имеем:

$$x_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Существование предела слева доказано, предел справа очевидно существует, поэтому в пределе $n \to +\infty$ получаем двойное неравенство:

$$e \ge 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!} = y_k > x_k; \quad k \to \infty.$$

Учитывая что, и правая и левая части неравенства стремятся к e, по принципу двустороннего ограничения получаем:

$$\lim y_n \equiv 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=e; \qquad e=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\equiv\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

- представление e в виде суммы числового ряда.

Теперь: $e-y_n=\dfrac{1}{(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+2)!}+\ldots = \dfrac{1}{(n+1)!}\left[1+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)+\ldots}\right]<$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right]=\ldots$$

Заменяем множители, большие $n+2$ на $n+2$ (уменьшение знаменателей – увеличение слагаемых и суммы)

$$\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\frac{1}{nn!}, \text{ поскольку:}$$

$$\frac{n+2}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{n(n+1)^2}=\frac{1}{n}\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]<\frac{1}{n}.$$

Значит $0<e-y_n<\dfrac{1}{nn!}\Rightarrow 0<\dfrac{e-y_n}{1/nn!}<1$. Обозначая $\Theta_n=\dfrac{e-y_n}{1/nn!}$, $0<\Theta_n<1$, получим

$$e-y_n=\frac{\Theta_n}{nn!}. \Rightarrow \quad e=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\Theta_n}{n-n!}, \quad \text{где } 0<\Theta_n<1.$$

Пользуясь этой формулой легко вычислить e вручную (без калькулятора) с любой разумной точностью (достаточной для большинства «практических» задач). Прежде чем делать это, получим ещё одно представление числа e в виде. Для этого заметим, что:

$$1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{nn!}=$$

$$=3-\left(\frac{1}{1\cdot1!}-\frac{1}{2\cdot2!}-\frac{1}{2!}\right)-\left(\frac{1}{2\cdot2!}-\frac{1}{3\cdot3!}-\frac{1}{3!}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{(n-1)(n-1)!}-\frac{1}{nn!}-\frac{1}{n!}\right)=$$

$$=3-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{kk!}-\frac{1}{(k+1)(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}e.$$

Величина убывает к e, поскольку слагаемые в сумме положительны.

$$\frac{1}{kk!}\Bigg|^{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)(k+1)!}\Bigg|^{k}-\frac{1}{(k+1)!}\Bigg|^{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}\left[(k+1)^2-k-k(k+1)\right]=$$

$$=\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}\Rightarrow e=3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}.$$

Для разности $e-\left(3-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k(k+1)(k+1)!}\right)=e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{nn!}\right)$ имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}=\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+2)!}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\left[1+\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{n+2}+\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+2)}\frac{1}{(n+3)}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{1}{n(n+2)(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right]=\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=$$

$$=\frac{n+2}{n(n+1)^2(n+1)!}<\frac{1}{n^2(n+1)!},$$

поскольку $\frac{n+2}{(n+1)^2}=\frac{1}{n}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{1}{n}\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<\frac{1}{n}$.

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n-n!}-\frac{\tilde{\Theta}_n}{n^2(n+1)!},\ \text{где}\ 0<\tilde{\Theta}_n<1.$$

Пользуясь полученными формулами, можно вычислим число e с необходимым количеством верных знаков после запятой.

§ ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Δ Рассмотрим $0<x<1$ и функцию $\mathrm{E}(x)=\left[\frac{1}{x}\right]=n$ – целая часть от $\frac{1}{x}$. И тогда для каждого n, существует x, такое что : $n\le\frac{1}{x}<n+1$.

Построим последовательность $\{x_k\}$, такую что: $n_k\le\frac{1}{x_k}<n_k+1$.

Получим, что при $n\to\infty$ $x_n\to 0$ и:

$$n_k\le\frac{1}{x_k}<n_k+1\ \Rightarrow\ \frac{1}{n_k}\ge x_k>\frac{1}{n_k+1}\ \Rightarrow\ 1+\frac{1}{n_k}\ge 1+x_k>1+\frac{1}{n_k+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{1/x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$ Из этого неравенства получаем :

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}<(1+x_k)^{1/x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right).$$

У дроби в левой части числитель стремится к e, а знаменатель к 1 и дробь стремится к e. Произведение в правой части также стремится к e, ибо первый сомножитель стремится к e, а второй к 1. Тогда, по принципу двустороннего ограничения:

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k}=e\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.\ \blacktriangle$$

Полученный предел называется **вторым замечательным пределом**.

§ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

A). Докажем, что: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Δ Представим n в виде: $n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n$. Затем раскроем скобки по биному Ньютона:

$$n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + ... + (\sqrt[n]{n} - 1)^n. \qquad \text{Тогда:}$$

$$n > 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \;\Rightarrow\; \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 < n - 1 - n(\sqrt[n]{n} - 1)^2.$$

И получаем: $$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2\left[(n-1) - n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right]}{n(n-1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)}{n-1}\right) < \frac{2}{n} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \sqrt{\dfrac{2}{n}}$. Выберем $\mathrm{N}(\varepsilon) = \left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]$. Получаем, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \mathrm{N}(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] \;\; \forall n > \mathrm{N}(\varepsilon) \quad \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{т.е.} \quad \lim\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0. \quad \blacktriangle$$

B). Δ Теперь заметим, что при $a > 1$ и $n \to \infty$: $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \to 1$.

Из принципа двустороннего ограничения заключаем, что:

$$\lim a^{1/n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim a^{-1/n} = 1.$$

Следовательно:

$$\left|a^{1/n} - 1\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1 - \varepsilon < a^{1/n} < 1 + \varepsilon \quad \forall n > N_1,$$

и $$\left|a^{-1/n} - 1\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1 - \varepsilon < a^{-1/n} < 1 + \varepsilon \quad \forall n > N_2.$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \max\{N_1, N_2\} \quad \forall n > N \quad 1 - \varepsilon < a^{-1/n} < a^{1/n} < 1 + \varepsilon.$$

И , наконец:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Big| \quad \forall |x| < \frac{1}{n} \quad 1 - \varepsilon < a^{-1/n} < a^{1/n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow \left|a^x - 1\right| < \varepsilon$$

т.е. $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$. Полученное соотношение означает, что функция $f(x) = a^x$ непрерывна в нуле. $\blacktriangle$

C). Δ $$\lim_{x \to b} a^x = \lim_{x \to b}\left(a^b + a^x - a^b\right) = a^b + \lim_{x \to b}\left(a^x - a^b\right) = a^b + \lim_{x \to b} a^b\left(a^{x-b} - 1\right) =$$

$$= a^b + a^b \lim_{t \to 0}\left(a^t - 1\right) = a^b \quad \text{т.е.} \quad \lim_{x \to b} a^x = a^b.$$

Полученное равенство доказывает, что функция $f(x) = a^x$ непрерывна $\forall x \in \mathbf{R}$. $\blacktriangle$

§ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Мы уже установили, что последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, ограничена сверху и $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, а последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает, ограничена снизу и $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$. Тогда:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/n} < e^{1/n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)/n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right) < e^{1/n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)/n}.$$

Логарифмируем неравенство : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \frac{n+1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Получаем два неравенства:

$$\text{а) } \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}; \qquad \text{б) } \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно: $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

Заменив в этом неравенстве n на $-n$ получим:

$$\frac{1}{-n+1} < \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{-n}.$$

Объединяем полученные выше два неравенства:

$-\frac{1}{n-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. Выбирая $|x| < \frac{1}{n}$, получаем:

$$-\frac{1}{n-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < \ln(1+x) < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x) = 0$ или $\lim\limits_{z\to 1}\ln z = \ln 1 = 0$.

Следовательно, функция $y = \ln z$ непрерывна в точке $z = 1$.

Теперь рассмотрим $\lim\limits_{z\to b}(\ln z - \ln b) = \lim\limits_{z\to b}\ln\frac{z}{b} = \ln 1 = 0$.

Отсюда заключаем, что: $\lim\limits_{z\to b}\ln z = \ln b$.

Следовательно, функция $y = \ln z$ непрерывна в точке $z = b$ $\forall b \in \mathbf{R}$.

§ ПРЕДЕЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И СТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Из второго замечательного предела следует, что:

1°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$.

Используя непрерывность логарифмической функции, меняем местами знак предела и знак функции.

2°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$. Здесь достаточно вспомнить связь между логарифмами с различными основаниями.

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=1$. Для перехода от первого предела ко второму выполнена замена переменных в предельном переходе: $e^x-1=y\Rightarrow e^x=1+y\Rightarrow x=\ln(1+y)$.

4°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\ln a$ **.** Осуществлен переход к натуральному основанию.

5°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\dfrac{\mu\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mu\ln(1+x)}{x}=\mu$.

Использована теорема о пределе произведения двух функций, имеющих предел.

§ СТЕПЕННО-ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Рассматривается степенно-показательное выражение:

$f(x)^{g(x)}$ и при этом $f(x)>0$.

Т°. Пусть пределы функций, стоящих в основании и показателе существуют и конечны и предел основания больше нуля: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c\in\mathbf{R}$ и $b>0$**.**

Тогда: $$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=(\lim_{x\to a}f(x))^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=b^c.$$

Δ Утверждение теоремы следует из следующей цепочки преобразований:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln(f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln\lim\limits_{x\to a}f(x)}=e^{c\ln b}=b^c.$$

И, при этом, использовалась только непрерывность показательной и логарифмической функций. ▲.

Еще действия над несобственными элементами:

$$a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & a>1\\ +0 & 0<a<1\end{cases};\qquad a^{-\infty}=\begin{cases}+0 & a>1\\ +\infty & 0<a<1\end{cases};$$

$$(+0)^a=\begin{cases}+0 & a>0\\ +\infty & a<0\end{cases};\qquad (+\infty)^a=\begin{cases}+\infty & a>0\\ +0 & a<0\end{cases};\qquad (+0)^{-\infty}=+\infty.$$

В связи с тем , что теорема налагает некоторые ограничения на основание и показатель степенно-показательного выражения появляется три новых неопределенности:

$$0^0,\qquad \infty^0,\qquad 1^\infty.$$

Рассмотрим степенно-показательное выражение $f(x)^{g(x)}$:

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}=e^{g(x)\ln(1+(f(x)-1))}=e^{g(x)\frac{\ln(1+(f(x)-1))}{(f(x)-1)}(f(x)-1)}.$$

И получаем весьма полезное соотношение : $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)(f(x)-1)}$. Это соотношение справедливо если $f(x)\to 1$ при $x\to a$.

Пример. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{x\to a}n^{1/n}=(+\infty^0)=\lim\limits_{x\to a}e^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln n}{n}}=e^0=1$.

§ СИМВОЛЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО СРАВНЕНИЯ.

Напоминаем: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой величиной и обозначается $f(x) = o(1)$.

Если $\exists C$ такое, что при $x \to a$ $|f(x)| < C$, то функция $f(x)$ называется ограниченной и обозначается $f(x) = O(1)$.

Def.

1) $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $\exists h(x)$ $f(x) = h(x)g(x)$ и $h(x) = o(1)$.
   Читается: $f(x)$ есть величина бесконечно малая по сравнению с $g(x)$.

2) $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $\exists h(x)$ $f(x) = h(x)g(x)$ и $h(x) = O(1)$.
   Читается: $f(x)$ есть величина ограниченная по сравнению с $g(x)$.

3) $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $\exists h(x)$ $f(x) = h(x)g(x)$ и $h(x) = 1 + o(1)$.
   Читается: величины $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны.

4) $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $\exists h(x)$ $f(x) = h(x)g(x)$;
   $h(x) = O(1)$ и отделена от нуля.
   Читается: величины $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка.

Немного другие формы записи тех же определений.

Def.

1) $o(f(x)) = f(x)o(1) \Leftrightarrow \lim f(x) = 0$,
2) $O(f(x)) = f(x)O(1)$,
3) $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$,
4) $f(x) \asymp g(x) \Leftrightarrow \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = Const \neq 0$.

При этом:

1° $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$;

2°. $f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(x) \asymp g(x)$;

3° $f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$;

4° $f(x) \asymp g(x) \Leftrightarrow f(x) = O(g(x)) \wedge g(x) = O(f(x))$.

Все эти соотношения транзитивны:

1° $f(x) = o(g(x)) \wedge g(x) = o(h(x)) \Rightarrow f(x) = o(h(x))$;

2° $f(x) = O(g(x)) \wedge g(x) = O(h(x)) \Rightarrow f(x) = O(h(x))$;

3° $f(x) \sim g(x) \wedge g(x) \sim h(x) \Rightarrow f(x) \sim h(x)$;

4° $f(x) \asymp g(x) \wedge g(x) \asymp h(x) \Rightarrow f(x) \asymp h(x)$.

Отношения эквивалентности, ограниченности и однопорядковости рефлексивны, т.е.

1° $f(x) \sim f(x)$; 2° $f(x) = O(f(x))$; 3° $f(x) \asymp f(x)$.

Отношение пренебрежимости не рефлексивно и не симметрично

1° $f(x) \neq o(f(x))$; 2° $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow g(x) \neq o(f(x))$.

Отношение эквивалентности и однопорядковости симметрично

1° $f(x) \sim g(x) \Rightarrow g(x) \sim f(x)$;

2° $f(x) \asymp g(x) \Rightarrow g(x) \asymp f(x)$.

Отношение относительной ограниченности антисимметрично

$f(x) = O(g(x)) \wedge g(x) = O(f(x)) \Rightarrow f(x) \asymp g(x)$.

В произведениях и в суперпозициях o-символов получаем, как результат, наименьшее o, а в суммах наибольшее O.

$$o(O(f(x))) = o(f(x)) \; ; \qquad o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x)) \; .$$

Все отношения (кроме эквивалентности) не чувствительны к знаку входящих функций.

Def. Если функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы двух слагаемых, причем второе есть величина бесконечно малая по сравнению с первым $f(x) = f_0(x) + o(f_0(x))$, то первое слагаемое $f_0(x)$ называется главным членом функции $f(x)$.

T°. Две величины эквивалентны тогда и только тогда, когда разность между ними есть величина бесконечно малая по сравнению с любой из них.

Δ $\quad f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 = o(1) \Leftrightarrow$

$f(x) - g(x) = g(x)o(1) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$.

Аналогично получаем, что $f(x) - g(x) = o(f(x))$. ▲

T°. Если эквивалентные величины имеют пределы, то эти пределы равны. Δ ▲.

T°. Главный член произведения равен произведению главных членов.

Δ Пусть $f(x) = f_0(x) + o(f_0(x))$ и $g(x) = g_0(x) + o(g_0(x))$ т.е. $f_0(x)$ и $g_0(x)$ являются главными членами функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Тогда:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(f_0(x) + o(f_0(x))\right)\cdot\left(g_0(x) + o(g_0(x))\right) = \\ &= f_0(x)g_0(x) + f_0(x)o(g_0(x)) + o(f_0(x))g_0(x) + o(f_0(x))o(g_0(x)) = \\ &= f_0(x)g_0(x) + f_0(x)g_0(x)o(1) + f_0(x)g_0(x)o(1) + f_0(x)g_0(x)o(1)o(1) = \\ &= f_0(x)g_0(x) + o(f_0(x)g_0(x)). \end{aligned}$$

Следовательно, $f_0(x)g_0(x)$ есть главный член для произведения $f(x)g(x)$. ▲

Замечание: Обращаем внимание на то, что главный член суммы (разности), вообще говоря, не равен сумме (разности) главных членов.

На $(+\infty)$ показательная функция с основанием больше 1 (меньше 1) растет (убывает) быстрее любой степени , а логарифмическая функция возрастает медленнее любой степени:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\mu}}{a^x} = 0 \; ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg_a x}{x^{\mu}} \quad .$$

§ СТЕПЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Пусть задана система функций : $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$; $n = 0,1,2,3,\ldots$ $x \to x_0$.
Асимптотическим степенным разложением функции $f(x)$ при $x \to x_0$ по шкале $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ называется:

$$f(x) \simeq c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i \; ;$$

$$f(x) \simeq c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \; ;$$

$$f(x) \simeq c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + O((x - x_0)^{n+1}) \; .$$

§ ДЕЙСТВИЯ НАД АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ.

Введем действия над асимптотическими разложениями.
Пусть: $f(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$ и $g(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} d_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$ асимптотические разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ по шкале $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

1˚. Умножение асимптотического разложения на число $\alpha \in \mathbf{R}$ ($\alpha \neq 0$):

$$(\alpha f)(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \alpha\, c_k \varphi_k + o(\varphi_n(x))$$

2˚. Сложение асимптотических разложений:

$$(f + g)(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} (c_k + d_k)\varphi_k + o(\varphi_n(x))$$

3˚. Линейная комбинация асимптотических разложений:

$$(\alpha f + \beta g)(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} (\alpha\, c_k + \beta\, d_k)\varphi_k + o(\varphi_n(x))$$

4˚. Умножение асимптотических разложений:

$$(f\, g)(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} l_k \varphi_k + o(\varphi_n(x)) \quad \text{где} \quad l_k = \sum_{m=0}^{k} c_m d_{k-m} \; .$$

В частности: $l_0 = c_0 d_0$; $l_1 = c_0 d_1 + c_1 d_0$; $l_2 = c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 \mathrm{d}_0$.

5˚. Деление асимптотических разложений:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \simeq \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k + o(\varphi_n(x)) \qquad ;$$

и a_k находим из соотношений $f(x) \simeq g(x)\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k + o(\varphi_n(x))\right)$

§ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МАКЛОРЕНА ДЛЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_n(x) = x^n\}_{n=1}^{\infty}$. Если взять эту систему функций в качестве шкалы асимптотического сравнения при $x \to 0$, то справедливы следующие асимптотические разложения:

1˚. $e^x \simeq 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots + \begin{bmatrix} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{bmatrix}$$

2°. $$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots + \begin{bmatrix} o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{bmatrix}$$

3°. $$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots + \begin{bmatrix} o(x^{2n+1}) \\ O(x^{2n+2}) \end{bmatrix}$$

4°. $$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots + \begin{bmatrix} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{bmatrix}$$

5°. $$x^\mu \simeq 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \ldots.$$

$$x^\mu \simeq 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \ldots. + \begin{bmatrix} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{bmatrix}$$

§ ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕННЫХ ПРОМЕЖУТКАХ (КОШИ-КАНТОРА)

T°. Во всякой последовательности вложенных друг в друга замкнутых промежутков, длины которых стремятся к нулю, содержится единственная точка, принадлежащая всем промежуткам одновременно: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$

$$\lim(a_n - b_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists! c \quad c \in [a_k, b_k] \;\; \forall k \in \mathrm{N}.$$

Δ Последовательность: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - возрастающая и ограниченная сверху (любым b_i), следовательно по теореме Вейерштрасса имеет предел: $\exists \lim a_k = c_1$.

Последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ - убывающая и ограниченная снизу (например, одним из a_i), т.е. $\exists \lim b_k = c_2$.

Тогда: $c_1 - c_2 = \lim a_n - \lim b_n = \lim(a_n - b_n) = 0$, т.е. $c_1 = c_2 = c$ ▲

§ ТЕОРЕМА (БОРЕЛЯ-ЛЕБЕГА) О КОНЕЧНОМ ПОКРЫТИИ.

Def. Система множеств M_α, где α пробегает некоторое множество *A* называется покрытием множества *X,* если $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$.

Def. Если все M_α - открытые множества, то покрытие называется открытым, если множество *A* – конечно, то покрытие называется конечным.

Def. Всякая подсистема множеств покрытия, которая тоже покрывает данное множество называется подпокрытием покрытия M_α.

T°. Всякое покрытие замкнутого промежутка интервалами содержит конечное подпокрытие. (Из всякого покрытия замкнутого промежутка интервалами можно выделить конечное).

Δ Доказательство теоремы проведем от противного.

Пусть из некоторого покрытия [*a*,*b*] нельзя извлечь конечное. Разделим отрезок пополам точкой *c*

$$[\text{———}|\text{———}]$$
$$a \qquad b \qquad c$$

Тогда, по крайней мере, для одного из промежутков [*a*,*c*] или [*c*,*b*] нет конечного подпокрытия. Обозначим этот промежуток $[a_1, b_1]$. Аналогично, (продолжая процедуру), получим: $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset \ldots$ и $\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0$. Т.е. существует только одна общая точка всех интервалов. Для точки *c* существует интервал *I* из покрытия, такой что $c \in I$ – и этот интервал покрывает $[a_k, b_k]$ начиная с некоторого *k*. Это противоречит тому, что ни один из этих промежутков не имеет конечного покрытия. Предположение о том, что из бесконечного открытого покрытия замкнутого промежутка нельзя выделить конечное подпокрытие привело к противоречию. Это доказывает теорему.▲

§ ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКЕ

T°. (Больцано-Вейерштрасса). Всякая ограниченная бесконечная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

На расширенной вещественной прямой:

Всякая бесконечная последовательность содержит подпоследовательность, имеющую предел, возможно несобственный. Δ▲.

Следствие°. Всякое ограниченное бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку. На расширенной числовой прямой всякое бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку, возможно несобственную.

§ ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ

Def. Нижним пределом последовательности ($\underline{\lim} x_n$) называется наименьший из частичных пределов этой последовательности. Верхним пределом последовательности ($\overline{\lim} x_n$) называется наибольший из частичных пределов последовательности.

При этом: $$\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n.$$

Всякий частичный предел последовательности лежит между ее нижним и верхним пределами.

T°. Предел последовательности существует тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы совпадают.

Δ 1) Пусть $\overline{\lim} x_n = \lim x_{n_k} = b$ и $\underline{\lim} x_n = \lim x_{n_j} = a$ и $b>a$.

$$\begin{array}{ccc} & U_a & & U_b & \\ \text{——} & (\text{—}|\text{—}) & \text{————} & (\text{—}|\text{—}) & \text{——} \\ & a & & b & \end{array}$$

$\exists N$ начиная с которого все элементы $\{x_{n_k}\}$ и $\{x_{n_j}\}$ попали соответственно в окрестности U_a и U_b. Тогда смешав элементы этих двух последовательностей получим последовательность, не имеющую предела. Следовательно, если верхний и нижний пределы последовательности не равны между собой, то существует подпоследовательность, не имеющая предела и, значит, предел последовательности не существует.

2) $\lim x_n = a \Rightarrow \forall x_{n_k}\ \ \lim x_{n_k} = a \Rightarrow \overline{\lim} x_{n_k} = \underline{\lim} x_{n_k}$ ▲

У всякой функции, для которой $a \in D(f)'$, существуют наибольший и наименьший частичные пределы. Они называются верхним и нижним пределами функции $f(x)$ при $x \to a$: $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$.

T°. Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы совпадают. Δ ▲.

§ КРИТЕРИЙ КОШИ

Def. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n, n' > N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |x_n - x_{n'}| < \varepsilon .$$

T°. Всякая сходящаяся последовательность – фундаментальна

$$\Delta\ \ \lim x_n = b \in \mathbf{R}\ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \begin{cases} \forall n > N & |x_n - b| < \varepsilon/2 \\ \forall n' > N & |x_{n'} - b| < \varepsilon/2 \end{cases}$$

$$|x_n - x_{n'}| = |x_n - b + b - x_{n'}| \le |x_n - b| + |x_{n'} - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \qquad ▲$$

A. Критерий Коши для последовательности.
Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Δ Первая часть критерия доказана выше.

2) Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальна. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n, n' > N\ \ |x_n - x_{n'}| < \varepsilon$.

Начиная с N последовательность $\{x_n\}$ - ограничена т.к. $\forall n\ \ x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon$.

Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. $\lim x_{n_k} = b \in \mathbf{R}$,

$$|x_n - b| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - b| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon;\quad \lim x_n = b \quad ▲.$$

В. Критерий Коши для функции.

Функция $f(x)$ при $x \to a$, $a \in D(f)'$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \hat{U}_a \text{ в которой } \ \ \forall x', x'' \in \hat{U}_a \ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon .$$

Δ Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathrm{R}$. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \hat{U}_a \ \ \forall x \in D(f) \cap \hat{U}_a \ \ \Rightarrow \ \ |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим: $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')| \le |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

т.е. необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \hat{U}_a \ \ \forall x', x'' \in D(f) \cap \hat{U}_a \ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Построим последовательность $\{x_n\}$, такую что $x_n \in \hat{U}_a$ и $\lim x_n = a$. Для этой последовательности, по условию теоремы можно написать:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ \ \forall m, n > N(\varepsilon) \ \ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon .$$

Тогда, согласно критерию Коши для последовательности , последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится и, значит (по Гейне) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$. ▲

§ ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА

Т°. Если для двух последовательностей, из которых вторая строго монотонна и неограничена существует предел отношения приращений общих членов (конечный или равный $+\infty$, $-\infty$), то существует и равен этому пределу предел отношения общих членов последовательностей. $\lim \frac{x_n}{y_n} \Leftarrow\!\! | \ \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ Δ ▲.

<u>Примеры</u>:

1°. $\{x_n\}$; $\lim \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \Leftarrow\!\! | \ \lim \frac{(x_1 + \ldots + x_n) - (x_1 + \ldots + x_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim x_n$;

2°. ($a > 1$); $\lim \frac{a^n}{n} \Leftarrow\!\! | \ \lim \frac{a^n - a^{n-1}}{n - (n-1)} = \lim \frac{a^{n-1}(a-1)}{1} = +\infty$;

3°. $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim e^{\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n)} = e^{\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n}} \Leftarrow\!\! | \ e^{\lim \frac{\ln x_n}{1}} = \lim x_n$;

4°. Для положительной последовательности, если существует предел отношения ее общего члена к предыдущему (конечный, равный +0, или равный $+\infty$), то существует имеющий то же значение предел корня n-й степени из x_n.

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \ldots \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0}} = \langle x_0 \equiv 1 \rangle = \lim \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

5°. $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{n}{n-1} = 1$.

6°. $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \Leftarrow\!\! | \ \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} =$

$$= \lim \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n (n+1)} = \lim \frac{n^n}{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2} \ .$$

§ ОДНОСТОРОННЯЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Def1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$ если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Def2. . Функция $f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке x_0 её области определения, если $x_0 \in D(f)$ и

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = f(x_0); \quad (x_0 \in D(f) \text{ и } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0)).$$

К ***Def2***. Функция $f(x)$ непрерывна справа (слева) в точке $x_0 \in D(f)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \,|\, \forall x \in D(f) \quad x_0 \le x < x_0 + \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$(x_0 - \delta < x \le x_0)$$

Def3. В изолированной точке области определения функция считается непрерывной, непрерывной справа и непрерывной слева.

Def Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Def. Функция $f(x)$ непрерывна на [a,b], если она непрерывна $\forall x \in (a,b)$ и непрерывна справа в т. $x = a$, непрерывна слева в т. $x = b$.

Def . Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка всюду, исключая конечное число точек этого промежутка.

§ КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Условие непрерывности функции $f(x)$ в т. $x = x_0$:

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x).$$

При нарушении этого условия в т. $x = x_0$, функция $f(x)$ имеет разрыв.

Разрывы бывают:

Разрывы 1-го рода (когда пределы справа и слева функции $f(x)$ в т. $x = x_0$ существуют и конечны).

1°. $f(x_0-0) = f(x_0+0) \ne f(x_0)$ устранимый разрыв первого рода.

2°. $f(x_0-0) \ne f(x_0+0)$ разрыв первого рода типа скачок.

Разрывы 2-го рода (по крайней мере, один из односторонних пределов равен ∞ или не существует).

1°. $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ равен ∞ бесконечный разрыв 2-го рода.

1°. $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ не существует разрыв 2-го рода.

<u>Примеры:</u>

1°. $y = \operatorname{sgn} x$ при $x = 0$ разрыв 1-го рода типа скачок
величина скачка: $f(x_0+0) - f(x_0-0) = 2$.

2°. $y = |\operatorname{sgn} x|$ при $x = 0$ устранимый разрыв 1-го рода.

3°. $y=\dfrac{\sin x}{x}$ при $x = 0$ устранимый разрыв 1-го рода.

4°. $y=E(x)=[x]$ наибольшее целое на превосходящее x – целая часть x.

В целочисленных точках – непрерывность справа, разрывы 1-го рода типа скачок слева.

5°. $y=\sin\dfrac{1}{x}$ разрыв 2-го рода в т. $x = 0$.

6°. $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x = 0$ устранимый разрыв 1-го рода.

7°. $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}; x\neq 0 \\ 0; x=0 \end{cases}$ функция непрерывна.

8°. $y=e^{\frac{1}{x}}$ при $x = 0$ бесконечный разрыв 2-го рода.

9°. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$ при $x = 0$ разрыв 1-го рода типа скачок.

10°. Функция Дирихле: $y = D(x) = \begin{cases} 1; & x\in Q \\ 0; & x\in R\setminus Q \end{cases}$ разрывна в любой точке.

11°. $y = xD(x)$ непрерывна только в одной точке $x = 0$.

§ РАЗРЫВЫ МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ.

Т°. Монотонно возрастающая (убывающая) на промежутке X функция $f(x)$ может иметь во внутренних точках лишь разрывы 1-го рода.

Δ Пусть x_0 - внутренняя точка X и $f(x)$ монотонно возрастает. Тогда слева от x_0 $f(x)<f(x_0)$ и, следовательно, ограничена сверху. $\exists f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и:

а) если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ то функция непрерывна слева в т. $x=x_0$,

б) если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq f(x_0)$ то функция разрывна слева в т. $x=x_0$.

Тогда справа от x_0 функция $f(x)>f(x_0)$ и, следовательно, ограничена снизу. Следовательно , $\exists f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и:

а) если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ то функция непрерывна справа в т. $x=x_0$,

б) если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq f(x_0)$ то функция разрывна справа в т. $x=x_0$.

Т.к. пределы функции в точке и слева и справа существуют и конечны, то в т. $x = x_0$, в худшем случае, будут разрывы 1-го рода. ▲

Т°. (Критерий непрерывности монотонной функции). Если значения монотонно возрастающей функции содержатся в промежутке Y и сплошь заполняют его (т.е. $\forall y \in Y \ \ .\exists x \in X \quad f(x) = y$), то эта функция непрерывна на X. Δ▲

§ Теорема о промежуточном значении непрерывной функции (Больцано-Коши)

Т°. Функция, непрерывная на промежутке и принимающая какие-либо два значения, принимает и всякое промежуточное значение. (Значения, которые принимает непрерывная функция на промежутке, сами заполняют некоторый промежуток).

Пусть I – интервал; $a, b \in [a,b] = I$. $f(a) = \alpha$; $f(b) = \beta$.

Тогда $\forall \gamma \in]\alpha, \beta[\quad \exists c \in (a,b) \mid f(c) = \gamma$.

Вспомогательный факт: если $f(x)$ непрерывна в т. x_0 и $f(x_0) = \xi > \gamma$,

то $\exists U_{x_0} \quad \forall x \in U_{x_0} \ \ f(x) > \gamma$.

Аналогично: если $f(x_0) = \xi < \gamma$

то $\exists U_{x_0} \quad \forall x \in U_{x_0} \quad f(x) < \gamma$.

Δ Рассмотрим все $\bar{x}$, для которых $f(\bar{x}) < \gamma$. Т.е. $X \equiv \{\bar{x} \in [a,b] \ \mid f(\bar{x}) < \gamma\}$.

Множество X – не пусто, т.к. $f(a) < \gamma$ и ограничено сверху (например, числом b).

Тогда $\exists c = \sup X$.

Докажем, что $f(c) = \gamma$ (от противного).

1). $f(c) < \gamma \Rightarrow \exists U_C \quad \forall x \in U_C \quad f(x) > \gamma$, т.е. $\exists x < c \quad f(x) > \gamma$,

что противоречит тому, что $c = \sup X$.

2). $f(c) < \gamma \Rightarrow \exists U_C \quad \forall x \in U_C \quad f(x) < \gamma$, т.е. $\exists x > c \quad f(x) < \gamma$,

и это вновь противоречит тому, что $c = \sup X$.

Таким образом $f(c) = \gamma$. ▲

Т°. Непрерывная на замкнутом промежутке $[a,b]$ функция $f(x)$, на концах промежутка принимающая значение разных знаков, неминуемо внутри промежутка обращается в ноль.

Δ Доказательство проведем *методом вилок* :

Положим $a_1 = a$ и $b_1 = b$. Делим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой c. Если $f(c) = 0$ то теорема доказана. Если же $f(c) \neq 0$, то на одном из двух промежутков $[a_1, c]$ или $[c, b_1]$ функция имеет разные знаки на концах . Пусть это отрезок, например $[a_1, c]$.

Положим $a_2 = a_1$ и $b_2 = c$. Получим промежуток $[a_2, b_2]$.

Продолжая эту процедуру мы либо на некотором конечном шаге найдем точку c в которой $f(c) = 0$, либо получим бесконечную последовательность вложенных замкнутых промежутков, удовлетворяющих условию $f(a_n) f(b_n) < 0$.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

При этом: $\lim(b_n - a_n) = \lim \dfrac{b-a}{2^n} = 0$. Значит существует c – общая точка всех

промежутков для которой справедливы равенства : $\left.\begin{array}{l} \lim f(a_n) = f(c) \\ \lim f(b_n) = f(c) \end{array}\right\}$.

Учитывая что, $f(a_n) f(b_n) < 0$ делаем заключение : $f(c) = 0$. ▲

§ Существование экстремумов непрерывной функции на сегменте (теорема Вейерштрасса)

T° Функция непрерывная на замкнутом промежутке необходимо ограничена на этом промежутке и достигает на нём своих точных верхней и нижней граней.

$$m = \inf\ f(x); x \in [a,b]$$

$$M = \sup f(x); x \in [a,b]$$

$$\exists x_m \in [a,b] \mid f(x_m) = m; \exists x_M \in [a,b] \mid f(x_M) = M$$

Δ 1) Допустим, что $f(x)$ неограниченна сверху для $x \in [a,b]$. Тогда $\forall n\ \exists x_n \mid f(x_n) > n$ Построив последовательность $\{x_n\}$ выделим из неё сходящуюся последовательность $\{x_{n_K}\} \to x_0 \in [a,b]$, тогда, по непрерывности $\lim f(x_{n_k}) = f(x_0)$, но $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_K}) = \infty$.

Полученное противоречие, доказывает ограниченность функции сверху. (Аналогично доказывается ограниченность функции снизу.

2) Докажем, что $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ достигается, т.е. $\exists x_M \mid f(x_M) = M$.

Вновь от противного: пусть это не так. Тогда $\forall x \in [a,b]\quad f(x) < M \Rightarrow -f(x) + M > 0$

Рассмотрим $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна и, следовательно (из 1)), ограничена, т.е.

$\varphi(x) \le \mu \Rightarrow \dfrac{1}{M - f(x)} \le \mu \Rightarrow M - f(x) \ge \dfrac{1}{\mu}$, т.е. $f(x) < M - \dfrac{1}{\mu}$.

Последнее неравенство противоречит тому, что $M = \sup f(x)$. (аналогично с точной нижней гранью). ▲

T°. (об обратной функции). Если $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в некотором промежутке *X*, то в соответствующем промежутке *Y* значений этой функции существует однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$ также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Δ (для возрастающей функции) . Отметим, что $D(f^{-1}) = E(f); E(f^{-1}) = D(f)$

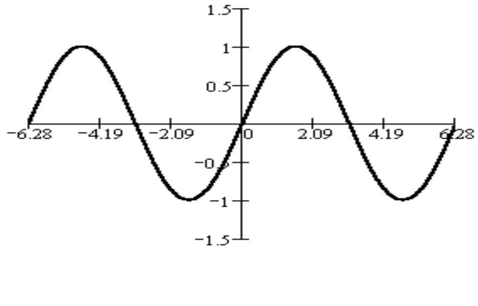
1) Существование обратной функции. Если $f(x)$ непрерывна, то её значения заполняют промежуток *Y* сплошным образом, т.е. $\forall y_0 \quad \exists! x_0 \mid f(x_0) = y_0$. Единственность такого x следует из монотонности исходной функции.

Тогда : $y_0 \mapsto x_0$, т.е. $x = f^{-1}(y)$.

2) Монотонность. Пусть $y'' > y' \Rightarrow f(x'') > f(x') \Rightarrow x'' > x'$. Т.е. $x = f^{-1}(y)$ – монотонна.
3) Непрерывность (из критерия непрерывности монотонной функции). Значения $x = f^{-1}(y)$ сплошь заполняют промежуток *X* и $f^{-1}(y)$ – монотонна. ▲

§ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1°. $y = \sin x$



Синусом числового аргумента называется синус угла в соответствующее число радиан. Синусом угла называется ордината конца подвижного радиуса, отвечающего заданному углу, на тригонометрическом круге (на круге единичного радиуса).

$D(\sin)=\mathbf{R};\ E(\sin)=[-1,1]$. Функция нечетная, периодичная с периодом Т = 2π.
Ее график приведен выше.
Решение простейших уравнений:

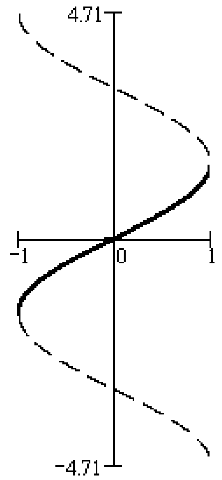
$\sin x=-1 \quad\Rightarrow\quad x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ **,**

$\sin x=0 \quad\Rightarrow\quad x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ **,**

$\sin x=1 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ **.**

А уравнение $\sin x=a\Rightarrow x=\ldots\ldots\ldots\ldots$?

На промежутке $x\in[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$ функция $y=\sin x$ монотонно возрастает и непрерывна.
Следовательно, существует обратная к ней функция:
$y=\arcsin x$. Справа приводим ее график.



<u>Def.</u> $\quad y=\arcsin x \quad\Rightarrow\quad 1)\sin y=x,\quad 2)y\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right];$

$$D(\arcsin)=[-1,1]\,,\qquad E(\arcsin)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Отметим, что: $\quad \sin\arcsin x=x \quad \forall x\in[-1,1]$

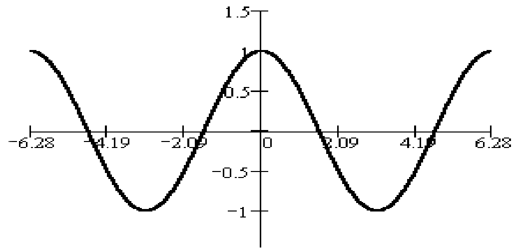
$$\arcsin(\sin x)=(-1)^{\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)/\pi\right]}\left(x-\pi\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)/\pi\right]\right)$$

$$\mathrm{Arcsin}\,a=(-1)^n\cdot\arcsin a+n\pi,\quad n\in\mathbf{Z}\,.$$

И тогда можно решить, приведенное выше простейшее уравнение:

$$\sin x=a\Rightarrow x=(-1)^n\arcsin a+n\pi,\quad n\in\mathbf{Z}\,.$$

<u>2°.</u> $y=\cos x$



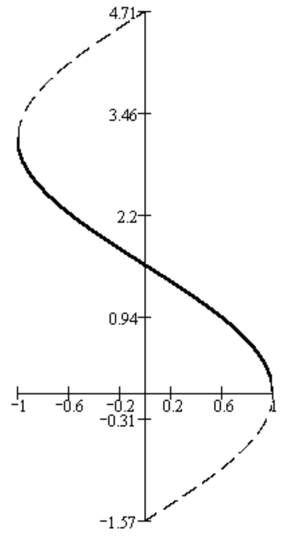
Косинусом числового аргумента называется синус угла в соответствующее число радиан. Косинусом угла называется абсцисса конца подвижного радиуса, отвечающего заданному углу, на тригонометрическом круге (на круге единичного радиуса).

$D(\cos)=\mathbf{R};\ E(\cos)=[-1,1]$. Функция четная, периодичная с периодом Т = 2π.
Ее график приведен выше.
Решение простейших уравнений:

$\cos x=-1 \quad\Rightarrow\quad x=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ **,**

$\cos x=0 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ **,**

$\cos x=1 \quad\Rightarrow\quad x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ **.**



А уравнение $\cos x = a \Rightarrow x = ...$?

На промежутке $x \in [0;\pi]$ функция $y = \cos x$ монотонно убывает и непрерывна. Следовательно, существует обратная к ней функция:
$y = \arccos x$. Справа приводим ее график.

Def. $y = \arccos x \;\Rightarrow\; 1) \cos y = x, \quad 2) y \in [0;\pi];$
$D(\arccos) = [-1,1]$, $E(\arccos) = [0,\pi].$

Отметим, что: $\cos\arccos x = x \quad \forall x \in [-1,1]$

$$\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} + (-1)^{[x/\pi]}\left(x - \pi[x/\pi] - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{Arccos}\, a = \pm\arcsin a + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

И тогда можно решить, приведенное выше простейшее уравнение:

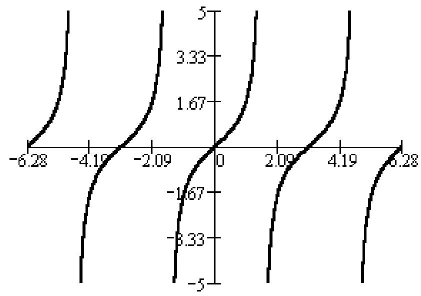
$$\cos x = a \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Приведем еще несколько полезных соотношений:

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$ $\arccos a = \arcsin\sqrt{1-a^2};$ $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \;\Rightarrow\; \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

3. y = tg x



Тангенсом числового аргумента называется отношение синуса и косинуса того же аргумента. Его величина равна ординате точки пересечения продолжения радиуса подвижного круга с вертикальной прямой, проходящей через точку с координатами (1, 0) на тригонометрическом круге (эта прямая называется осью тангенсов).

$D(\mathrm{tg}) = \mathbf{R}\backslash\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\};\ E(\mathrm{tg}) = \mathbf{R}.$

Функция нечетная, периодичная с периодом T = π.
График функции приведен выше.

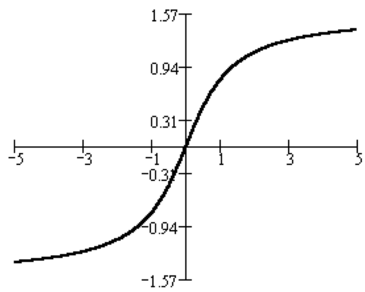
Решение простейших уравнений: $\mathrm{tg}\, x = -1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ **,**

$\mathrm{tg}\, x = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ **,**

$\mathrm{tg}\, x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ **,**

А уравнение $\mathrm{tg}\, x = a \;\Rightarrow\; x = ...$?

На промежутке $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ функция y = tg x монотонно возрастает и непрерывна.
Следовательно, существует обратная к ней функция:
y = arctg x . Справа приводим ее график.



Def. $y = \text{arctg}x \;\Rightarrow\; 1)\ \text{tg}y = x,\quad 2) y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

$D(\text{arctg}) = \mathbf{R}$, $E(\text{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

Отметим, что: $\text{Arctg}\, a = \text{arctg}\, a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$.

И тогда можно решить, приведенное выше простейшее уравнение:

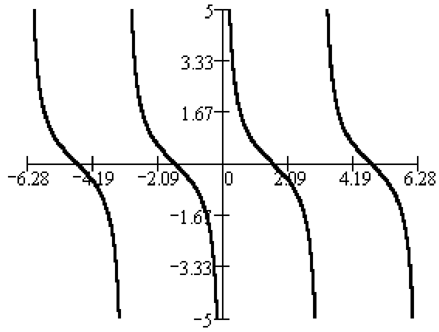
$$\text{tg}x = a \;\Rightarrow\; x = \text{arctg}\, a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z} .$$

Приведем еще несколько полезных соотношений:

$$\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}x$$

$$\text{arctg}a = \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} .$$

4. $y = \text{ctg}\, x$



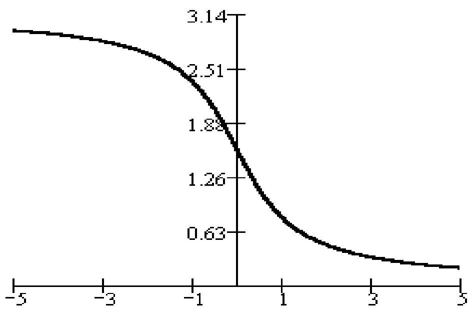
Котангенсом числового аргумента называется отношение косинуса и синуса того же аргумента. Его величина равна абсциссе точки пересечения продолжения радиуса круга с горизонтальной прямой, проходящей через точку с координатами (0, 1) на тригонометрическом круге (эта прямая называется осью котангенсов).

$D(\text{ctg}) = \mathbf{R}\backslash\{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$; $E(\text{ctg}) = \mathbf{R}$.

Функция нечетная, периодичная с периодом $T = \pi$.

График функции приведен выше.

Решение простейших уравнений: $\text{ctg}x = -1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$,



$\text{ctg}x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$,

$\text{ctg}x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$,

А уравнение

$\text{ctg}x = a \;\Rightarrow\; x = \ldots\ldots\ldots$?

На промежутке $x \in [0;\pi]$ функция $y = \text{ctg}\, x$ монотонно убывает и непрерывна. Следовательно, существует обратная к ней функция:

$y = \text{arcctg}\, x$. Справа приводим ее график.

Def. $y = \text{arcctg}x \;\Rightarrow\; 1)\ \text{ctg}y = x,\quad 2) y \in (0, \pi);$

$D(\text{arctg}) = \mathbf{R}$, $E(\text{arctg}) = (0, \pi).$

Отметим, что: $\operatorname{Arcctg} a = \operatorname{arcctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$.

И тогда можно решить, приведенное выше простейшее уравнение:

$$\operatorname{ctg} x = a \;\Rightarrow\; x = \operatorname{arcctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Приведем еще несколько полезных соотношений: :

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x ,$$

$$\operatorname{arcctg} a = \operatorname{arctg}\frac{1}{a} = \arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad .$$

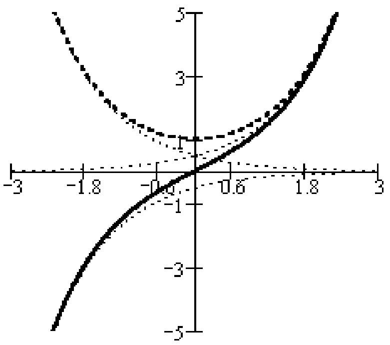
§ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

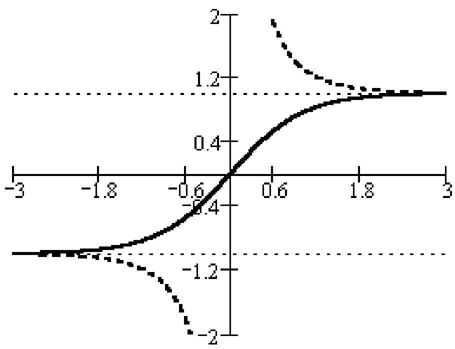
Каждая тригонометрическая функция имеет свой гиперболический аналог.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}; \qquad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1.$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \qquad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y.$$





На рисунке слева приводятся графики гиперболических синуса (сплошная линия) и косинуса (пунктирная линия). Тонкой пунктирной линией построен график функции $y = e^x/2$ и симметричные ему относительно оси абсцисс и оси ординат.

На рисунке справа приводятся графики гиперболических тангенса (сплошная линия) и котангенса (пунктирная линия). Тонкой пунктирной линией построен график функций $y = \pm 1$.

Для всех введенных гиперболических функций (для $y = \operatorname{ch} x$ отдельно для $x > 0$ и отдельно для $x < 0$) существуют обратные функции.

Найдем обратные функции к гиперболическим функциям:

1°. $\operatorname{sh} y = x \;\Rightarrow\; x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \;\Rightarrow\; 2x = e^y - e^{-y} \;\Rightarrow\; e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2+1} \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \operatorname{arsh} x$.

2°. $\text{ch}y = x \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = e^y + e^{-y} \quad \Rightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geq 1) \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \text{arch}x$.

Получили две однозначные ветви обратной функции.

3°. $\text{th}y = x \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \quad \Rightarrow \quad xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y} \quad \Rightarrow \quad e^{2y}(x-1) = -1 - x$

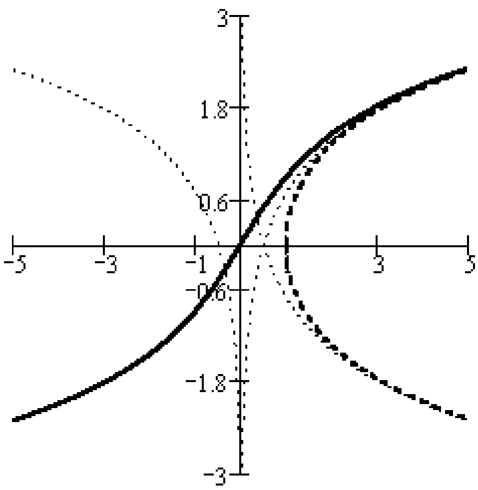
$e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \text{arth}x$ (если $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$).

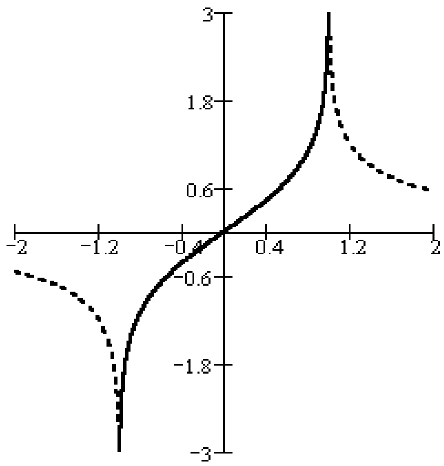
4°. $\text{cth}y = x \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \Rightarrow xe^y - xe^{-y} = e^y + e^{-y} \Rightarrow \Rightarrow e^{2y}(x-1) = 1 + x \Rightarrow$

$e^{2y} = \dfrac{x+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} = \text{arcch}x$ (если $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$).

5°. Из **3°.** и **4°.** : $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = \begin{cases} \text{arth}x, & \text{если....}|x| < 1 \\ \text{arcth}x, & \text{если....}|x| > 1 \end{cases}$.

Ниже приводятся графики обратных гиперболических функций:





Слева приведены графики функций обратных гиперболическому синусу (сплошной линией) и косинусу (пунктирной линией), причем во втором случае приводятся обе ветви: одна выше а другая ниже оси абсцисс .

Справа приведены графики функций обратных гиперболическому тангенсу (сплошной линией) и котангенсу (пунктирной линией) .

§. Равномерная непрерывность

Def. Функция $y = f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D(f) \bigcap X \ \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon .$$

Из определения равномерной непрерывности функции на множестве следует, что функция непрерывна в каждой точке этого множества, но не наоборот.

Примеры:

1°. $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Функция $f(x)$ - непрерывна на $X=(0,+\infty)$. Однако:

$$\forall\delta>0\ \ f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_2x_1}=\frac{\delta}{x_1(x_1+\delta)}\xrightarrow{x\to+0}+\infty,$$

т.е. $f(x)$ не является равномерно непрерывной на промежутке $X=(0,+\infty)$.

2°. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, Функция $f(x)$ - непрерывна на $X=(0,1)$. Но, если положить

$$x_1=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k};\ x_2=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k};\ k\in\mathbb{N}\quad \text{то получим:}$$

$$x_2-x_1=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}=\frac{\pi}{4\pi^2k^2-\frac{\pi^2}{4}}\xrightarrow[k\to\infty]{}0\ ,$$

и при этом: $$\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}=1-(-1)=2.$$

Из этого делаем заключение о том, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $X=(0,1)$.

T° Кантора (о равномерной непрерывности)**.** Если функция непрерывна на замкнутом промежутке то она равномерно непрерывна на нём.

Δ Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$. Тогда :

$$\forall x_0\in[a,b]\ \ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Множество всех дельта-окрестностей $U_\delta(x)$ точек промежутка образует открытое покрытие замкнутого промежутка $[a,b]$. Выделив из этого покрытия конечное подпокрытие получим : $U_{\delta_1}(x_1),U_{\delta_2}(x_2),...,U_{\delta_n}(x_n)$ - конечное подпокрытие.

Положим $\delta=\min\left\{\frac{1}{2}\delta x_1,\frac{1}{2}\delta x_2,...,\frac{1}{2}\delta x_k\right\}>0$. Тогда :

$$\forall x,x'\in(x_i,x_i+\delta)\quad\Rightarrow\quad |x-x_i|<\delta x_i;\ |x'-x_i|<\delta x_i;\ |x-x'|<\delta\quad\Rightarrow$$

$$|f(x)-f(x')|=|f(x)-f(x_i)+f(x_i)-f(x')|\le|f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x')|<\varepsilon+\varepsilon<2\varepsilon.\quad\blacktriangle$$

Колебание функции.

Def. Колебанием функции на *D(f)* называется $\omega(f)=\sup\limits_{x,x'\in D(f)}|f(x)-f(x')|\ge0$, причем $\omega(f)=0\Leftrightarrow f(x)=const$.

Def. Колебанием функции $f(x)$ на множестве ***M*** называется:

$$\omega(f)\big|_M=\omega(f,M)=\sup_{x,x'\in D(f)\cap M}|f(x)-f(x')|.$$

Очевидно при сужении множества колебание функции не увеличивается.

Рассмотрим $\omega(f, O(a,b)) \geq 0 \quad \delta_1 > \delta_2 \Rightarrow \omega(f, O(a,\delta_1)) \geq \omega(f, O(a,\delta_2))$

т.е. колебание функции при уменьшении δ не увеличивается и ограничено снизу.

Значит: $\exists \lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f, O(a,b)) = \omega(f,a) \geq 0$

Величина $\omega(f,a)$ называется колебанием функции $f(x)$ в точке .

T°. Функция $f(x)$ - непрерывна в точке $x = a$ тогда и только тогда когда $\omega(f,a) = 0$.

Δ Пусть $f(x)$ - непрерывна в точке $x = a$. $\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f)$

$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow \omega(f, O(a,\delta)) \leq \varepsilon$ т.е. $\omega(f, O(a,\delta)) \leq \varepsilon$. ▲

Если $\exists \lim\limits_{\delta \to +0} \omega(f, \hat{O}(a,\delta)) = \hat{\omega}(f,a) > 0$ то величина $\hat{\omega}(f,a)$'называется финальным колебанием функции $f(x)$ в т. $x = a$.

T°. Функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке $x = a$ тогда и только тогда, когда ее финальное колебание в точке $x = a$ равно 0 т.е. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{\omega}(f,a) = 0$. Δ▲

Модуль непрерывности.

Def. Модулем непрерывности $f(x)$ на множестве X называется :

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{|x-x'|<\delta \\ x,x' \in D(s)}} |f(x) - f(x')|$$

T°. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X тогда и только тогда, когда её модуль непрерывности имеет предел равный нулю при $\delta \to +0$.

§. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1°. Задача: найти все непрерывные функции $f(x)$, удовлетворяющие функциональному уравнению: $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

а) $x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0+0) = f(0) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

б) $y = -x \quad \Rightarrow \quad f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)$

в) $y = x \quad \Rightarrow \quad f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

$f(3x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$

……………………………….

$f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = nf(x)$

г) $f(x) = f\left(n\dfrac{x}{n}\right) = nf\left(\dfrac{x}{n}\right) \Rightarrow f\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{1}{n} f(x)$; Тогда $f\left(\dfrac{m}{n}x\right) = \dfrac{m}{n} f(x)$.

Т.е. $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = r f(x)$.

д) Пусть α – иррационально. Построим последовательность $r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... \to \alpha$.

Для нее, из непрерывности функции, получим: $f(r_1, x), f(r_2, x), ..., f(r_n, x), ... \to f(\alpha x)$.

С другой стороны, из свойства г) следует, что: $r_1 f(x), r_2 f(x), ..., r_n f(x), ... \to \alpha f(x)$.

Из последних, двух равенств следует, что:
$f(\alpha x)=\alpha f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q} \quad f(\alpha x)=\alpha f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

е) В последнем равенстве положим $x=1$: $\quad f(\alpha)=\alpha f(1)$.

ж) Обозначая $f(1)=k$, получаем искомое:

$$f(\alpha)=k\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} .$$

Итак:
Единственной функцией определенной и непрерывной для $x \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющей функциональному уравнению $f(x)+f(y)=f(x+y)$ является линейная однородная функция $f(x)=kx$.

Без вывода приведем еще ряд очень важных функциональных уравнений :

2°. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \qquad (f \not\equiv 0) \qquad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x)=a^x$;

3°. $f(xy)=f(x)+f(y) \qquad (f \not\equiv 0) \qquad x \in (0,\infty) \qquad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x)=\log_a x$;

4°. $f(x+y)+f(y-x)=2f(x)\cdot f(y) \qquad (f \not\equiv 0) \qquad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad f(x)=\cos ax; \qquad f(x)=chx \qquad a>0$;

5°. $f(xy)=f(x)\cdot f(y) \qquad (f \neq 0) \qquad x \in (0,+\infty) \qquad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x)=x^{\mu}$.

Эти функциональные уравнения впервые в непрерывных функциях были решены Коши.

РАЗДЕЛ . ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

Пусть $x \in \overset{\circ}{D}(f)$ внутренняя точка области определения.

Def*.** Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке ***x если:

$$\Delta f(x,\Delta x)=f(x+\Delta x)-f(x)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \text{ и } A \text{ не зависит от } \Delta x .$$

Если функция дифференцируема, то ее приращение имеет главную часть $A\cdot\Delta x$.

F°. Если функция дифференцируема , то она непрерывна т.к. при $\Delta x \to 0 \qquad \Delta f \to 0$.
(но ….. не наоборот).

***Def*.** Функцию назовем дифференцируемой справа (слева) если :

$$\Delta_{\pm} f(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)-f(x)=A_{\pm}\Delta x+o(\Delta x) \quad \textit{при} \quad \Delta x \to 0 .$$

Здесь $\Delta x>0$ ($\Delta x<0$).

Пусть $f(x)$ – дифференцируема $\Rightarrow$

$$\Delta f(x,\Delta x)=A_1\Delta x+o(\Delta x)=A_2\Delta x+o(\Delta x) \Rightarrow (A_1-A_2)\Delta x = o(\Delta x) \Rightarrow$$
$$A_1-A_2=o(1) \Rightarrow A_1=A_2 .$$

F°. Если $f(x)$ дифференцируема в точке то она дифференцируема справа и слева в этой точке и $A_+=A_-=A$ (и наоборот).

Пример: Функция $f(x)=|x|$ в нуле не дифференцируема.

Если $f(x)$ дифференцируема в точке, то в окрестности этой точки ее приращение может быть представлено в виде суммы линейной функции от Δx плюс бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

§. ПРОИЗВОДНАЯ

***Def*.** $$f'(x) \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x,\Delta x)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to x'}\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}.$$

Односторонние производные: $f'_{\pm} = \lim\limits_{\Delta x\to\pm 0}\dfrac{\Delta f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Функция имеет производную в точке тогда и только тогда, когда она имеет равные между собой правую и левую производные.

F°. Если $f(x)$ дифференцируема то она имеет производную и наоборот.

Δ Пусть $f(x)$ дифференцируема: $f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+o(\Delta x)$.

Разделим обе части равенства на Δx: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$.

Теперь устремим Δx к нулю: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A\Rightarrow A'=f'(x)$,

И тогда: $\Delta f(x+\Delta x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$. ▲

Примеры:

1°. $f(x)=const;\ f'(x)=0$;

2°. $f(x)=x;\ f'(x)=1$;

3°. $f(x)=|x|;\quad f'_{+}(0)=1;\quad f'_{-}(0)=-1$;

4°. $f(x)=\sqrt[3]{x}$; производной в нуле функция не имеет.

§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

***Def*.** Дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x=a$ называется главная линейная по приращению аргумента часть приращения функции:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x) \quad\Rightarrow\quad f'(x)\Delta x=df(x).$$

Записанная формула называется формулой инфинитезимальных (бесконечно малых) приращений.

§. Геометрическая и физическая интерпретация производной и дифференциала

Геометрический смысл производной: Производная функции в точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$, проведенной через точку графика с абсциссой x_0.

$$f'(x)=tg\alpha.$$

Физический смысл производной: Производная функции в точке x_0 численно равна мгновенной скорости изменения функции при значении аргумента равном x_0.

Геометрический смысл дифференциала: Дифференциал функции в точке x_0 численно равен линейному приращению функции в точке x_0.

§. ПРОИЗВОДНАЯ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

1°. $(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$;

2°. $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

3°. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;

4°. $d(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha df(x)+\beta dg(x)$;

5°. $d(f(x)g(x))=g(x)df(x)+f(x)dg(x)$;

6°. $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}$.

Все эти формулы могут, без большего труда, доказаны.

§. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть заданы функции $z=f(y)$ и $y=g(x)$. Суперпозицией этих двух функций называется функция $z=f(y)=f(g(x))=(f\circ g)(x)=F(x)$.

Для дифференцирования суперпозиции двух функций запишем

$$\Delta F(x,\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)=f(g(x+\Delta x))-f(g(x))\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\Delta F(x,\Delta x)}{\Delta x}=\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем: $F'(x)=f_g{}'(g)\cdot g_x'(x)$.

Другие формы записи той же формулы:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx};\qquad dF_x(x)=df_g(g)\cdot dg_x(x).$$

Формула эта называется цепным правилом дифференцирования сложной функции.

§. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

T°. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и существует производная этой функции в т. x_0 не равная нулю, то в некоторой окрестности точки $y_0=f(x_0)$ определена обратная функция $x=f^{-1}(y)$ − непрерывная, строго монотонная и имеющая производную в точке y_0, причем:

$$x_y'=\frac{1}{y_x'};\qquad\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}};\qquad\qquad\Delta\qquad x_y'=\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}\to\frac{1}{y_x'}\quad\blacktriangle\quad.$$

§. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Таблицу производных надо знать !

1°. $(const)'=0$.

2°. $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$.

3°. $(e^x)' = e^x$; $\quad (a^x)' = a^x \ln a \;\; (a > 0)$.

4°. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$; $\quad x \neq 0,\; a > 0,\; a \neq 1$.

5°. $(\sin x)' = \cos x$; $\quad (\cos x)' = -\sin x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7°. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; $\quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

8°. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $\quad (\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

9°. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10°. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

11°. $(\operatorname{arsh} x)' = (\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $\quad (\operatorname{arch} x)' = (\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

12°. $(\operatorname{arth} x)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$; $\quad (\operatorname{arcth} x)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{x-1}\right)' = \dfrac{1}{x^2-1}$.

Таблицу производных надо знать !

§. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1°. $c' = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x} = 0$

2°. $$(x^\mu)' = \lim_{x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^\mu\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1\right]}{\dfrac{\Delta x}{x}x} = \mu x^{\mu-1}.$$

3°. $$(e^x)' = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} e^x\,\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x; \qquad (a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a.$$

4°. $$(\ln x)' = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x})}{\dfrac{\Delta x}{x}x} = \frac{1}{x};$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}(|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}; \qquad (\log_a|x|)' = \left(\frac{\ln|x|}{\ln a}\right)' = \frac{1}{|x|\ln a}.$$

5°. $$(\sin x)' = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}2} = \cos x;$$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1) = -\sin x.$$

6°. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ **;**

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7°. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ **;**

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

8°. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ **;**

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{1}{\operatorname{th} x} = -\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

9°. $(\arcsin x)'_x = \dfrac{1}{(\sin y)'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **;**

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (\arccos x)' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10°. $(\operatorname{arc\,tg} x)'_x = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$ **;**

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,c\,tg} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + (\operatorname{arcc\,tg} x)' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{arcc\,tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

11°. $(\operatorname{arsh} x)'_x = \dfrac{1}{(\operatorname{sh} y)'_y} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **;**

$$(\operatorname{arch} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'_y} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

12°. $(\operatorname{arth} x)'_x = \dfrac{1}{(\operatorname{th} y)'_y} = \operatorname{ch}^2 y = \dfrac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \dfrac{1}{1-x^2}$ **;**

$$(\operatorname{arcth} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{cth} y)'_y} = -\operatorname{sh}^2 y = \frac{1}{\operatorname{cth}^2 y - 1} = \frac{1}{x^2-1}.$$

13°. Пусть $f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad -f'(-x) = f'(x);$

и пусть $f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad -f'(-x) = -f'(x).$

Производная нечетной функции есть функция четная, а производная четной функции – функция нечетная.

14°. $f(x+T) = f(x-T) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x+T) = f'(x-T) = f'(x).$

Производная периодической функции есть функция периодическая.

Производная непериодической функции – может быть функцией периодической:

$$y = x + \sin x; \qquad y' = 1 + \cos x.$$

§. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Мы дадим индуктивные определения производных и дифференциалов высших порядков:

***Def*.** $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$; $\quad f''_{x^2}(x) = (f_x{}'(x))'_x = f^{(2)}(x)$;

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'_x; \qquad d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)).$$

Иногда удобно отождествлять саму функцию и производную нулевого порядка.
Когда нам это будет удобно, именно так мы и будем поступать.

§.ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1°. $(e^x)^{(n)} = e^x; \qquad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ \ (a>0)$.

2°. $\left(\ln|x|\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (x \neq 0)$.

$(\log_a|x|)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x \neq 0,\ a>0,\ a \neq 1$.

3°. $(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1)\cdot x^{\mu-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4°. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2}); \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\dfrac{\pi}{2})$.

Доказательства легко проводятся с помощью метода математической индукции.

5°. $\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$.

6°. Если положить $y = \operatorname{arctg} x$, то получим весьма удобное рекурентное соотношение:

$$(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin(y + n\frac{\pi}{2}).$$

7°. $$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n! \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-k)\right)}{(n-k)!\, x^{k+1}}.$$

8°. $$\frac{(-1)^k}{x^{k+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}.$$

§. ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА (НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ)

T°. $$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x); \qquad \mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Δ Доказательство проведем по методу математической индукции.

а) При $n=1$ формула $(f(x)g(x))^{(1)} = \sum\limits_{k=0}^{1} \mathrm{C}_1^k f^{(k)}(x) g^{(1-k)}(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

справедлива, если под нулевой производной функции понимать саму функцию.

Помнится, что мы об этом уже условились.

б) Допустим ,что доказываемая формула справедлива при $n = l - 1$ т.е.

$$(f(x)g(x))^{(l-1)} = \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^{k} f^{(k)}(x) g^{(l-1-k)}(x).$$

Тогда:

$$(fg)^{(l)} = \left(\sum_{k=0}^{l-1} \mathrm{C}_{l-1}^{k} f^{(k)}(x) g^{(l-1-k)}(x) \right)' = \sum_{k=0}^{l-1} \mathrm{C}_{l-1}^{k} f^{(k+1)}(x) g^{(l-1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{l-1} \mathrm{C}_{l-1}^{k} f^{(k)}(x) g^{(l-k)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-2} \mathrm{C}_{l-1}^{k} f^{(k+1)}(x) g^{(l-1-k)}(x) + \mathrm{C}_{l-1}^{l-1} f^{(l)}(x) g^{(0)}(x) + \mathrm{C}_{l-1}^{l-1} f^{(l)}(x) g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{l-1} \mathrm{C}_{l-1}^{k} f^{(k)}(x) g^{(l-k)}(x) = \ldots$$

В последней строчке, в первой сумме изменим переменную суммирования $k = s - 1$. Тогда

$$\ldots = \sum_{s=1}^{l-1} \mathrm{C}_{s-1}^{s-1} f^{(s)}(x) g^{(l-s)}(x) + \mathrm{C}_{l}^{l} f^{(l)}(x) g^{(0)}(x) + \mathrm{C}_{l}^{0} f^{(0)}(x) g^{(l)}(x) + \sum_{s=1}^{l-1} \mathrm{C}_{l-1}^{s} f^{(s)}(x) g^{(l-s)}(x) =$$

$$= \mathrm{C}_{l}^{0} f^{(0)}(x) g^{(l)}(x) + \sum_{s=1}^{l-1} \left(\mathrm{C}_{l-1}^{s-1} + \mathrm{C}_{l-1}^{s} \right) f^{(s)}(x) g^{(l-s)}(x) + \mathrm{C}_{l}^{l} f^{(l)}(x) g^{(0)}(x).$$

В дальнейшем учтем, что:

$$\mathrm{C}_{l-1}^{s-1} + \mathrm{C}_{l-1}^{s} = \frac{(l-s)!}{(s-1)!(l-1-s+1)!} + \frac{(l-1)!}{s!(l-1-s)!} = (l-1)! \left\{ \frac{s+l-s}{s!(l-s)!} \right\} = \frac{l!}{s!(l-s)!} = C_{l}^{s}.$$

Получим:

$$(f(x)g(x))^{(l)} = \mathrm{C}_{l}^{0} f^{(0)}(x) g^{(l)}(x) + \sum_{s=1}^{l-1} \mathrm{C}_{l}^{s} f^{(s)}(x) g^{(l-s)}(x) + \mathrm{C}_{l}^{l} f^{(l)}(x) g^{(0)}(x) = \sum_{s=0}^{l} \mathrm{C}_{l}^{s} f^{(s)}(x) g^{(l-s)}(x)$$

Таким образом, доказано что, если формула справедлива при $n = l - 1$, то она справедлива и при $n = l$. Согласно методу математической индукции формула доказана ▲

Пример: Найти $\left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^{(n)}$

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{n}^{k} (\sin x)^{(n)} \left(x^{-1} \right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{n}^{k} \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} \right) \left(x^{-1} \right)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{n}^{k} \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} \right) x^{n-k} \left[(-1)(-2)(-3)\ldots(n-k) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)! n!}{(n-k)! k!} x^{n-k-1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2} k \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} x^{n-k-1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2} k \right).$$

§. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Задача: Найти производную функции $\varphi(x) = f^{\alpha}(x) g^{\beta}(x) \ldots h^{\gamma}(x)$, где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma \in$, а $f(x), g(x), \ldots, h(x)$ – дифференцируемые положительные функции.

$$\varphi(x) = f^{\alpha}(x) \cdot g^{\beta}(x) \cdot \ldots \cdot h^{\gamma}(x) \Rightarrow \ln \varphi(x) = \ln f^{\alpha}(x) \cdot g^{\beta}(x) \cdot \ldots \cdot h^{\gamma}(x) =$$

$$= \alpha \ln f(x) + \beta \ln g(x) + \ldots + \gamma \ln h(x).$$

Дифференцируем полученное равенство.

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\alpha\frac{f'(x)}{f(x)}+\beta\frac{g'(x)}{g(x)}+\ldots+\alpha\frac{h'(x)}{h(x)} \Rightarrow \varphi'(x)=\varphi(x)\left(\alpha\frac{f'(x)}{f(x)}+\beta\frac{g'(x)}{g(x)}+\ldots+\gamma\frac{h'(x)}{h(x)}\right).$$

Если при этом $\alpha(x),\beta(x),\ldots,\gamma(x)$ –также функции от x, то:

$$\varphi'(x)=\varphi(x)\cdot\left(\alpha(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+\beta(x)\frac{g'(x)}{'g(x)}+\ldots+\gamma(x)\frac{h'(x)}{'h(x)}\right)+$$
$$+\varphi(x)\cdot\left(\alpha'(x)\ln f(x)+\beta(x)\ln g(x)+\ldots+\gamma'(x)\ln h(x)\right).$$

Этот прием нахождения производных в случае произведения (или частного) называется взятием логарифмической производной и может быть, в некоторых случаях, весьма эффективным.

§. ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $z=f(g(x))=(f\circ g)(x)=F(x)$.

Тогда: $z'_x(x)=z'_y(y)y'_x(x)$; $z''_{x^2}(x)=z''_{y^2}(y)\left(y'_x(x)\right)^2+z'_y(y)y''_{x^2}(x)$;

$$z'''_{x^3}(x)=z'''_{y^3}(y)y'_{x^3}(x)+z''_{y^2}(y)\cdot 2y'_x(x)y''_{x^2}(x)+z''_{y^2}(y)y'_x(x)y''_{x^2}(x)+z'_y(y)y'''_{x^3}(x).$$

Пусть функции $f(y)$ и $g(x)$ – n-кратно дифференцируемы в точках $g(x)$ и x соответственно. Тогда их суперпозиция $(f\circ g)(x)$ тоже n –кратно дифференцируема в точке x и ее n-я производная полиноминально выражается через значения n первых производных функций $f(y)$ и $g(x)$ в т. $g(x)$ и x соответственно.

§. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$dy=df(x,dx)=f'(x)dx;\quad d^n y=d^n f(x,dx)=f^{(n)}(x)(dx)^n;\quad f^{(n)}(x)=\frac{d^n f}{dx^n};$$

$$d^n(\alpha f(x)+\beta g(x),dx)=\alpha d^n f(x,dx)+\beta d^n g(x,dx);$$

$$d^n(f(x)g(x),dx)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k d^k f(x,dx)d^{n-k}g(x,dx).$$

Последняя из написанных формул это формула Лейбница для высших дифференциалов функций, представленных в виде произведения.

§. ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

$$\begin{cases} x=\varphi(t) & t=\varphi^{-1}(x) \\ y=\psi(t) & y=\psi(\varphi^{-1}(x))=\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)(x)=f(x)\end{cases} \Rightarrow y'_x=\psi'_{\varphi^{-1}}\left(\varphi^{-1}(x)\right)'_x=\psi'_t\frac{1}{\varphi'_t}=\frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y''_{x^2}=\left(\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)'_x=\left(\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)'_t\cdot t'_x=\frac{\psi''_{t^2}\varphi'_t-\psi'_t\varphi''_{t^2}}{\left(\varphi'_t\right)^3}}.$$

Если из двух функций заданных и непрерывных на промежутке одна строго монотонна в окрестности точки t_0, обе дифференцируемы n-кратно в окрестности этой точки и первая производная строго монотонной функции не равна нулю то в некоторой окрестности t_0 существует функция, заданная параметрически, тоже n-кратно дифференцируемая и ее n-я производная рационально выражается через n первых производных функций φ и ψ.

§. ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна в окрестности т. x_0, где она n - кратно дифференцируема, причем $f(x_0) \neq 0$. Тогда в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая непрерывна и строго монотонна в этой окрестности и n – кратно дифференцируема, причем *n*-я производная обратной функции рационально выражается через *n* первых производных исходной функции в т. x_0, при этом в знаменателе стоит $f'(x)$.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}; \qquad x''_{y^2} = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y \cdot y'_x = -\frac{y''_{x^2}}{(y')^2}\frac{1}{y'_x} = \frac{y''_{x^2}}{(y')^3};$$

$$x'''_{y^3} = \left(x''_{y^2}\right)'_x x'_y = \left(-\frac{y''_{x^2}}{\left(y'_x\right)^3}\right)'_x \frac{1}{y'_x} = \frac{y''_{x^2}3\left(y'_x\right)^2 y''_{x^2} - y'''_{x^3}\left(y'_x\right)^3}{\left(y'_x\right)^7} = \frac{3\left(y''_{x^2}\right)^2 - y'''_{x^3}y'_x}{\left(y'_x\right)^5}.$$

....

§. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА И НЕИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ВЫСШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ФУНКЦИИ

Пусть $y = f\left(g(x)\right)$. Тогда $dy(x) = y'_x(x)dx = f'_g(g)g'_x(x)dx = f'_g(g)dg$ т.е.

$$dy = y'_x(x)dx \text{ и } dy = y'_g(g)dg.$$

Здесь – независимая переменная, а g – функция зависящая от *x*.
И, тем не менее, формулы для нахождения первого дифференциала одинаковы.
Это явление выражает инвариантность формы первого дифференциала относительно замены переменных.

Теперь для независимой переменной *x*:

$$d^2y(x) = d(dy(x)) = d(y'_x(x)dx) = dy'_x(x)dx + y'_x(x)d(dx) =$$
$$= y''_{x^2}(x)dxdx + y'_x(x)d^2x = y''_{x^2}(x)dx^2 + y'_x(x)d^2x.$$

А для зависимой переменной g :

$$d^2y(g) = d(y'_g dy) = dy'_g(g)dy + y'_g(g)d(dg) = y''_{g^2}(g)(dg)^2 + y'_g(g)d^2g.$$

Получили:

$d^2y(x) = y''_{x^2}(x)dx^2$, если *x* – независимая переменная, и

$d^2y(g) = y''_{g^2}(g)dg^2 + y'_g(g)d^2g$, если g – зависимая переменная т.е. функция.

Это и есть не инвариантность формы второго (и, естественно, более высоких) дифференциала относительно замены переменных.

РАЗДЕЛ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

Функция называется возрастающей в некоторой окрестности $\widehat{U}_{x_0}$ точки x_0, если

$$\forall x \in \widehat{U}_{x_0} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Функция называется убывающей в некоторой окрестности $\widehat{U}_{x_0}$ точки x_0, если

$$\forall x \in \widehat{U}_{x_0} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 .$$

Если функция дифференцируема в точке и ее производная больше (меньше) нуля, то она возрастает (убывает) в этой точке.

т.е. $\quad f'_x(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \;\Rightarrow\; \exists U_{x_0} \;\; \forall x \in \widehat{U}_{x_0} \;\; \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$

– а это и есть возрастание функции, имеющей положительную производную.
Аналогично для убывания функции, имеющей отрицательную производную.

Пусть $\sup E(f) = M; \quad \inf E(f) = m$.
Если для значений M и m справедливо, что

$$\exists x_M \in D(f) \;\big|\; f(x_M) = M \qquad \text{и} \qquad \exists x_m \in D(f) \;\big|\; f(x_m) = m ,$$

то говорят, что достигаются максимальное и минимальное значения функции, и они обозначаются: $\quad M = \max f(x); \quad m = \min f(x)$.

Пусть $M = \max f(x); \quad m = \min f(x)$. Тогда:

- Если это справедливо на всей области определения $D(f)$ функции $f(x)$, то говорят, что это глобальный максимум и глобальный минимум.
- Если это справедливо на некотором подмножестве $D(f)$ – мы имеет место локальный максимум и локальный минимум.
- Строгий максимум, если $\quad \forall x \in D(f),\; x \neq x_M \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_M)$
  не строгий максимум, если $\quad \forall x \in D(f),\; x \neq x_M \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_M)$
  аналогично определяются строгий минимум и нестрогий минимум.
- Точки максимума и минимума называются точками экстремума.
- Внутренний экстремум – достигается внутри $D(f)$.
- Краевой экстремум – в граничной точке $D(f)$.

T°(Ферма). В точке локального внутреннего экстремума производная функции, если она существует и конечна, равна нулю.

Δ(для max). Пусть функция $f(x)$ в точке x_M имеет локальный внутренний максимум.

Тогда : $\quad \exists U_{x_M} \;\; \forall x \in U_{x_M} \cap D(f),\;\; f(x) \leq f(x_M) \;\Rightarrow\; \dfrac{f(x)-f(x_M)}{x-x_M} = \operatorname{sign}(x_M - x)$.

Получаем :

$$f'_-(x_M) = \lim_{x \to x_{M-0}} \frac{f(x)-f(x_M)}{x-x_M} \geq 0 \quad \text{и} \quad f'_+(x_M) = \lim_{x \to x_{M+0}} \frac{f(x)-f(x_M)}{x-x_M} \leq 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0 . \;\blacktriangle$$

T°(Ролля). Если функция $f(x)$ дифференцируема внутри замкнутого промежутка и непрерывна на нем, причем на концах промежутка, принимает равные значения, то внутри промежутка найдется точка с нулевой производной (хотя бы одна).

$$f(x) \in C_{[a,b]} \wedge f(x) \in C^1_{[a,b]} \wedge f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \;\big|\; f''(\alpha) = 0 .$$

Δ. Функция непрерывная на замкнутом промежутке необходимо ограничена на нем т.е.

$\exists m, M \in \mathbb{R} \;\;\big|\;\; m \leq f(x) \leq M \quad$ причем m, M – достигаются. Возможны два случая:

a) $\; m = M \;\Rightarrow\; f(x) = const \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$.

b) $\; m < M \;\Rightarrow\;$ существует хотя бы один внутренний локальный экстремум.

Следовательно, по теореме Ферма, $\exists\alpha\in[a,b] \mid f'(\alpha)=0$. ▲

T° (Лангранжа). Если функция непрерывна на замкнутом промежутке и дифференцируема внутри него то внутри промежутка есть точка, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Δ Рассмотрим $F(x)=f(x)+Lx$, где L некоторая постоянная.
По условию теоремы $F(x)$ - непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b).
Константу L подберем из условия : $F(a) = F(b)$.
Получим:

$$f(a) + La = f(b) + Lb,\quad f(a) - f(b) = L(b-a) \;\Rightarrow L=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Так построенная функция $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля . Значит

$$\exists\alpha\in[a,b]\quad F'(\alpha)=0 \quad\Rightarrow\quad f'(\alpha)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

т.е. $$f'(\alpha)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .\quad ▲$$

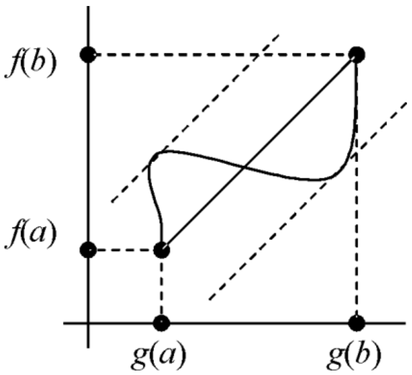
Следствие: Если $f(x)$ на $(x, x+\Delta x)$ дифференцируема, то

$$\exists\alpha\in(x,x+\Delta x)\qquad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(\alpha)\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\alpha)\Delta x\qquad \alpha=x+\theta\Delta x\qquad (0<\theta<1)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \Delta f(x,\Delta x)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\alpha)\Delta x\qquad \alpha=x+\theta\Delta x\qquad (0<\theta<1)$$

Полученная формула называется **формулой конечных приращений**.



T° (Формула Коши). Если две функции непрерывны на замкнутом промежутке дифференцируемы внутри него и:

- их производные одновременно не равны 0;
- значения одной из функций на концах промежутка не совпадают;

то внутри промежутка есть точка где касательная к кривой, заданной параметрическими уравнениями, определяемыми этими функциями параллельна хорде.

$f(t),g(t)\in C_{[a,b]}\ \wedge\ f(t),g(t)\in C'_{(a,b)}\ \wedge\ f'^2(t)+g'^2(t)\neq 0$

$\wedge\ (f(a)\neq f(b)\ \vee\ g(a)\neq g(f))$

$$\Rightarrow\quad \exists\alpha\in(a,\ b)\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Δ Пусть $g(a)\neq g(b)$.
Рассмотрим функцию : $F(x) = f(x) - Lg(x)$. Эта функция $F(x) = f(x) - Lg(x)$ непрерывна на [a,b] и дифференцируема на (a,b).

Потребуем: $F(a) = F(b) \Rightarrow f(a) - Lg(a) = f(b) - Lg(b)$. Тогда $L=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\neq 0$ и по теореме Ролля : $\exists\alpha \mid F'(\alpha)=0 \quad\Rightarrow\quad f'(t)-Lg'(t)=0$ при $t=\alpha \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad L=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \ . \quad ▲$$

Т° (Дарбу). Произвольная функция, дифференцируемая на замкнутом промежутке, и принимающая два некоторых значения принимает и всякое промежуточное значение.

- Частный случай : Если на концах промежутка функция имеет производную разных знаков, то внутри промежутка есть точка, в которой производная равна нулю.

Δ Пусть $f'(a)=\alpha \ \wedge \ f'(b)=\beta$ и $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \gamma x$.

Для неё : $F'(a)= f'(a)-\gamma=\alpha-\gamma<0$;

$F'(b)= f'(b)-\gamma=\beta-\gamma>0$.

$F'(x)$ на концах промежутка принимает значения разных знаков, следовательно

$$\exists \varepsilon \ \Big| \ F'(\varepsilon)= f'(\varepsilon)-\gamma=0 \ \Rightarrow \ f'(\varepsilon)=\gamma \ . \qquad ▲$$

Т° (Об односторонней производной). Если функция f определена в односторонней окрестности точки $x = a$ и непрерывна в ней , а в соответствующей проколотой окрестности дифференцируема, то односторонняя производная равна соответствующему пределу производной в этой точки: $f_{\pm}'(a) = \lim\limits_{x\to a\pm 0} f'(x)$.

Δ Пусть $x\in \hat{U}_a^+$. Тогда $\exists \gamma \in (a,x) \ \Big| \ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}= f'(x)$.

Т.к. $a < \gamma(x) < x$, то $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=a$.

Если в формуле: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\gamma(x))$ устремить $x \to a + 0$, то получим

$$f_+'(a) = \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} . \qquad ▲$$

§. ФОРМУЛА И МНОГОЧЛЕН ТЕЙЛОРА

Пусть $f(x)$ – n-кратно дифференцируема в т. x_0. Полиномом Тейлора этой функции называется

$$P_n\left(f,x_0;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x-x_0\right)^k = f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^n}{n!} .$$

Все производные $P_n(f, x_0; x)$ от нулевой до n-ной совпадают с соответствующей функцией $f(x)$. Разность между функцией $f(x)$ и ее полиномом Тейлора называется остаточным членом формулы Тейлора

$$R_n(f, x_0; x) \equiv f(x) - P_n(f, x_0; x) ,$$

А представление $f(x) \equiv P_n(f, x_0; x) + R_n(f, x_0; x)$ называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. При этом все производные остаточного члена $R_n(f, x_0; x)$ от нулевой до n-ной равны 0 в т. x_0.

§ ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ФОРМЕ ПЕАНО

Записывая в формуле Тейлора, вместо остаточного члена, его выражение, полученное Пеано, получим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

$$f\left(x\right)=P_n\left(f,x_0,x\right)+R_n\left(f,x_0;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}+R_n\left(f,x_0;x\right)=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)\left(x-x_0\right)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n\left(f,x_0;x\right)=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)\left(x-x_0\right)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано дает возможность положительно ответить на вопрос, будет ли уменьшаться остаточный член формулы Тейлора с увеличением степени полинома Тейлора.

Однако остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано не дает возможности количественно оценить ошибку замены функции полиномом Тейлора.

§ ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В ФОРМЕ ШЛЁМИЛЬХА – РОША

Для функции $f(x)$ n раз дифференцируемой на промежутке с концами x и x_0 и $(n+1)$ раз дифференцируемой внутри него и для любой функции $\varphi(x)$ заданной на промежутке с концами x и x_0, дифференцируемой внутри него, имеющей ненулевую производную ($\varphi'(x)\neq 0$) имеет место формула:

$$R_n\left(f,x_0;x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(\gamma\right)}{n!}\left(x-\gamma\right)^n\cdot\frac{\varphi\left(x\right)-\varphi\left(x_0\right)}{\varphi'\left(\gamma\right)}\quad.$$

В этой формуле $\gamma = x_0 + \theta\,(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, $|x - x_0| > |\gamma - x_0| > 0$.

Δ Рассмотрим $\quad F\left(t\right)=f\left(x\right)-P_n\left(f,t;x\right)=f\left(x\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(t\right)}{k!}\left(x-t\right)^k.$

$$F'\left(t\right)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}\left(t\right)}{k!}\left(x-t\right)^k-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(t\right)}{k!}k\left(x-t\right)^{k-1}\left(-1\right)=$$

$= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k+1}\left(t\right)}{k!}\left(x-t\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}\left(t\right)}{k!}k\left(x-t\right)^{k-1}$. Во второй сумме положим $k = l + 1$.

$$F'\left(t\right)\;=\;-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}\left(t\right)}{k!}\left(x-t\right)^k+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{f^{(l+1)}\left(t\right)}{\left(l+1\right)!}\cdot l\left(x-t\right)^l\;=\;-\frac{f^{(k+1)}\left(t\right)}{n!}\left(x-t\right)^n.$$

Тогда по формуле Коши получаем:

$$\frac{F\left(x\right)-F\left(x_0\right)}{\varphi\left(x\right)-\varphi\left(x_0\right)}=\frac{F'\left(\gamma\right)}{\varphi'\left(\gamma\right)}=-\frac{f^{(l+1)}\left(\gamma\right)\left(x-\gamma\right)^n}{n!\varphi'\left(\gamma\right)}.$$

Учитывая, что $\dfrac{F\left(x\right)-F\left(x_0\right)}{\varphi\left(x\right)-\varphi\left(x_0\right)}=-\dfrac{R_n\left(f,x_0,x\right)}{\varphi\left(x\right)-\varphi\left(x_0\right)}$,

получаем: $\quad R_n\left(f,x_0;x\right)=\dfrac{f^{(k+1)}\left(\gamma\right)\left(x-\gamma\right)^n}{n!\varphi'\left(x\right)}\cdot\left(\varphi\left(x\right)-\varphi\left(x_0\right)\right).\quad\blacktriangle$

Получен остаточный член в форме Шлёмильха – Роша.

§ ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

В остаточном члене в форме Шлёмильха – Роша положим $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$;
Тогда $\varphi'(t) = -(n + 1)(x - t)^n$. Причем $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$. Получаем

$$R_n\left(f, x_0; x\right) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\left(x - x_0\right)^{n+1}, \quad \text{где } \gamma = x_0 + \theta\left(x - x_0\right),\ 0 < \theta < 1.$$

Получен остаточный член ряда Тейлора членом в форме Лагранжа.

§ ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В ФОРМЕ КОШИ

Полагая $\varphi(t) = x - t$ и учитывая, что $\varphi(x_0) = x - x_0$, $\varphi(x) = 0$, $\varphi'(t) = -1$ получим остаточный член ряда Тейлора членом в форме Коши:

$$R_n = \left(f, x_0; x\right) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{n!}\left(x - \gamma\right)^n\left(x - x_0\right), \text{ где } \gamma = x_0 + \theta\,(x - x_0)\ ,\quad 0 < \theta < 1.$$

§ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Т°. Разложение функции в ряд Тейлора в окрестности заданной точки x_0 единственно с точностью до порядка следования слагаемых, т.е. в асимптотическом разложении функции $f(x)$ по системе степенных функций $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$:

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} C_k\left(x - x_0\right)^k + \mathrm{o}\left(\left(x - x_0\right)^n\right) \qquad \text{при } x \to x_0$$

коэффициенты C_k находятся однозначно и, при этом $C_k = \dfrac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}$.

§ ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ $f(x)$ В ТЕРМИНАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$f\left(x\right) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x - x_0\right)^n + \dfrac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}\left(x - x_0\right)^{n+1}$, где $\gamma = x_0 + \theta\left(x - x_0\right)$, $\theta \in (0,1)$ может быть записана в терминах дифференциалов:

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d^k f\left(x_0, \Delta x\right) + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1} f\left(\gamma, \Delta x\right).$$

§ ПЯТЬ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ $x_0 = 0$.

Разложения функций в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ называются разложениями в ряды Маклорена.

Множество значений x при которых ряд сходится называется областью сходимости ряда. Степенной ряд вида $f\left(x\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\left(x - x_0\right)^k$ сходится в интервале $\left(x_0 - R, x_0 + R\right)$

и R называется радиусом сходимости степенного ряда. В точках $x_0 - R$ и $x_0 + R$ ряд может, как сходиться, так и расходиться. Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формулам: $R = \lim \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$ (формула Даламбера) или $R = \lim \left|\frac{1}{\sqrt[k]{c_k}}\right|$ (формула Коши). По другому область сходимости ряда может быть установлена при оценке остаточного члена.

Более подробные сведения о рядах будут рассматриваться в последующем курсе.

Ниже следующие разложения получены по общей формуле разложения функции в ряд Тейлора.

1°. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^{k+1}\right)$ $(x_0 = 0)$;

Оценим остаточный член, записав его в форме Лагранжа:

$$\left|R_n\left(\exp, 0; x\right)\right| = \left|\frac{e^{\gamma}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Из оценки следует, что при любом фиксированном x и n стремящемся к бесконечности остаточный член стремится к нулю, т.е. ряд сходится для любых x.

Тот же результат может быть получен из формулы Даламбера:

$$R = \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{n+1}{x}\right| = \infty.$$

Область сходимости ряда $x \in (-\infty; +\infty)$.

2°. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+3}\right)$, $(x_0 = 0)$.

Оценка для остаточного члена:

$$\left|R_{2n+1}\left(\sin, 0; x\right)\right| = \left|\frac{\sin\left(\gamma + (2n+3)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3}\right| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \to 0_{n\to\infty}.$$

Область сходимости ряда $x \in (-\infty; +\infty)$

3°. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2k+2}\right)$, $(x_0 = 0)$.

Оценка остаточного члена:

$$\left|R_{2n+1}\left(\cos, 0; x\right)\right| = \left|\frac{\cos\left(\gamma + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}\right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0_{n\to\infty}.$$

Область сходимости ряда $x \in (-\infty; +\infty)$.

4°. $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+o\left(x^{n+1}\right)$, ($x_0=0$).

Оценка остаточного члена:

$$\left|R_n(\ln,0;x)\right|=\left|\frac{(-1)^n n!(x-\gamma)^n x}{(1+\gamma)^{n+1}n!}\right|\le|x|^{n+1}\to 0_{n\to\infty}.$$

Если $x = 1$, то получается ряд $\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

Область сходимости ряда $x \in (-1, 1]$.

5°. $(1+x)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{n}\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{n!}x^n+o(x^{n+1})$,

($x_0 = 0$).

Для остаточного члена получаем:

$$\left|R_n\left((1+x)^{\mu},0;1\right)\right|=\left|\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n)\left(1+\gamma^{(\mu-n+1)}\right)}{n!}(x-\gamma)^n x\right|=$$

$$=\left|\frac{x-\gamma}{1+\gamma}\right|^n\cdot|x|\cdot|1+\gamma|^{\mu-1}\cdot\frac{|\mu(\mu-1)...(\mu-n)|}{n!}<$$

$$<|x|^{n+1}\left(1+\operatorname{sgn}(\mu-1)\cdot|x|\right)^{n-1}\cdot|\mu|\cdot\left|\frac{(\mu-1)...(\mu-n)}{n!}\right|\approx x^{n+1}\to 0_{\substack{n\to\infty\\ \text{если}|x|<1}}.$$

Область сходимости:

1) $\mu \in \boldsymbol{N}$, $x \in (-\infty; +\infty)$; 2) $\mu > 0$, $x \in [-1; 1]$;

3) $\mu \in (-1, 0)$, $x \in (-1; 1]$; 4) Общ. случай $x \in (-1; 1)$.

§ ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО ПОЛЕЗНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ.

6°. $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...$ $x_0 = 0$

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o\left(x^{n+1}\right).$$

Может быть получено из формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии или из известного разложения $(1+x)^{\mu}$.

Область сходимости ряда $x \in (-1, 1)$.

7°. $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\sum_{k=0}^{n}x^k+o\left(x^{n+1}\right)$, $x_0 = 0$.

Получено из формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
Область сходимости: $x \in (-1, 1)$.

8°. $\sqrt{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n$; $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$, $x\in[-1, 1]$.

При этом: (2n)!! = 2 · 4 · 6 · ... · (2n); (2n+1)!! = 1 · 3 · 5 · … · (2n + 1).

0!! ≡ 1; (–1)!! ≡ 1; (–3)!! ≡ – 1.

(2n + 1)! = (2n + 1)!! · (2n)!! = (2n + 1)!! · n! · 2^n.

9°. $f(x)=\mathrm{arctg}x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+....$

$$\Rightarrow f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \ (|x|<1).$$

10°. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, $(|x|<1)$.

11°. $f(x)=\arcsin x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow \arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)}$, $(|x|<1)$.

РАЗДЕЛ. ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

§ НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОСТОЯНСТВА ФУНКЦИИ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ НА ПРОМЕЖУТКЕ.

Т°. Функция $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$ и дифференцируемая на (a,b) постоянна тогда и только тогда когда ее производная равна нулю.

Δ 1) $f(x)$ = const $\Rightarrow$ $f'(x)=0$.

2) $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f(\gamma)$, $x_1<\gamma<x_2$ (по теореме Лагранжа) $\Rightarrow$

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f(\gamma)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$. ▲

§ УСЛОВИЕ НЕУБЫВАНИЯ (НЕВОЗРАСТАНИЯ) ФУНКЦИИ.

Т°. Функция не убывает, когда ее производная не положительна.

Функция не возрастает, когда ее производная не отрицательна.

Δ Докажем для не убывающей функции.

1) $f(x)$ - не убывает $\Rightarrow \forall\ x_1, x_2$ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\ge 0 \Rightarrow f'(x_1)\ge 0$.

2) $f'(x)\ge 0 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\gamma)\ge 0 \Rightarrow f(x)$ не убывает. ▲

§ УСЛОВИЕ СТРОГОЙ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ.

Т°. Функция строго монотонна тогда и только тогда когда ее производная внутри промежутка не меняя знака, обращается в ноль не более чем на множестве без внутренних точек.

Δ Допустим $f(x)$ не убывает и не является строго возрастающей. Тогда

$$\exists\, x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 \ \text{ и } \ f(x_1) = f(x_2).$$

Значит

$$\forall\, x \in (x_1, x_2) \quad f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \ \text{ т.е. } f(x) = \text{const} \ \text{ на } (x_1, x_2) \Rightarrow f'(x) = 0 \ \text{ на } (x_1, x_2). \ \blacktriangle$$

§ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ.

T°. Если функции $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны в правой полуокрестности точки x_0 и выполнены неравенства:

$$f(x_0) \ge g(x_0); \quad f'(x_0) \ge g'(x_0); \ \dots \ ; f^{(n-1)}(x_0) \ge g'(x_0).$$

Тогда : $\qquad \forall x \in \hat{U}^{+}_{x_0} \quad f^{(n)}(x) \ge g^{(n)}(x).$

Δ 1) Рассмотрим функцию $\quad F_1(x) = f^{(k-1)}(x) - g^{(k-1)}(x).$

Тогда $\forall x \in \hat{U}^{+}_{x_0} \quad F_1'(x) = f^{(n-1)}(x) - g^{(n)}(x) > 0,$

при этом $\quad F_1(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) - g^{(n-1)}(x_0) \ge 0.$

т.е. $F_1(x_0) \ge 0$ и возрастает ($F_1'(x) \ge 0$).

Значит $F_1(x) \ge 0 \quad \forall x \in \hat{U}^{+}_{x_0}$ т.е. $\quad f^{(n-1)}(x) \ge g^{(n-1)}(x) \quad \forall x \in \hat{U}^{+}_{x_0}.$

2) Теперь рассмотрим функцию $\quad F_2(x) = f^{(n-2)}(x) - g^{(n-2)}(x).$

… … … …

$$f^{(n-2)}(x) > g^{(n-2)}(x) \quad \forall x \in \hat{U}^{+}_{x_0}.$$

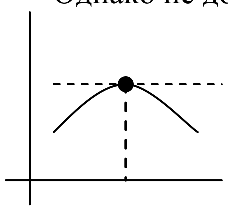
3) … … … $\qquad \blacktriangle$

§ НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ.

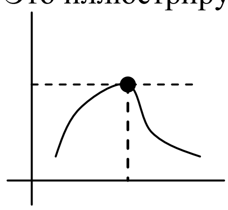
Def : Точка x_0 в которой $f'(x_0)=0$ называется стационарной. Точка x_0 в которой $f'(x_0)=0$ или $f'(x) = \infty$ или $f'(x)$ не существует называется критической.

T°. Если для функции $f(x)$ в точке x_0 достигается внутренний, локальный экстремум, то точка x_0 – критическая.

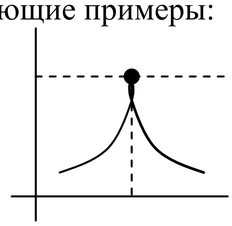
Δ Факт этот следует из теоремы Ферма – это и есть необходимое условие экстремума. Однако не достаточное. Это иллюстрируют следующие примеры:



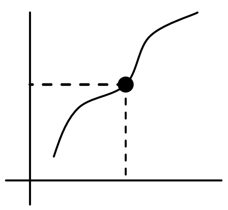
max



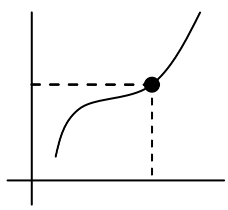
max



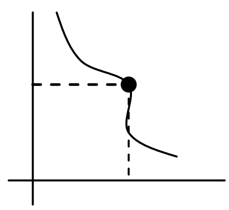
max



нет экстремума



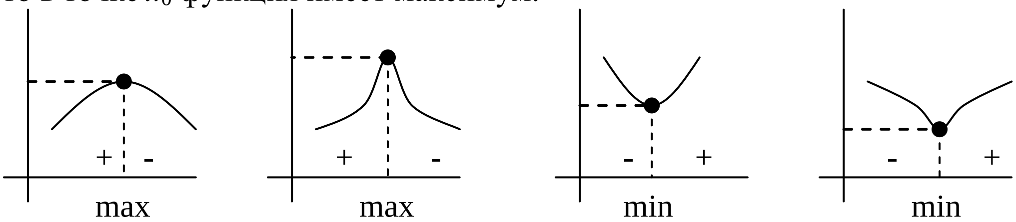
нет экстремума



нет экстремума

§. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА.

T°. Если в окрестности точки внутреннего экстремума $f'(x)$ меняет знак с “ – ” на ” + ” то в критической точке имеется минимум функции; если $f'(x)$ меняет значение с “ + ” на ” – ” то в точке x_0 функция имеет максимум.



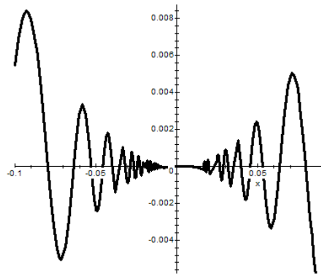
T°. Пусть в т. x_0 функция $f(x)$ n – кратно дифференцируема, причем все производные $f^{(k)}(x_0)$ до (n – 1) включительно равны нулю, и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ то в точке $x = x_0$:
при четном n функция имеет минимум если $f^{(n)}(x) > 0$ и максимум если $f^{(n)}(x) < 0$;
при нечетном n функция не имеет экстремума. Она возрастает если $f^{(n)}(x) > 0$ и убывает если $f^{(n)}(x) < 0$.

Δ Утверждения следуют из разложения функции f (x) в ряд Тейлора в точке x_0:

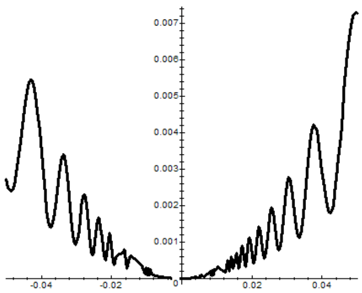
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right). \qquad \blacktriangle$$

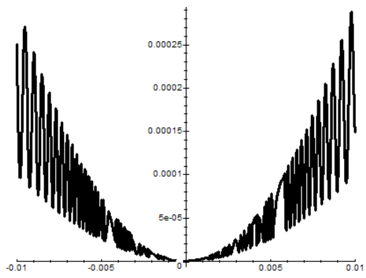
Задачи для исследования функций на экстремумы:
Для нижеуказанных функций установить характер экстремума в точке $x = 0$:

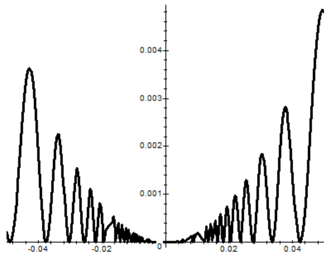
1). $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; 2). $f(x) = \begin{cases} x^2\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;



3). $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; 4). $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.







На иллюстрациях приведены эскизы первых трех функций. Вверху справа – для функции 1, внизу справа – для функции 2, внизу – две иллюстрации к функции 3, но в разных масштабах. Слева для $-0.05 < x < 0.05$, справа для $-0.01 < x < 0.01$. Они показывают динамику изменения функции при $x \to 0$. Для функции 4 исследование следует провести самостоятельно.

§ ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ РАСКРЫТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.

T°. Если функции f (x) и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности некоторой точки x_0 на расширенной числовой прямой, где производная второй из них отлична от нуля и в т. x_0: 1) либо $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, 2) либо $\lim g(x) = \infty$.

Тогда $\lim \frac{f(x)}{g(x)} \Leftarrow\mid \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Знак $\Leftarrow\mid$ означает что, если предел, стоящий справа от этого знака существует и конечен, то существует, конечен и равен ему и предел стоящий слева от знака.

Δ Ограничимся доказательством в случае

1). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Доопределим функции f (x) и g(x) в точке x_0 следующим образом: $f(x_0) = 0$; $g(x_0) = 0$. Тогда, по теореме Коши: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$.

Отсюда следует утверждение теоремы. При $x \to \infty$ замена $t = 1/x$ позволяет свести доказательство к только что проведенному. ▲

§. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА.

При вычислении предела воспользуемся разложением числителя и знаменателя в ряд Тейлора:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots}{g(a) + g'(x)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots}.$$

Проанализируем записанную формулу.

*. Если $f(a) \neq 0 \wedge g(a) \neq 0$, то предел равен $\frac{f(a)}{g(a)}$.

*. Если $f(a) = 0 \wedge g(a) \neq 0$, то предел равен нулю.

*. Если $f(a) \neq 0 \wedge g(a) = 0$, то предел равен бесконечности.

*. Если $f(a) = 0 \wedge g(a) = 0$, то, сокращая числитель и знаменатель дроби на $(x-a)$, выясняем, что:

  **. Если $f'(a) \neq 0 \wedge g'(a) \neq 0$, то предел равен $\frac{f'(a)}{g'(a)}$, что равносильно применению правила Лопиталя.

  **. Если $f'(a) = 0 \wedge g'(a) \neq 0$, то предел равен нулю.

  **. Если $f'(a) \neq 0 \wedge g'(a) = 0$, то предел равен бесконечности.

  **. Если $f'(a) = 0 \wedge g'(a) = 0$, то, сокращая числитель и знаменатель дроби еще раз на $(x-a)$, выясняем, что:

***. Если $f''(a)\neq 0 \wedge g''(a)\neq 0$, то предел равен $\dfrac{f''(a)}{g''(a)}$, что равносильно повторному применению правила Лопиталя.

***. Если $f''(a)=0 \wedge g''(a)\neq 0$, то предел равен нулю.

***. Если $f''(a)\neq 0 \wedge g''(a)=0$, то предел равен бесконечности.

***. Если $f''(a)=0 \wedge g''(a)=0$, то, …. ….. …. .

Таким образом ясно, что применение правила Лопиталя и использование разложения функций в ряды Тейлора по сути одно и тоже (с естественными оговорками по поводу дифференцируемости).

Практический совет: Если функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби имеют известные разложения в ряды Тейлора или эти разложения могут быть легко получены, то следует этим воспользоваться. Если же получение вышеупомянутых разложений связано со значительными техническими трудностями, то более рациональным является применение правила Лопиталя.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-2x}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}=0.$$

§ ВЫПУКЛОСТЬ (ВОГНУТОСТЬ ФУНКЦИЙ).

Def: Определенная на промежутке I функция $f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) если ее дуга не ниже (не выше) стягивающей ее хорды.

$$x_1<x_2 \quad x_1,x_2\in I \quad \forall x\in\left(x_1,x_2\right) \;\Rightarrow\; f\left(x\right)\geq L\left(x\right)=f\left(x_1\right)+\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right).$$

Знак неравенства в заключении говорит о характере выпуклости (вогнутости).

($>$) – строгая выпуклость, ($\geq$) – не строгая выпуклость,

($<$) – строгая вогнутость, ($\leq$) – не строгая вогнутость.

*. Дуга функции $f(x)$ выпуклой на промежутке I лежит ниже касательной к графику функции в произвольной внутренней точке промежутка I.

*. Дуга функции $f(x)$ вогнутой на промежутке I лежит выше касательной к графику функции в произвольной внутренней точке промежутка I.

*. Для выпуклой функции угловой коэффициент хорды не возрастает при возрастании абсциссы правого конца хорды (эквивалент определения выпуклости).

Для выпуклой функции:

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}\geq\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\geq\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x\right)}{x_2-x} \quad\Rightarrow\quad f'_+\left(x\right)\geq f'\left(x\right)\geq f'_-\left(x_2\right).$$

Производная выпуклой функции на промежутке не убывает.

*. Для вогнутой функции угловой коэффициент хорды не убывает при возрастании абсциссы правого конца хорды (эквивалент определения вогнутости).

Для вогнутой функции:

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}\leq\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\leq\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x\right)}{x_2-x} \quad\Rightarrow\quad f'_+\left(x\right)\leq f'\left(x\right)\leq f'_-\left(x_2\right).$$

Производная вогнутой функции на промежутке не возрастает.

Def. Точками перегиба графика функции называются точки, разделяющие смежные промежутки с противоположными направлениями выпуклости.

*. Дуги с разнонаправленной выпуклостью, разделяемые точкой перегиба, лежат по разные стороны от касательной в точке перегиба т.к. в точке перегиба дуга графика пересекает касательную.

§ НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

1°. Неравенство Иенсена.

Для функции выпуклой на промежутке I, по определению, выполняется неравенство:

$$f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\right)\geq \alpha_1 f\left(x_1\right)+\alpha_2 f\left(x_2\right), \text{ если } \alpha_1,\alpha_2\geq 0\ ,\ \alpha_1+\alpha_2=1.$$

Оказывается, для выпуклой функции верно и более общее неравенство:

$$f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n\right)\geq \alpha_1 f\left(x_1\right)+\alpha_2 f\left(x_2\right)+\ldots+\alpha_n f\left(x_n\right),$$

$$\text{если } \forall i=1,2,\ldots,n \quad \alpha_i\geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1.$$

Δ. При $n = 2$ неравенство для выпуклой функции справедливо (по определению). Допустив, что неравенство справедливо при n, рассмотрим:

$$f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_{n-1}x_{n-1}+\alpha_n x_n+\alpha_{n+1}x_{n+1}\right)=$$

$$=f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_{n-1}x_{n-1}+\left(\alpha_n+\alpha_{n+1}\right)\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}x_n+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}x_{n+1}\right)\right)\geq$$

$$\geq \alpha_1 f\left(x_1\right)+\alpha_2 f\left(x_2\right)+\ldots+\alpha_{n-1}f\left(x_{n-1}\right)+\left(\alpha_n+\alpha_{n+1}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n-1}}x_n+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}x_{n+1}\right)\geq$$

$$\geq \alpha_1 f\left(x_1\right)+\alpha_2 f\left(x_2\right)+\ldots+\alpha_{n-1}f\left(x_{n-1}\right)+\alpha_n f\left(x_n\right)+\alpha_{n+1}f\left(x_{n+1}\right).$$

т.е. неравенство доказано с помощью метода математической индукции. ▲

Если поставить цель снять требование $\sum\alpha_i=1$, то неравенство Иенсена можно записать в виде: $f\left(\dfrac{\sum\alpha_i x_i}{\sum d_i}\right)\geq\dfrac{\sum\alpha_i f\left(x_i\right)}{\sum\alpha_i}$.

В случае вогнутой функции знак неравенства изменится на противоположный. Физическая интерпретация – центр масс системы материальных точек, лежащих на выпуклой вверх дуге лежат не |выше точки кривой с той же абсциссой.

2°. Неравенство Коши.

Т.к. функция $y = \ln x$ выпукла вверх, ($y''=-\dfrac{1}{x^2}<0$), то по неравенству Иенсена:

$$\ln\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n\right)\geq\alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2+\ldots+\alpha_n\ln x_n.$$

Положив $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, получим $\ln\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\dfrac{\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n}{n}$. Тогда

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1,x_2,\ldots x_4}, \qquad n\in\mathrm{N},\ \ x_1,x_2,x_3,\ \ldots,x_n>0.$$

3°. Неравенство Янга (Юнга).

Для выпуклой функции верно неравенство

$$\ln\left(\alpha_1 a+\alpha_2 b\right)\ge \alpha_1\ln a+\alpha_2\ln b, \quad \text{для}\ \alpha_1,\alpha_2\ge 0\ ,\ \alpha_1+\alpha_2=1$$

Положим $\alpha_1=\dfrac{1}{p};\quad \alpha_2=\dfrac{1}{q};\qquad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

Тогда: $\ln\left(\dfrac{1}{p}a+\dfrac{1}{q}b\right)\ge\dfrac{1}{p}\ln a+\dfrac{1}{q}\ln b=\ln a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\ge\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b}\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\ge a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}$,

если $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1;\ \ p,q>0$.

4°. Неравенство Гёльдера.

Положим $a=\dfrac{a_i^p}{\sum a_i^p};b=\dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$, при $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}=\frac{1}{p}\cdot\frac{a_i^p}{\sum a_i^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_i^q}{\sum b_i^q}\ge\frac{a_i}{\left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{b_i}{\left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1\ge\frac{\sum a_i b_i}{\left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\ \Rightarrow\ \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\ge\sum a_i b_i\ ,\ \text{для}\ a_i,b_i>0.$$

Неравенство меняется на противоположное, если $pq<0$.

5°. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца.

Из неравенства Гёльдера следует, что

$$\alpha_1 b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\le\sqrt[p]{a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p}\cdot\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q}$$

или, что тоже: $\sum a_ib_i\le\sqrt{\sum a_i^2}\cdot\sqrt{\sum b_i^2}$ (для $a_i,b_i>0$).

В общем случае: $\left|\sum a_ib_i\right|\le\sqrt{\sum|a_i|^2}\cdot\sqrt{\sum|b_i|^2}$.

6°. Неравенство Минковского.

$$\left(\sum\left(a_i+b_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

§ ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЮ ИХ ГРАФИКОВ. ОБЩАЯ СХЕМА.

1. совпадение или подобие с графиками известных функций.

1°. Область определения функции, четность, нечетность, периодичность.

Def. Множество значений аргумента, для которых определено значение функции называется областью определения функции и обозначается $D(f)$.

Def. Функция $y=f(x)$ называется четной, если $\forall x\in D(f)\quad f(-x)=f(x)$.
График четной функции симметричен относительно оси абсцисс.

Def. Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если $\forall x\in D(f)\quad f(-x)=-f(x)$.
График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Def. Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует $T>0$, такое что

$$\forall x\in D(f)\quad f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

2°. Поведение функции на границах области определения. Асимптоты.

Исследование включает в себя определение характера точек разрыва функции и ее поведения на бесконечности. Для этого находятся соответствующие пределы.

Правило 1. Если при $x \to a$ (т.е. к конечному значению) функция $f(x) \to \infty$, то функция имеет вертикальную асимптоту ($x = a$).

Правило 2. Если при $x \to \infty$ функция $f(x) \to b$ (т.е. к конечному значению), то функция имеет горизонтальную асимптоту ($y = b$).

Правило 3. Если при $x \to \infty$ функция $f(x) \to \infty$, то возможно, что функция имеет наклонную асимптоту ($y = kx + b$).

Δ Для получения необходимых и достаточных условий существования наклонных асимптот рассмотрим следующий предел, который для асимптоты $y = kx + b$, по определению, равен нулю.

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0 \;\Rightarrow\; b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - kx - b}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0 \;\Rightarrow\; k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Итак, для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела наклонную асимптоту вида $y = kx + b$, необходимо и достаточно чтобы существовали и были конечны следующие два предела:

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right), \qquad k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Аналогично: необходимым и достаточным условием существования асимптот вида $y = ax^2 + bx + c$ является существование и конечность следующих пределов:

$$c = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - ax^2 - bx\right), \quad b = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - ax}{x}, \quad a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}.$$

Не составляет большого труда получить необходимые и достаточные условия существования асимптот более сложного вида, скажем вида $y = ax + b\ln x + c$ или $y = ae^x + bx + c\ln x + d$ и др. ▲.

3°. Пересечение графика функции с осями координат, промежутки знакопостоянства функции.

Вычислив значение функции в точке $x = 0$ получим координаты точки пересечения графика функции с осью ординат.

Решая уравнение $f(x) = 0$ найдем координаты точек пересечения графика функции с осью абсцисс. Зная эти точки и точки, которые не входят в область определения функции, с помощью метода интервалов, находим промежутки знакопостоянства функции.

4°. Построение первого эскиза графика.

5°. Нахождение производной $y' = f'(x)$ функции.

6°. Нахождение критических точек функции, т.е. точек в которых производная функции не существует или равна нулю. Эти точки являются точками «подозрительными» на экстремум, если, конечно, они принадлежат области определения.

7°. Зная критические точки функции, с помощью метода интервалов, устанавливаем промежутки монотонности функции. Функция возрастает на промежутках, на которых $f'(x) > 0$ и убывает на промежутках, на которых $f'(x) < 0$.

8°. Для критических точек проверяем достаточные условия экстремума функции.

Если при возрастании аргумента производная функции меняет знак с «+» на «–», то в данной точке функция имеет максимум, если же при возрастании аргумента производная функции меняет знак с «–» на «+», то в данной точке функция имеет минимум. Если исследование поведения знака производной в окрестности точки вызывает значительные технические трудности, проверка достаточных условий экстремума функции может быть отложено до нахождения второй производной.

9°. Нахождение второй производной $y'' = f''(x)$ функции.

10°. Проверка достаточных условий экстремума функции. Если в критической точке вторая производная функции положительна то функция в этой точке имеет минимум. Если в критической точке вторая производная функции отрицательна то функция в этой точке имеет максимум.

11°. Если на промежутке вторая производная функции положительна то функция вогнута (выпукла вниз). Если на промежутке вторая производная функции отрицательна то функция выпукла (выпукла вверх).

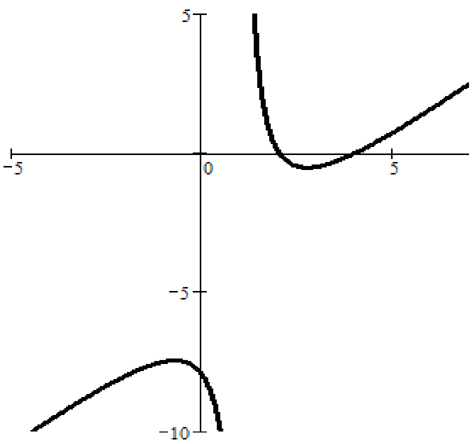
12°. Если в некоторой точке вторая производная функции равна нулю или не существует, а в окрестности этой точки меняет знак, то в этой точке функция имеет точку перегиба.

13°. Контрольные точки графика и окончательный эскиз графика функции.

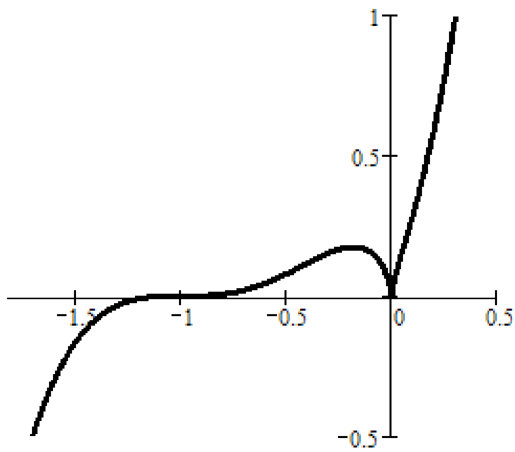
***NB*:** Схема – не догма! Схема – руководство к действию!

§ Примеры построения графиков функций.

1°. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1}$.



2°. $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.



3°. Построить график функции заданной неявно: $x^3 + y^3 = 3xy$. (Декартов лист).
Введем параметризацию: $y = tx$. Подставляя в уравнение, получим: $x^3(1+t^3) = 3tx^2$.

И, наконец, задаем функцию параметрически: $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$; $(t \neq -1)$.

Рассмотрим поведение функций $x(t)$ и $y(t)$ на границах области определения, т.е. при t стремящихся к единице справа и слева, а также при t стремящихся бесконечности.

$$\lim_{t\to-1+0} x(t) = \lim_{t\to-1+0} \frac{3t}{1+t^3} = -\infty; \qquad \lim_{t\to-1+0} y(t) = \lim_{t\to-1+0} \frac{3t^2}{1+t^3} = +\infty.$$

$$\lim_{t\to1+0} x(t) = \lim_{t\to1+0} \frac{3t}{1+t^3} = +\infty; \qquad \lim_{t\to1+0} y(t) = \lim_{t\to1+0} \frac{3t}{1+t^3} = -\infty.$$

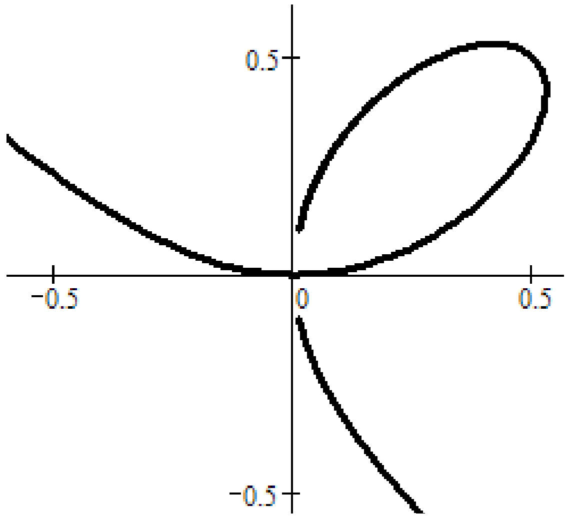
Полученные соотношения говорят о том, что функция может иметь наклонные асимптоты. Найдем наклонные асимптоты, если они есть.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1\mp0} \frac{3t^2}{3t} = -1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(y(t) - kx(t)\right) = \lim_{t\to-1\mp0} \left(\frac{3t^2}{t^3+1} + \frac{3t}{t^3+1}\right) = -1.$$

Эти пределы одинаковы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, т.е. $y = -x - 1$ является асимптотой функции при $x \to \pm\infty$.

с

и



При $t = 0$ функции $x(t)$ и $y(t)$ обращаются в ноль (точка пересечения осями). При этом график функции подходит к началу координат из первой второй четверти.

Кроме того:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t}{1+t^3} = +0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t^2}{1+t^3} = +0.$$

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t}{1+t^3} = +0,$$

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t^2}{1+t^3} = -0.$$

Т.е. график функции подходит к началу координат из первой и четвертой четверти, но начала координат не достигает.

Для исследования динамических характеристик функции найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$ и $y(x)$.

$$y'_t = \frac{6t\left(1+t^3\right) - 3t^2 \cdot 3t^2}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3t\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2},$$

$$x'_t = \frac{3\left(1+t^3\right) - 3t^2 \cdot 3t}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}.$$

Найдем нули найденных производных: $y'_t(t) = 0$ при 1). $t = 0;\ x = 0;\ y = 0$ и 2). $t = \sqrt[3]{2};\ x = \sqrt[3]{2};\ y = \sqrt[3]{4}$.

$x'_t(t) = 0$ при $t = 1/\sqrt[3]{2};\ x = \sqrt[3]{4};\ y = \sqrt[3]{2}$.

И, наконец $y'_x(x) = 0$ при 1). $t = 0;\ x = 0;\ y = 0$ и 2). $t = \sqrt[3]{2};\ x = \sqrt[3]{2};\ y = \sqrt[3]{4}$.Изменение знака производной показывает что, в случае 1) функция $y(x)$ имеет минимум, а в случае

2) функция имеет максимум и в этих точках касательная к графику функции горизонтальна.

При $t = 1/\sqrt[3]{2}; x = \sqrt[3]{4}; y = \sqrt[3]{2}$ производная $y'_x(x)$ не существует, а $x'_y(y) = 0$ и функция $x(y)$ в указанной точке имеет максимум.

График указанной функции приведен выше. Построенная кривая называется Декартовым листом.

РАЗДЕЛ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

§. МНИМАЯ ЕДИНИЦА. УЯВНА ОДИНИЦЯ. IMAGINARY UNIT.

Исторически комплексные числа возникли при попытках решения алгебраических уравнений 3-й степени. Полученный рецепт вычисления корней (Формулы Кардано,1535 г.) в так называемом “ неприводимом ” виде, давали правильные вещественные корни уравнения с вещественными коэффициентами, когда в промежуточных выкладках допускались обычные алгебраические действия (сложение, умножение, целые степени, корни) над выражениями которые содержали знак $\sqrt{-1}$ не имеющей смысла во множестве вещественных чисел, поскольку квадрат любого вещественного числа не отрицателен : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$. Оказалось невозможным по настоящему избавиться от таких выкладок , не пряча их в неоправданно громоздкие правила весьма непонятного (если не пользоваться явно $\sqrt{-1}$) происхождения и смысла.

В случае квадратичного уравнения с вещественными коэффициентами неизбежно- не приводит в этом случае к каким-либо трудностям сть введения комплексных чисел отсутствует: отказ от рассмотрения комплексных чисел при вычислении вещественных корней, если они есть.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел как векторов или точек на плоскости, лишающая их статуса сугубо формального приёма, действительно полезна и естественна только для того, кто в достаточной мере освоил метод координат (Р.Декарт,1637) и имеет представление о векторной алгебре (Дж., 1881-1884 г.). Без этого такая интерпретация сама должна выглядеть весьма формальной и искусственной. Хотя эти идеи прошли длительный путь развития, мы указываем лишь годы опубликования основополагающих трудов.

При изучении комплексных чисел важно параллельно развивать представление о формально-алгебраическом и начально-геометрическом аспектах, устанавливая, где это необходимо, связь между ними.

Введём мнимую единицу *i*: ***Def***: $i^2 = -1$.

Конечно, мнимая единица не является вещественным числом: $i \notin \mathbb{R}$. Обозначение мнимой единицы буквой *i* ввёл Л.Эйлер,1794**;** *i* - первая буква латинского imaginaries- мнимый, воображаемый. поскольку $\sqrt{-1}$ имеет два значения + *i* и -*i* т.е. есть два комплексных решения уравнения $x^2 = -1$, то отождествлять мнимую единицу *i* с выражением $\sqrt{-1}$ некорректно.

Считая множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ лишь подмножеством некоторого более широкого множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ (*c*- первая буква латинского - complex) куда входит и мнимая единица *i* . Потребуем чтобы в $\mathbb{C}$ были определены сложение и умножение с обычными (как и в $\mathbb{R}$) алгебраическими свойствами. Иными словами: Предполагаем что, множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является полем.

§. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ. FIELD OF COMPLEX NUMBERS.

Def: Говорят, что на множестве *M* задана внутренняя операция, если в операции участвуют элементы из множества *M*. При этом, если результат операции также принадлежит множеству *M*, то операция называется заданной корректно.

Полем называется множество P , в котором корректным способом определены две бинарные (двухместные) внутренние операции называемые сложением и умножением элементов такие, что:

1. $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$;
2. $\exists\theta\in P, \theta=0+0i \mid z+\theta=z$;
3. $\forall z, \exists(-z)\in P \mid z+(-z)=\theta$;
4. $z_1+z_2=z_2+z_1$;
5. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$;
6. $\exists e\in P,\ e=1+oi \mid ze=z$;
7. $\forall z\neq\theta, \exists(z)^{-1}\in P \mid z(z)^{-1}=e$;
8. $z_1z_2=z_2z_1$;
9. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

Отметим, что:

а) аксиомы 1–3 определяют поле как группу по сложению, а аксиома 4 делает эту группу абелевой (коммутативной).

б) аксиомы 5–8 говорят о том, что по умножению коммутативной группой является множество не нулевых элементов поля.

в) аксиома 9 связывает эти операции друг с другом дистрибутивным законом.

г) ассоциативность (1 и 5) позволяет сумму и произведение более чем 2-х элементов поля писать без скобок: $z_1+z_2+z_3$ и $z_1z_2z_3$ поскольку всякая расстановка скобок, призванная указать порядок выполнения операций, приводит к одному и тому же результату.

§. СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛЯ.

*. В любом поле не меньше двух элементов и существует поле, состоящее равно из двух элементов $\{0,1\}$.

*. Нуль и единица поля единственны: в поле нет таких же элементов с такими же свойствами.

*. Противоположный и обратный элемент для заданного элемента поля определяются однозначно; нуль не имеет обратного, поскольку, вследствие дистрибутивности, нуль, умножаясь на любой элемент поля, даёт нуль.

*. Элемент обратный противоположному, противоположен обратному: $(-z)^{-1}=-(z^{-1})$.

*. Минус единица (элемент противоположный единице) умножаясь на произвольный элемент, даёт противоположный ему элемент: $(-1)\cdot z=-z$.

*. Переходы к противоположному и обратному элементу инволютивны, т.е. противоположный к противоположному и обратный к обратному совпадают с исходным: $-(-z)=z;\quad (z^{-1})^{-1}=z$.

*. Нуль – единственный элемент поля совпадающий, со своим противоположным;

*. Единица – единственный элемент поля совпадающий, со своим обратным.

*. Вследствие коммутативности сумма и произведение не зависит от порядка, в котором берутся, соответственно, слагаемые или сомножители.

*. В поле всегда и однозначно разрешимо всякое уравнение вида

$$z+a=b\Leftrightarrow z=b+(-a)\equiv b-a,$$

другими словами в поле определена операция вычитания обратная сложению, дающая элемент $b-a$ (разность уменьшаемого *b* и вычитаемого *a*), который нужно прибавить к вычитаемому чтобы получить уменьшаемое: $a+(b-a)=b$.

*. Вычитание из самого себя даёт нуль: $z-z=0$.

*. Вычитание нуля не изменяет уменьшаемого: $z-0=z$.

*. Вычитание из нуля даёт противоположный: $0-z=-z$.
*. Для алгебраической суммы, куда по определению, каждое слагаемое входит со своим знаком: плюс как прибавленное или минус как вычитаемое и где первый знак, если он плюс не пишется, справедливы ассоциативность и коммутативность, а также дистрибутивность умножения с учётом правила знаков.
*. В поле всегда и однозначно разрешено всякое уравнение вида:

$$z\cdot a=b \Leftrightarrow z=b\cdot a^{-1}\equiv \frac{b}{a}=b:a\equiv b/a, \qquad (\text{если } a\neq 0),$$

другими словами в поле определена операция деления на ненулевые элементы поля, дающая элемент $b:a$ (частное данного b и делителя a) на который надо умножить делитель, чтобы получить делимое: $(b:a)\cdot a\equiv \frac{b}{a}\cdot a\equiv b$.
*. Деление на себя даёт единицу: $z:z=1 \quad z\neq 0$.
*. Деление на единицу не изменяет делимого: $z:1=z$.
*. Деление единицы на ненулевой элемент даёт обратный ему элемент: $1:z=z^{-1}, \quad z\neq 0$.
*. Всякое поле содержит нулевой 0 и единичный e элементы и целые кратные единичного элемента. $\underbrace{e+e+...+e}_{n-раз}=:ne$ для $n\in \mathrm{N}$
*. $0\cdot e=0$ вследствие дистрибутивности и единичности нуля;
*. $(-n)e:=-ne$.
*. Сложение и умножение целых кратных единичного элемента поля определяется по правилам: $me+ne=(m+n)e$; $me\cdot ne=(mn)e^2=(mn)e$
Содержательно эти правила очевидны. Более формально, доказывать нечего, когда одно слагаемое (сомножитель) есть нуль. Для натуральных n и целых m можно воспользоваться индукцией, пользуясь индуктивными определениями:

$$me+(n+1)e=(me+ne)+e, \quad me\cdot(n+1)e=me\cdot ne+me\cdot 1e.$$

*. Отображение $n\to ne$ задаёт гомоморфизм кольца целых чисел на кольцо целых кратных единичного элемента. Так как это кольцо не содержит делителей нуля то число определяющее вычеты должно быть простым. Это число не может быть единицей, так как это означало бы что $1\cdot e=0$. Простое число p - характеристика поля. Когда все кратные единицы попарно различны, поле содержит подполе изоморфное полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$. О таком поле говорят как о поле, имеющем характеристику нуль.

§ ВВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

Множеством комплексных чисел называется множество объектов вида $z = x + iy$, где $x, y\in \mathbf{R}$ а величина i определяется соотношением $i^2 = -1$:

$$\mathbb{C} \equiv \{ z \mid z = x + iy; \quad x, y\in \mathbf{R}, \ i^2 = -1\}$$

и введены операции над ними.

Запись $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа, при этом $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (вещественная и мнимая часть числа z).
Определим операции в множестве $\mathbb{C}$. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$;

1. $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
2. $z_1 \pm z_2 \equiv (x_1 \pm x_2) + i(y_1 + y_2)$.
3. $z_1z_2 \equiv (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
4. $\dfrac{z_1}{z_2}\equiv \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.

Алгебраическая форма комплексного числа позволяет дать прозрачную геометрическую интерпретацию, если рассматривать комплексное число как точку на плоскости, у которой абсцисса совпадает с $\operatorname{Re} z$, а ордината – с $\operatorname{Im} z$. При этом правила сложения и вычитания комплексных чисел совпадают с правилами сложения и вычитания векторов с координатами (x_1,y_1) и (x_2,y_2).

*. Если $\operatorname{Im} z = 0$, то число z – вещественное число;

*. Если $\operatorname{Re} z = 0$, то число z – чисто мнимое число.

Величина $\rho \equiv |z| \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа z.

Числа $z_1 = x+iy$, $z_2 = x-iy$ образуют пару комплексно сопряженных чисел.

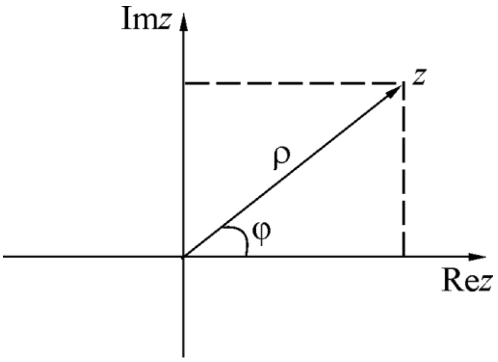
Число комплексно сопряженное к числу z обозначается: $\bar{z}$ или z^*.

Свойства операции сопряжения:

1°. $(z^*)^* = z$; 2°. $zz^* = |z|^2$; 3°. $\dfrac{z^*+z}{2} = \operatorname{Re} z$; 4°. $\dfrac{z-z^*}{2i} = \operatorname{Im} z$;

5°. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$; 6°. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$; 7°. $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$; 8°. $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}$.

§ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.



Рассмотрим комплексное число $z = x+iy$, заданное в алгебраической форме. Перейдем от декартовой системы координат к полярной:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Тогда получим: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Полученная запись называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

При этом величина $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа и задает расстояние от точки z до начала координат. Величина φ задает угол между положительным направлением оси абсцисс и радиусом - вектором направленным в точку z. Эта величина называется аргументом комплексного числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$ и находится неоднозначно а с точностью до величины кратной 2π. $\left(\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in Z\right)$. Здесь $0 \le \arg z < 2\pi$ и называется главным значением аргумента комплексного числа (иногда главным значением аргумента комплексного числа называется угол, удовлетворяющий условию $-\pi \le \arg z < \pi$). Какое из этих значений считается главным должно быть ясно из контекста.

F⁰. Два комплексных числа, заданные в тригонометрической форме равны тогда и только тогда когда их модули совпадают, а аргументы либо совпадают, либо отличаются на величину кратную 2π.

Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен (его можно считать равным чему угодно).

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме. Тогда непосредственным умножением легко проверить, что:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \text{ т.е.}$$

при умножении комплексных чисел модули чисел умножаются, а аргументы складываются, а при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются. Тогда формула $z^n = z \cdot z \cdot z \cdot ... \cdot z = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ задает правило возведения комплексного числа в натуральную степень.
Кроме того, получена весьма важная формула, которая называется формулой Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi .$$

§ ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.

Def: Корнем натуральной степени n из комплексного числа называется другое комплексное число такое что, при возведении его в степень n получим вновь исходное число z. $(\sqrt[n]{z})^n = z$.

Пусть $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z = r(\cos\psi + i\sin\psi) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.
Из условия равенства двух комплексных чисел получаем:

$$r = \rho^n; \ \psi + 2k\pi = n\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}; \ \varphi = \frac{\psi + 2k\pi}{n}.$$

Получена формула извлечения корня натуральной степени n из комплексного числа.

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad \text{Здесь} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

При других значениях k повторяются уже полученные корни. Отметим что, корень n из комплексного числа имеет ровно n различных значений.

Пример:

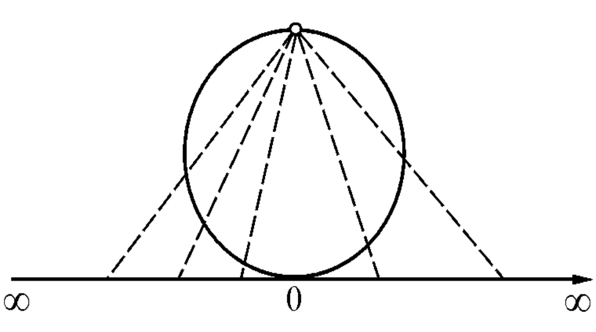
$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[3]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = (\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}) = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Все шесть корней шестой степени их единицы расположены на окружности единичного радиуса в вершинах правильного шестиугольника.

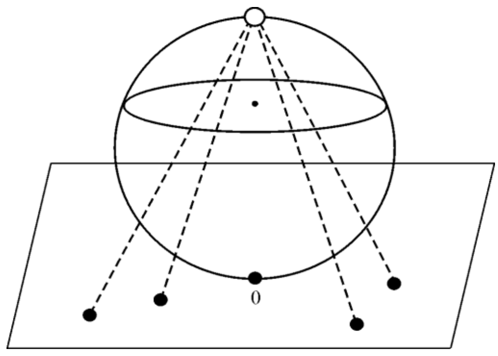
§ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ. СФЕРА РИМАНА.

Аналогично тому, как мы строили расширенную точкой (∞) числовую прямую, можно и комплексную плоскость дополнить точкой (∞) и получить расширенную комплексную плоскость.

Для вещественных чисел:



Для комплексных чисел:



Такая проекция сферы на плоскость называется стереографической проекцией, а проектируемая сфера называется сферой Римана.

Пополненная бесконечно удаленной точкой (∞) комплексная плоскость, топологически эквивалентна сфере.
Понятие окрестности и проколотой окрестности точки на комплексной плоскости задаются естественным способом: $U_{z_0}(\varepsilon)=\{z \mid |z-z_0|<\varepsilon\}$, $\hat{U}_{z_0}(\varepsilon)=\{z \mid 0<|z-z_0|<\varepsilon\}$.

§ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА.

Определим: $$e^z \equiv 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+...=\sum_{k=0}^{\infty} z^k;$$

$$\cos z \equiv 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+...=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!};\quad \sin z \equiv z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Такое определение гарантирует что при вещественных значениях аргумента получатся хорошо знакомые функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ т.е. определения задают расширения указанных функций на комплексную плоскость.
Отметим что:
$$e^{iz}=1+iz-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+i\frac{z^5}{5!}+...=(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...)+i(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...)=\cos z+i\sin z.$$

Следовательно: $e^{iz}=\cos z+i\sin z$, $e^{-iz}=\cos z-i\sin z \Rightarrow$
$$e^{iz}=\cos z+i\sin z;\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$
Эти три формулы называются формулами Эйлера и задают связь между экспонентой и синусом и косинусом в комплексной плоскости.

В частности для $z=x\in R$, $e^{ix}=\cos x+i\sin x$; $e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.
Последняя формула дает способ нахождения экспоненты комплексного аргумента и, следовательно, с учетом формул Эйлера и вычисления $\sin z$ и $\cos z$.

Далее определим: $tgz \equiv \dfrac{\sin z}{\cos z}$; $ctgz \equiv \dfrac{\cos z}{\sin z}$;

$$chz \equiv \frac{e^z+e^{-z}}{2};\quad shz \equiv \frac{e^z-e^{-z}}{2};\quad thz \equiv \frac{shz}{chz};\quad cthz \equiv \frac{chz}{shz}.$$

При этом, ясно что:
$$\sin iz=i\cdot shz;\quad tgiz=i\cdot thz;\quad shiz=i\cdot\sin z;\quad thiz=i\cdot tgz.$$
И $\cos iz=chz$; $chiz=\cos z$; $ctgiz=-icthz$; $cthiz=-ictgz$.
Не трудно убедиться, что:
$$\sin^2 z+\cos^2 z=1;\quad ch^2z-sh^2z=1;$$
$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2;\quad ch(z_1\pm z_2)=chz_1chz_2\pm shz_1shz_2;$$ и т.д.

§ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ЛОГАРИФМ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ.

Воспользовавшись тем, что $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, запишем комплексное число z
$$z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi}.$$
После первого знака равенства стоит алгебраическая, после второго знака равенства – тригонометрическая, а после третьего знака равенства – показательная форма записи

комплексного числа. При этом в показательной форме записи вновь явным образом указаны модуль и аргумент комплексного числа.

Теперь рассмотрим уравнение: $e^w = z$

и решим его относительно w: $e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = \rho e^{i\varphi} = z$.

Здесь $u = \mathrm{Re}\, w$, $v = \mathrm{Im}\, w$, $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Тогда: $e^u = \rho$, $u = \mathrm{Re}\, w = |z| \Rightarrow \mathrm{Im}\mathrm{Ln} z = v = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi = Arg z$.

Значит: $w = \mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k \in Z$.

Получена формула для вычисления логарифма комплексного числа. Отметим что, любое комплексное число (кроме нуля) имеет логарифм, причем этих значений бесконечно много.

Примеры:

1°. $\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + i\cdot 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

2°. $\mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

И, наконец, можно ввести операцию возведения комплексного числа (не равного нулю) в произвольную комплексную степень: $z_1^{z_2} \equiv e^{z_2 \mathrm{Ln} z_1}$.

Примеры:

1°. $(1+i)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{\frac{1}{5}\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{\frac{1}{5}\ln\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)} = \sqrt[10]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$.

2°. $(1+i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \cdot e^{i\ln\sqrt{2}}$.

3°. $(1+i)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{\sqrt{2}\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$.

4°. $(1+i)^{\sqrt{2}+i\sqrt{3}} = e^{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \cdot e^{i\left(\sqrt{3}\ln\sqrt{2} + \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}$.

5°. $i^i = e^{i\mathrm{Ln} i} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$.

6°. $2^2 = e^{2\mathrm{Ln}2} = e^{2(\ln 2 + i\cdot 2k\pi)} = e^{2\ln 2}\cdot e^{i\cdot 4k\pi} = e^{2\ln 2} = 4$.

*. Во всех решениях: $k \in \mathbb{Z}$.

Сделаем несколько замечаний, касающихся приведенных выше решений.

*. В задаче 1 получено пять различных решений расположенных на окружности радиуса $\sqrt[10]{2}$ в вершинах правильного пятиугольника.

*. В задаче 2 бесконечно много решений. Все они расположены на луче $\varphi = \ln\sqrt{2}$ и по модулю образуют бесконечную в обе стороны геометрическую последовательность со знаменателем $e^{2\pi}$.

*. В задаче 3 все решения расположены на окружности радиуса $e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}$ и покрывают ее всюду плотным образом.

*. В задаче 4 решения расположены на спирали и всюду плотным образом заполняют направления в которых они находятся.

*. Задача 5. Удивительный факт: чисто мнимое число в чисто мнимой степени есть бесконечное множество вещественных положительных чисел.

*. Задача 6. И все таки дважды два равно четыре.

§. ФУНКЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ИЛИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ АРГУМЕНТАМИ И ЗНАЧЕНИЯМИ. ГРАФИКИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

1°. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 3x^2 + \sin x$. Вещественно значная функция вещественного аргумента.

2°. $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = |z|$. Вещественно значная функция комплексного аргумента.

3°. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = r(\cos t + i\sin t)$: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $u = t$. Комплексно значная функция вещественного аргумента.

4°. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w(z) = z^2 + 3z + \sin z$. Комплексно значная функция комплексного аргумента.

5°. Комплексно значная функция натурального аргумента называется комплексно значной последовательностью $\{z_1, z_2, z_3, z_4, ..., z_n, ...\} = \{z_n\}_{k=1}^{\infty}$.

§ ПРЕДЕЛ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ.

Комплексно значная функция комплексно значного аргумента – векторно значная функция векторного аргумента.

Def. Точка z_0 называется точкой сгущения множества М (предельной точкой), если $\forall \hat{U}_{z_0}$ существует, по крайней мере одна, (а значит бесконечно много) отличная от z_0 точка из множества *M*.

Def. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b \Leftrightarrow a \in D'(f) \wedge \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; 0 < |z - a|_c < \delta \Rightarrow \; |f(z) - b|_c < \varepsilon$.

($a, b, z \in$ **C**).

*. Если комплексно значная функция имеет предел, то её модуль также имеет предел и при этом: $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b \Rightarrow \lim\limits_{z\to a} |f(z)| = |b|$.

Δ Факт этот следует из неравенства: $\| f(z)| - |b\| \le |f(z) - b| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \lim |f(z)| = |b|$. ▲.

Если $w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, при $u(x, y) \in R$, $v(x, y) \in R$ то

*) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \lim\limits_{z\to z_0} u(z) = u_0 \;\wedge\; \lim\limits_{z\to z_0} v(z) = v_0$;

*) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$, $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0| \;\wedge\; \lim\limits_{z\to z_0} \arg f(z) = \arg w_0$

*) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = 0$.

Непрерывность в терминах пределов и неравенств формулируется так же, как и для вещественно значных функций.

Производная и дифференциал функции определяется в полной аналогии с определениями для функций вещественного аргумента. И результаты зачастую очень похожи. Однако …

Для комплексно-значных функций требования дифференцируемости накладывает существенные ограничения.

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(u - u_0) + i(v - v_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} .$$

Переходя в полученном выражении к пределу, получаем:

1) $x = x_0$, $y \to y_0$, $f'(z_0) = -iu'_y + v'_y$; 2) $y = y_0$, $x \to x_0$, $f'(z) = u'_x + iv'_x$.

Из двух различных записей для $f'(z_0)$ делаем вывод: функция комплексного аргумента $w(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ дифференцируема тогда и только тогда, когда выполняются условия: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Эти условия называются условиями Коши – Римана.

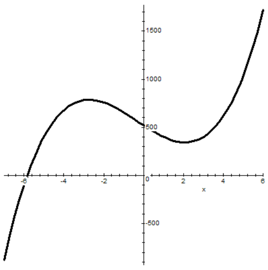
При этом из условий Коши – Римана для дифференцируемой функции следует:

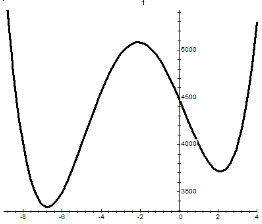
$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y ;$$

Кроме того непосредственными вычислениями удается установить, что:

$$(z^n)' = nz^{n-1}; \qquad (e^z)' = e^z; \qquad (\sin z)' = \cos z; \ \ldots\ldots$$

§ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАМКНУТОСТЬ ПОЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ.





На рисунках слева проиллюстрировано что, полином четной степени может и не иметь вещественных корней, а полином нечетной степени обязательно имеет, по меньшей мере, один вещественный корень. Вопрос: сколько корней, в том числе вещественных, имеет полином произвольной степени?

T°. (*Основная теорема алгебры*). Поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, т. е. всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень (в частности это относиться и к многочлену с вещественными коэффициентами).

Если $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} \quad P_n(z_0) = 0.$$

Теорема была доказана Даламбером (1717 – 1783) и Гауссом (1777 – 1855) еще в XVIII веке, хотя лишь в XIX веке эти доказательства были доведены до полной строгости. В настоящее время существует несколько десятков различных ее доказательств.

Δ Сначала сформулируем очень важный для доказательства

Принцип Руше: Приращение Arg *f(z)* при движении по замкнутому контуру C в положительном направлении равно $2\pi n$, где n количество нулей функции $f(z)$ внутри области ограниченной контуром C.

$\Delta_{c_1} \mathrm{Arg} z = 2\pi$ (для контура C_1 содержащем внутри себя начало координат);

$\Delta_{c_2} \mathrm{Arg} z = 0$ (для контура C_2 не содержащем внутри себя начало координат) .

Теперь рассмотрим $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, $(c_n \neq 0, c_k \in \mathbb{C})$ и преобразуем его к виду

$$P_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = c_n z^n \left\{ 1 + \frac{c_{n-1}}{c_n}\frac{1}{z} + \frac{c_{n-2}}{c_n}\frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{c_1}{c_n}\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{c_n}\frac{1}{z^n} \right\}.$$

Выберем замкнутый контур C так:

C – окружность, с центром в начале координат пробегаемая против часовой стрелки.

Радиус окружности R выберем так, чтобы $\left| \frac{c_{n-1}}{c_n}\frac{1}{z} + \frac{c_{n-2}}{c_n}\frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{c_0}{c_n}\frac{1}{z^n} \right| < 1$.

Это всегда можно сделать с помощью выбора достаточно большого R ибо

$\left| \frac{c_{n-1}}{c_n}\frac{1}{z} + \frac{c_{n-2}}{c_n}\frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{c_0}{c_n}\frac{1}{z^n} \right| \to 0$ при $|z| \to \infty$

Тогда: $\Delta_c \mathrm{Arg} f(z) = \Delta_c \mathrm{Arg} c_n + \Delta_c \mathrm{Arg} z^n + \Delta_c \mathrm{Arg}\{\ldots\}$.

При этом $\Delta_c \mathrm{Arg} c_n = 0$ т.к. константа и ее аргумент не изменяются при обходе контура, $\Delta_c \mathrm{Arg}\{...\} = 0$ т.к. выражение $\{...\}$ при обходе контура *C*, описывает контур не содержащий начало координат и, следовательно:

$$\Delta_c \mathrm{Arg} z^n = 2\pi n \quad \text{т.е.} \quad \Delta_c \mathrm{Arg} f(z) = 2\pi n .$$

и, согласно принципу Руше, функция $f(z)$ имеет внутри контура (т.е. на комплексной плоскости) *n* корней, возможно совпадающих.

§ ТЕОРЕМА БЕЗУ.

Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $S(x)$ значит найти многочлены: $Q(x)$ -неполное частное и $R(x)$ –остаток такие, что: $P(x) = S(x)\,Q(x) + R(x)$.
Отметим, что $\deg Q(x) = \deg P(x) - \deg S(x)$; $\deg R(x) < \deg S(x)$; $\deg Const = 0$.
Делимое делится на делитель нацело, если остаток тождественно равен 0; деление невозможно, если делитель тождественно равен нулю. Многочлен всегда нацело делиться на *Const*. Неполное частное определяется делимым и делителем однозначно.

Рассмотрим частный случай, когда $\deg S(x) = 1$, т.е. $S(x) = x - c$.
Тогда $P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x) + R_0(x)$.
Вопрос: чему равно $R_0(x)$?
Подставив в правую и левую часть $x = c$, $P_n(c) = R_0$, получим:

T°. (Безу) Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-c)$ равен значению многочлена $P_n(x)$ в точке $x = c$.

Следствие 1: Если $x = c$ корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x)$ делиться на $(x-c)$ без остатка и наоборот.

Следствие 2: Если $x = c$ корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x)$ может быть разложен на множители: $P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x)$.

§ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ В МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

Рассмотрим полином $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n$, $(c_n \neq 0)$.
1. По основной теореме алгебры: $\exists z_1$, $P_n(z_1) = 0$.
*. По следствию из теоремы Безу: $P_n(z) = (z - z_1)Q_{n-1}(z)$ причем старший коэффициент полинома $Q_{n-1}(z)$ совпадает со старшим коэффициентом полинома $P_n(z)$.

2. По основной теореме алгебры: $\exists z_2$, $Q_{n-1}(z_2) = 0$.
*. По следствию из теоремы Безу: $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)Q_{n-2}(z)$.

…………

n) …………

Получили: $P_n(z) = c_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$.

Учитывая что, уравнение может иметь кратные корни z_j (k_i – кратность корня z_i), получим разложение полинома на линейные множители.

$$P_n(z) = c_n \prod_{i=1}^{r} (z - z_i)^{k_i} \text{ где } k_i \ge 1 \text{ и } \sum_{1}^{r} k_i = n .$$

§. КОМПЛЕКСНЫЕ КОРНИ МНОГОЧЛЕНА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Рассмотрим $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, ($a_n \ne 0$ и $a_i \in \mathbb{R}$) и пусть z_0 является корнем $P_n(z_0) = 0$ многочлена. Тогда:

$$P_n(\bar{z}_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\bar{z}_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{z_0^{\,k}}) = \sum_{k=0}^{n} (\overline{a_k z_0^{\,k}}) = (\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^{\,k}}) = \overline{P_n(z_0)} = 0 .$$

Т.е. если число z_0 является корнем уравнения *n*-й степени с вещественными коэффициентами, то $\bar{z}_0$ также является корнем того же многочлена.

Следствие: Уравнение нечетной степени с вещественным коэффициентом имеет хотя бы один вещественный корень.

Следствие: Уравнение четной степени с вещественным коэффициентом может и не иметь вещественных корней.

При этом: $P_n(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0) Q_{n-2}(z) = (z^2 - (z_0 + \bar{z}_0) z + z_0 \bar{z}_0) Q_{n-2}(z) =$

$= (z^2 - 2\operatorname{Re} z_0 \cdot z + |z_0|^2) Q_{n-2}(z) = (z^2 - \alpha z + \beta) Q_{n-2}(z)$.

Итог:

Если $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ многочлен с вещественными коэффиццентами ($a_n \ne 0$, $a_i \in \mathbb{R}$)

То: $P_n(z) = c_n \prod_{i=1}^{r} (z - a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} (z^2 + p_j z + q_j)^{l_j}$ причем a_i, p_j, q_j $\in \mathbb{R}$ $\sum_{1}^{r} k_i + \sum_{1}^{s} 2 l_j = n$.

Разложение многочлена на линейные и квадратичные множители с вещественными коэффициентами (причем квадратичные множители не имеют вещественных корней) называется разложением многочлена на неприводимые множители.

§ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 1, 2, 3, 4 СТЕПЕНИ. ФОРМУЛЫ КАРДАНО. МЕТОД ФЕРРАРИ.

I. $ax + b = 0$.
1) $a = 0,\ b \ne 0$ – нет решений;
2) $a = 0$, $b = 0$ – бесконечно много решений;
3) $a \ne 0$, $x = -\dfrac{b}{a}$ – единственное решение.

II. $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \ne 0$) $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

III. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a \ne 0$). Перейдем к приведенному кубическому уравнению: $x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 = 0$, и произведем замену неизвесной: $y = x + \dfrac{b_1}{3}$.

тогда: $y^3 = x^3 + 3x^2 \dfrac{b_1}{3} + 3x \dfrac{b_1^{\,2}}{9} + \dfrac{b_1^{\,3}}{27}$; $\quad x = y - \dfrac{b_1}{3}$; $\quad x^2 = y^2 - 2y \dfrac{b_1}{3} + \dfrac{b_1^{\,2}}{9}$,

$$x^3 = y^3 - 3y^2\frac{b_1}{3} + 3y\frac{b_1^{\,2}}{9} - \frac{b_1^{\,3}}{27}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение, получим:

$$y^3 - b_1y^2 + \frac{1}{3}yb_1^{\,2} - \frac{1}{27}b_1^{\,3} + b_1y^2 - \frac{2}{3}yb_1^{\,2} + \frac{b_1^{\,3}}{9} + c_1y - \frac{b_1c_1}{3} + d_1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y^3 + py + q = 0.$$

Получается неполное кубическое уравнение, в котором

$$p = c_1 - \frac{1}{3}b_1^2;\; q = \frac{2}{27}b_1^3 - \frac{1}{3}b_1c_1 + d_1.$$

Решение получившегося неполного кубического уравнения ищем в виде: $y = u + v$.

Тогда $y^3 = k^3 + v^3 + 3kv(u+v) = u^3 + v^3 + 3uvy \;\;\Rightarrow\;\; u^3 + v^3 + 3kvy + py + q = 0$

И, следовательно: $u + v + (3uv + p)y + q = 0$.

Положив $(3uv + p) = 0$, получим систему уравнений $\left.\begin{array}{l} u^3 + v^3 + q = 0 \\ u^3v^3 = -\left(p/3\right)^3 \end{array}\right\}$.

т.е. u^3 и v^3 являются корнями квадратного уравнения $z^2 + qz + \left(-p/3\right)^3 = 0$.

Решая это уравнение, найдем

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \;\;\Rightarrow\;\; u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \;\;;\quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\;.$$

Полученные три значении u и три значения v не могут суммироваться в произвольных сочетаниях. Они должны удовлетворять соотношению $uv = -p/3$. Оказывается, есть ровно три пары u и v, удовлетворяющих этому соотношению.

Отсюда $x_i = -\dfrac{b_1}{3} + u_i + v_i$, $i = 1,2,3.$ Найдены три корня кубического уравнения.

$$x_i = -\frac{b}{3a} + \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right)_i + \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right)_i.$$

Это и есть формулы Кардано для нахождения корней кубического уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0$.

Полагая $x = y + 3$, получим неполное кубическое уравнение $y^3 + 9y - 26 = 0$. К этому уравнению можно применить формулы Кардано. Здесь $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = 196 = 14^2$, поэтому

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{13 + 14} = \sqrt[3]{27}.$$

Одним из значений этого кубического корня будет число 3. Произведение этого значения на соответствующее ему значение другого кубического корня, входящего в формулу, должно равняться числу $-\dfrac{p}{3}$, т.е. в нашем случае равняться числу (–3). Искомым значением второго корня будет, следовательно, число (–1) и поэтому $y_1 = 2$. Разделив неполное уравнение на ($y - 2$) , получим квадратное уравнение с корнями $y_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{12}$. Тогда корнями исходного кубического уравнения будут: $x_1 = 5;\;\; x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{12}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 19x + 30 = 0$.

Здесь $p=-19;\ q=30;\ \dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=-\dfrac{784}{27}$. Тогда:

$$x=\sqrt[3]{-15+i\sqrt{\frac{784}{27}}}+\sqrt[3]{-15-i\sqrt{\frac{784}{27}}}\ .$$

Корнями данного кубического уравнения будут $x_1=-5;\ \ x_2=2;\ x_3=3$.

Решение этого уравнения показывает, что далеко не всегда корни кубического уравнения (даже если они вполне благополучные) удается найти так просто, как хотелось бы.

IV. Рассматриваем уравнение четвертой степени:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\,,\quad (a\neq 0).$$

Мы приведем решение, полученное Феррари.

Приведенное уравнение имеет вид: $x^4+b_1x^3+c_1x^2+d_1x+e_1=0$.

Осуществляя замену переменной: $y=x+\dfrac{b_1}{4}$; $x=y-\dfrac{b_1}{4}$, получим неполное уравнение четвертой степени: $y^4+py^2+qy+r=0$.

Запишем уравнение в виде: $\left(y^2+\dfrac{p}{2}\right)^2-qy+r-\dfrac{p^4}{4}=0$.

Введем параметр $\alpha>0$ так, чтобы:

$$(y^2+\frac{p}{2}+\alpha)^2-2\alpha(y^2+\frac{p}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{p^2}{8\alpha}-\frac{q}{2\alpha}y-\frac{r}{2\alpha})=0\,.$$

Потребуем , чтобы $y^2+\dfrac{p}{2}+\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{p^2}{8\alpha}-\dfrac{q}{2\alpha}y-\dfrac{r}{2\alpha}$ было полным квадратом, тогда идея состоит в том, чтобы представить полученное уравнение в виде разности квадратов $A^2-B^2=0$, с последующим разложением его в произведение $(A-B)(A+B)=0$ и решением получившихся квадратных уравнений.

Для реализации этой идеи дискриминант квадратного уравнения должен быть равен нулю.

$D=\dfrac{q^2}{4\alpha^2}-4\left(\dfrac{p+\alpha}{8\alpha}+\dfrac{p^4-4r}{8\alpha}\right)=0$. Тогда $\dfrac{q^2}{4\alpha^2}-\dfrac{4\alpha(p+\alpha)+p^4-4r}{2\alpha}=0\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \frac{q^2}{4\alpha^2}-\frac{4\alpha(p+\alpha)+p^4-4r}{2\alpha}=0\ \ \Rightarrow\ \ q^2-8\alpha^2(p+\alpha)-2\alpha(p^4-4r)=0\,.$$

и для нахождения α имеем кубическое уравнение: $8\alpha^3+8p\alpha+2\alpha(p^4-4r)-q^2=0$.

При этом, если $\alpha=0$; $p(\alpha)=-q^2<0$ и если $\alpha\to+\infty$; $p(\alpha)\to+\infty$

т.е. уравнение обязательно имеет положительный корень.

§. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ.

Поиски формул для решения уравнений пятой и более высоких степеней безуспешно продолжались до начала девятнадцатого века когда была, наконец, доказана следующая замечательная теорема

Т°. Абеля: Общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше четвертой не разрешимо в радикалах т.е. не существует формул, выражающих его корни через коэффициенты с помощью радикалов.

Более того, для любой степени не меньшей пяти можно указать уравнение с целыми коэффициентами, корни которого никак не выражаются через радикалы, сколь угодно многоэтажные, если в подрадикальных выражениях используются лишь целые и рациональные числа. Таково, например, уравнение $x^5 - 4x - 2 = 0$. Можно доказать, что это уравнение имеет три вещественных и два комплексных корня, но уравнение неразрешимо в радикалах. Таким образом, запас чисел, вещественных или комплексных, которые служат корнями уравнений с целыми коэффициентами (такие числа называются **алгебраическими** в противоположность числам **трансцендентным**, которые не являются корнями никаких уравнений с целыми коэффициентами), много шире запаса чисел, записываемых через радикалы.

Теория алгебраических чисел является важной ветвью алгебры. Доказательство невозможности разрешения в радикалах уравнений степени выше четвертой найдено Абелем (1802 – 1829). Существование не разрешимых в радикалах уравнений с целыми коэффициентами установил Галуа (1811 – 1832). Он также нашел условия, при которых уравнение может быть решено в радикалах. Все эти результаты потребовали создания новой глубокой теории, а именно **теории групп**. Понятие группы позволило исчерпать вопрос о разрешимости уравнений в радикалах, а позже оно нашло многочисленные применения в различных разделах математики и физики а также за их пределами и стало одним из важнейших объектов изучения в алгебре.

Отсутствие формул для решения уравнений степени выше четвертой не вызывает серьезных затруднений, если говорить о поиске корней таких уравнений. Оно полностью компенсируется многочисленными методами приближенного решения уравнений, которые даже для кубических уравнений ведут к цели гораздо быстрее, чем применение формул (там, где они вообще применимы) и последующее приближенное извлечение радикалов.

§. ЕЩЕ О ФУНКЦИЯХ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

1°. Линейная функция $w = az + b$; $(a \neq 0)$.

Если записать a в показательной форме $a = ke^{i\alpha}$ то: $w_1 = e^{i\alpha}z -$ поворот на угол α, $w_2 = kw_1$ гомотетия с коэффициентом k и центром в начале координат, $w_3 = w_2 + b -$ сдвиг плоскости на вектор b.

Таким образом, линейная функция осуществляет поворот комплексной плоскости z с растяжением (сжатием) и последующим параллельным переносом. Линейная функция задает взаимно однозначное соответствие между комплексной плоскостью z и комплексной плоскостью w. При этом она преобразует прямые в прямые, сохраняя угол между ними и окружности в окружности, т.е. осуществляет конформное отображение комплексной плоскости z в комплексную плоскость w.

2°. Степенная функция $w = z^n$; $(n \in \mathrm{N})$.

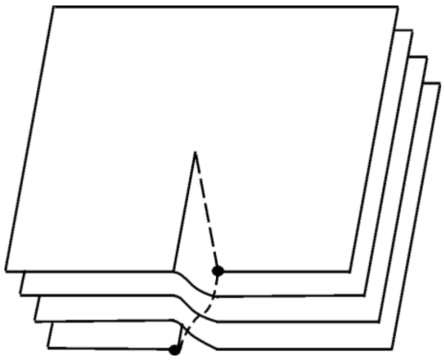
Записав z в показательной форме: $z = ke^{i\varphi}$ $k > 0$ получим $w = z^n = k^n e^{in\varphi}$.

При этом окружности радиусом k отображаются в окружности радиуса k^n, а лучи исходящие из начала координат и образующие угол φ с осью абсцисс переходят в лучи из начала координат и образующие угол $n\varphi$ с осью абсцисс.

Таким образом: сектор $0 \le \varphi < \dfrac{2\pi}{n}$ в плоскости z переходит во всю плоскость w, сектор $\dfrac{2\pi}{n} \le \varphi < \dfrac{4\pi}{n}$ в плоскости z также переходит во всю плоскость w и т.д. Следовательно, геометрический образ плоскости z при отображении $w = z^n$ представляет собой плоскость w, повторенную n раз.

Из сказанного выше следует, что отображение не осуществляет взаимно однозначного отображения между плоскостью z и плоскостью w. Однако, если в качестве геометрического образа функции w рассматривать более сложное многообразие, чем обычную комплексную плоскость, можно сохранить взаимную однозначность отображения.

Будем считать, что мы имеем n экземпляров (листов) плоскости w, разрезанной по положительной части действительной оси, на каждом из которых $\arg z$ изменяется в пределах $2\pi(k-1) \le \arg z \le 2\pi k,\ \ k = 1, 2, ..., n$. Сектору $\dfrac{2\pi}{n}(k-1) \le \varphi \le \dfrac{2\pi}{n}k$ плоскости z функция $w = z^n$ ставит в соответствие k-й лист плоскости w; луч $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}(k-1)$ переходит в верхний берег разреза k-го листа, а луч $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}k$ – в нижний берег разреза этого же k-го листа. Построим из этих листов непрерывное геометрическое многообразие так, чтобы непрерывному движению точки на плоскости z соответствовало непрерывное точки w на данном многообразии (смотри рисунок). Для этого заметим, что нижний берег разреза k-го листа и верхний берег разреза $(k+1)$-го листа имеют один и тот же аргумент $\psi_k = 2\pi \cdot k$. Когда точка z в своем непрерывном движении по плоскости z переходит из одного сектора в другой, соответствующая ей точка w переходит с одного листа плоскости w на следующий лист. Очевидно, чтобы сохранить непрерывность отображения мы должны соединить соседние листы, склеивая нижний берег разреза k-го листа с верхним берегом разреза $(k+1)$-го листа. При этом остаются свободными верхний берег разреза 1-го листа и нижний берег разреза n-го листа. Пусть точка z совершит на плоскости z полный оборот вокруг точки $z = 0$, последовательно пройдя все n секторов этой плоскости, начиная с первого сектора, и вернется к своему первоначальному положению. Тогда соответствующая ей точка w пройдет n листов и, чтобы она вернулась на первый лист, надо склеить оставшиеся свободными берега разрезов на 1-ом и n-ом листах. Тем самым полной плоскости z функция $w = z^n$ ставит в соответствие n листов плоскости w, склеенных указанным выше способом. Такое геометрическое многообразие представляет собой n-листную **риманову поверхность**, а функция $w = z^n$ является n-листной функцией. Функция $w = z^n$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между комплексной плоскостью z и n-листной римановой поверхностью.



3°. Корень натуральной степени $w = \sqrt[n]{z}$.

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right);\ \ k = 3,2,...,n-1.$$

Функция является многозначной и осуществляет взаимно однозначное соответствие между n-листной римановой поверхностью и комплексной плоскостью z. При этом k-й лист римановой поверхности переходит в сектор $\frac{2\pi}{n}(k-1) \le \varphi \le \frac{2\pi}{n}k$ плоскости z.

4°. Показательная функция (экспонента): $\omega = e^z$;
Основное свойство показательной функции $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Тогда

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Для вещественных значений $z = x + i0$ значения $e^{x+i0} = e^x e^{i0} = e^x$ показательной функции комплексного аргумента совпадают со значением вещественной показательной функции вещественного аргумента.

Функция $\omega = e^z$ периодична с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$.
Тогда: $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1-z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2\pi i;$ $k \in Z$.

Взаимная однозначность отображения $w = e^z$ достигается, если ограничиться, скажем, полосой $0 \le y < 2\pi$.

Горизонтальная прямая $y = c$ при отображении $w = e^{x+ic} = e^x e^{ic}$ переходит в луч $\varphi = c$, в частности, действительная прямая y=0 (как и всякая прямая $y = 2\pi k$) переходит в вещественную положительную полупрямую $v = 0, u > 0$,а прямая $y = \pi$ – в вещественную отрицательную полупрямую. Значит, полоса $0 \le y < 2\pi$ в плоскости z переходит во всю плоскость w. Полоса $2\pi \le y < 4\pi$ в плоскости z также переходит во всю плоскость w.

Отрезки $x = x_0$ $(0 \le y < 2\pi)$ отображаются на окружности $\rho = e^{x_0}$, в частности отрезок мнимой оси $x = 0,\ 0 \le y < 2\pi$ переходит в единичную окружность $\rho = 1$.
Полуполоса $x \ge 0, 0 \le y < 2\pi$ отображается на внешность единичного круга $\rho > 1$.
Полуполоса $x < 0, 0 \le y < 2\pi$ отображается на внутренность единичного круга $0 < \rho < 1$.
Полоса $0 < y < \pi$ отображается на верхнюю полуплоскость $v > 0$, полоса $\pi < y < 2\pi$ – на нижнюю полуплоскость.

Из выше сказанного заключаем, что геометрический образ плоскости z при отображении $w = e^z$ представляет собой плоскость w, повторенную бесконечное число раз.

Тем самым полной плоскости z функция $w = e^z$ ставит в соответствие бесконечное число листов плоскости w, склеенных способом, аналогичным тому который применялся для степенной функции, за исключением того, что теперь этих листом бесконечно много как снизу, так и сверху.

Такое геометрическое многообразие представляет собой бесконечно листную **риманову поверхность**, а функция $w = e^z$ является бесконечно листной функцией.
Функция $w = e^z$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между комплексной плоскостью z и бесконечно листной римановой поверхностью.

5°. Логарифмическая функция: $w = \mathrm{Ln}\, z$;
Логарифмическая функция является функцией обратной показательной функцией и, поэтому, является функцией многозначной: $w = \mathrm{Lnz} = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$; $k \in Z$.
Она осуществляет взаимно однозначное соответствие между бесконечно листной римановой поверхностью и плоскостью w, при этом каждый лист римановой поверхности переходит в горизонтальную полосу $2\pi k \le y < 2\pi(k+1)$.

РАЗДЕЛ. Неопределенный интеграл

§ ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Def. Уравнение которое, кроме неизвестной функции и аргумента, содержат и производные искомой функции конечных порядков, называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Причем высший порядок производной входящей в уравнение называется порядком уравнения.

$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ - неявное дифференциальное уравнение *n*-го порядка.

$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ - явное дифференциальное уравнение *n*-го порядка.

Def. Частным решением дифференциального уравнения на невырожденном промежутке *X*, называется любая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество на этом промежутке. Множество всех частных решений дифференциального уравнения называется общим решением дифференциального уравнения.

Рассмотрим явное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = f(x)$$

Любое частное решение указанного уравнения называется первообразной функции $f(x)$ и обозначается $F(x)$ т.е. $\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$.

Example:

1°. Если $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $F(x) = \mathrm{arctg}x$ (т.к. $F'(x) = f(x)$).

2°. Если $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $\forall x \neq 0 \quad F(x) = -\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$ (т.к. $F'(x) = f(x)$).

Из примеров видно, что одна и та же $f(x)$ может иметь не одну первообразную.

Теорема (об общем виде первообразной). Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ две первообразные одной функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + Const$.

$$\Delta \quad \begin{matrix} F'(x) = f(x) \\ \Phi'(x) = f(x) \end{matrix} \Rightarrow (F(x) - \Phi(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F(x) - \Phi(x) + Const \quad \blacktriangle.$$

F°. Первообразная функции на промежутке является первообразной этой же функции на любом невырожденном подпромежутке.

Def **.**Общее решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (обозначается $\int f(x)dx$)

При этом: $\int f(x)dx = F(x) + Const$

Связь неопределенного интегрирования и дифференцирования:

1°. $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$; 2°. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; 3°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Линейность неопределенного интеграла:

$$\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx, \ (\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

§. ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Таблицу интегралов надо знать!

Все формулы данной таблицы проверяются непосредственным дифференцированием.

1°. $\int 0dx = Const$;

2°. $\int 1dx = x + C$;

3°. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

4°. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5°. $\int e^x dx = e^x + C$;

6°. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

7°. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8°. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9°. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

10°. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

11°. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, ($x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$);

12°. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, ($x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}$);

13°. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

14°. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

15°. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$;

16°. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$;

17°. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arth} x + C \\ \operatorname{arcth} x + C \end{array}\right.$;

18°. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arsh} x + C \\ \operatorname{sgn} x \operatorname{arch} x + C \end{array}\right.$;

19°. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;

20°. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{|a|} + C$;

21°. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

22°. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;

23°. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{|a|} + C$;

24°. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

25°. $\int e^{\alpha x} dx = \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$, $\alpha \neq 0$.

Таблицу интегралов надо знать!

§ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ.

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (*)$$

(*) Формула замены переменной в неопределенном интеграле. При этом переход слева направо называется подстановкой, а справа налево – введением нового аргумента.

Примеры.

1°. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \begin{vmatrix} \ln x = t \text{ - введение} \\ \text{нового агумента} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$;

2°. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} = \begin{vmatrix} x = \cos t, dx = -\sin t dt \\ \text{Подстановка} \end{vmatrix} = \int \frac{-\sin t dt}{\sin^3 t} = \operatorname{ctg} t + C = \frac{\cos t}{\sin t} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$;

3°. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} = \begin{vmatrix} x = \operatorname{sh} t \\ dx = \operatorname{ch} t dt \end{vmatrix} = \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch}^3 t} = \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$;

4°. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} = \int \frac{dx}{|x^3|\left(1+1/x^2\right)^{3/2}} = \operatorname{sgn} x \cdot \int \frac{dx}{x^3\left(1+1/x^2\right)^{3/2}} = \begin{vmatrix} 1 + 1/x^2 = t \\ x^2 = \frac{1}{t-1} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} x \cdot \int \frac{dt}{-t^{3/2}} =$

$= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \cdot \frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{t}} + C = \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1+1/x^2}} + C = \frac{\operatorname{sgn} x \cdot |x|}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

§. ФОРМУЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ.

Формула интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$ получается из формулы для дифференциала произведения, с последующим интегрированием правой и левой части.

$$d(uv) = v du + u dv \;\Rightarrow\; uv = \int v du + \int u dv \;\Rightarrow\; \int u dv = uv - \int v du.$$

Примеры.

1°. $\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, \; du = \frac{dx}{x} \\ v = x, \quad dv = dx \end{vmatrix} = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C$;

2°. Многократное применение:

$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = |\text{по частям}| = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x de^x =$

$= |\text{по частям}| = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$;

3°. Рекуррентные формулы (формулы понижения):

$I_{m,n} = \int x^m \ln^n x dx = \begin{vmatrix} \ln^n x = u, & du = n\frac{\ln^{n-1} x}{x} \\ x^m dx = dv, & v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{по} \\ \text{част.} \end{vmatrix} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} n \frac{\ln^{n-1} x}{x} dx =$

$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^{n-1} x - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}\right)$, $(n > 0,\; n \neq -1)$

(При этом: $I_{m,0} = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$).

4°. Получение уравнения для данного интеграла:

$$I = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}\int e^{ax} d\sin bx = |\text{по част.}| = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{1}{b}\int \sin bx de^{ax} =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - -\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\int e^{ax} d\cos bx = |\text{по част.}| =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - -\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx + C.$$

Получено уравнение: $I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I + C$, из которого

$$I\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right) = \frac{b}{b^2}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx + C \text{, т.е. } I = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + \widehat{C}.$$

§. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ (ЭЛЕМЕНТАРНЫХ) ДРОБЕЙ.

Элементарными дробями будем называть дроби следующих четырех типов:

I. $\int \frac{Adx}{x-a}$; **II.** $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbf{N}, k \neq 1$;

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$; **IV.** $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $\begin{matrix} k \in \mathbf{N}, k \neq 1 \\ p^2 - 4q < 0 \end{matrix}$;

Рассмотрим интегрирование указанных типов рациональных дробей.
Как видно интегралы первых двух типов это табличные интегралы.

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$; **II.** $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.

Теперь займемся интегралами третьего и четвертого типов.

III, IV. $$\int \frac{Mx+N}{\left[(x+p/2)^2 + (q-p^2/4)^2\right]^k}dx = \left| \begin{matrix} x + \frac{p}{2} = t,\ dx = dt, \\ \underbrace{q - p^2/4}_{+} = s^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{Mt + N - Mp/2}{(t^2+s^2)^k}dt =$$

$$= M\int \frac{tdt}{(t^2-s^2)^k} + \left(N - \frac{1}{2}Mp\right)\int \frac{dt}{(t^2-s^2)^k}.$$

Интегрирование первого интеграла не представляет трудностей.

а) $\int \frac{tdt}{t^2+s^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+s^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+s^2) + C$;

б) $\int \frac{tdt}{(t^2+s^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2+s^2)^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{(-k+1)}\frac{1}{(t^2+s^2)^{k-1}} + C$.

Интегрирование второго интеграла зависит от показателя степени в знаменателе.

в) $\int \frac{dt}{t^2+s^2} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{t}{s} + C$;

г) $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^k} = \int \frac{1}{(t^2+s^2)^k}\cdot dt = |\text{по частям}| = \frac{t}{(t^2+s^2)^k} - \int t(-k)\frac{2t}{(t^2+s^2)^{k+1}}dt =$

$$= \frac{t}{\left(t^2+s^2\right)^k} + 2k\int \frac{t^2+s^2-s^2}{\left(t^2+s^2\right)^{k+1}}dt = \frac{t}{\left(t^2+s^2\right)^k} + 2k\left(\int \frac{dt}{\left(t^2+s^2\right)^k} - s^2\int \frac{dt}{\left(t^2+s^2\right)^{k+1}}\right).$$

Получено соотношение: $I_k = \dfrac{t}{\left(t^2+s^2\right)^k} + 2k\left(I_k - s^2 I_{k+1}\right)$, из которого

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ks^2}\frac{t}{\left(t^2+s^2\right)^k} + \frac{2k-1}{2ks^2}I_k, \quad (k = 1,2,3,4\ldots).$$

Полученная формула понижения позволяет выразить I_k через $I_{k-1}, I_{k-2},\ldots$ и, в конце концов, через $I_1 = \int \dfrac{dt}{t^2+s^2} = \dfrac{1}{s}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{s} + C$.

Интегрирование указанных четырех типов рациональных дробей показывает, что они могут быть проинтегрированы, и в результате получится сумма рациональных функций), логарифмов , и арктангенсов. А в общем случае?

§. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Рассматривается задача интегрирования рациональной дроби: $\int \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$.

а) Если $m>n$: т.е. дробь под знаком интеграла неправильная. Производя деление, получим

$$P_m(x) = Q_n(x)S_{m-n}(x) + R_{n-1}(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int S_{m-n}(x)dx + \int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx,$$

причем:

*. Интеграл $\int S_{m-n}(x)dx$ легко берется (интеграл от полинома);

*. Интеграл $\int \dfrac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx$ - является интегралом от правильной дроби.

б) Разложим многочлен $Q_n(x)$ на неприводимые множители, т.е. на линейные множители и квадратные трехчлены с вещественными коэффициентами без вещественных корней. Это всегда можно сделать, если у исходного многочлена вещественные коэффициенты:

$$Q_n(x) = \left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}\ldots\left(x-a_s\right)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j} \qquad (*)$$

$$a_i, p_j, q_j \in \mathbf{R};\quad k_i, l_j \ge 1 \text{ и } \in \mathbf{N};\quad \sum k_i + 2\sum l_j = \text{n};\quad p_i^2 - 4q_i \le 0$$

в) Метод разложения дроби на простейшие.

Теорема: Правильная дробь $\dfrac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$, у которой знаменатель $Q_n(x)$ представлен в виде (*) всегда может быть представлена в виде суммы элементарных дробей вида I, II, III, IV.

Т.е. $$\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{\left(x-a_1\right)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1 1}}{\left(x-a_1\right)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_s}}{x-a_s} + \frac{A_{2k_s}}{\left(x-a_s\right)^2} + \ldots + \frac{A_{k_s k_s}}{\left(x-a_s\right)^{k_s}} +$$

$$+ \frac{M_{1l_1}x+N_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{2l_1}x+N_{2l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)} + \ldots + \frac{M_{l_1l_1}x+N_{l_1l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}} + \ldots + \frac{M_{1l_j}x+N_{1l_j}}{x^2+p_jx+q_j} +$$

$$+\frac{M_{2l_j}x+N_{2l_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2}+\ldots+\frac{M_{l_jl_j}x+N_{l_jl_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}}.$$

Учитывая, что в правой части стоят только дроби I, II, III и IV типов, а интегрировать эти дроби мы научились, то задача интегрирования рациональной дроби решена.
Неопределенный интеграл от рациональной функции существует на любом промежутке, где знаменатель интегрируемой дроби не обращается в ноль и выражается через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы в конечном виде.

Примеры.

1°. Вычислить интеграл $\int\frac{x^6-x^2+2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx=\ldots$.

Рациональная подынтегральная дробь неправильная, поэтому выделим целую часть.

Т.к. $x(x-1)(x^2+1)=x^4-x^3+x^2-x$, то

$$\begin{array}{r|l} x^6-x^2+2x+1 & x^4-x^3+x^2-x \\ \cline{2-2} \ldots\ldots\ldots & x^2+x \\ \cline{1-1} 2x+1 & \end{array}$$

и, значит

$$\int\frac{x^6-x^2+2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx.$$

Чтобы взять оставшийся интеграл, разложим дробь в сумму простейших:

$$\frac{2x+1}{x(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{(x-1)(x^2+1)A+x(x^2+1)B+x(x-1)(Mx+N)}{x(x-1)(x^2+1)}$$

(A, B, M, N – неопределенные коэффициенты).

*. Две дроби с равными знаменателями равны тогда и только тогда, когда равны их числители.

$$2x+1=(x-1)\left(x^2+1\right)A+x\left(x^2+1\right)B+x(x-1)(Mx+N).$$

* Два многочлена равны тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях совпадают. Из этого критерия и последнего равенства получаем:

$$\left.\begin{array}{l} x^3: A+B+M=0 \\ x^2: -A+N-M=0 \\ x^1: A+B-N=2 \\ x^0: -A=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} A=-1 \\ B=3/2 \\ M=-1/2 \\ N=-3/2 \end{cases}\Rightarrow\int\frac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx=-\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x+3}{x^2+1}dx\Rightarrow$$

Получаем $I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

2°. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}$.

Разложим подынтегральную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1},$$

и можно найти A, B, C, D, E, F как в предыдущей задаче, но…

$$\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

и, следовательно: $\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{dx1}{\left(1+x^2\right)^2}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x-\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Оставшийся интеграл это интеграл четвертого типа $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ и для его взятия можно использовать полученную выше формулу понижения.

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\quad.$$

В данном случае интеграл четвертого типа оказался не очень сложным. В общем случае, именно интегралы четвертого типа вызывают самые большие, хотя и технические, трудности. Избежать этих трудностей позволяет исключительно остроумный метод Остроградского.

§. МЕТОД ОСТРОГРАДСКОГО ВЫДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ ЧАСТИ ИНТЕГРАЛА.

Теорема. Если правильная дробь $\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$ имеет знаменатель, представленный в виде

$Q_n(x)=\left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}\ldots\left(x-a_s\right)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}$, то:

$$\int\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx=\frac{L(x)}{\left(x-a_1\right)^{k_1-1}\left(x-a_2\right)^{k_2-1}\ldots\left(x-a_s\right)^{k_s-1}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1-1}\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j-1}}+$$

$$+\int\frac{S(x)}{\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\ldots\left(x-a_s\right)\left(x^2+p_1x+q_1\right)\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)}dx\,.$$

Здесь $L(x)$ и $S(x)$ многочлены на степень ниже, чем многочлены, стоящие в соответствующих знаменателях. Интеграл, стоящий в правой части можно взять методом разложения дроби в сумму простейших дробей (и, что очень важно) интегралов IV типа среди них не будет.

Если разложение $Q_n(x)$ на множители неизвестно, то:

$$\int\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx=\frac{L(x)}{\text{НОД}\left(Q_n,Q_n'\right)}+\int\frac{S(x)}{Q_n(x)/Q_n'(x)}dx\,.$$

Примеры.

1°. Вычислить $\int\frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx$.

НОД$\left(Q_n,Q_n'\right)$ можно найти с помощью алгоритма Евклида.

$Q_n'=4x^3+6x^2+6x+2$; От деления на 2 наибольший общий делитель двух полиномов не изменится $\Rightarrow 2x^3+3x^2+3x+1$.

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,x^4+2x^3+3x^2+2x+1 & \underline{2x^3+3x^2+3x+1} \\
\underline{x^4+\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x} & \frac{1}{2} \\
\qquad \frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1 & \\
-\ \underline{\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}} & \\
\qquad\qquad \frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\_\,2x^3+3x^2+3x+1 & \underline{x^2+x+1} \\
\underline{2x^3+2x^2+2x} & 2x+1 \\
\qquad x^2+x+1 & \\
-\ \underline{x^2+x+1} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Наибольший общий делитель знаменателя и его производной $\Rightarrow x^2+x+1$.
Тогда:

$$\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx.$$

Для нахождения *A, B, C, D* продифференцируем обе части:

$$\frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{A\left(x^2+x+1\right)-\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A\left(x^2+x+1\right)-\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

и числители дробей должны совпадать.

$$4x+3 = A\left(x^2+x+1\right)+\left(Ax+B\right)\left(2x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+x+1\right).$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях x.

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & C=0 \\ x^2: & A-2A+C+D=0 \\ x^1: & A-A-2B+C+D=4 \\ x^0: & A-b+D=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=2 \\ A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

. Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{d\left(x+1/2\right)}{\left(x+1/2\right)^2+3/4} =$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 4/\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} + C.$$

2°. $$\int \frac{dx}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2\left(x^2+x+2\right)^3} = \frac{P_4(x)}{\left(x-2\right)\left(x^2+x+2\right)^2} + \int \frac{P_3(x)}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x^2+x+2\right)}dx =$$

$$= \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{\left(x-2\right)\left(x^2+x+2\right)^2} + \int \frac{f}{x-1}dx + \int \frac{g}{x-2}dx + \int \frac{hx+m}{x^2+x+2}dx;$$

продифференцировав обе части равенства, получим систему для нахождения неопределенных коэффициентов $a, b, c, d, e, f, g, h, m$. Остроумие метода Остроградского состоит в получении вне интегральной дроби без интегрирования, а с помощью решения системы линейных уравнений.

§. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ.

А. Дробно-линейные иррациональности $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)$, $r_1,r_2,\ldots r_k\in Q$.

Записав $r_i=\frac{m_i}{N}$ (N-общий знаменатель дробей $r_1,r_2,\ldots r_k$), получим:

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{ax+b}{cx+d}=t^N;(ax+b)=t^N(cx+d)\\ x=\varphi(t)=\frac{dt^N-b}{a-ct^N};dx=\varphi'(t)dt\end{array}\right|=\int R\left(\varphi(t),t^{m_1},\ldots,t^{m_k}\right)\varphi'(t)dt\ .$$

Получен интеграл от рациональной функции.

Примеры: 1°. 1) $\int\frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx=\left|\begin{array}{l}x+2=t^3;\\ dx=3t^2dt;\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^3-2\right)t\cdot 3t^2}{t^3=t-2}dt\ .$

2°. $\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}=\int\sqrt[6]{\left(\frac{x-7}{x-5}\right)^5}\frac{dx}{(x-7)^2}=$

$$=\left|\frac{x-7}{x-5}=t^6;dx=\frac{12t^5dt}{\left(1-t^6\right)^2};x=\frac{7-5t^6}{1-t^6};x=5+\frac{2}{1-t^6}\right|=\int t^5\frac{12t^5\left(1-t^6\right)^2dt}{\left(1-t^6\right)^2\left(2t^6\right)^2}=3\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{3}{t}+C\ .$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}=-3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}}+C\ .$$

Б. Интегрирование дифференциального бинома (биномиального дифференциала):

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx\ .$$

Теорема Чебышева: Если $m,n,p\in Q$,то интеграл от дифференциального бинома выражается через элементарные функции тогда и только тогда когда:

1°. p – целое; **2°.** $\frac{m+1}{n}$ – целое; **3°.** $\frac{m+1}{n}+p$ – целое.

и при этом следующие подстановки (Чебышева) сводят интегралы к интегралам от рациональных функций.

1^0. $x=t^s$,где s – общий знаменатель дробей m и n,

2^0.$a+bx^n=t^s$, s – знаменатель дроби p,

3^0. $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^S$, s – знаменатель дроби p.

Примеры:

1°. $\int\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\cdot dx=\int x^{1/2}\left(1-x^{3/2}\right)^{1/4}dx\ =\ \left|m=1/2;\ n=-3/2;\ p=1/4;\ \frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z};\right|=$

$$= \left| 1 - x^{-3/2} = t^4;\ x = \left(1 - t^4\right)^{-2/3};\ dx = \frac{2}{3}\left(1 - t^4\right)^{-5/3} 4t^3 dt \right| =$$

$$= \int \left(1 - t^4\right)^{-1/3} \cdot t \cdot \frac{2}{3}\left(1 - t^4\right)^{-5/3} \cdot 4t^3 dt = \frac{8}{3} \int \frac{t^4 dt}{\left(1 - t^4\right)^2}.$$

С помощью второй подстановки Чебышева интеграл от дифференциального бинома стал интегралом от рациональной функции.

2°. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[4]{\left(2 + x^3\right)^5}} = \int x^{-2}\left(2 + x^3\right)^{-5/4} dx = \left| p \notin \mathbb{Z};\ \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z};\ \frac{m+1}{n} + p \notin \mathbb{Z} \right|$. Ни одна из подстановок Чебышева не подходит – интеграл не может быть выражен через элементарные функции (не берётся).

3°. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{\left(2 + x^3\right)^5}} = \int x^{-2}\left(2 + x^3\right)^{-5/3} dx = \ldots$

В данном случае $m = -2;\ n = 3;\ p = -\frac{5}{3};\ \frac{m+1}{n} + p = -2$ и, следовательно, третья подстановка Чебышева должна рационализовать подынтегральное выражение.

В самом деле $\frac{2 + x^3}{x^3} = t^3;\ \frac{2}{x^3} + 1 = t^3;\ dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3 - 1}\right)^{2/3}\left(-\frac{2}{(t^3-1)^2}\right)3t^2 dt$, и получается интеграл

$$\ldots = \int \left(\frac{2}{t^3 - 1}\right)^{-7/3} \cdot t^{-5} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3 - 1}\right)^{-2/3} \cdot \frac{2(-3)t^2 dt}{\left(t^3 - 1\right)^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{t^3 - 1}{t^3} dt,$$ и интеграл рационализован.

4°. $\int \frac{dx}{x^{\pi+1} \sqrt[3]{1 + x^{\pi}}} = \int x^{-(\pi+1)}\left(1 + x^{\pi}\right)^{-1/3} dx = \ldots$

Здесь $m = -(\pi - 1);\ \ n = \pi;\ \ p = -\frac{1}{3};\ \ \frac{m+1}{n} = -1$

и выполняя замену $1 + x^{\pi} = t^3;\ dx = \frac{1}{\pi}\left(t^3 - 1\right)^{\frac{1}{\pi} - 1} 3t^2 dt$, получим

$$\ldots = \int \left(t^3 - 1\right)^{\frac{\pi+1}{\pi}} \cdot t^{-1} \cdot \frac{1}{\pi}\left(t^3 - 1\right)^{\frac{1}{\pi} - 1} \cdot 3t^2 dt = \frac{3}{\pi}\int \frac{t}{\left(t^3 - 1\right)^2} dt.$$

Приведенный пример показывает что для не рациональных показателей степеней подстановки Чебышева тоже могут быть полезны.

B. Подстановки Эйлера : $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx;\qquad \left(b^2 - 4ac \neq 0\right);$

Для интегрирования квадратичных иррациональностей

I. $a > 0; \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t;$

II. $c>0;\ \sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$;

III . $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$.

Других случаев просто нет, ибо тогда $D<0$. Знаки плюс–минус выбираются из соображений удобства. Остроумие подстановок Эйлера заключается в том, что для нахождения x получается линейное уравнение.

1°. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+2}}=\ \ldots$ Учитывая что $a>0$, выполним первую подстановку Эйлера.

$$\sqrt{x^2+x+2}=-x+t;\ \ x^2+x+2=x^2-2xt+t^2;\ x=\frac{t^2-2}{1+2t};$$

$$\ldots=\int\frac{1}{t}d\left(\frac{t^2-2}{1+2t}\right)=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-2}{1+2t}+\int\frac{t^2-2}{1+2t}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot dt=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-2}{1+2t}+\int\frac{dt}{1+2t}-2\int\frac{dt}{(1+2t)t^2}.$$

Полученные интегралы от рациональных функций трудностей не представляют.

2°. $\int\frac{1-\sqrt{1+x-x^2}}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx=\ldots$ Учитывая что $c>0$, выполним вторую подстановку Эйлера.

$\sqrt{1+x-x^2}=xt+1;\ \ 1+x-x^2=1-2xt+x^2t^2;\ \ x=\frac{1-2t}{t^2+1}$. Тогда $\ldots=\int\frac{-t\cdot\frac{1-2t}{t^2+1}d\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\right)}{\frac{1-2t}{t^2+1}\cdot\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\cdot t+1\right)}$.

Вновь получен интеграл от рациональной функции.

3°. $\int\frac{\sqrt{-3+4x-x^2}}{x+2\sqrt{-3+4x-x^2}}dx=\ldots$ Квадратный трехчлен под знаком корня имеет вещественные корни $x_1=1;\ x_2=3$ поэтому можно применить третью подстановку Эйлера.

$\sqrt{-(x-1)(x-3)}=t(x-1);\ \sqrt{3-x}=t\sqrt{x-1};\ 3-x=t^2(x-1);\ x=\frac{3+t^2}{t^2+1}$ и получаем

$$=\int\frac{t\left(\frac{3+t^2}{t^2+1}\right)}{\frac{3+t^2}{t^2+1}+\left(2t\frac{3+t^2}{t^2+1}\right)}dt$$, а это интеграл от рациональной функции.

Г°. Интегрирование иррациональностей вида : $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Введем обозначение $\sqrt{ax^2+bx+c}=y$.

Г1°. $\int\frac{P_n(x)}{y}dx=Q_{n-1}(x)\,y+\alpha\int\frac{dx}{y}$.

Для нахождения коэффициентов $Q_{n-1}(x)$ и α продифференцируем обе части равенства:

$\frac{P_n(x)}{y} = Q'_{n-1}(x)\, y\, \frac{Q_{n-1}(x)(2ax+b)}{2y} + \frac{a}{y}$ в левой части перейдем к к общему знаменателю: $2P_n(x) = 2Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right) + Q_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha$. Многочлены стоящие в числителях дробей справа и слева от знака равенства должны быть равны и, следовательно, должны быть равны коэффициенты при соответствующих степенях переменной. Отсюда получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $Q_{n-1}(x)$ и α.

Пример: 1°. $\int \frac{x^3+2x^2+x-3}{x^2+x+1}dx$ **=** …

Г2°. $\int \frac{dx}{(x-a)^k y} = \ldots$

Замена $t = \frac{1}{x-a}$; $x = a + \frac{1}{t}$; $dx = -\frac{dt}{t^2}$;

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\frac{1}{x-a}\left(a+\frac{1}{t}\right)^2 + b\left(a+\frac{1}{t}\right) + c} = \sqrt{a^3 + 2a^2\frac{1}{t} + a\frac{1}{t^2} + ba\frac{1}{t} + c} =$$

$$= \sqrt{\frac{(c+ba)t^2 + a^3t^2 + \left(2a^2+b\right)t + a}{t^2}} = \frac{\sqrt{\tilde{a}t^2 + bt + \tau}}{|t|}.$$

После замены переменной, получим

$$\ldots = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}\cdot t^k\,|t|}{\sqrt{\tilde{a}t^2+\tilde{b}t+\tau}} = \int \frac{|t|\cdot t^{k-2}dt}{\sqrt{\tilde{a}t^2+\tilde{b}t+\tau}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{\tilde{a}t^2+\tilde{b}t+\tau}}$$

– а такой интеграл рассмотрен в предыдущем пункте.

Пример: $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+2x+2}} = \ldots$.

Г3°. $\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{k+\frac{1}{2}}} = \ldots$

Подстановка Абеля: $\left(x^2+px+q\right)' = t$; $p^2-4q<0$; $x+\frac{p}{2} = t\cdot\sqrt{x^2+px+q}$ (*).

Находя дифференциал от правой и левой части равенства (*), получим:

$dx = dt\cdot\sqrt{x^2+px+q} + t^2dx$; $\left(1-t^2\right)dx = dt\sqrt{x^2+px+q}$; $\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{dt}{1-t^2}$;

а возводя правую и левую части равенства (*) в квадрат, будем иметь:

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-q=t^2\left(x^2+px+q\right);\quad x^2+px+q=\frac{q-\frac{p^2}{4}}{1-t^2}.$$

Т.е. после выполнения подстановки Абеля, исходный интеграл станет интегралом от рациональной функции:

$$\ldots=\int\frac{1}{\left(x^2+px+1\right)^k}\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\frac{1}{\left(q-p^2/4\right)^k}\int\left(1-t^2\right)^{k-1}dt.$$

Г4°. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+q^2\right)^k\sqrt{ax^2+b}}dx=M\int\frac{xdx}{\left(x^2+q^2\right)^k\sqrt{ax^2+b}}+N\int\frac{xdx}{\left(x^2+q^2\right)^k\sqrt{ax^2+b}}.$

В первом интеграле делаем замену: $ax^2+b=t^2$, а во втором $\left(\sqrt{ax^2+b}\right)'=t$ и задача интегрирования интеграла типа Г4° сведена к интегрированию рациональных функций.

Г5°. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}=\ldots.$

Возможны варианты:

а) $x^2+px+q=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ и $\frac{b}{a}=p$; $\frac{c}{a}=q$ тогда получим интеграл, рассмотренный в пункте Г3°, и применим подстановку Абеля.

б) $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ и $\frac{b}{a}=p$ тогда $x^2+px+q=a\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$;
$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{p^2}{4}\right\}$ и после замены $t=x+\frac{p}{2}$ у квадратных трехчленов не останется первых степеней (интегралы типа Г4°).

в) В случае $b\neq ap$ сделаем дробно-линейную подстановку $x=\frac{\mu t+v}{1+t}$, $(\mu\neq v)$. Тогда

$$x^2+px+q=\frac{\left(\mu t+v\right)^2}{\left(1+t\right)^2}+p\frac{\left(\mu t+v\right)\left(1+t\right)}{\left(1+t\right)^2}+\frac{q\left(1+t\right)^2}{\left(1+t\right)^2}=\frac{\ldots t^2+\left(2\mu v+p\mu+pv+2q\right)t+\ldots}{\left(1+t\right)^2}$$ и

потребуем, чтобы коэффициент при первой степени t равнялся нулю:

$$2\mu v+p\left(\mu+v\right)+2q=0.$$

Аналогично, для ax^2+bx+c:

$$2a\mu v+b\left(\mu+v\right)+2c=0.$$

Из двух полученных уравнений находим μ и v

$\left(pa-b\right)\left(\mu+v\right)=2\left(c-qa\right)$; $2\left(pa-b\right)\mu v=2\left(bq-cp\right)$ и,

следовательно: $\mu+v=2\frac{qa-c}{b-pa}$; $\mu v=\frac{cp-ba}{b-pa}$.

Таким образом μ и ν есть корни квадратного уравнения: $z^2-2\frac{qa-c}{b-pa}z+\frac{cp-ba}{b-pa}=0$.

После замены $x=\frac{\mu t+\nu}{1+t}$ в квадратных трехчленах не остается первых степеней (интегралы типа Г4°).

§. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, РАЦИОНАЛЬНЫМ ОБРАЗОМ ВЫРАЖАЮЩИХСЯ ЧЕРЕЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

А°. Универсальная тригонометрическая подстановка:

$\int R(\sin x,\,\cos x)\,dx=\ldots$

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2};\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad x\in(-\pi,\,\pi);\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\ \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\ldots=\int\frac{dx}{2+\cos x}=\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right|=\int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2}=2\int\frac{dt}{3+t^2}.$$

Б°. Универсальная гиперболическая подстановка:

$\int R(\operatorname{sh}x,\,\operatorname{ch}x)\,dx=\ldots$

$$t=\operatorname{th}\frac{x}{2};\quad dx=\frac{2dt}{1-t^2};\quad \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\quad \operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2};$$

$$\ldots=\int\frac{dx}{2+\operatorname{ch}x}=\left|\begin{matrix}t=\operatorname{th}\frac{x}{2}; & \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\\ dx=\frac{2dt}{1-t^2} & \end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{3-t^2};$$

В°. Еще несколько рекомендаций для интегрирования $\int R(\sin x,\,\cos x)\,dx$.

1. Если $R(-\sin x,\,\cos x)=-R(\sin x,\,\cos x)$, то замена: $\cos x=t$.

2 . Если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\,\cos x)$, то замена: $\sin x=t$.

3. Если $R(-\sin x,\,-\cos x)=R(\sin x,\,\cos x)$, то замена: $\operatorname{tg}x=t$.

Эти замены рационализуют интегралы от функций, рациональным образом выражающихся через тригонометрические функции.

Аналогичные замены справедливы и для интегралов от функций, рациональным образом выражающихся через гиперболические функции.

Примеры.

1°. $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx=\left|\sin x=t;\ dt=\cos x\,dx;\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\right|=\int\frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^4}dt.$

2°. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x} = \left| t = \operatorname{tg}x;\ dt = \left(1+t^2\right)dx \right| = \int \frac{dx}{3\cos^2 x\left(3 - 2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2 x\right)} =$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 3}.$$

3°. $\int \operatorname{th}^5 x dx = \int \frac{\operatorname{sh}^5 x}{\operatorname{ch}^5 x} dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{th}x \\ dt = \left(1\text{-}t^2\right)dx \end{matrix} \right| = \int \frac{t^5}{1-t^2} dt = \dots .$

4°. $\int \sin^r x \cdot \cos^s x dx = \dots \qquad r, s \in Q.$

Замена $\sin^2 x = t$; $dt = 2\sin x \cos x dx$.

$\dots = \int \frac{1}{2} \frac{\sin^r x \cos^s x dt}{\sin x \cos x} = \frac{1}{2}\int \sin^{r-1} x \cos^{s-1} x dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{r-1}{2}} \left(1-t\right)^{\frac{s-1}{2}} dt$ – (интеграл от дифференциального бинома).

B°. Очень полезными являются две следующие формулы:

1°. $\forall a, b, c, d \ \exists!\ A, B \,\middle|\, a\sin x + b\cos x = A\left(c\sin x + d\cos x\right) + B\left(c\sin x + d\cos x\right)'$ и, следовательно, интегрируя получаем:

$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x} dx = Ax + B\ln\left|\left(c\sin x + d\cos x\right)\right| + C.$

Пример. $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{5\sin x - 7\cos x} dx = \dots .$

2°. $\forall a, b, c, d, e, f \ \exists!\ A, B, C \,|$

$$a\sin x + b\cos x + ñ = A\left(d\sin x + e\cos x + f\right) + B\left(d\sin x + e\cos x + f\right)' + C$$

и интегрируя, получаем:

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x + c}{d\sin x + e\cos x + f} dx = Ax + B\ln\left|d\sin x + e\cos x + f\right| + C\int \frac{dx}{d\sin x + e\cos x + f};$$

при взятии последнего интеграла полезно знать, что: $d\sin x + e\cos x = \sqrt{d^2 + e^2}\sin\left(x + \varphi\right)$.

§ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. ВВЕДЕНИЕ.

Рассматриваются интегралы вида:

$$\int R\left(x, \sqrt{P_3(x)}\right)dx \quad \text{и} \quad \int R\left(x, \sqrt{P_4(x)}\right)dx, \qquad (*)$$

где $P_3(x)$ и $P_4(x)$ – многочлены $3^{й}$ и $4^{й}$ степени соответственно, с вещественными коэффициентами и не имеющие кратных корней. В случае кратных корней радикалы упрощаются и сводятся к ранее рассмотренным иррациональностям.

Эти интегралы, как правило, не интегрируются в элементарных функциях и называются **эллиптическими.**

Однако:

1°. $\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int\frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+x\right)dx}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-x^2\right)|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{sgn}x\cdot d\left(\frac{1}{x^2}-x^2\right)}{\left(\frac{1}{x^2}-x^2\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}-x^2}}=\left|z=\frac{1}{x^2}-x^2\right|=$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x\int\frac{dz}{z^{3/2}}=\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-x^2}}+C=\frac{\operatorname{sgn}x\cdot|x|}{\sqrt{1-x^4}}+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

2°. Легко видеть , что : $\int\frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}=x\sqrt{2x^3+1}+C$.

Два рассмотренных интеграла , хотя и являются интегралами вида (*) выражаются через элементарные функции. Такие интегралы называются **псевдоэллиптическими.**

А°. Для $\sqrt{P_3(x)}=\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\lambda)(x^2+px+q),\qquad \lambda\in\mathbf{R}$$

Сделаем замену : $x-\lambda=t^2$, *т.е.* $x=t^2+\lambda$

$$ax^3+bx^2+cx+d=at^2\left(t^4+2t^2\lambda+\lambda^2+pt^2+p\lambda+q\right)=at^2\left(t^4+(2\lambda+p)t^2+\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)\right)$$

следовательно :

$$R\left(x,\sqrt{P_3(x)}\right)dx=R\left(t^2+\lambda,t\sqrt{P_4(t)}\right)2t\,dt=\tilde{R}\left(t,\sqrt{P_4(t)}\right)$$

Б°. Для интегрирования $\sqrt{P_4(x)}=\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}$ запишем

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+p'x+q'\right).$$

В получившихся квадратных трехчленах избавимся от членов содержащих первые степени переменной x.

а) При $p=p'$ сделаем замену $x+\frac{p}{2}=t\ \Rightarrow\ P_4(x)=a\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)\left(t^2+q'-\frac{p^2}{4}\right)$.

б) При $p\neq p'$ сделаем замену $x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$.

Тогда $x^2+px+q=\frac{1}{(t+1)^2}\left[(\mu t+\nu)^2+p(\mu t+\nu)(t+1)+q(t+1)^2\right],$

$$x^2+p'x+q'=\frac{1}{(t+1)^2}\left[(\mu t+\nu)^2+p'(\mu t+\nu)(t+1)+q'(t+1)^2\right].$$

Неизвестные параметры μ и ν найдем из условия равенства нулю коэффициентов при первых степенях переменной t:

$$2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q=0 \text{ и } 2\mu\nu+p'(\mu+\nu)+2q'=0.$$

Из системы уравнений: $2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q=0;\ 2\mu\nu+p'(\mu+\nu)+2q'=0$ находим μ и ν.

Тогда: $\sqrt{P_4(x)}=\frac{\sqrt{A\left(1+mt^2\right)\left(1+m't^2\right)}}{(1+t)^2}$ и $R\left(t,\sqrt{A\left(1+mt^2\right)\left(1+m't^2\right)}\right)=R(t,y)$.

Теперь представим : $R(t,y)$ в виде $R(t,y)=\dfrac{P_1(t)+P_2(t)y}{P_3(t)+P_4(t)y}\cdot\dfrac{P_3(t)-P_4(t)y}{P_3(t)-P_4(t)y}=$

$$=\frac{P_1(t)P_3(t)-P_2(t)P_4(t)y}{P_3^2(t)-P_4^2(t)y^2}+\frac{\left(P_2(t)P_3(t)-P_1(t)P_4(t)\right)y}{P_3^2(t)-P_4^2(t)y^2}\cdot\frac{y}{y}=R_1(t)+\frac{R_2(t)}{y}.$$

Интеграл от первого слагаемого легко берется

B°. Рассмотрим интеграл: $$\int\frac{R_2(t)}{\sqrt{A\left(1+mt^2\right)\left(1+m't^2\right)}}dt. \qquad (**)$$

Функцию $R_2(t)$ запишем в виде $R_2(t)=\dfrac{R_2(t)+R_2(-t)}{2}+\dfrac{R_2(t)-R_2(-t)}{2}=R*(t)+\tilde{R}(t)$.

Запишем

Функция $R*(t)$ четная и, следовательно $R^*(t)=\widehat{R}(t^2)$,

а функция $\tilde{R}(t)$ нечетная и поэтому $\tilde{R}(t)=t\breve{R}(t^2)$.

Тогда интеграл (**) разбивается в сумму двух интегралов :

I. $\displaystyle\int\frac{t\breve{R}(t^2)dt}{\sqrt{A\left(1+mt^2\right)\left(1+m't^2\right)}}$. Замена $t^2=z$ сводит этот интеграл, к ранее рассмотренным интегралам от квадратичных иррациональностей.

II. $\displaystyle\int\frac{\widehat{R}(t^2)}{\sqrt{A\left(1+mt^2\right)\left(1+m't^2\right)}}dt$. Этим интегралом мы и займемся в следующем параграфе.

§. ПРИВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛА $\displaystyle\int\frac{R\left(t^2\right)dt}{\sqrt{A\left(1+mt^2\right)\left(1+m't^2\right)}}$ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ.

Приведение интеграла к каноническому виду зависит от знаков констант A, m, m'.
Есть шесть различных вариантов распределения знаков этих констант:

1) $+--$; 2) $+-+$; 3) $+++$; 4) $---$; 5) $--+$; 6) $-++$.

Введем обозначения: $u=A\left(1+mt^2\right)\left(1+m't^2\right)$; $|m|=h^2$; $|m'|=h'^2$; $h>h'>0$

и рассмотрим каждый из шести выделенных случаев.

1°. $u=A\left(1-h^2t^2\right)\left(1-h'^2t^2\right)$. Область определения подынтегрального выражения

$$t<1/h \ \vee \ t>1/h'.$$

а) $t<1/h$; Производя замену переменной интегрирования $z=ht$ получаем:

$$u=A\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)=A\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right) \text{ и } \int\frac{R(t^2)}{\sqrt{u}}dt=\int\frac{R(z^2)}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}dz.$$

Здесь $0<k<1$. Последний интеграл записан уже в каноническом виде.

б) $t > 1/h'$; Сделаем замену переменной $t = \dfrac{1}{h'z}$. Отсюда:

$$\int \frac{R(t^2)}{\sqrt{u}}dt = \frac{1}{h'}\int \frac{R\left(1/z^2\right)d\left(1/z\right)}{\sqrt{A\left(1-\dfrac{h^2}{h'^2}\dfrac{1}{z^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{z^2}\right)}} = \int \frac{R(\nu^2)\,d\nu}{\sqrt{\left(1-\nu^2\right)\left(1-k^2\nu^2\right)}}.$$

Получен канонический вид интеграла.

.

2°. $u = A\left(1-h^2t^2\right)\left(1+h'^2t^2\right)$**.** Область определения подынтегрального выражения $t < 1/h$.

Замена: $t = \dfrac{\sqrt{1-z^2}}{h}$; $t^2 = \dfrac{1-z^2}{h^2}$; $dt = \dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{-2z}{2\sqrt{1-z^2}}dz = -\dfrac{zdz}{h\sqrt{1-z^2}}$.

И, следовательно: $u = A\left(1-h^2\dfrac{1-z^2}{h^2}\right)\left(1+\dfrac{h'^2}{h^2}\left(1-z^2\right)\right) =$

$$= Az^2\frac{h^2+h'^2}{h^2}\left(1-\frac{h'^2}{h^2}\frac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right) = Az^2\frac{h^2+h'^2}{h^2}z^2\left(1-\frac{h'^2}{h^2+h'^2}z^2\right).$$

Тогда: $\displaystyle\int \frac{R(t^2)}{\sqrt{u}}dt = \frac{1}{h}\int \frac{-R\left(\dfrac{1-z^2}{h^2}\right)\cdot z\cdot\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}}{\sqrt{A\dfrac{h_2+h'^2}{h^2}}\cdot z\cdot\sqrt{1-k^2z^2}} = \int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$.

Вновь получен канонический вид интеграла.

3°. $u = A\left(1+h^2t^2\right)\left(1+h'^2t^2\right)$**.** Замена: $t = \dfrac{z}{h\sqrt{1-z^2}}$; $dt = \dfrac{dz}{h\left(1-z^2\right)\sqrt{1-z^2}}$.

$$u = A\left(1+\frac{h^2z^2}{h^2\left(1-z^2\right)}\right)\left(1+\frac{h'^2z^2}{h^2\left(1-z^2\right)}\right) = A\cdot\frac{1-\dfrac{h^2-h'^2}{h^2}z^2}{\left(1-z^2\right)}$$ и получаем:

$$\int \frac{R(t^2)}{\sqrt{u}}dt = \int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$$ – канонический вид интеграла.

4°. $u = A\left(1-h^2t^2\right)\left(1-h'^2t^2\right)$. Область определения: $\left(1/h\right) < t < \left(1/h'\right)$.

Производя замену $h't = \sqrt{1-\dfrac{h^2-h'^2}{h^2}z^2}$, получим:

$$t^2=\frac{1}{h'^2}\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right);\quad t=\frac{1}{h'^2}\sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2}\;;\quad dt=-\frac{\frac{h^2-h'^2}{h^2}zdz}{\sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2}}.$$

Теперь: $u=A\left(1-\frac{h^2}{h'^2}+\frac{h^2-h'^2}{h'^2}z^2\right)\left(1-1+\frac{h^2-h'^2}{h'^2}z^2\right)=$

$$=A\left(1-\frac{h^2}{h'^2}+\frac{h^2-h'^2}{h'^2}z^2\right)\left(\frac{h^2-h'^2}{h'^2}z^2\right)=-A\frac{h^2-h'^2}{h'^2}\left(1-z^2\right)\frac{h^2-h'^2}{h'^2}z^2.$$

$\frac{R(t^2)}{\sqrt{u}}=\int\frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$. Это вновь канонический вид исходного интеграла.

5°. $u=A\left(1-h^2t^2\right)\left(1+h'^2t^2\right)$**.** Область определения подынтегрального выражения $t>1/h'$.

Выполним замену переменной: $t=\frac{1}{h\sqrt{1-z^2}}$; $dt=\frac{z\,dz}{h\left(1-z^2\right)\sqrt{1-z^2}}$.

$$u=A\left(1-h^2\frac{1}{h^2\left(1-z^2\right)}\right)\left(1+h'^2\frac{1}{h^2\left(1-z^2\right)}\right)=-A\frac{z^2}{\left(1-z^2\right)^2}\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right).$$

$\frac{R(t^2)}{\sqrt{u}}=\int\frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$. Это снова канонический вид исходного интеграла.

6°. $u=A\left(1+h^2t^2\right)\left(1+h'^2t^2\right)$**.** Данное выражение всегда отрицательно и, следовательно, подынтегральная функция не определена.

***.** В итоге мы получили канонический вид эллиптического интеграла.

§. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Интеграл, заданный в каноническом виде $\int\frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}$ может быть сведен к линейной комбинации следующих трех интегралов:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}};\qquad\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}};\qquad\int\frac{dz}{\left(1+hz^2\right)\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}};$$

где $k\in(0,1)$, $z\in[0,1]$, $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Перед нами эллиптические интегралы I,II и III рода.

Сделаем в каждом из этих интегралов замену : $z=\sin\varphi,\ \varphi\in[0,\ \pi/2]$ и, вводя функции

$$\Pi(\varphi,k,h)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1+h\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin\varphi}},\ F(\varphi,k)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}},\quad E(\varphi,k)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin\varphi}\,d\varphi$$

называемые эллиптическими интегралами в форме Лежандра, для интегралов, записанных в начале параграфа, получим:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}\ =\ F(\varphi,k)+C\,;\quad \int\frac{dz}{\left(1+hz^2\right)\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}\ =\ \Pi(\varphi.k,h)+C\,;$$

$$\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-k^2z^2\right)}}\ =\ -\frac{1}{k^2}E(\varphi,k)+\frac{1}{k^2}F(\varphi,k)+C\,.$$

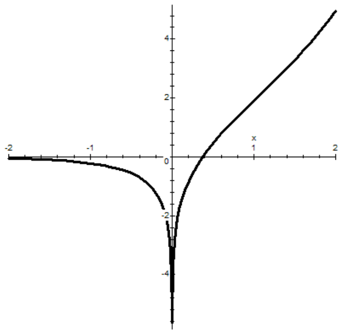
При $\varphi=\pi/2$ получаем полные эллиптические интегралы:

$$F(\pi/2,k)=K(k)\qquad \text{и}\qquad E(\pi/2,k)=E(k)\,.$$

§. ИНТЕГРАЛЫ, КОТОРЫЕ НЕ МОГУТ БЫТЬ ВЫРАЖЕНЫ, ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ (НЕ БЕРУЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЫ).

1°. Интегральная экспонента: $Ei(x)\equiv\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt$;

Тогда $\int\frac{e^x}{x}\,dx=Ei(x)+C$, $(x\neq 0)$.



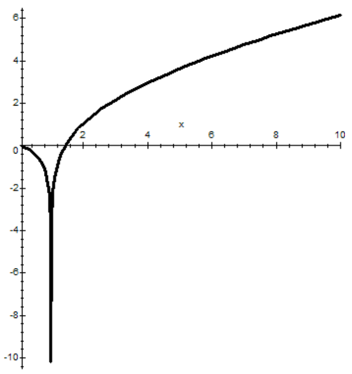
При этом $Ei(x)=\gamma+\ln|x|+O(x)$, если $x\to 0$,

Где γ – постоянная Эйлера и $\gamma=0,5772156649...$

Рекуррентная формула $I_n=\frac{e^x}{x^{n-1}}-I_{n-1}$

позволяет вычислять интегралы вида $I_n=\int\frac{e^x}{x^n}\,dx$

2°. Интегральный логагифм: $Li(x)\equiv\int\limits_0^{x}\frac{dt}{\ln t}$;



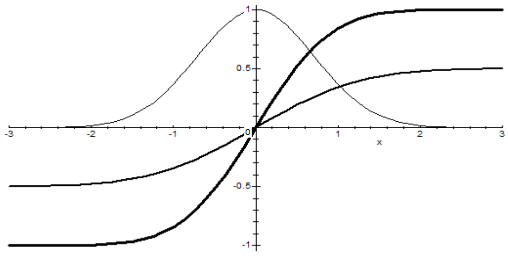
Тогда $\int\frac{dx}{\ln x}=Li(x)+C\qquad (x>0,\ x\neq 1)$.

Кроме того $Li(x)=Ei(\ln x)\Leftrightarrow Ei(x)=Li(e^x)$,

$$\int \frac{x^n dx}{\ln x} = Li(x^{n+1}) + C \, .$$

3°. Интеграл Коши – функция ошибок:

$erf\,(x) \equiv \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$;



Тогда $\int e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} erf\,(x) + C$. Название и обозначение от – *error function* – функция ошибок. Функция нечетная:
$erf\,(0) = 0; \;\; erf\,(-x) = -erf\,(x)$.

Функция $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{2} erf\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} dt$ называется интегралом вероятностей (Эйлера- Пуассона).

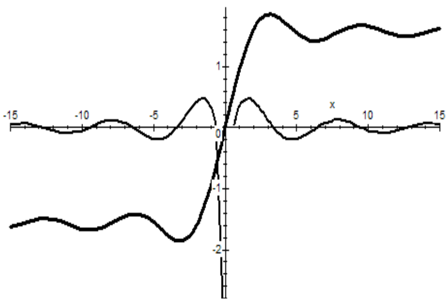
На рисунке изображены: функция $y = e^{-x^2}$ – «колокольчик», изображенный самой тонкой линией; функция $y = erf\,(x)$ – изображена самой толстой линией. Ее амплитуда в два раза больше амплитуды интеграла вероятностей, также изображенного на рисунке, но средней по толщине линией.

4°. Интегральные синус и косинус: $Si(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt; \;\; Ci(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt$ **.**

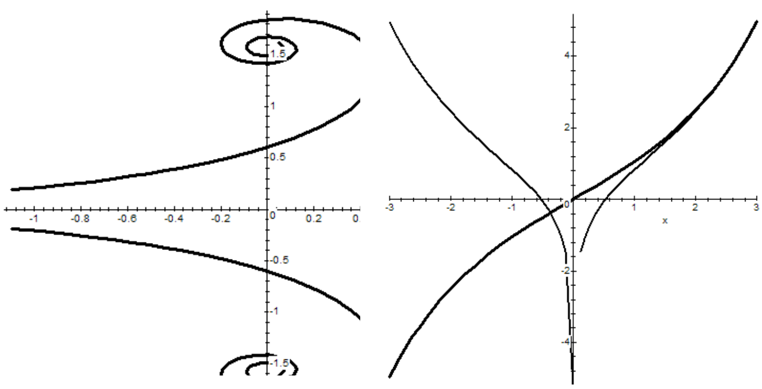
Гиперболические интегральные функции: $Shi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt; \;\; Chi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$ **.**

Тогда: $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x) + C; \quad \int \frac{\cos x}{x} dx = Ci(x) + C$,

$\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx = Shi(x) + C; \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{x} dx = Chi(x) + C$.



При этом: $Si(0) = 0; \, Si(-x) = -Si(x)$.



$Shi(0) = 0; \, Shi(-x) = -Shi(x)$
$Shi(0) = 0; \, Shi(-x) = -Shi(x)$,

т.е. функции $Si(x)$ и $Shi(x)$ нечетные.

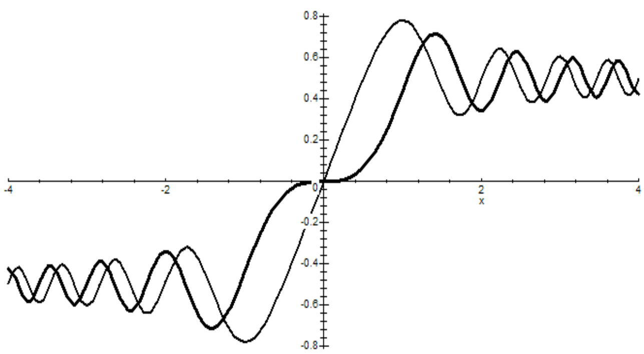
Функции $Ci(x)$ и $Chi(x)$ – четные

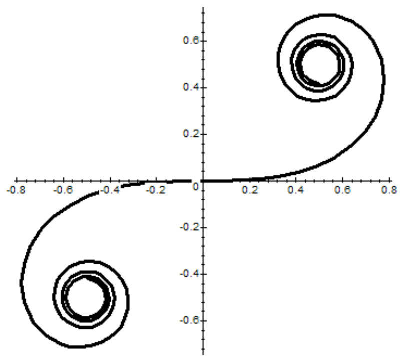
$Ci(-x) = Ci(x); \;\; Chi(-x) = Chi(x)$ и при $x \to 0$ имеют следующие асимптотики:

$Ci(x) = \gamma + \ln|x| + O(x);\ Chi(x) = \gamma + \ln|x| + O(x)$. На рисунке справа вверху приведены графики функций $Si(x)$ (график проходит через начало координат) и $Ci(x)$. На рисунке справа внизу приведены графики функций $Shi(x)$ (график проходит через начало координат) и $Chi(x)$. А на рисунке слева приведен график функции $\{\ x = Ci(t);\ y = Si(x)$, заданной параметрически.

5°. Интегралы Френеля: $S(x) \equiv \int\limits_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt;\ C(x) \equiv \int\limits_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$.

И, значит $\int \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = S(x) + C;\ \int \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = C(x) + C$. Кроме того, эти функции нечетные: $S(0) = 0; C(0) = 0;\ S(-x) = -S(x);\ C(-x) = -C(x)$.





На рисунке слева приводятся графики функций $y = Chi(x)$ и $y = Shi(x)$ (имеющая в начале координат нулевую производную. На рисунке справа приведен график функции $\{\ x = Chi(t);\ y = Shi(x)$, заданной параметрически.

ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

1.
Формулы сокращенного умножения. Метод интервалов решения дробно-рациональных (и не только!) неравенств.

Теория.

Формулы сокращенного умножения для запоминания:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, **2.** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,

3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, **4.** $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$,

5. $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + ...$

$$....+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n\Big),$$

6. $a^{n+1}+b^{n+1}=(a+b)\Big(a^n-a^{n-1}b+a^{n-2}b^2-a^{n-3}b^3+....$

$$....+a^2b^{n-2}-ab^{n-1}+b^n\Big),\ n\ -\textit{четное.}$$

7. $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k},\ C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (Бином Ньютона).

Одним из действенных методов решения рациональных (и не только) неравенств является, так называемый, **метод интервалов**.
Чтобы установить знак дроби с помощью этого метода следует:

1) Числитель и знаменатель дроби разложить на простейшие множители, корни которых легко найти;
2) На числовой оси отметить точки, в которых числитель или знаменатель дроби равен нулю;
3) Точки, в которых знаменатель обращается в ноль, исключить из рассмотрения;

После проделанного, числовая ось разобьется на интервалы, на каждом из которых знак дроби не изменяется. Установить знак дроби на каждом из таких интервалов можно непосредственной подстановкой произвольной точки интервала и вычислением знака дроби в этой точке.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 12*, 13*

Применяя метод интервалов решить следующие неравенства:

1*. $\dfrac{(x-4)(x+5)}{(x-7)(3-x)}\le 0$, **2*.** $\dfrac{(x-2)^3(7-x)(x^2+x-1)(9+2x)}{(x-4)^2(x^2-4x+3)(x-3)}\ge 0$,

3*. $\dfrac{(2x-5)}{(x^2-6x-7)}<\dfrac{1}{x-3}$, **4*.** $\dfrac{8+4x}{4x+x^2}\le\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{4+x}$,

5*. $|x-3|>4x$, **6*.** $|x+2|-|3-x|<x$,

7*. $|x+1|+2|7-x|-6|2x-1|+|x-3|\ge 7x$, **8*.** $x^2+x-10<2|x-1|$, **9*.** $|4x-1|\le\dfrac{1}{3x-1}$,

10*. $\big||x-1|-2\big|>1$, **11*.** $\big||x-1|+2\big|>1$. **12*.** $\dfrac{\ln\dfrac{x-2}{x}}{\ln x\ln(x-2)}>0$. **13*.** $\dfrac{(x+2)(x^2-5x+4)}{\sin\dfrac{\pi}{3}x}\ge 0$.

2.
Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$. Квадратные уравнения и задачи связанные с исследованием квадратичных функций .

Теория

Формулы для запоминания:

Для уравнения $ax^2+bx+c=0$: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, *если* $b^2-4ac\ge 0$.

Для уравнения $x^2+px+q=0$: $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$, *если* $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q\ge 0$.

Выражение $D=b^2-4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения и его знак определяет количество вещественных корней квадратного уравнения.

Т°.(Виета). Для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, имеющего корни x_1,x_2 выполняются соотношения : $x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}$. Для приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, имеющего корни x_1,x_2 выполняются соотношения : $x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q$.

Т°.(обратная теореме Виета). Если для двух произвольных вещественных чисел x_1,x_2 выполнены соотношения $x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q$, то эти числа являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Т°. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$, для которого $D=b^2-4ac\geq 0$ может быть разложен на линейные множители $y=ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, где x_1,x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Графиком функции $y=ax^2+bx+c\quad (a\neq 0)$ является парабола ветвями вверх при $a>0$ и, ветвями вниз при $a<0$. Кроме того, парабола $y=ax^2+bx+c\quad (a\neq 0)$ пересекает ось абсцисс в двух точках, если $b^2-4ac>0$, касается оси абсцисс не пересекая ее, если $b^2-4ac=0$ и не пересекает ось абсцисс если $b^2-4ac<0$.

При построении графика функции $y=ax^2+bx+c\quad (a\neq 0)$ полезно помнить, что:

а) вертикальная прямая $x=-\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы;

б) парабола пересекается с осью симметрии в точке, которая называется вершиной параболы и имеет координаты $\left(x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=ax_0^2+bx_0+c\right)$.

в) если $b^2-4ac\geq 0$, то парабола пересекается с осью абсцисс в двух точках с координатами $\left(x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \ y_{1,2}=0\right)$; если $b^2-4ac=0$, то эти точки совпадают между собой и совпадают с вершиной параболы; если $b^2-4ac<0$, то парабола не имеет общих точек с осью абсцисс.

г) парабола пересекает ось ординат в точке с координатами $\left(x=0,y=c\right)$; вместе с этой точкой на параболе лежит и точка $\left(x=-\frac{b}{a},y=c\right)$, симметричная ей относительно оси параболы.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 14*

1*. *Найти все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения* $x^2-2a\left(x-1\right)-1=0$ *равна сумме квадратов этих корней.*

2*. *Не решая уравнения* $x^2-\left(2a+1\right)x+a^2+2=0$*, установить значения параметра a, при которых один из корней уравнения в два раза больше другого.*

3*. *Решить следующие уравнения, используя то, что они имеют общий корень:*

$$2x^3-5x^2+6x-2=0 \text{ и } 6x^3-3x^2-2x+1=0.$$

4*. *Определить при каких значениях параметра a, один из корней уравнения*

$x^3-\left(a^2-a+7\right)x-\left(3a^2-3a-6\right)=0$ *равен (–1). Найти остальные корни этого уравнения при установленных значениях параметра а.*

5*. *Найти p и q если известно, что среди корней уравнения:* $x^4-10x^3+37x^2+px+q=0$ *есть две пары равных между собой чисел.*

6*. *При каких m неравенство* $\dfrac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ *выполнено для любых x.*

7*. *При каких m корни уравнения:* $x^2+2(m+1)x+9m-5=0$ *отрицательны.*

8*. *При каких m корни уравнения:* $4x^2-(3m+1)x-m-2=0$ *заключены в промежутке* $x\in[-1,2]$.

9*. *Найти коэффициенты уравнения* $x^2+px+q=0$ *при условии, что разность его корней равна 5, а разность их кубов равна 35.*

10*. *При каком значении а оба корня уравнения*
$x^2-(a+1)x+a+4=0$ *будут положительны.*

11*. *При каких значениях m неравенство* $x^2-mx>\dfrac{2}{m}$ *выполняется для любых значений x.*

12*. *При каких n корни уравнения:* $(n-2)x^2-2nx+n+3=0$ *находятся на промежутке* $x\in[1,4]$.

13*. *При каких m неравенство* $\dfrac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$ *выполняется для любых значений x.*

14*. *При каких p система неравенств выполняется для любых x:*

$$-9<\frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1}<6.$$

3.
Системы двух и трех линейных уравнений. Совместимость, определенность, неопределенность. Метод Гаусса исключения неизвестных.

Теория.

Произвольная система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решения, и не совместной в противном случае. При этом совместная система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и не определенной если она имеет более одного (а именно бесконечно много) решений.
Для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными исследование на совместность производится очень просто.

Если задана система $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$, то:

а) если $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$, то система совместна и определена, т.е. имеет единственное решение;

б) если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$, то система не совместна, т.е. не имеет решений;

в) если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$, то система совместна и не определена, т.е. имеет бесконечно много решений;

Для систем линейных уравнений с количеством неизвестных более двух исследование на совместность более сложно и будет изучено позднее.

Основным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса исключения неизвестных, который, при некоторой модификации, позволяет как исследовать систему на совместность – не совместность, так и, в случае совместности, найти решения как определенных так и не определенных систем.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 15*

Исследовать на совместность и решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными:

1*. $\begin{cases} 3x+ay=5a^2 \\ 3x-ay=a^2 \end{cases}$; **2*.** $\begin{cases} x+ay-1=0 \\ ax-3ay=2a+3 \end{cases}$;

3*. $\begin{cases} ax-y=b \\ bx+y=a \end{cases}$; **4*.** $\begin{cases} (a+5)x+(2a+3)y=3a+2 \\ (3a+10)x+(5a+6)y=2a+4 \end{cases}$;

5*. $\begin{cases} a(a-1)x+a(a+1)y=a^3+2 \\ (a^3-1)x+(a^3+1)y=a^4-1 \end{cases}$;

6*. $\begin{cases} (a^2+b^2)x+(a^2-b^2)y=a^2 \\ (a+b)x+(a-b)y=a \end{cases}$.

7*. *Числа* a *и* b *таковы, что система* $\begin{cases} a^2x-ay=1-a \\ bx+(3-2b)y=3+a \end{cases}$ *имеет единственное решение* $x=1$, $y=1$. *Найти* a *и* b.

8*. *При каких* a *и* b *система* $\begin{cases} a^2x-by=a^2-b \\ bx-b^2y=2+4b \end{cases}$ *имеет бесконечно много решений?*

9*. *При каких* a *система* $\begin{cases} a^2x+(2-a)y=4+a^3 \\ ax+(2a-1)y=a^5-2 \end{cases}$ *не имеет решений?*

10*. *Числа* a, b *и* c *таковы, что система*
$\begin{cases} ax-by=2a-b \\ (c+1)x+cy=10-a+3b \end{cases}$ *имеет бесконечно много решений,*
причем $x=1$, $y=3$, *одно из них. Найти* a *и* b.

11*. *Найти все такие значения* a, *чтобы при любом* b, *нашлось такие* c *при которых система имеет хотя бы одно решение:*

а) $\begin{cases} bx-y=ac^2 \\ (b-6)x+2by=c+1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2by=a \\ bx+(1-b)y=c^2+c \end{cases}$.

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса исключения неизвестных:

12*. $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$; **13*.** $\begin{cases} 3x-4y+5z=18 \\ 2x+4y-3z=26 \\ x-6y+8z=0 \end{cases}$;

14*. $\begin{cases} 10x-9z=19 \\ 8x-y=10 \\ y-12z=10 \end{cases}$; **15*.** $\begin{cases} x+2y+z+7=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \\ 3x-y+2z-2=0 \end{cases}$.

4.
Многочлены. Теорема Безу и ее следствия. Рациональные корни уравнений. Схема Горнера. Возвратные уравнения.

Теория.

Алгебраическим полиномом степени n называется конструкция вида:

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+....+a_2x^2+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0).$$

Пусть заданы алгебраические полиномы: $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, причем $m < n$. Тогда существуют два других полинома – один $S_{n-m}(x)$ степени $n-m$, другой $R_{m-1}(x)$ – степени, не превышающей числа $m-1$, такие что $P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R_{m-1}(x)$. Полином $S_{n-m}(x)$ называется неполным частным от деления полинома $P_n(x)$ на полином $Q_m(x)$, а полином $R_{m-1}(x)$ остатком от такого деления. Если, при этом, $R_{m-1}(x) = 0$ то говорят, что полином $P_n(x)$ делится на полином $Q_m(x)$ без остатка, а полином $S_{n-m}(x)$ называется полным частным, или просто частным от деления полинома $P_n(x)$ на полином $Q_m(x)$.

В случае $m = 1$ приведенная формула имеет вид

$$P_n(x) = (x-c)S_{n-1}(x) + R_0(x) = (x-c)S_{n-1}(x) + R_0.$$

T°. (Безу) Остаток от деления полинома $P_n(x)$ на двучлен $(x-c)$ равен значению полинома $P_n(x)$ в точке $x = c$, т.е. $R_0(x) = R_0 = P_n(c)$.

T°. (следствие из т° Безу) Полином $P_n(x)$ делится на двучлен $(x-c)$ тогда и только тогда когда $x = c$ является корнем полинома $P_n(x)$.

T°. (следствие из т° Безу) Если $x = c$ является корнем полинома $P_n(x)$, т.е. $P_n(c) = 0$ то

$$P_n(x) = (x-c)S_{n-1}(x) + R_0(x) = (x-c)S_{n-1}(x).$$

Это следствие из теоремы Безу позволяет многочлен с известными (полностью или частично) корнями разложить на множители.

T°. Если алгебраическое уравнение $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ имеет целые коэффициенты $(a_i \in \square \quad i = 0,1,....,n)$ и рациональное число $x = \dfrac{m}{n}$ $(m \in \square, n \in \square)$ является его корнем, то число m является делителем свободного члена уравнения, а число n является делителем старшего коэффициента уравнения.

Это утверждение позволяет из всего множества рациональных чисел сразу отобрать только те, которые могут быть корнями уравнения. Установить, являются ли они корнями уравнения можно непосредственной подстановкой. При этом, удобно значение полинома в точке вычислить способом, который предложенным Горнером. Проиллюстрируем схему Горнера на конкретном примере (это верно передает суть метода и не загромождает выкладку).

Полином $P_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 5x + 4$ запишем в виде, предложенном Горнером:

$$2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = \Big(\big(\big((2x+3)x-7\big)x-5\big)+4\Big).$$

Запись, стоящая справа позволяет вычислить значение полинома n-й степени в точке не более чем за $2n$ операций. Оказывается это самый экономичный способ вычисления значения полинома в точке. На основе такой записи полинома можно построить вычислительную табличку, которая, зачастую, также называется схемой Горнера.

В верхней строке таблицы (кроме первой клетки) записываются коэффициенты исходного полинома в порядке убывания степеней. В первой клетке нижней строки таблицы записывается значение аргумента, при котором вычисляется значение полинома. Остальные клетки нижней строки заполним по формулам:

$$b_{n-1} = a_n;\ b_{i-1} = cb_i + a_i,\ \ i = n-1, n-2, ..., 2, 1;\ R = cb_0 + a_0.$$

–	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	… …	a_2	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	… …	b_1	b_0	R

Заполнив табличку, отметим что в последней клетке нижней строки стоит R – значение полинома в точке $x=c$. В клетках нижней строки, кроме первой и последней, стоят коэффициенты частного от деления исходного полинома на двучлен $(x-c)$.

Для полинома $P_4(x)=2x^4+3x^3-7x^2-5x+4$ и $c=-2$ вычисляя значение полинома в точке $x=c=-2$ получаем:

	2	3	-7	-5	4
-2	2	-1	-5	5	-6

Т. е. установлено что $P_4(x)=2x^4+3x^3-7x^2-5x+4=(x+2)\left(2x^3-x^2-5x+5\right)-6$.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 21*

Решить алгебраические уравнения:

1*. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$; **2*.** $\dfrac{4}{x^2+4}+\dfrac{5}{x^2+5}=2$;

3*. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2$; **4*.** $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}-\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}$;

5*. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$;

6*. *Найти сумму коэффициентов многочлена:*

$$P_n(x)=\left(1+4x-6x^2\right)^{147}\left(2+5x+7x^2-13x^3\right)^{257}.$$

7*. *Делится ли многочлен* $x^{100}-3x+2$ *на* x^2-1 ?

8*. *Найти остаток от деления* $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ *на* $x-1$.

9*. *Некоторый многочлен при делении на* $(x-5)$ *дает в остатке 5, а при делении на* $(x-1)$ *дает в остатке 3. Найти остаток от деления того же многочлена на* $(x-1)(x-5)$.

10*. *Остаток от деления* ax^3+2x^2+3x+5 *на* $(x-2)$ *равен* 35, *а от деления на* $(x-c)$ *остаток равен* 320. *Найти а и с.*

С помощью схемы Горнера решить следующие уравнения:

11*. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$,

12*. $8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0$,

13*. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5=0$,

14*. $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

Решить возвратные уравнения:

15*. $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$,

16*. $x^5+7x^4+x^3+x^2+7x+1=0$,

17*. $x^4-10x^3-9x^2-10x+1=0$,

18*. $2x^4+3x^3-4x^2+3x+2=0$.

19*. *Решить следующие уравнения разложив левую часть в произведение двух квадратных трехчленов:*

а) $x^4+4x-1=0$, б) $x^4-8x+63=0$.

20*. *Найти а при которых уравнение* $x^5-5x+a=0$ *имеет два совпадающих корня.*

21*. *Число* $1+\sqrt{2}$ *является корнем уравнения*

$$x^5+ax^3+bx^2+5x+2=0.$$

Найти остальные корни, зная что а и b *рациональные числа.*

5.
Степенная, показательная, логарифмическая функции.
Основные свойства и графики.
Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Теория.

Свойства операции возведения в степень:

1°. $a^n \equiv a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a, \quad (n\ paz)\ n \in \mathbb{N}$. **2°.** $a^{-n} \equiv \dfrac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}$.

3°. $a^{m+n} = a^m a^n \quad m, n \in \mathbb{Z}$. **4°.** $a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$.

5°. $a^{x+y} = a^x a^y \quad x, y \in \mathbb{R}$. **6°.** $\left(a^x\right)^y = a^{xy} \quad x, y \in \mathbb{R}$.

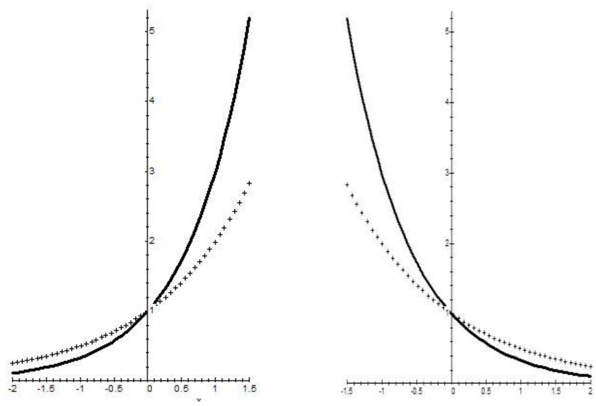
Свойства операции нахождения логарифма:

0°. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} \equiv b$. Свойство является, по сути дела, определением операции логарифмирования.

1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (x > 0, y > 0)$. **2°.** $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x > 0, y > 0)$.

3°. $\log_a x^p = p \log_a x \quad (x > 0)$. **4°.** $\log_{a^p} x = \dfrac{1}{p} \log_a x \quad (x > 0)$.

5°. $\log_{a^p} x^p = \log_a x \quad (x > 0)$. **6°.** $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad (x > 0)$.



Показательной функцией называется функция $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$. Ее свойства:

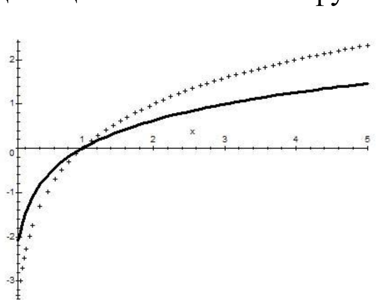
1. Область определения $x \in (-\infty, +\infty) \equiv \mathbb{R}$.
2. Область значений $y \in (0, +\infty) \equiv \mathbb{R}^+$.
3. $y(0) = a^0 = 1$.
4. $a > 1 \quad a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$,
   $0 < a < 1 \quad a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

На приведенных рисунках видим графики показательных функций с различными основаниями: слева – с основаниями $a > 1$, справа – с основаниями $0 < a < 1$.

При этом, сплошной линией изображены графики показательной функции с основаниями $a = 3 \wedge a = 1/3$, а крестиками – с основаниями $a = 2 \wedge a = 1/2$.

Показательная функция определена для любых вещественных значениях показателя степени и принимает только положительные значения, что и указано в свойствах 1 и 2 показательной функции. Графики всех показательных функций проходят через точку с координатами $(0,1)$ (свойство 3).

Свойство 4 показательной функции говорит о том, что при основаниях больших единицы показательная функция есть функция возрастающая, а при основаниях меньших единицы – убывающая.

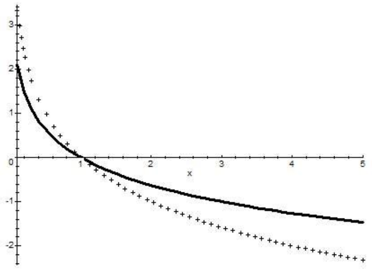


Логарифмической функцией называется функция вида

$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$, являющаяся функцией обратной показательной функции с тем же основанием.

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения $x \in (0, +\infty) \equiv \mathbb{R}^{+}$.
2. Область значений $y \in (-\infty, +\infty) \equiv \mathbb{R}$.
3. $\log_a 1 = 0$.



4. $a > 1 \quad \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$,

   $0 < a < 1 \quad \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$.

Свойства 1 и 2 показывают, что область определения и область значений показательной функции для логарифмической функции поменялись местами, что и естественно ибо это взаимно обратные функции.

Графики всех логарифмических функций проходят через точку с координатами $(1, 0)$ (свойство 3).

Свойство 4 показательной функции указывает на то, что при основаниях больших единицы логарифмическая функция есть функция возрастающая, а при основаниях меньших единицы – убывающая.

На приведенных рисунках видим графики логарифмических функций с различными основаниями: сверху – с основаниями $a > 1$, снизу – с основаниями $0 < a < 1$.

При этом, сплошной линией изображены графики логарифмической функции с основаниями $a = 3 \wedge a = 1/3$, а крестиками – с основаниями $a = 2 \wedge a = 1/2$.

И, наконец:

Общая схема решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

1. Переход к одному и тому же основанию во всех показательных (логарифмических) функциях, входящих в данное уравнение.
2. Переход к одному и тому же показателю степени (выражению под знаком логарифма).
3. Замена показательной (логарифмической) функции новой переменной.
4. Решение получившегося уравнения или неравенства относительно новой переменной.
5. Обратная замена и возврат к показательным (логарифмическим) функциям.
6. Решение простейших показательных (логарифмических) уравнений или неравенств.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 24*

Решить следующие показательные неравенства:

1*. $25^{-x} + 5^{-x+1} \geq 50$; **2*.** $2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \leq 3^{x^2+2}$;

3*. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$; **4*.** $98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}$;

5*. $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \leq 7 \cdot 10^x$; **6*.** $\sqrt{13^x - 5} \leq \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}$;

7*. $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 3^{\sqrt{x^2-3}-1} \cdot 28$; **8*.** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{1/\log_3 5}$;

9*. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x} \geq 1$; **10*.** $(0,008)^x + 5^{1-3x} + (0,04)^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30,04$;

11*. $(0,03)^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots} < \sqrt[3]{0,3^{3x^2+5x}} < 1$; **12*.** $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1$;

13*. $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$;

Решить следующие логарифмические неравенства:

14*. $\log_{5/8}\left(2x^2-x-\frac{3}{8}\right)\ge 1$; **15*.** $\log_{1/4}\frac{2x-1}{x+1}<\cos\frac{2\pi}{3}$;

16*. $\log_{1/4}(2x+3)>\log_9 27$; **17*.** $\log_4\left(3^x-1\right)\cdot\log_{1/4}\frac{3^x-1}{16}\le\frac{3}{4}$;

18*. $2\log_4 x-\frac{1}{2}\log_2\left(x^2-3x\right)+2\le\cos\frac{4\pi}{3}$;

19*. $\log_2\left(\sqrt{x+3}-x-1\right)\le 0$; **20*.** $\log_{1/x}\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)}\ge 1$;

21*. $\log_{\frac{x^2+1}{x}}\left(x^2+\frac{1}{x^2}-4\right)\ge 1$; **22*.** $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0$;

23*. $\frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$; **24*.** $\log_x\left(\log_2\left(4^x-6\right)\right)\le 1$.

6.
Тригонометрические функции углового и числового аргументов. Определение и свойства. Обратные тригонометрические функции. Формулы двойного и половинного аргумента. Формулы приведения.

Теория

Задачи для решения :1*, 2*, …, 18*

Доказать тождества:

1*. $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$; **2*.** $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

3*. $\frac{1}{\mathrm{tg}3\alpha-\mathrm{tg}\alpha}-\frac{1}{\mathrm{ctg}3\alpha-\mathrm{ctg}\alpha}=\mathrm{ctg}2\alpha$;

4*. $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cdot\cos\alpha$.

Вычислить без помощи таблиц:

5*. $\frac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ\cos 51^\circ\sin 69^\circ}$; **6*.** $\sin^2 70^\circ\cdot\sin^2 50^\circ\cdot\sin^2 10^\circ$;

7*. $\sin 15^\circ$; **8*.** $\sin 18^\circ$; **9*.** $\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}$.

Вычислить: **10*.** $\sin(2\arccos\frac{1}{4})$; **11*.** $\cos[\arcsin(-\frac{1}{2})]$;

12*. $\sin(\arcsin\frac{3}{6}+\arcsin\frac{8}{17}]$. **13*.** $\mathrm{tg}(2\arcsin\frac{2}{3})$;

14*. $\arcsin(\sin 2)$; **15*.** $\sin(\mathrm{arctg}2+\mathrm{arctg}3)$;

16*. $\sin(2\mathrm{arctg}\frac{1}{3})+\cos(\mathrm{arctg}\,2\sqrt{3})$.

Проверить равенства:

17*. $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; **18*.** $\mathrm{arctg}3-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\pi}{4}$.

6.
Решение простейших (и не только!) тригонометрических уравнений и неравенств.

Теория

Задачи для решения :1*, 2*, …, 20*

Решить следующие тригонометрические уравнения:

1*. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; **2*.** $4\sin^4 x + \cos 4x = 1+12\cos^4 x$;

3*. $\mathrm{tg}^3 x + 2\mathrm{tg}^2 x \;\; 3\mathrm{tg}x = 0$.

Следующие уравнения свести к однородным и решить:

4*. $2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4$; **5*.** $8\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$;

6*. $\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$; **7*.** $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = \dfrac{1}{16}$.

Вводя дополнительный аргумент решить уравнения:

8*. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$;

9*. $\sin 11x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \dfrac{1}{2}\cos 7x = 0$;

10*. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\sin 15x$; **11*.** $4\sin 3x + 3\cos 3x = 5{,}2$.

Применяя универсальную тригонометрическую подстановку:

$t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $\mathrm{tg}x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, *решить:*

12*. $\sin x + \mathrm{ctg}\dfrac{x}{2} = 2$; **13*.** $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 5\mathrm{tg}2x + 7$;

14*. $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\mathrm{tg}x$;

Применяя подстановку $t = \cos x + \sin x$, решить:

15*. $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$;

16*. $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1$; **17*.** $\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x = 1$.

Решить: **18*.** $\sin^2 6x + 8\sin^2 3x = 0$;

19*. $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32}$; **20*.** $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

7.
Построение графиков функций с помощью элементарных движений. Общая схема исследование функций с помощью производной.

Теория

Задачи для решения :1*, 2*, …, 31*

Построить графики функций:

1*. $y = |x - 2|\cdot(x + 2)$; **2*.** $y = \dfrac{x-1}{|x-1|}\left(x^2 - 4\right)$; **3*.** $y = \dfrac{x}{|x|}\sin 2x$;

4*. $y = \dfrac{2-x}{|x+1|}\left(x^2 - x - 2\right)$; **5*.** $y = \log_2 \dfrac{x^2-4}{x^2-2}$;

6*. $y=(0,5)^{(2x^2-6x)/(x-3)}$; **7*.** $y=\log_3\dfrac{x^2-9}{|x|-3}$;

8*. $y=\left|\log_2\dfrac{x-4}{x^2-16}\right|$; **9*.** $y=\sqrt{\log_2\cos x}$;

10*. $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}$; **11*.** $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$; **12*.** $y = |\,4x^2 - 1| - 3x$;

13*. $y=\left|\dfrac{1}{2}\log_2 x^2\right|$; **14*.** $y=\dfrac{1}{2}\log_2(|x|-1)^2$.

Применяя общую теорию, исследовать функции и построить графики:

15*. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; **16*.** $y=\dfrac{x}{1-x^2}$; **17*.** $y = x^2e^{-x}$;

18*. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$; **19*.** $y = x + \sin x$; **20*.** $y=\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$;

21*. $y=\dfrac{1}{e^x-1}$; **22*.** $y = x\sin x$; **23*.** $y=e^{\frac{1}{x}}-x$;

24*. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$; **25*.** $y=\dfrac{2x}{4x^2+1}$;

26*. $y=\dfrac{4|x|}{x^2-x-6}$; **27*.** $y=\dfrac{3x}{x^2+4x+4}$; **28*.** $y=\dfrac{5x=1}{x-2}$;

29*. $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x-1}$; **30*.** $y=\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$.

31*. *Построить графики функций:*

а) $y=\dfrac{5}{x^4-4x^2+5}$; б) $y=\dfrac{12}{x^4-4x^2+12}$;

в) $y=\log_{|x-2|}e$; г) $y = \ln|\,x^2 - x - 6\,|$;

д) $y = \cos(3\arcsin x)$; е) $y = \sin(3\arccos x)$;

ж) $y = \sin(3\arcsin x)$; з) $y = \mathrm{tg}(3\,\mathrm{arctg}\,x)$.

8.
Метод сечений при решении задач с параметром.
Задачи, связанные с исследованием функций.

Теория

Задачи для решения :1*, 2*, …, 14*

Применяя метод сечений решить уравнения и неравенства:

1*. $(x + 1)\cdot|\,x - 1\,| - a = 0$; **2*.** $|\,1 - |\,x\,|\,| < a - x$;

3*. $\sqrt{a^2-x^2}>x+1$;

4*. $4-x^2>\sqrt{a^2-x^2}$; **5*.** $|\,x + a\,| - |\,2x - a + 2\,| = a$.

6*. *Найти а, при которых минимум функции*

$f(x) = 2|\,x - 1| + |\,x + 3| - 2|x - a^2 - a|$ *будет больше* 1.

7*. *Найти значения а, при которых минимум функции меньше* 2

$f(x) = 3|\,x - a\,| + |\,x^2 + x - 2|$.

8*. *Найти а, при которых существует хотя бы одно решение системы*:

а) $\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2+(2-3a)x+2a^2-2a<0 \\ ax>1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x^2+(-3a-1)x+2a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=0 \end{cases}$.

9*. *При каких а следующие системы имеют ровно 2 решения*:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ xy=a-\dfrac{1}{2} \end{cases}$; в) $\begin{cases} (x-y)^2=\dfrac{2}{3} \\ xy=5a-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

10*. *Найти количество корней уравнения в зависимости от параметра а:*

а) $e^{\frac{x-5}{2}}+ax=3a$; б) $e^{\frac{x-5}{3}}+ax=2a$.

11*. *Задана парабола и прямая. При каком значении а, наименьшее из расстояний между точками параболы и прямой равно ρ?*

а) $y = x^2 - 2ax + a^2 - a + 1$, $y = -2x$, $\rho=\sqrt{5}$;

б) $y = x^2 - 2ax + a^2 + a - 2$, $y = -4x$, $\rho=\sqrt{17}$.

12*. *Доказать, что на множестве* $x\in(0, 4]$ *выполнено неравенство:*

а) $6x - 4\ln x \ge x^2$; б) $8x - 6\ln x \ge x^2$.

13*. *Определить количество корней уравнения, в зависимости от параметра а:*

а) $x\ln^{10}x = a$; б) $x\ln^{\pi}x = a$; в) $\ln\pi x = ax$.

14*. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции f(x) для* $x\in[-2, 1]$:

а) $f(x) = (2ax^2 - x^4 - 3a^2)^{-1}$; б) $f(x) = (x^4 - 6ax^2 + a^2)^{-1}$.

9. Длина окружности. Площади: треугольников, прямоугольников, трапеций, параллелограммов, сектора, сегмента. Объемы: шара, пирамиды, цилиндра, конуса. Телесный угол.

Теория

Задачи для решения

§10. Векторы, операции над ними. Скалярное, векторное и смешанное произведение. Проекции векторов. Примеры использования векторов в задачах физики.

Теория

Задачи для решения

§11. Уравнение прямой на плоскости в векторной форме. Длина отрезка прямой, угол между прямыми.

Теория

Задачи для решения

Нулевая контрольная работа (1)

1. Решить неравенство $\dfrac{(x-4)(x+5)}{(x-7)(3-x)}<0$.
2. Решить неравенство $|x-6|>|x^2-5x+9|$.

3. При каких значениях параметра m неравенство $\dfrac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ выполняется для любых значений x?

4. Решить уравнение $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$.

5. Решить неравенство $\dfrac{1-\sqrt{8x-3}}{4x}\geq 1$.

6. Решить неравенство $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x}\geq 1$.

7. Решить неравенство $\log_x\dfrac{3x-1}{x^2+1}>0$.

8. Вычислить $\arccos(\cos 10)$.

9. Решить уравнение $\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x=\dfrac{\cos x-\sin x}{0.5\sin 2x}$.

10. Построить график функции $y=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x}$.

11. Построить график функции $y=\log_{|x-2|}e$.

Нулевая контрольная работа (2)

1. Решить неравенство $\log_x\dfrac{5x+1}{6x-1}>0$.

2. Решить уравнение $2\mathrm{arctg}x+3\mathrm{arcctg}x=\pi$.

3. Доказать что $\forall n\in\mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

4. Не решая уравнения $3x^2-5x-2=0$ найти сумму кубов его корней.

5. Решить неравенство с параметром $\left|x^2-5x+4\right|<a$.

6. Найти область значений функции $y=\sqrt{\dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}}$.

7. Найти член разложения $(3x+2)^7$ с наибольшим коэффициентом при степени x.

8. При каких $n\in\mathbb{N}$ дробь $\dfrac{2n+3}{5n+7}$ будет сократимой?

9. Известно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+5x}{x-3}+ax^2+bx+c\right)=0$. Найти a,b,c.

10. Решить уравнение $x^4-8x+63=0$.

Варианты контрольных работ

Вариант 1.

1. $x^6-9x^3+8>0$;
2. $|x-6|>x^2-5x+91$;
3. $0{,}3^{\log_{1/3}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$;
4. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$;
5. $25\sin^2 x+100\cos x=89$;
6. $4\cos x=\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}x+1$.

Вариант 2.

1. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$; 2. $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0$; 3. $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1$;

4. $2\log_{\log_3 x}3<1$; 5. $\sin 5x = \cos 4x$; 6. $2+\sin t=3\mathrm{tg}\dfrac{t}{2}$.

Вариант 3.

1. $|\,2x^2-9x+15\,|\geq 20$; 2. $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0$; 3. $x^2\cdot 3x-3^{x+1}\leq 0$;

4. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$; 5. $3\cos^2 x=\sin^2 x+\sin 2x$; 6. $\cos 2x = \cos^2\dfrac{3}{2}x$.

Вариант 4.

1. $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$; 2. $\sqrt{x^3+3x+4}>-2$; 3. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x}\geq 1$;

4. $(0,5)^{2\sqrt{x}}+2>3\cdot 0,5^{\sqrt{x}}$; 5. $\sin^2 2x+\sin^2 x=\dfrac{9}{16}$; 6. $37\mathrm{tg}3x = 11\mathrm{tg}x$.

Вариант 5.

1. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$; 2. $\dfrac{x^3-2x^2-5x}{x-2}>0$; 3. $(0,(4))^{x^2-1}>(0,(6))^{x^2+6}$.

4. $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0$; 5. $2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=\sin 3x$; 6. $\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}2x=\sin x$.

Вариант 6.

1. $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; 2. $x^2(x^4+36)-6\sqrt{3}(x^4+4)<0$; 3. $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$;

4. $\dfrac{\log_2\left(\sqrt{4x+5}-1\right)}{\log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)}>\dfrac{1}{2}$; 5. $\sin 3x+\sin x=4\sin^3 x$; 6. $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{7}{16}$.

Вариант 7.

1. $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$; 2. $(x^2+4x+10)^2-7(x^2+4x+11)+7<0$; 3. $\log_3\dfrac{3x-5}{x+1}\leq 1$.

4. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1$; 5. $\sin^2 3x=3\cos^2 3x$; 6. $\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x=\sin x+\cos x$.

Вариант 8.

1. $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$; 2. $216x^6+19x^3<1$; 3. $\log_{1/3}\dfrac{3x-1}{x+2}<1$.

4. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)}<\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$; 5. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$; 6. $2(1+\sin 2x)=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$.

Вариант 9.

1. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$; 2. $|\,x^2-5x|<6$; 3. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x}\geq 1$.

4. $\log_2 \frac{\sqrt{4x+5}-1}{\sqrt{4x+5}+11} \ge \frac{1}{2}$; 5. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$; 6. $\operatorname{tg}(x^2 - x)\cdot\operatorname{ctg}2 = 1$.

Вариант 10.

1. $\sqrt{x^2-x-12} < x$; 2. $-9 < x^4 - 10x^2 < 56$; 3. $2^{\log_{0,4} x \cdot \log_{0,4} \frac{5x}{2}} > 1$;

4. $\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9 > 0$; 5. $\cos 2x = 1 - \sin 2x$; 6. $\operatorname{ctg}x(1 - \frac{1}{2}\cos x) = 1$.

Вариант 11.

1. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0$; 2. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2}$; 3. $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$;

4. $x^{0,5\log_{0,5} x - 3} \ge 0,5^{3-2,5\log_{0,5} x}$; 5. $\cos 2x + 3\sin x = 2$; 6. $\operatorname{tg}(t^2 - t)\cdot\operatorname{ctg}2 = 1$.

Вариант 12.

1. $\sqrt{9x-20} < x$; 2. $\frac{10(5-x)}{3(x-4)} - \frac{11}{3}\frac{6-x}{x-4} \ge \frac{5(6-x)}{x-2}$; 3. $25^x < 6\cdot 5^x - 5$;

4. $\log_{0,3}\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0$; 5. $\operatorname{tg}^2 3x - 2\sin^2 3x = 0$; 6. $\sin 2z - \sin 6z + 2 = 0$.

Вариант 13.

1. $1 < \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2$; 2. $\frac{2-x}{x^3+x^2} > \frac{1-2x}{x^3-3x^3}$; 3. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}\left(x^2-5x+8\right)} \le 2,5$;

4. $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$; 5. $6\operatorname{ctg}^2 x - 2\cos^2 x = 3$; 6. $\cos^{-4} z = 64\cos^2 2z$.

Вариант 14.

1. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0$; 2. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \le \frac{1-2x}{x^3+1}$; 3. $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \le 0$;

4. $\log_{1/5}x + \log_4 x > 1$; 5. $\sin^3 z\cdot\cos z - \sin z\cos^3 z = \frac{\sqrt{2}}{8}$; 6. $\cos z + \sin z = \sqrt{1-2\cos^2 z}$.

Вариант 15.

1. $a^4 + a^3 - a - 1 < 0$; 2. $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$; 3. $\log_2(1 + \log_{1/9}x - \log_9 x) < 1$;

4. $0,4^{\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_3 3x} > 6,25^{\log_3 x^2 + 2}$; 5. $\sin 6x + 2 = \cos 4x$; 6. $\cos 3x + \cos\frac{5x}{2} = 2$.

Вариант 16.

1. $m^3 + m^2 - m - 1 > 0$; 2. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \le 1$; 3. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$;

4. $2\log_{0,5}(x + 3) < \log_{0,25}(x + 15)$; 5. $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$; 6. $\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2\sin x$.

Вариант 17.

1. $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0$; 2. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$; 3. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x-4}>5^{x+1}-5^{x-2}$;

4. $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$; 5. $3\mathrm{ctg}t - 3\mathrm{tg}t + 4\sin 2t = 0$; 6. $\mathrm{ctg}^4 x = \cos^2 2x - 1$.

Вариант 18.

1. $\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0$; 2. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\ge 2$; 3. $0{,}3^{2x^2-3x+6}<0{,}00243$;

4. $\log_x \frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$; 5. $\mathrm{tg}3t + \mathrm{tg}t = 2\sin 4t$; 6. $\mathrm{tg}^4(x+1)\mathrm{ctg}(2x+3) = 1$.

Дополнение 1

Вещественные числа
Real numbers
Дійсні числа

Необходимость расширения поля рациональных чисел
Necessity in Extension of Rational Number Field
Необхідність розширення поля раціональних чисел.

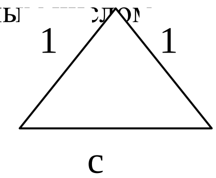
Уравнение $x^2=2$ не разрешимо в рациональных числах, т.е. не существует рационального числа, удовлетворяющего этому уравнению; $\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом.

Можно было бы рассматривать более общее уравнение, скажем, вида $x^m=n$, где натуральное $m \ge 2$, а n есть ненулевое целое число, которое не есть m-я степень какого-либо целого числа ($n\in\mathbf{Z}$, $n\ne 0$, $\neg\exists k\in\mathbf{Z}\quad n=k^m$). В этом и каком-либо другом подобном обобщении рассматриваемого уравнения $x^2=2$ здесь нет нужды, поскольку проводимое рассмотрение имеет иллюстрированный характер.

◂ От противного. Пусть решение x есть рациональное число m/n, где $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$ и дробь m/n несократима, т.е. m и n не имеют общих множителей. $m\ne 0$, т.к. 0 очевидно, не есть решение. Тогда

$(m/n)^2=2\Rightarrow m^2=2n^2\Rightarrow m=2p\Rightarrow(2p)^2=2n^2\Rightarrow n^2=2p^2\Rightarrow n=2q\Rightarrow$ дробь m/n сократима – противоречие со сделанным предположением о рациональности x и не ограничивающем общность выбором представления этого рационального числа в виде несократимой дроби ▸

Существуют несоизмеримые отрезки, т.е. отрезки, длина которых при фиксированной единице длины (масштабе) не выражается рациональным числом.



◂ Например, это гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с единичным катетом. По теореме Пифагора квадрат гипотезы такого треугольника равен $c^2=1^2+1^2=2$, а потому, по доказанному выше, c не может быть рациональным числом ▸

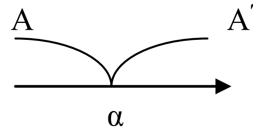
Заметим, что несоизмеримость любого данного отрезка зависит от выбора единицы длины: для одного выбора отрезок несоизмерим, а для другого может быть соизмеримым (иметь длину выражающуюся рациональным числом). Чтобы говорить о длине произвольных отрезков при любом выборе единицы длины необходим выход за рамки множества рациональных чисел.

Сечения множества рациональных чисел

Section of Rational number set

Перерізи множини раціональних чисел.

Изобразим рациональные числа точками на числовой прямой. Произвольно взятая (фиксированная, заданная) точка прямой, разбивая прямую на две полупрямые, разбивает множество точек с рациональными координатами (множество рациональных чисел **Q**) на два подмножества, которые будем называть классами.



Нижний класс A состоит из рациональных точек (чисел), лежащих слева от заданной точки; верхний класс A′ состоит из рациональных точек (чисел), лежащих слева от заданной точки; верхний класс A' состоит из рациональных точек, лежащих справа от заданной точки.

Заданную точку, производящую сечение , если она рациональная будем относить либо к нижнему классу, тогда она будет там наибольшим числом, либо к верхнему классу, тогда она будет там, наименьшим числом. Такие сечения производимые рациональными числами будем отождествлять (считать равными). Это отношение эквивалентности в множестве всех сечений. Каждое рациональное число попадет в один и только один из классов, верхний или нижний, любое число из верхнего класса больше любого числа из нижнего класса и классы не пусты:

1) $A, A'\neq\varnothing$; 2) $AUA' = \mathbf{Q}$; 3) $A\cap A'=\varnothing$ 4) $\forall a \in A\ \forall a' \in A'\ a<a'$.

Сечением $A|A'$ множества Q рациональных чисел называется разбиение множества **Q** рациональных чисел на два не пустых непересекающихся подмножества, называемых классами (нижним A и верхним A'), так что любой элемент из нижнего класса A меньше любого элемента из верхнего класса A. Эти условия, определяют сечения не аппелируя к наглядной геометрической картине в теоретико-множественных терминах. Как станет ясно из дальнейшего такое определение сечения равносильно геометрическому. Пока о равносильности трудно говорить, поскольку еще не определены вещественные (не рациональные) числа соответствующие произвольным точкам прямой. Будем обозначать сечения множества рациональных чисел символом $A\,|\,A'$.

Если в нижнем классе сечения есть наибольшее число, то “перебросив” его в верхний класс, получим сечение в верхнем классе которого указанное число будет наименьшим: если $A\,|\,A'$– сечение и

$a{=}max\,A$, то $A\setminus\{a\}|\,A'\cup\{a\}$- тоже сечение и $a{=}min\,(A'\cup\{a\})$.

($a{=}min\,A'$) $(A\cup\{a\}|\,A'\setminus\{a\})$ ($a{=}max\,(A\cup\{a\})$)

Такие сечения множества рациональных чисел, как оговорено выше, отождествляем (считаем равными) и о каждом из них говорим, что оно производится рациональным числом a. Коротко сечение производимое рациональным числом a будем обозначать a^*; именно оно (любое из двух отождествленных или скорее соответствующий класс эквивалентности сечений) будет играть роль рационального числа, а в конструируемом множестве вещественных чисел, включающем реализацию множества рациональных чисел в терминах сечений как подмножество. Рациональные числа из нижнего класса можно рассматривать как всевозможные рациональные “приближенные” значения координаты точки производящей сечение (вещественного числа) по недостатку, а рациональные числа из верхнего класса – как всевозможные рациональные “приближенные” значения координаты точки производящей сечение по избытку. Когда сечение производится рациональным числом, есть и точное рациональное значение координаты, которое можно отнести в любой из классов (верхний или нижний).

Есть сечения в нижнем классе которых нет наибольшего числа, а в верхнем – наименьшего. Например, определим сечение отнеся к нижнему классу все неположительные рациональные числа и рациональные числа, квадрат которых меньше двух (равенство, как установлено, невозможно):

$A=\{a| -a\in\mathbf{Q}_{+}\bigcup\{0\}\}\bigcup\{a|\ a\in\mathbf{Q}_{+}\wedge a^2<2\}$;

Для всякого числа из нижнего класса рассматриваемого сечения найдется большее его число из этого же класса и для всякого числа из верхнего класса найдется меньшее его число из этого же класса. Всякое число из нижнего класса этого сечения можно увеличить оставаясь в нижнем классе, а всякое число из верхнего класса – уменьшить оставаясь в верхнем классе.

Действительно рассмотрим положительное число из нижнего класса (для отрицательных чисел утверждение тривиально)

$$a>0 \wedge a^2<0$$

Определим натуральное n, $n\in\mathbf{N}$, из условия, чтобы рациональное число $a+\frac{1}{n}>a$ лежало в нижнем классе сечения, т.е. чтобы

$$(a+\frac{1}{n})^2<2 \Rightarrow a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2 \Rightarrow \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2$$

Последнее неравенство выполняется и подавно, если n подчинить более простому для разрешения условно

$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}<2-a^2$, поскольку $\frac{2a}{n^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}$, если $n>1$.

Из упрощенного условия имеем $n>\frac{2a+1}{2-a^2}$ (по принципу Архимеда для любого рационального числа найдется большее его натуральное). Таким образом, в нижнем классе рассматриваемого сечения не может быть наибольшего числа, поскольку для всякого числа из нижнего класса найдется большее его число $a+\frac{1}{n}$ из этого же класса.

Для числа a' из верхнего класса, $a'>0 \wedge a'^2>2$ потребуем, чтобы

$$(a'-\frac{1}{n})^2>2 \Rightarrow a'^2-\frac{2a'}{n}+\frac{1}{n^2}>2 \Rightarrow a'^2-2>\frac{2a'}{n}-\frac{1}{n^2}.$$

Последнее неравенство выполняется и подавно, если n подчинить более простому для разрешения условию

$$a'^2-2>\frac{2a'}{n}, \text{ поскольку } \quad \frac{2a'}{n}>\frac{2a'}{n}-\frac{1}{n^2}$$

Из упрощенного условия имеем $n>\frac{2a'}{a'^2-2}$ Существование решений означает, что в верхнем классе рассматриваемого сечения не может быть наименьшего числа.

Не существует сечений, у которых одновременно в нижнем классе имелось бы наибольшее число a_0, а в верхнем классе – наименьшее a'_0.

◄ От противного (by contradiction). Пусть такое сечение есть. Так как должно быть $a_0<a'_0$, то вставляя между ними рациональное число c, скажем $c=\frac{a_0+a'_0}{2}$, $a_0<c<a'_0$

придем к противоречию: c не может лежать в классе A, т.к. $c>a_0=max\ A$ и c не может содержаться в A' т.к. $c<a'_0=min\ A'$ ▸

Итак, существует два вида сечений множества рациональных чисел:

а) сечения, которые производятся рациональным числом, которое есть либо наибольшим элементом в нижнем классе, либо – наименьшим элементом в верхнем классе, причем другой класс сечения не имеет экстремального элемента. Такие сечения группируются в пары из сечений, отличающихся отнесением числа производящего сечение к верхнему или к нижнему классу. Сечения пары отождествляются (считаются эквивалентными) и сопоставляются производящим их рациональным числам в множестве всех сечений отождествляемом с множеством вещественных чисел.

б) сечения, нижний и верхний классы которых, оба не имеют экстремальных элементов. Такие сечения интерпретируются как иррациональные числа. Здесь "иррациональный" значит "не рациональный" irrationalis - лат. неразумный в противоположность rationalis-разумный, действительный.

Сравнение сечений множества рациональных чисел

Comparison of Rational Number Sections

Порівняння перерізів множними раціональних чисел.

Поскольку число, производящее сечение, когда оно есть, может быть отнесено и к нижнему и к верхнему классу (конечно, не одновременно) часто удобно говорить о внутренностях классов $\overset{0}{A}$ и $\overset{o}{A}{}'$, т.е. о классах без рационального числа производящего сечения даже когда оно есть. В случае рациональных сечений (сечений производимых рациональным числом)

$$\overset{0}{A}=A\backslash\{max\,A\},\quad \overset{0}{A}{}'=A'\backslash\{min\,A'\}$$

В случае иррациональных сечений внутренности классов совпадают с самими классами: $\overset{0}{A}=A$ и $\overset{0}{A}=A'$. Использование внутренности класса соответствует такому специальному выбору сечения, производимого рациональным числом, при котором число, производящее сечение, включается в другой дополнительный рассматриваемому классу $\overset{0}{A},\overset{0}{A}{}'$ класс $\mathbf{Q}\wedge\overset{0}{A}$, $\mathbf{Q}\wedge\overset{0}{A}{}'$.

Верхние (нижние) классы или их внутренности для двух сечений множества рациональных чисел либо совпадают, либо один из них содержит другой:

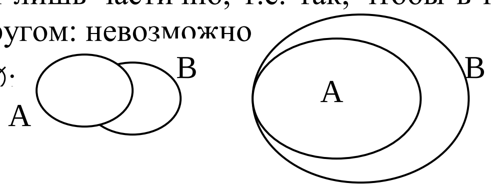
$$\alpha=A\,|\,A'\wedge\beta=B|B'\Rightarrow(A\subset B\wedge A'\supset B')\vee(A\supset B\wedge A'\subset B').$$

◂ Если $\neg\exists a\notin B$ и $\neg\exists\ b\in A$, то множества A и B имеют одни и те же элементы, а потому совпадают (равны): $A=B$.

Если, скажем, $\exists a\notin B$, то $a\in B'$. Тогда $\forall a\in' A'$ и $\forall b\in B\ b<a$ (т.к. $a\in B'$) $\wedge\ a<a'$ (т.к. $a\in$ A)$\Rightarrow\forall a'\in A'\ \forall b\in B\ b<a'$. Таким образом, $B\subset A$. Что $B'\supset A'$ получается переходом и дополнениям $\mathbf{Q}\setminus B=B'$ и $\mathbf{Q}\backslash A=A'$.

Если предположить, что одновременно $\exists a\notin B$ и $\exists b\notin A$ придем к противоречию: $a\notin B\Rightarrow a\in B'\Rightarrow a>$b; с другой стороны $b\notin A\Rightarrow b\in A'\Rightarrow b>a$. Таким образом, одноименные классы двух сечений не могут пересекаться лишь частично, т.е. так, чтобы в каждом классе были элементы не содержащиеся в другом: невозможно

либо $A\setminus B=\varnothing$, либо $B\setminus A=\varnothing$·



соответствует $A\subset B$ и $A'\supset B'$.

Определение равенства сечений. Сечения $\alpha=A\,|A'$ и $\beta=B\,|B'$ равны тогда и только тогда, когда совпадают внутренности их нижних или, что-то же, верхних классов: $\alpha=\beta \Leftrightarrow A\,|A'=B\,|B' :\Leftrightarrow \overset{0}{A}=\overset{0}{B} \Leftrightarrow \overset{0\,/}{A}=\overset{0\,/}{B}$.

Для иррациональных сечений это тривиальное равенство в смысле тождественного совпадения приравниваемых объектов (сечений). Для сечений, производимых рациональными числами, это, кроме того, и отождествление сечений, отличающихся размещением числа производящего сечение в верхнем или нижнем классе, поскольку приравниваются внутренности классов, куда секущее число не входит. Иными словами для таких сечений это переформулировка сформулированной ранее договоренности об их отождествлении.

Определение отношения порядка для сечений. Из двух неравных сечений $\alpha=A\,|A'$ и $\beta=B\,|B'$ больше то, внутренность нижнего класса которого содержит внутренность нижнего класса другого сечения, или, что-то же, внутренность верхнего класса которого содержится во внутренности верхнего класса другого сечения:

$\alpha\le\beta \;\Leftrightarrow\; A\,|A'\le B\,|B' :\Leftrightarrow\; \overset{0}{A}\subset\overset{0}{B} \Leftrightarrow \overset{0}{A}{}'\supset\overset{0}{B}{}'$;

$\alpha<\beta :\;\Leftrightarrow\; \alpha\le\beta\wedge\alpha\ne\beta \;\Leftrightarrow A\,|\,A'<B\,|B' \;\Leftrightarrow\; \overset{0}{A}\subset\overset{0}{B}\wedge\overset{0}{A}\ne\overset{0}{B}\Leftrightarrow\overset{0'}{A}\supset\overset{0'}{B}\wedge\overset{0'}{A}\ne\overset{0'}{B}.$

Любые два вещественные числа (сечения) сравнимы (линейность порядка в множестве сечений)

$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbf{R} \qquad \alpha<\beta \;\vee\; \alpha=\beta \;\vee\; \alpha>\beta\cdot$

◂ Следует из утверждения о сравнимости (внутренностей) одноименных классов любых двух сечений ▸

Равенство сечений рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. обладает всеми свойствами равенства по определению (эквивалентности). Нестрогое неравенство между сечениями рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е. обладает всеми свойствами отношения порядка. Отношения равенства или порядка между сечениями, для сечений, производимых рациональными числами, равносильны равенству или порядку между числами производящими сечения. Сечения, соответствующие рациональным числам $a(a'')$ из внутренностей нижнего (верхнего) классов меньше (больше) рассматриваемого сечения α:

Пусть $\alpha=A\,|\,A'$, $\beta=B\,|\,B'$, $\gamma=C\,|\,C'$, …, Тогда

а) Рефлексивность : $\alpha=\alpha$; $\alpha\le\alpha$.

б) Симметричность $\alpha=\beta \;\Rightarrow\; \beta=\alpha$.

в) Антисимметричность $\alpha\le\beta \;\wedge\; \beta\le\alpha \;\Rightarrow\; \alpha=\beta$.

г) Транзитивность $\alpha=\beta \;\wedge\; \beta=\gamma \;\Rightarrow\; \alpha=\gamma$, $\alpha\le\beta \;\wedge\; \beta\le\gamma \;\Rightarrow\; \alpha\le\gamma$.

д) Связь сравнения рациональных чисел со сравнением, производимых ими сечений: если $a, b,\ldots\in\mathbf{Q}$, то

$a=b \;\Leftrightarrow\; \alpha^*=b^*$, $a\le b \;\Leftrightarrow\; \alpha^*\le b^*$.

е) Сравнение сечения с сечениями, производимыми рациональными числами, из внутренностей его классов. Если $\alpha=A\,|\,A'$, $a\in\overset{0}{A}$ и $a'\in\overset{0\,'}{A}$, то

$a^*<\alpha<a'^*$.

ж) Конечно для $a\in\mathbf{Q}$ запись $a^*=\alpha$ равносильна утверждению, что сечение α производится рациональным числом a.

◂ *а*) $\overset{0}{A}=\overset{0}{A}$ и $\overset{0'}{A}=\overset{0'}{A}$, $\overset{0}{A}\subset\overset{0}{A}$ и $\overset{0'}{A}\supset\overset{0'}{B}$. `

b) $\overset{0}{A}=\overset{0}{B}\Rightarrow\overset{0}{B}=\overset{0}{A}$, $\overset{0'}{A}=\overset{0'}{B}\Rightarrow\overset{0'}{B}=\overset{0'}{A}$.

в) $\overset{0}{A}\subset\overset{0}{B}\wedge\overset{0}{B}\subset\overset{0}{A}\Rightarrow\overset{0}{A}=\overset{0}{B}$, $\overset{0,}{A}\supset\overset{0,}{B} \;\wedge\; \overset{0,}{B}\supset\overset{0,}{A} \;\Leftrightarrow\; \overset{0,}{A}=\overset{0,}{B}$

г) $\overset{0}{A}=\overset{0}{B}\wedge\overset{0}{B}=\overset{0}{C}\Rightarrow\overset{0}{A}=\overset{0}{C}$,

$\overset{0}{A}\subset\overset{0}{B}\wedge\overset{0}{B}\subset\overset{0}{C}\Rightarrow\overset{o}{A}\subset\overset{0}{C}$,

д) $\{x\in\mathbf{Q}\,|\; x\;\langle\alpha\}=\{x\in\mathbf{Q}\,|\; x\;\langle b\}\Leftrightarrow\forall\,x\in\mathbf{Q}\quad x\langle\,\alpha \;\Leftrightarrow\; x\;\langle\, b \;\Leftrightarrow\; \alpha=b$

Отождествление сечений множества рациональных чисел с вещественными числами требует:

а) определения для сечений отношений равенства и порядка (= и ≤);

b) определения для сечений суммы и произведения;

в) доказательства, что для сечений отождествляемых с рациональными числами результат сравнения совпадает с результатом сравнения секущих рациональных чисел; доказательства, что сумма и произведение рациональных сечений, есть сечения производимые, соответственно, суммой и произведением секущих рациональных чисел;

г) выявления преимуществ новой системы чисел;

Теоремы об аппроксимации вещественных чисел рациональными
Theorems on approximation of real numbers by rational numbers
Теореми про апроксимацію дійсних чисел раціональними.

Между любыми не равными вещественными числами расположено бесконечно много рациональных чисел

$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \alpha \neq \beta \ \Rightarrow \ \exists r \in \mathbf{Q} \ \alpha < r < \beta$.

Если два вещественных числа можно заключить между сколь угодно близкими рациональными числами, то эти вещественные числа равны:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r, s \in \mathbf{Q} \ \ r < \alpha, \ \beta < s \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$

Всякое вещественное число можно заключить между сколь угодно близкими рациональными числами

$\forall \alpha \in R \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists r, s \in \mathbf{Q} \ \ |r - s| < \varepsilon \wedge r < \alpha < s$.

◀ Если $\alpha < \beta$, то $\overset{0}{A} \subset \overset{0}{B} \wedge \overset{0}{A} \neq \overset{0}{B}$. Поэтому $\exists b \in \overset{0}{B}$ и $b \notin \overset{0}{A}$, т.е. $b \in A'$. Могло бы оказаться, что $b = \alpha$, однако, поскольку в $\overset{0}{B}$ нет наибольшего числа есть $r \in \overset{0}{B}$ и $r > b$. Как и b $r \in A'$, а потому $\alpha < r < \beta$. Вставляя в образующиеся промежутки рациональные числа (по только, что доказанному) получим сколько угодно (но не более, чем счетное число) рациональных чисел заключенных между α и β ▶

◀ От противного. Пусть в условиях теоремы $\alpha < \beta$. Вставим между ними рациональные числа r_1 и r_2 так что $\alpha < r_1 < r_2 < \beta$. Тогда $r < \alpha < r_1 < r_2 < \beta < s \quad \Rightarrow \quad s - r > r_2 - r_1 > 0$. Для $0 < \varepsilon < r_1 - r_2$ это противоречит условию $0 < s - r < \varepsilon$ ▶

◀ Если рациональное число ε_0 такое, что $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ (оно есть в числе первой теоремы), то в соответствии с принципом Архимеда в множестве рациональных чисел для достаточно больших натуральных $n \in \mathbf{N}$ и для произвольно взятого $a \in \overset{0}{A}$ имеем $a + n\varepsilon_0 \in \overset{0'}{A}$ (при произвольном вещественном ε, $\alpha + n\varepsilon$ в общем не будет рациональным числом да и действия над вещественными числами еще не определены). Выберем минимальное из таких n (вполне упорядоченность $\mathbf{N}$ позволяет это сделать). Тогда либо $\alpha' + (n-1)\,\varepsilon_0 \in \overset{0}{A}$ так что можно взять $r = \alpha + (n-1)\varepsilon_0$ и $s = \alpha + n\varepsilon_0$, либо $\alpha + (n-1)\varepsilon_0 = \alpha$ и нужные числа -x_0 $r = \alpha + (n-1)\varepsilon_0 - \varepsilon_0/2$ и $S = \alpha + (n-1)\varepsilon_0 + \varepsilon_0/2$ ▶

Теорема Дедекинда (непрерывность множества вещественных чисел)
Dedekind Theorem (Continuity of Rational Number set)
Теорема Дедекінда (неперервність множини дійсних чисел).

Сечение A/A' множества $\mathbf{R}$ вещественных чисел – это разбиение множества вещественных чисел на два непустых, непересекающихся подмножества, называемых классами (нижним A и верхним A') так что любое вещественное число из нижнего класса меньше любого числа из верхнего класса A':

1) $A, A' \neq \Phi$, 2) $A \cup A' = \mathrm{R}$, 3) $A \cap A' = \Phi$; 4) $\forall \alpha \in A \forall \alpha' \in A' \ \alpha < \alpha'$.

Вещественное число α, производит сечение $A|A'$ множества вещественных чисел $\mathbf{R}$, если оно либо является наибольшим в нижнем классе $\alpha_0 = \max A$, либо наименьшим в верхнем классе $\alpha_0 = \min A'$.

Число наибольшее в нижнем классе A можно присоединить как наименьшее к верхнему классу A', исключив из нижнего, и наоборот; эта операция дает два сечения множества вещественных чисел, которые производятся одним и тем же вещественным число и отождествляются: если $A|A'$- сечение и

$\alpha_0 = \max A$, то $(A \setminus \{\alpha_0\}) | (A' \cup \{\alpha_0\}$- тоже сечения и $\alpha_0 = \min(A' \cup \{\alpha_0\}$;

$\alpha_0 = \min A'$, то $(A \cup \{\alpha_0\})(A' \setminus \{\alpha_0\})$– тоже сечение и $\alpha_0 = \max(A \cup \{\alpha_0\})$.

Таким образом, вещественные числа есть классы эквивалентности сечений множества вещественных чисел.

Сечения $A \,|\, A'$ множества вещественных чисел $\mathbf{R}$ у которых одновременно в нижнем классе A есть наибольший элемент, а в верхнем классе A' - наименьший не существуют.

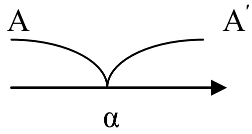
◀ От противного. Если $\alpha_0 = \max A$ и $\alpha'_0 = \min A'$, то вставляя между ними, $\alpha_0 < \alpha'$, вещественное число, скажем $\gamma = \dfrac{\alpha_0 + \alpha'_0}{2}$, $\alpha_0 < \gamma < \gamma'_0$ придем к противоречию: γ не может лежать в классе A т.к. $\gamma > \alpha_0 = \max A$ и γ не может лежать в классе A' т. к. $\gamma < \alpha'_0 = \min A'$

Не существуют также сечения $A\,|\,A'$ вещественных чисел у которых одновременно в нижнем классе A нет наибольшего, а в верхнем классе A' - наименьшего числа. Иными словами имеет место теорема Дедекинда. Всевозможные приближения вещественными числами по недостатку к избытку однозначно определяют вещественное число.

Теорема Дедекинда о непрерывности множества вещественных чисел. Всякое сечение множества вещественных чисел производится некоторым вещественным числом:

$\forall A|A'$ либо $\exists\alpha\in\mathbf{R}\quad \alpha_0=\max A$ либо $\alpha_0=\min\ A'$.

Очевидно, что всякое вещественное число α_0 производит сечение $A\,|\,A'$ множества $\mathbf{R}$ вещественных чисел: нижний класс такого сечения это либо $A=\{x\in R|\ x<\alpha_0\}=]-\infty,\alpha[$, либо $A=\{x\in R|\ x\le\alpha_0\}=]-\infty,A]$, а верхний - $A'=\{x\in R|\ x\ge\alpha_0\}=[\alpha_0,+\infty[$, либо $A'=\{x\in R|\ x>\alpha_0\}=]\alpha_0,+\infty[$ соответственно.



◂ Определим сечение множества рациональных чисел полагая $A=\mathbf{Q}\cap A$ и $A'=\mathbf{Q}\cap A'$ Из определяющих свойств сечений множества вещественных чисел следуют для так определенных классов A и A' все определяющие свойства сечения $A\,|\,A'$ множества рациональных чисел.

$(\mathbf{Q}\cap A)\cap(\mathbf{Q}\cap A')=\mathbf{Q}\cap A\cap\mathbf{Q}\cap A'=(\mathbf{Q}\cap\mathbf{Q})\cap(A\cap A')=\mathbf{Q}\cap\varnothing=\varnothing$,

$(\mathbf{Q}\cap A)\cup(\mathbf{Q}\cap A')=\mathbf{Q}\cap(A\cup A')=\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}=\mathbf{Q}$.

$\alpha_0=A\,|\,A'$– сечение множества рациональных чисел – вещественное число α_0. Поэтому, либо $\alpha_,\in A$, либо $\alpha_0\in A'$, т.к. $A\cup A'=\mathbf{R}$.

Если $\alpha_0\in A$ и не является там наибольшим, то $\exists\alpha\in A\ \alpha_0<\alpha$. Тогда вставляя между ними рациональное число r, $\alpha_0<r<\alpha$ приходим к противоречию: с одной стороны $r\in A$ т.к. $\alpha\in A$, а потому $\in A$ и любое число меньшее α; с другой стороны, $r\in A'$ т.к. $r>\alpha_0$ и так определено α_0.

Случай $\alpha_0\in A'$ рассматривается аналогично ▸

Всякое число входит в нижний (верхний) класс вместе со всеми числами меньшими (большими) его. Всякое числовое множество, которое не пустое, не совпадает с множеством всех чисел и вместе с любым числом содержит и все числа меньшие (большие) его, является нижним (верхним) классом некоторого сечения.

◂ $\forall\alpha'\notin M$ и $\forall\alpha\in M$ имеем $\alpha<\alpha'$, т.к. иначе (т.е. если $\alpha'\le\alpha$) $\alpha'\in$М. Остальные свойства сечений – это свойства дополнений множеств или оговорены в условии ▸

Сложение вещественных чисел
Addition Real Nambers
Додавання дійсних чисел

Определим сложение и умножение числовых множеств полагая,

$X+Y=\{z\ |\exists x\in X\ \ \exists y\in Y\ z=x+y\}=:\{x+y|x\in X\ \wedge\ y\in Y\}$,
$X\cdot Y=\{z\ |\exists x\in X\ \ \exists y\in Y\ z=xy\}=:\{xy\ |x\in X\ \wedge\ y\in Y\}$

Эти определения годятся для любых чисел, хотя пока их можно было бы применять лишь к числам рациональным, для которых сумма и произведение уже определены.

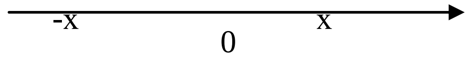
Сложение и умножение числовых множеств коммутативны и ассоциативны, обладают нулем – множеством, состоящим из одного нуля $\{0\}$, и единицей – множеством, состоящим из одной единицы $\{1\}$, связаны между собой дистрибутивным законом, но, в общем, когда числовое множество не состоит из одного единственного элемента, у него нет противоположного и обратного

$$X+Y=Y+X,\qquad X\cdot Y=Y\cdot X;$$
$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z)=:X+Y+Z,\qquad (X\cdot Y)Z=X\cdot(Y\cdot Z)=XYZ;$$
$$X+\{0\}=X;\qquad X\cdot\{1\}=X$$

Определим также множество $-X$ из противоположных элементов множества X:

$$-X=\{|x|-x\in X\},$$

На числовой прямой это множество симметрично множеству X относительно начала координат



а также множество X^1 из обратных элементов множества X, если оно не содержит нуля:

$$X^{-1}=\{x \mid x^{-1}\in X\}, \text{ если } 0 \notin \bar{X} \Leftrightarrow 0\notin X^{-1}$$

Если непустое множество X, не является одноэлементным множеством, то его сумма с множеством $-X$ из его противоположных элементов тоже не является одноэлементным множеством; она содержит 0 и вместе со всяким числом содержит противоположное ему число; на числовой прямой эти множества симметричны относительно начала координат:

$$X+(-X)\equiv X-X=\{x-y \mid x, y\in X\},$$
$$0\in X-X,\quad a\in X\Leftrightarrow -a\in X-X;$$
$$\{a\}+(-\{a\})\equiv\{a\}-\{a\}\equiv\{a\}+\{-a\}=\{0\}.$$

Если непустое множество X, не содержащее нуля, не является одноэлементным, то его произведение на множество X^{-1}из его обратных элементов тоже не является одноэлементным множеством; оно содержит 1 и вместе со всяким числом содержит обратное ему число.

$$X\cdot X^{1}\cong X/X=\{x/y \mid x, y\in X\},\ 0\notin X\Leftrightarrow 0\notin X^{1};$$
$$1\in X\cdot X^{1},\ a\in X\cdot X^{1}\Leftrightarrow a^{-1}\in X\cdot X^{1};\qquad X(Y+Z)=XY+XZ$$
$$\{a\}\cdot\{a\}^{-1}\equiv\{a\}/\{a\}\equiv\{a\}\cdot\{a^{-1}\}=\{1\}$$

$X_+=\{x \mid x\in X$ и $x>0\}$ –множество положительных чисел из множества X – положительная часть множества X.

$X_-=\{x \mid x\in X\wedge x<0\}$ множество отрицательных чисел из множества X-отрицательная часть множества X.

$$(_-X)_\pm=-X_\pm,\qquad X_\pm^{-1}=(X^{1})_\pm\qquad X\setminus\{0\}=X_+\cup X_-$$

$$X^{1}=X_+^{-1}\cup X_-^{-1},\quad (XX^{1})_+=X_+X_+^{-}\cup X_-\cdot X_-^{-1},\qquad (XX^{-1})_-=X_+\cdot X_-^{-1}\cup X_-\cdot X_+^{-1}$$

На числовой прямой множества точек X и X^{-1} связаны друг с другом инверсией относительно нульмерной единичной сферы $|x|=1$, представляющий собой двухточечное множество $\{-1,+1\}$ X_+ и $X_+^{-1}=(X^{1})_+$ связаны инверсией относительно точки 1, а X_-^{-} и $X_-^{-1}=\left(X^{-1}\right)_-$ инверсией относительно точки –1. Точки связанные инверсией относительно нульмерной единичной сферы $|x|=1$ а) одного знака и б) произведение их расстояний до начала координат (модулей) равно 1.

<u>Сложение вещественных чисел</u>. Суммой вещественных чисел – сечений $\alpha=A|A'$ и $\beta=B|B'$ называется вещественное число – сечение $\gamma=C|C'$, внутренность конечного (верхнего) класса
которого есть, по определению сумма внутренностей нижних (верхних) классов слагаемых:

$$\alpha+\beta=\gamma\Leftrightarrow \overset{0}{C}=\overset{0}{A}+\overset{0}{B}\Leftrightarrow \overset{0}{C}{}'=\overset{o}{A}{}'+\overset{o}{B}{}'$$

Другими словами сумма вещественных чисел – это вещественное число, которое заключено между всевозможными суммами рациональных чисел из внутренностей нижних классов слагаемых и всевозможных суммами чисел из внутренностей верхних классов слагаемых:

$$\forall a\in\overset{0}{A},\ b\in\overset{o}{B},\ a'\in\overset{0}{A}{}',\ b'\in\overset{0}{B}{}'\qquad a+b<y<a'+b'$$

Корректность этого определения следует из следующих утверждений.

Множество $\overset{0}{C}=\overset{0}{A}+\overset{0}{B}$ действительно может рассматриваться как внутренность нижнего класса некоторого сечения; одновременно множество $\overset{0}{C}{}'=\overset{0}{A}{}'+\overset{0}{B}{}'$ является внутренностью верхнего класса того же сечения. Сумма вещественных чисел определена данным определением для любых двух вещественных чисел и однозначно, т.е. не может быть разных вещественных чисел удовлетворяющих определению суммы для фиксированных слагаемых.

◄ Действительно, $\overset{0}{C}$ вместе с любым числом $a+b$, $a\in\overset{0}{A}$, $b\in\overset{0}{B}$ содержит все меньшие: $a+b>r\Rightarrow a+b-r>0\Rightarrow a-(a+b-r)<a$, т. е. $a-(a+b-r)\in\overset{0}{A}$; после прибавления к обеим частям последнего неравенства числа $b\in B$ имеем $r=a-(a+b-r)+b<\alpha+b$.

В $\overset{0}{C}$ нет наибольшего числа, поскольку наибольших чисел нет по определению в $\overset{0}{A}$ и $\overset{0}{B}$. Поэтому для $a\in\overset{0}{A}$ и $b\in\overset{0}{B}$ найдутся большие из тех же классов $a<a_1$, $a_2\in\overset{0}{A}$; $b<b_2$; $b_2\in\overset{0}{B}$. Поэтому для всякого числа $a+b$ из $\overset{0}{A}+\overset{0}{B}$ в этом множестве есть большее число a_2+b_1.

Аналогичные рассуждения показывают, что $\overset{0}{C}{}'$ можно рассматривать как верхний класс некоторого сечения.

Любое число из $\overset{0}{C}$ меньше любого числа из $\overset{0}{C}{}'$. Действительно, если $a+b\in\overset{0}{C}$ $a'+b'\in\overset{0}{C}{}'$ где $A\in\overset{0}{A}$, $b\in\overset{0}{B}$, $a'\in\overset{0}{A}{}'$, $b'\in\overset{0}{B}{}'$ и, следовательно, $a<a'$ и $b<b'$, то складывая последние неравенства получаем требуемое, $a+b<a'+b'$.

В $\overset{0}{C}$ и $\overset{0}{C}{}'$ можно найти числа, разность которых меньше любого наперед заданного положительного $\varepsilon>0$. По третьей теореме об аппроксимации есть числа a, a; b; b' разность которых меньше $\varepsilon/2$: $0<a'-a<\varepsilon/2$, $0<b'-b<\varepsilon/2$, откуда $0<a'+b'-(a+b)=(a'-a)+(b'-b)<\frac{\varepsilon}{2}$ · Поэтому множество $\mathbf{Q}\setminus(\overset{0}{C}\cup\overset{0}{C}{}')$ содержит не более одного элемента (числа), согласно второй теореме об аппроксимации. Если указанное множество пустое ($=\varnothing$), то $\overset{0}{C}=C$, $\overset{0}{C}{}'=C'$, $C|C'=\gamma$–однозначно определенная сумма. Если $\mathbf{Q}\setminus(\overset{0}{C}\cup\overset{0}{C}{}')=\{c\}$, где $c\in\mathbf{Q}$, то $c=max(\overset{0}{C}\cup\{c\})=\min(\overset{0}{C}{}'\cup\{c\})$ так что $(\overset{0}{C}\cup\{c\}|\overset{0}{C}{}'=\overset{0}{C}|(\overset{0}{C}{}'\cup\{c\})$–сечение производимое числом c. Подчеркнем, что наличие такого c не означает, что числа-слагаемые α и β рациональны ▸

Данное определение суммы вещественных чисел сохраняет сумму рациональных чисел неизменной. Точнее, сумма $a_0^*+b_0^*$ сечений b_0^* и b_0^* производимых рациональными числами a_0 и b_0 есть сечение $(a_0+b_0)^*$ производимое их суммой:

$$a_0^*+b_0^*=(a_0+b_0)^*$$

◂ $\forall a\in\overset{0}{A}, b\in\overset{0}{B}, a'\in\overset{0}{A}{}', b'\in\overset{0}{B}{}'$ $a<a_0<a'\wedge b<b_0<b'\Rightarrow \alpha+b<a_0+b_0<\alpha'+b'$. Поэтому a_0+b_0 удовлетворяет условием налагаемым на сумму и так как последняя определена однозначно, то она совпадает с сечением $(a_0+b_0)^*$ ▸

В терминах сечений естественно получать лишь те свойства суммы, которые достаточны для аксиоматического построения теории вещественных чисел: ассоциативность, коммутативность, существование нуля, существование противоположного, свойства неравенств (порядка) относительно сложения.

1.Коммутативность: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$–независимость суммы от порядка слагаемых.

2.Ассоциативность: $\alpha(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$–независимость суммы от порядка выполнения действий (расстановки скобок).

3.Существование нуля: сечение 0^* производимое 0 обладает свойством $0^*+\alpha=\alpha$: прибавление нуля к любому числу не меняет его.

4.Существование противоположного: для любого числа $\alpha=A|A'$ его сумма с противоположным $-\alpha:=(-A')|(-A)$ равна нулю $(-\alpha)+\alpha=0^*$.

5.Неравенство между вещественными числами сохраняется при прибавлении к обеим его частям одного и того же числа: $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

◂ $\overset{0}{A}+\overset{0}{B}=\overset{0}{B}+\overset{0}{A}$, из-за коммутативности сложения рациональных чисел.

$\overset{0}{A}+(\overset{0}{B}+\overset{0}{C})=(\overset{0}{A}+\overset{0}{B})+\overset{0}{C}$ из-за ассоциативности сложения рациональных чисел.

$0^*=\mathbf{Q}_-|(\mathbf{Q}_+\cup\{0\})=(\mathbf{Q}_-\cup\{0\}|\mathbf{Q}_*$. Для $a=A|A'$ имеем $\mathbf{Q}_-+\overset{0}{A}=\overset{0}{A}$ $\mathbf{Q}_++\overset{0}{A}{}'=\overset{0}{A}{}'$.

Действительно, в $\overset{0}{A}{}^*$ нет наибольшего. Всякий элемент из $\mathbf{Q}+\overset{0}{A}$ меньше некоторого элемента из $\overset{*}{A}$ как сумма с отрицательным числом. Поэтому $\mathbf{Q}_-+\overset{0}{A}\subset\overset{0}{A}$. Для всякого элемента из $\overset{0}{A}$ найдется равный ему элемент из $\mathbf{Q}_-+\overset{0}{A}$, точка числа $\mathbf{Q}_-+\overset{0}{A}\supset\overset{o}{A}$ и, следовательно, $\mathbf{Q}_-+\overset{0}{A}=\overset{0}{A}$. В самом деле, если $a\in\overset{0}{A}$, то можно указать $a_1\in\overset{0}{A}$ большее a: $a<a_1$. Но так как $a=a_1+(a-a_1)$, где $a_1\in\overset{0}{A}$, а $a-a_2<0$, т.е. $a-a_2\in\mathbf{Q}_-$, то $a\in\mathbf{Q}_-+\overset{0}{A}$.

Для произвольного сечения $\alpha=A|A'$ множества $(-A)$ и $(-A')$ из противоположных элементов для классов A и A', непусты (ибо таковы сами A и A'), не пересекаются (по той же причине с учетом того что $(-a)=(-a')\Leftrightarrow a=a'$), их объединение есть $\mathbf{Q}$ (так как $A\cup A'=\mathbf{Q}$, то $\forall r\in\mathbf{Q}$ либо $-r\in A$, т.е. $-r=a$ или $\gamma=-\alpha$ а значит $\gamma\in-A$ либо $-r\in A'$ и следовательно $r\in(-A')$), наконец, для $r\in(-A)$ и $\gamma'\in(-A')$ имеем $(-r)\in A$ и следовательно (-

$r)<(-r')$ т.е. $r>r'$. $(-\overset{0}{A})+\overset{0}{A}'=\mathbf{Q}_+$, $\overset{0}{A}+(-\overset{0}{A}')=\mathbf{Q}_-$ т.е. $\alpha+(-\alpha)=0^*\cdot$ Легко понять, что $(-\overset{0}{A})$ – внутренность класса (-A), $(-a)+a'>0$; для $r>0$ $\exists\alpha$, a_1'' такие что $0<\alpha'-a<\gamma$. Тогда $a_1<\alpha+\gamma=:\alpha'$, причем $a'-\alpha\equiv a'+(-a)=r$ – все числа из $\mathbf{Q}_+$ содержатся в $(-\overset{0}{A})+A'$.

$\alpha\leq\beta\Leftrightarrow\overset{0}{A}\subset\overset{0}{B}\Rightarrow\overset{0}{A}+\overset{0}{C}\subset\overset{0}{B}+\overset{0}{C}\Leftrightarrow\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$. Сохранение строгого неравенства получается “алгебраически” из того что $\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ ▸

Произведение вещественных чисел
Product of Real Numbers
Добуток дійсних чисел.

Потребуем, чтобы умножение было дистрибутивно по отношению к сложению:

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha.\gamma$

Отсюда вследствие единственности нуля, доказываемой алгебраически, имеем для любых фиксированных α,β

$\alpha\beta=\alpha(\beta+0)=\alpha\beta+\alpha0 \ \Rightarrow \ \alpha\cdot0=0$

Произведение любого вещественного числа на 0 равно нулю.

$0=\alpha\cdot0=\alpha(\beta+(-\beta))=\alpha\beta+\alpha\cdot(-\beta)\Rightarrow\alpha\cdot(-\beta)=-\alpha\beta$

вследствие единственности противоположного, доказываемой алгебраически.

Произведение числа на противоположное другому числу есть противоположное произведению этих чисел. Отсюда правило знаков: плюс (умноженный) на плюс и минус на минус дают плюс, а плюс на минус и минус на плюс дают минус:

$\alpha\beta\equiv(+\alpha)(+\beta)=(-\alpha)(-\beta)$ $\alpha(-\beta)\equiv(+\alpha)(-\beta)=(-\alpha)\beta=(-\alpha)(+\beta)=-(\alpha\beta)$

$(-\alpha)(-\beta)=-(\alpha(-\beta))=-(-(\alpha\beta))=\alpha\beta$ - т.к. противоположное число единственно.

Таким образом, в предположении дистрибутивности достаточно определить произведение положительных чисел, для остальных произведение определится правилом знаков и свойством 0 обращать в нуль произведение.

Для положительных вещественных чисел $\alpha,\beta>0$, т.е. для $\alpha=A\,|\,A'$ и $\beta=B|B'$ таких, что $A'B'\subset\mathbf{Q}_+$, назовем произведением $\alpha\beta$ вещественное число $\gamma=C|\,C'$ внутренность, <u>верхнего </u>класса которого равна произведению внутренностей верхних классов сомножителей $\overset{0}{C}'=\overset{0}{A}'\ \overset{0}{B}'$: для $\alpha\beta>0$

$\alpha\beta=\gamma\Leftrightarrow\overset{0}{C}'=\overset{0}{A}'\ \overset{0}{B}'$

а положительная часть внутренности нижнего класса равна произведению положительных частей внутренностей нижних классов сомножителей: для $\alpha,\beta>0$

$\overset{0}{C}_+=\overset{0}{A}_+\overset{0}{B}_+$

Другими словами произведение положительных вещественных чисел, это вещественное число, которое заключено между всевозможными произведениями рациональных чисел из положительных частей внутренностей нижних классов сомножителей и всевозможными произведениями чисел из внутренностей верхних классов сомножителей.

$\forall\Delta\in\overset{0}{A}_+,\ b\in\overset{0}{B}_+,\ a'\in\overset{0}{A}',\ b'\in\overset{0}{B}'$ $ab<\gamma<a'b'$

Проверка корректности определения $\overset{0}{C}'$ вместе с любым числом $a'b'$, $a'\in\overset{0}{A}'$, $b'\in\overset{0}{B}'$ содержит все большие: $0<\alpha'b'<r\Rightarrow$

$\dfrac{a'b'}{r}<1 \ \Rightarrow \ a':(\dfrac{a'b'}{r})>a'$, так что левая часть $\in\overset{0}{A}'$ Поэтому

$r=[a':(\dfrac{a'b'}{r})]\cdot b'\in\overset{0}{A}'\ \overset{0}{B}' \quad \Rightarrow \quad \overset{0}{A}'\ \overset{0}{B}'$ можно рассматривать как внутренность верхнего класса некоторого сечения.

$\overset{0}{C}_+ = \overset{0}{A}_+ \overset{0}{B}_+$ вместе с любым числом *ab*, где $a\in \overset{0}{A}_+,\, b\in \overset{0}{B}_+$ содержит и всякое меньшее положительное число: $0<r<\alpha b \Rightarrow \frac{ab}{r}>1 \to a:(\frac{ab}{r})<a$, так как левая часть $\in \overset{0}{A}_+$.

Поэтому $r=[a:(\frac{ab}{r})\cdot b \in \overset{0}{A}_+\overset{0}{B}_+ \quad\Rightarrow\quad \overset{0}{A}_+\overset{0}{B}_+$ можно рассматривать как внутренность положительной части нижнего класса некоторого сечения.

В $\overset{0}{C}'$ нет наименьшего числа в $\overset{0}{C}_+$ - наибольшего. Так как таковых нет в $\overset{0}{A}'$ и $\overset{0}{B}'$, то для любых a', b' есть a', b' есть $R_1' < a'$ и $b_1' < b'$, что после перемножения дает $R_1'b_1' < a'b'$. Для $\overset{0}{C}_+$ рассуждения аналогично.

Любое число из $\overset{0}{C}_+$ и $\overset{0}{C}'$ меньше любого числа из $\overset{0}{C}'$: $0<a<a'$ $0<b<b'$ $\Rightarrow$ $0<ab<a'b'$.

В $\overset{0}{C}_+$ и $\overset{0}{C}'$ можно найти числа, разность которых меньше любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon>0$· Можно ограничиться рассмотрением $a'<a_1'$, $b'<b_1'$, где a_1', b_1' произвольные наперед заданные числа. Если $a'-\alpha<\delta$ и $b'-b<\delta$, то

$$a'b-ab=a'b'-a'b+a'b-\alpha b=a'(b'-b)+(a'-\alpha)b<\delta(a'+b)<\delta(a'+b')<\delta(\alpha_1'+b_1')$$

Если взять $\delta<\frac{\varepsilon}{\alpha_1'+b_1'}$, то получим требуемое. Здесь скажем $a'<a_1'$ без ограничения общности, так как во внутренностях верхних классов нет наименьших. Поэтому от a' удовлетворяющего неравенству $a'-a<8$ можно перейти к меньшему если это необходимо, удовлетворяющего кроме этого неравенства также и условию $a'<a'_1$.

Данное определение произведения вещественных чисел сохраняет произведения рациональных чисел неизменными. Точное произведение $a_0^*b_0^*$ сечений a_0^* и b_0^* производимых рациональными числами a_0 и b_0 есть сечение $(a_0b_0)^*$ производимое их произведением:

$a_0^*\cdot b_0^*=(a_0b_0)^*$

◂ $0<a<a_0<a'$ $\wedge$ $0<b<b_0<b'$ $\Rightarrow$ $0<ab<a_0b_0<a'b'$· Поэтому a_0b_0 удовлетворяет условиям налагаемым на произведение и так как последнее определено однозначно, то оно совпадает с сечением $(\alpha_0b_0)^*$ ▸

Коммутативность: $\alpha\beta=\beta\alpha \Leftarrow \overset{0}{A}'\overset{0}{B}'=\overset{0}{B}'\overset{0}{A}'$ так как произведение рациональных чисел коммутативно.

Ассоциативность: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma \Leftarrow \overset{0}{A}'(\overset{0}{B}'\overset{0}{C}')=(\overset{o}{A}'\overset{0}{B}')\overset{0}{C}'$ так как произведение рациональных чисел ассоциативно.

Существование единицы: $\alpha\cdot 1=\alpha\cdot$ $\overset{0}{A}'\overset{0}{B}'=\overset{0}{A}'$, если $\overset{0}{B}'=\{b\in\mathbf{Q}\mid b>1\}$-внутренность верхнего класса сечения 1^* которое производится рациональным числом 1.

Так как в $\overset{0}{B}'$ входят числа >1, то $\overset{0}{A}'\overset{0}{B}'\subset\overset{0}{A}'$. Взяв $\alpha_1'<\alpha_1'$ и $b'=\alpha''/\alpha_1' >1$ получим $\alpha'=\alpha_1'(a'/a_1')$ $\in \overset{0}{A}'\overset{0}{B}'$ т.е. $\overset{0}{A}'\subset\overset{0}{A}'\overset{0}{B}'$.

Существование обратного: $\alpha^{-1}\cdot\alpha=1$, где $\alpha=A|A'$, $\alpha^{-1}=B|B'$ причем для $\alpha>0$, для $\alpha<0$ по правилу знаков, 0 не имеет обратного. $\overset{0}{B}'=\overset{0}{A}'^{-1}_+$ и $\overset{0}{B}_+=\overset{0}{A}'^{-1}$.

Действительно $\alpha\cdot\alpha^{-1}$ заключено между всевозможными произведениями вида ab и $a'b'$, в частности между всевозможными числами вида $\frac{a}{a'}$ и $\frac{a'}{a}$, соответствующих выбору $b=\alpha'^{-1}$ и $b'=\alpha^{-1}$.

Разность таких чисел можно сделать сколь угодно малой, а так как между ними содержится 1 : $\frac{a}{a'}<1<\frac{a'}{a}$, то это и есть что и требовалось доказать.

$$\frac{a'}{a}-\frac{a}{a'}=\frac{a'^2-a^2}{aa'}=\frac{a'+a}{aa'}(a'-a)<\frac{a'+a'}{aa'}\delta<\frac{z}{a}\delta<\frac{z}{a_1}\delta<\varepsilon, c\delta<\frac{a\ \varepsilon}{2},$$

где $0<a_1<a$; так как в $\overset{0}{A}_+$ нет наибольшего, то a можно без ограничения общности брать $>a_1$ увеличение a только уменьшает разность $a'-a$.

Неравенства между вещественными числами сохраняется при умножении обеих его частей на одно и то же положительное число

$\alpha\leq\beta\ \wedge\ \gamma>0\ \Rightarrow\ \alpha\gamma\leq\beta\gamma$.

Дополнение 2

Исчисление высказываний

Высказывание – это повествовательное предложение, рассматриваемое вместе с его содержанием (смыслом) как истинное или ложное.

Переходя улицу, оглянись по сторонам! }не высказывания
Что такое высказывание?

Основной материал для производства гвоздей – это резина. }высказывание }ложное
2+2=3
2+2=4. }истинное

Исчисление высказываний (ИВ) – это формализованный фрагмент метаязыка, фиксирующий определенное каноническое описание свойств логических связок, т.е. правила построения составных высказывний из более простых с помощью логических связок и связь истинности построенного таким образом составного высказывания со значениями истинности составляющих.

Переменные ИВ называются пропозициональными переменными. Пропозициональные переменные – это лингвистические переменные, значениями которых мыслятся названия формул языка-объекта. В частности, как и любые другие лингвистические объекты, сами формулы могут использоваться как названия для самих себя, т.е. автонимно. Пропозициональные переменные рассматриваются как элементарные (атомные или неделимые) формулы ИВ. Составную формулу ИВ можно рассматривать как запись словарного алгоритма перерабатывающего надлежащий набор формул языка-объекта, мыслимых как нерасчленимое целое каждая, в составную формулу определенной структуры. Конечно, как и для любой формальной теории, стандартное понимание ИВ не исключает других полезных содержательных интерпретаций.

Существует много аксиоматических формулировок ИВ, различающихся выбором алфавита (совокупность знаков в целом), основных связок, вспомогательных символов, правил построения формул, аксиом и правил вывода. Все эти формулировки эквивалентны как синтаксически так и семантически. Синтаксическая эквивалентность означает, что можно указать “перевод” одной формулировки в другую, т.е. биекцию сопоставляющую формулам одной формулировки формулы другой, в частности, пропозициональным переменным одной формулировки пропозициональные переменные другой, теоремам одной формулировки теоремы другой, аксиомам одной - теоремы или аксиомы другой, правилам вывода одной - правила вывода или допустимые правила вывода другой. Семантическая эквивалентность означает, что при интерпретации с помощью двух истинностных значений соответственным формулам сопоставляются одни и те же функции алгебры логики.

I.Алфавит(alphabet) ИВ составляют:

1.Потенциально неограниченный набор пропозициональных переменных или букв, т.е. символов, в качестве которых обычно будем использовать печатные заглавные буквы из начала латинского алфавита A,B,C,…, снабженные при необходимости индексами или/и диакритическими знаками. Формализация требует полной определенности, однако в метаязыковых содержательных рассмотрениях удобнее допускать некоторую свободу, что можно оправдать либо надлежаще расширяя алфавит формальной теории, либо рассматривая знаки, не вошедшие в исходный перечень символов формальной теории, как метаязыковое обозначение для них.

2. Логические связки, в качестве которых может быть использован любой полный набор не обязательно независимых связок. Здесь имеются в виду понятия полноты и независимости, опирающиеся на стандартную интерпретацию логических связок с помощью двух истинностных значений. Обычно ограничиваются не более, чем двухместными связками, что оправдано выразимостью любой функции алгебры логики через не более, чем двухместные функции. Чаще всего используемый набор основных связок

$\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow$;

остальные вводятся в метаязыке в обозначениях (сокращениях) для соответствующих содержательно оправданных составных формул ИВ. Число используемых основных связок определяется компромиссом между желанием сократить число первичных символов и удобством их использования: расширение числа основных связок требует расширения списка или усложнения аксиом, фиксирующих свойства связок. Чаще других используемые наборы из двух основных связок это

$\neg,\Rightarrow$, или $\neg,\vee$, а также $\neg,\wedge$.

Чтобы проиллюстрировать возможность обойтись одной единственной двухместной связкой, ниже из двух возможных, | - антиконъюнкция, и $\downarrow$ - антидизъюнкция, воспользуемся |.

3. Вспомогательные символы. При использовании не более, чем двухместных связок достаточно скобок: левой и правой.

(,).

Вспомогательные символы можно исключить, воспользовавшись надлежащими правилами построения формул, которые обычно неудобны в содержательных рассмотрениях.

<u>II. Правила построения формул ИВ</u>.

Формулы ИВ определяются <u>индуктивно</u>, т.е. указываются неделимые атомные формулы, правила, по которым из заданных формул составляются новые, и постулируется, что никаких формул, кроме тех, которые являются таковыми согласно указанным правилам, нет.

Условимся обозначить в метаязыке произвольные формулы ИВ рукописными заглавными буквами из начала латинского алфавита: $A,B,C,D,\ldots$

1.Каждая отдельно взятая пропозициональная буква является формулой ИВ.

2.а) Если слово A является формулой ИВ, то слово $\neg A$ – тоже формула ИВ.

б) Если слова A и B являются формулами ИВ, то слово (A□B), где знак □ обозначает в метаязыке произвольную двухместную связку из принятого списка основных связок ИВ, - тоже формула ИВ.

3. Слово из символов ИВ является формулой ИВ тогда, и только тогда, когда оно является таковой согласно ранее сформулированным правилам. При введении новых двухместных связок в сокращениях в метаязыке для соответствующих формул языка-объекта, сокращения записывают в виде, согласующемся с указанными правилами построения формул.

В метаязыке допускают сокращение числа скобок, используемых при записи формул; так, обычно опускают внешние скобки и некоторые другие, на основании соглашения о приоритете логических связок, определяя его местом связок в последовательности

$\neg,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow$:

из двух данных связок в записи с сокращенным числом скобок первой действует связка расположенная ближе к началу списка. При восстановлении скобок, для данного знака ищутся ближайшие подслова являющиеся формулами и образующие вместе со знаком подслово, являющееся формулой с опущенными внешними скобками.

Правила построения формул ИВ сформулированы так, что можно указать алгоритм, позволяющий по каждому знакосочетанию из символов ИВ выяснить, является оно формулой ИВ или нет.

<u>III. Правила вывода ИВ</u>

Содержательно правило вывода – это алгоритм переработки заданных истин в другие. В метаязыке обозначают дробью вида.

$$\frac{\Gamma}{A},$$

где “числитель” Г - список известных истин – формул ИВ, определенной правилом вывода структуры. Формулы из списка Г называется посылками этого правила, а ”знаменатель”-формула A - их непосредственным следствием по рассматриваемому правилу.

Содержательно истины ИВ - это тавтологии. Поэтому правила вывода ИВ должны преобразовывать тавтологии в тавтологии. Можно указать много таких рецептов. Не все они независимы. Есть основные и производные или допустимые. Из бесчисленного множества возможных правил вывода в ИВ можно ограничиться двумя основными: МР и S, или даже одним - МР.

1.Modus ponens (лат.-способ вычеркивания или вычерчивания; название связано с проведением рассуждений с помощью знаков, вычерчиваемых прутиком на влажном песке пляжа). Коротко МР.

$$\frac{\mathrm{A}, \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}}{\mathrm{B}}.$$

Если импликация и ее посылка истины, то истинно и заключение импликации. Содержательно это можно обосновать рассматривая таблицу истинности для импликации.

2. Подстановка. Коротко S (substitution)

$$\frac{\mathrm{A}(\mathrm{A})}{\mathrm{A}(\mathrm{A}/\mathrm{B})}:$$

Подстановка вместо всех вхождений пропозициональной переменной А в истинную формулу *A*(А) произвольной формулы *B* даст истинную формулу *A*(*A/B*).Содержательно это оправдано тем, что постоянная функция (тавтология) при суперпонировании с любыми функциями остается постоянной (тавтологией).

Как правило, правилом подстановки избегают пользоваться явно, поскольку в выводе из гипотез его нельзя применять к гипотезам, в которых могут фигурировать фиксированные высказывания. Отказ от явного использования правила подстановки позволяет не различать вывод из гипотез и вывод.

Подстановка фактически означает, что пропозициональные переменные могут принимать в качестве значений формулы ИВ. Чтобы разделить объекты и средства исследования вводят метаязыковые переменные *A, B, C* …,отличные от пропозициональных и принимающие в качестве значений формулы ИВ. Возникает исчисление идентичное ИВ, но отличающееся интерпретацией: это ИВ применяемое к ИВ; формального различия нет. Однако, содержательно в метаязыковом ИВ каждая формула соответствует бесконечному числу формул ИВ-объекта, т.к. в них буквы *A, B, C,…* обозначают произвольные формулы ИВ-объекта (или, что то же самое, переменные *A, B, C,…* пробегают множество формул ИВ-объекта, или, что то же самое, принимают значения из указанного множества). Соответственно аксиомы в метаязыковом ИВ называют схемами аксиом ИВ-объекта т.к. при подстановке в каждую из них вместо метаязыковых пропозициональных букв произвольных формул ИВ–объекта т.к. при подстановке в каждую из них вместо метаязыковых пропозициональных букв произвольных формул ИВ-объекта (придания переменным *A, B, C,…* конкретных значений) получаем бесконечно много формул–аксиом ИВ–объекта. Можно было бы говорить и о схемах теорем языка-объекта, чего не принято делать.

3. Правило вывода в формулировке ИВ с единственной связкой – антиконъюнкцией $|$ и единственной схемой аксиом (см.ниже).

$$\frac{\mathrm{A},\mathrm{A}(\mathrm{B}C)}{C}$$

Легко проверить, воспользовавшись арифметическими выражениями для представляющих функций, что это действительно так: $A|(B|C) = 1\text{-}A\text{+}ABC$. Конечно в качестве заключения можно было бы написать и *B*. При *C*=*B* это правило есть МР, записанный через антиконъюнкцию.

Обычно постулируют несколько, не меньше одного, правил вывода, а многие другие используемые правила вывода получают с помощью постулированных основных как следствия развития теорем – их называют производными или допустимыми правилами.

IV. Аксиомы ИВ.

Содержательно аксиомы – это утверждения, рассматриваемые как истинные без доказательства. Выбор аксиом определяется компромиссом между желанием иметь поменьше постулируемых истин и удобством их использования. В отсутствие подстановки, как одного из основных правил вывода, речь должна идти о схемах аксиом, определяющих структуру формул, объявляемых аксиомами; число аксиом в этом случае бесконечно, но схем аксиом можно взять конечное число. Уменьшению числа аксиом или схем аксиом способствует их независимость, когда ни одна из схем аксиом не выводится из остальных.. Для ИВ вследствие полноты (выводимость всех истин–тавтологий) и существования разрешающей процедуры (т.е. алгоритма, позволяющего по любой формуле выяснить, является ли она истинной, тавтологией или теоремой, или нет) вопрос о числе и независимости аксиом скорее эстетический. В исследованиях (схем) аксиом на независимость находят применение многозначные логики. В приводимых ниже списках аксиом они подразумеваются (и так оно и есть) независимыми.

Если в качестве основных связок взять $\neg,\wedge,\vee.\Rightarrow$, то удобный в смысле легкости содержательной интерпретации и легкости преобразования в систему (схем) аксиом ИИВ, список схем аксиом ИВ, включает 10 формул–тавтологий: (Kleene S.C. Introduction to Metamathematics—Princeton, 1952)

1.$A\Rightarrow(B\Rightarrow A)$,

2.$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Rightarrow(A\Rightarrow C))$; здесь можно поменять местами формулы $(A\Rightarrow B)$ и $(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))$ без негативных последствий,

3.$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow B\wedge C))$.

4.$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((C\Rightarrow B)\Rightarrow(A\vee C\Rightarrow B))$,

5.$A\wedge B\Rightarrow A$,

6.$A\wedge B\Rightarrow B$,

7.$A\Rightarrow A\vee B$,

8.$B\Rightarrow A\vee B$,

9.$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow\neg A)$;

эту схему можно заменить в рамках ИВ на

9′.$(A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow\neg A)$

без нарушения свойства полноты,

10.$\neg\neg A\Rightarrow A$.

Скажем, знак $\Leftrightarrow$ вводится как сокращение $(A\Leftrightarrow B):\Leftrightarrow(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$

Если в качестве основных связок взять $\neg,\Rightarrow$,то список (схем) аксиом сокращается до трех: 1, 2 и

3.$(\neg A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow((\neg A\Rightarrow B)\Rightarrow A)$.

Более того, можно было бы обойтись единственной схемой аксиом

(Meredith L.A. J. Comput. Syst. 3 , 155-164, 1953)

$((((A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg C\Rightarrow\neg D))\Rightarrow C)\Rightarrow E)\Rightarrow((E\Rightarrow A)\Rightarrow(D\Rightarrow A))$.

Здесь связки $\wedge$, $\vee$ вводятся как сокращения (в предыдущей формулировке это теоремы)

$(A\wedge B):\Leftrightarrow\neg(A\Rightarrow\neg B)$

$(A\vee B):\Leftrightarrow\neg A\Rightarrow B$

Если в качестве основных связок взять $\neg$, $\vee$, то можно взять аксиомы

(Hilbert D., Ackermann W. Grundzuge der theoretischen Logik. - Berlin,1938)

1.$A\vee A\Rightarrow A$,

2.$A\Rightarrow A\vee B$,

3.$A\vee B\Rightarrow B\vee A$,

4.$(B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\vee B\Rightarrow A\vee C)$

$(A\Rightarrow B):\Leftrightarrow\neg A\vee B$

Для связок $\neg,\wedge$ схемы аксиом ИВ

(Rosser J.B. Logic for Mathematicians-New York, 1953)

1.$A\Rightarrow(A\wedge A)$,

2.$(A\wedge B)\Rightarrow A$,

3.$(A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg(B\wedge C)\Rightarrow\neg(C\wedge A))$

с сокращением $(A\Rightarrow B):\Leftrightarrow\neg(A\wedge\neg B)$

Для единственной основной связки $|$ и единственного правила вывода

$\dfrac{A, A|(B|C)}{C}$ можно воспользоваться единственной схемой аксиом.

(Nicod J.C. Proc. Cambridge Phil. Soc, **19**, 32-41, 1917)

$(A|(B|C))|\{[D|(D|D)]|[(E|B)|((A|E)|(A|E))]\}$

с сокращениями

$\neg A:\Leftrightarrow A|A$,

$(A\wedge B)\Leftrightarrow(A/B)/(A/B)$,

$(A\vee B):\Leftrightarrow(A/A)/(B/B)$,

$(A\Rightarrow B):\Leftrightarrow A/(B/B)$.

Это теоремы в основной формулировке для сокращения $(A/B):\Leftrightarrow\neg(A\wedge B)$.

V.Вывод

Вывод из, возможно пустого, списка гипотез (формул) *Г* (для) формулы *А* – это последовательность формул заканчивающаяся формулой А и такая, что каждая из них есть либо аксиома, либо одна из гипотез, либо непосредственное следствие предыдущих формул по одному из правил вывода. Формулы из списка Г называются гипотезами или посылками вывода. О формуле *А* говорят, что она выводима (имеет вывод) из гипотез *Г*.

Вывод – это вывод из пустого списка гипотез.

Теорема – формула имеющая вывод.

Формула А зависима от списка формул *Г*, если есть вывод ее из *Г* не использующий аксиомы. Список формул независим (формулы списка независимы друг от друга), если ни одна из них не зависит от остальных.

Аксиома независима, если она не зависит от остальных аксиом.

В метаязыке утверждение о выводимости формулы A из списка гипотез Γ называют секвенцией и записывают с помощью знака выводимости $\rightarrow$ в виде

$\Gamma \rightarrow A$

– "из списка гипотез Γ выводится формула A" или "формула A следует из гипотез Γ".

В случае пустого списка гипотез $\Gamma=\varnothing$ пишут секвенцию

$\rightarrow A$

– "формула А выводима (доказуема)","существует вывод формулы A","формула A есть теорема".

Если для списка формул-гипотез Γ существует формула A, которая выводима из этого списка как и ее отрицание $\neg A$, т.е. если существует формула, для которой одновременно $\Gamma \rightarrow A$ и $\Gamma \rightarrow \neg A$, то список формул-гипотез называется противоречивым и пишут секвенцию.

$\Gamma \rightarrow$

-"список гипотез Γ противоречив".

Секвенцию

$\rightarrow$

$\rightarrow$ можно рассматривать как утверждение о противоречивости теории. Для ИВ это ложная секвенция (непротиворечивость ИВ).

При одновременном рассмотрении разных теорий и, соответственно, разных понятий выводимости, знак выводимости снабжают индексом, указывающим теорию, к которой он относится: так

$\rightarrow_{\text{ив}}$, $\rightarrow_{\text{иис}}$, $\rightarrow_{\text{ип}}, \ldots$

Запись вывода в метаязыке (протокол вывода) начинают знаком начала вывода (доказательства) ◄, после которого иногда указывают формальную систему, в которой проводится рассмотрение и/или основную идею вывода, а заканчивают вывод знаком конца вывода (доказательства) ►. Для удобства ссылок удобно нумеровать формулы последовательности–вывода, для чего перед формулой с отступом от нее пишется ее порядковый номер в рассматриваемом выводе – соответствующая цифра с точкой. Формулы в выводе удобно сопровождать комментарием, достаточным для того, чтобы без напряжения можно было понять, какой именно гипотезой или аксиомой и при каких именно формулах-составляющих она является, или следствием каких предыдущих формул и по какому именно правилу вывода она получена. Очевидно, для этого необходимо перенумеровать аксиомы, гипотезы и правила вывода, если их больше одного; часто вместо номера удобно пользоваться собственными именами некоторых из этих объектов. Комментарий с отступом пишут после строки в которой написана формула в квадратных скобках располагая его в укороченном абзаце, так что формулы выделяются в столбце текста с комментарием. Примеры расшифровки комментариев :

[Γ2] — гипотеза с номером 2;

[*A5* с. *A*=…, *B*=…, *C*=…] - схема аксиом 5 со значениями формул –составляющих, вместо которых здесь написаны многоточия;

[R8 из 14 и 7] – формула получена по допустимому правилу вывода с номером 8 из формул 14 и 7 рассматриваемого вывода;

[MP из 3 к 17]– формула получена по MP из формул 3 и 17 рассматриваемого вывода.

Пример вывода в ИВ

Докажем теорему ИВ

$A \Rightarrow A$

- принцип тождества. В записи через $\wedge$ и $\vee$ это закон исключительного третьего $\neg A \vee A$.

◄ 1.$A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

[*A1 с A+A, B=A⇒A*]

2.$(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow$

$((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$

[*A2 с A=A, B=A⇒A, C=A*]

3.$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$

[*MP из 1 и 2*]

4.$A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$

[*A1 с B=A*]

5.$A \Rightarrow A$

[MP из 3 и 4] ►

VI .Интерпретации

1.Каноническая

2.Теоретико-множественная

3.Электротехническая

1.Каноническая. Пропозициональные переменные интерпретируются как переменные пробегающие двухэлементное множество истинностных значений: и–л, t–f, 1-0, 0-1.
Логические связки – алгебраические операции на множестве истинностных значений, т.е. отображения декартовых степеней этого множества в себя. Местность связки интерпретируется как арность операции.

2. Пусть формула A ИВ от переменных $A_{1,\dots,}$ An записана только через связки $\neg,\wedge,\vee$, образующие полный набор зависимых связок. Обозначим через $A^{\epsilon}(x)$ высказывание получающееся из A заменой пропозициональной переменной A_i на формулу $x\epsilon X_i\neg$ для всех i=1,…,n.

Через X_A обозначим терм получающийся из формулы A ИВ заменой каждого из логических символов $\neg,\wedge,\vee$ на теоретико-множественные знаки $C_E,\cap,\cup$ соответственно, а каждой пропозициональной переменной A_i – на символ X_i, обозначающий подмножество выбранного заранее универсального множества E.

Тогда

$(\neg A)^{\epsilon}(x)= \neg A^{\epsilon}(x)$

$(A \wedge B)^{\epsilon}(x)= A^{\epsilon}(x) \wedge B^{\epsilon}(x)$

$(A \vee B)^{\epsilon}(x) = A^{\epsilon}(x) \vee B^{\epsilon}(x)$

$X_{\neg A}=C_E X_A$

$X_{A\wedge B}=X_A \cap_B$

$X_{A\vee B} =X_A \cup X_B$

причем

$A^{\epsilon}(x) \Leftrightarrow x \in X_{A.}$

◂ Индукция по числу шагов построения формулы A.

Для формулы A из одной пропозициональной переменной A, формула $A^{\epsilon}(x)$ есть $x \epsilon X$, что совпадает с формулой $x \epsilon X_A$, поскольку термин X_A – это просто X.

Пусть утверждение верно для формул получающихся в $\leq n$ шагов (предположение индукции). Рассмотрим формулу полученную в n+1 шаг. Пусть она например имеет вид $A\wedge B$, где A и B – формулы, которые строятся в $\leq n$ шагов; конечно в сумме число шагов их построения равно именно n, чтобы $A\wedge B$ получалась в n+1 шаг. Для этих формул по предположению индукции

$A^{\epsilon}(x) \Leftrightarrow x \epsilon X_A$ и $B^{\epsilon}(x) \Leftrightarrow x \epsilon X_B$

По определению пересечения множеств имеем

$X\epsilon X_A \cap X_B \Leftrightarrow x \epsilon X_A \wedge x \epsilon X_B \Leftrightarrow A^{\epsilon}(x) \wedge B^{\epsilon}(x) \Leftrightarrow (A \wedge B)^{\epsilon}(x)$ ▸

3. Пусть формула A ИВ от переменных $A_{1,\dots,}A_n$ записана только через связки $\neg,\wedge,\vee$, образующие полный набор зависимых связок. Сопоставим такой формуле A электрическую цепь с двумя внешними подводящими (отводящими) контактами, составленную из пакетных двухпозиционных переключателей. В одном состоянии (положении) такого переключателя ток проходит через один набор пар его контактов, а в другом – через другой. Пакетному двухпозиционному переключателю сопоставим совокупность литералов формулы A, являющихся некоторой фиксированной пропозициональной переменной А или ее отрицанием ¬ А. Формуле – литералу сопоставим цепь с одним размыкателем, возле которого напишем литерал, считая такую цепь замкнутой (проводящей) в основном “замкнутом” состоянии пакетного переключателя, если литерал есть пропозициональная буква и разомкнутой (непроводящей), если литерал есть отрицание соответствующей пропозициональной буквы; в “разомкнутом” состоянии пакетного переключателя все наоборот: цепь не проводит, если литерал есть буква и проводит, если он есть отрицание буквы

_____A · _____A_____ $\neg A$ _____$\neg A$_____

Если формулам A и B уже сопоставлены электрические цепи рассматриваемого вида; то их конъюнкции $A \wedge B$ сопоставляется цепь полученная последовательным, а дизъюнкции $A \vee B$ – параллельным соединением цепей сопоставленных формулам – составляющим:

если A ~ $\boxed{A}$——— ———

то

$A \wedge B$ ~ —$\boxed{A}$— —$\boxed{B}$— ——— t ~

$A \vee B$ ~ ——— f ~

Соответствие между формулами ИВ и электрическими цепями рассматриваемого вида биективно: цепи однозначно соответствует формула, формуле—цепь.

Проводимость цепи определяется истинностной функцией формулы, что позволяет

а) упрощать цепи (уменьшить число размыкателей) упрощая соответствующие формулы с использованием алгебраических свойств связок;

б) строить цепи с заданной функцией проводимости от положений (состояний) пакетных переключателей, записывая эту функцию в терминах связок $\neg,\wedge,\vee$. Это можно сделать как последовательными шагами, как в доказательстве выразимости всех связок через $\neg,\wedge,\vee$, так и одним махом, воспользовавшись с.д.н.ф. или с.к.н.ф.

Теорема дедукции (Эрбран Herbrand J.; 1930)

В ИВ и равным образом в ИИВ справедлива теорема дедукции.

Если какая-нибудь формула выводима из некоторого списка гипотез, то импликация, в которой посылкой служит любая из гипотез этого списка, а следствием – указанная формула, выводима из остальных гипотез рассматриваемого списка.

Иными словами это утверждение можно представить как правило вывода для секвенций (рецепт преобразования истинных секвенций в истинные)

$$\frac{\Gamma, A \to \mathrm{B}}{\Gamma \to \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}}$$

◂ Будем доказывать более сильное утверждение: Всякий вывод какой-либо формулы B из гипотез Γ, A можно преобразовать в вывод импликации $A \Rightarrow$B из гипотез Γ.

Индукция по длине вывода, т.е. по числу формул в списке $B_1,\dots, B_n$ который является выводом формулы $B=B_n$ из списка гипотез Γ, A.

Начальный шаг индукции. Рассмотрим n=1. По определению вывода тогда $B_1 =B$ есть либо аксиома, либо одна из гипотез.

Вывод импликации $A\Rightarrow B$.

Если $B=A$ – выделенная гипотеза, то используем вывод принципа тождества $A\Rightarrow A$ уже построенный ранее.

1.B [аксиома или гипотеза из Γ]

2.$B\Rightarrow(A\Rightarrow B)$ *[A_1 с $A\to B$ и $B\to A$]*

3.$A\Rightarrow B$ *[MP из 1 и 2].*

Предположение индукции. Всякий вывод из гипотез Γ, A какой-либо формулы B, который содержит не более чем n формул можно преобразовать в вывод импликации $A\Rightarrow B$ из гипотез Γ.

Индукция. Рассмотрим какой-либо вывод $B_1,\dots,$ B_{n+1} какой-либо формулы B, из гипотез Γ, A длины n+1.Преобразуем его в вывод импликации $A\Rightarrow B$ из гипотез Γ. Перебор случаев. Либо B аксиома, либо B одна из гипотез Γ, либо $B=A$, либо $B=B_{n+1}$ есть следствие двух предыдущих формул B_i и B_j = ($B_i \Rightarrow \mathrm{B}_{n+1}$) $1\le i, j \le n$ по MP. В первых трех случаях построения вывода импликации $A\Rightarrow B$ уже описано при осуществлении начального шага индукции. В последнем случае отрезки вывода, заканчивающиеся формулами B_i и B_j, - это по определению вывода – выводы этих формул имеющие длины $\le n$. Поэтому, по предположению индукции, они преобразуются в выводы импликаций $A\Rightarrow B_i$ и $(A\Rightarrow B_j)=(A\Rightarrow(B_i\Rightarrow B_{n+1})$. Если к объединению этих выводов (когда, скажем все формулы второго из них записываются после всех формул первого), которое тоже является выводом из гипотез Γ последней из формул т.е. $A\Rightarrow B_j$ добавить

i. $(A\Rightarrow(B_i\Rightarrow B_{n+1}))\Rightarrow((A\Rightarrow B_i)\Rightarrow(A\Rightarrow B_{n+1}))$ *[A2 с $B=B_i$, $C=B_{n+1}$]*

ii. $(A\Rightarrow B_i)\Rightarrow(A\Rightarrow B_{n+1})$ *[MP из i. и $A\Rightarrow(B_i\Rightarrow B_{n+1})$]*

iii. $A\Rightarrow B_{n+1}$ *[MP из ii. и $A\Rightarrow B_i$]*

получим вывод $A\Rightarrow B$ из гипотез Γ ▸ .

В ИС удобно пользоваться более общим правилом вывода, чем то которое выражает теорему дедукции в ИВ, как это сформулировано ранее, а именно -правилом

$$\frac{\Gamma, \mathrm{A} \to \mathrm{B}, \Delta}{\Gamma \to \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}, \Delta}$$

В ИС это правило постулируется, а в ИВ в его справедливости можно убедиться воспользовавшись тавтологией (полнота ИВ означает, что это теорема ИВ).

$((C\wedge A)\Rightarrow(B\vee D))\Rightarrow(C\Rightarrow((A\Rightarrow B)\vee D))$

1 1 1 00 0 0 10 1 0 0 0 0

переводом секвенций и их правил вывода в формулы ИВ, MP, сечением. Конечно то же можно применить к теореме дедукции, опираясь на тавтологию:

$((C\wedge A)\Rightarrow B)\Rightarrow(C\Rightarrow(A\Rightarrow B))$

1 1 1 1 ж 0 0 1 0 1 0 0

Вывод теоремы дедукции не опирающийся на полноту ИВ позволяет использовать ее при доказательстве полноты ИВ.

Полнота ИВ

Теорема о полноте ИВ. Формула ИВ является теоремой ИВ т., и т.т., к. она является тавтологией.

◂ Необходимость. Всякая теорема ИВ является тавтологией. Легко убедиться прямой проверкой, что все аксиомы ИВ являются тавтологиями в любой из формулировок ИВ. Легко убедиться, пользуясь таблицей истинности для импликации, что правила вывода ИВ, для определенности – МР, в применении к тавтологиям дают тавтологии: $\dfrac{\mathrm{A}, \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}}{\mathrm{B}}$ если *A* и *A⇒B* тождественны истинны, то таковой будет и *B*.

То же можно сказать и о правиле $\dfrac{\mathrm{A}, \mathrm{A}I(B/C)}{C}$.

Правило подстановки, если оно используется, тоже сохраняет тавтологию: суперпозиция постоянной функции (значения истинности тавтологии) с любыми функциями дает постоянную функцию с тем же значением. Поэтому теоремы ИВ получающиеся из аксиом ИВ (тавтологий) применением правил вывода (сохраняющих тавтологичность) необходимо являются тавтологиями.

Достаточность. (Kalmar L). Всякая формула ИВ, являющаяся тавтологией, выводима в ИВ.

Лемма. Если некоторая формула выводима из какого-нибудь списка гипотез и выводимость сохраняется после замены одной из гипотез в списке ее отрицанием, то эта формула выводится также из сокращенного на упомянутую гипотезу списка. Это утверждение можно представить в виде правила вывода для секвенций

$$\frac{\mathrm{B}, \Gamma \to \mathrm{A}; \neg\mathrm{B}, \Gamma \to \mathrm{A}}{\Gamma \to \mathrm{A}}$$

◂ Теорема дедукции применительно к секвенциям $\Gamma, B \to A$ и $\Gamma, \neg B \to A$ дает секвенции $\Gamma \to B \Rightarrow A$ и $\Gamma \to \neg B \Rightarrow A$. Если записать сначала последовательность формул – вывод импликации $B \Rightarrow A$ из списка гипотез *Г,* а затем – последовательность формул – вывод импликации $\neg B \Rightarrow A$ из списка гипотез *Г,* то нетрудно убедиться, что получится последовательность формул – вывод из списка гипотез *Г,* среди формул которого встречаются обе импликации $B \Rightarrow A$ и $\neg B \Rightarrow A$. Если среди теорем ИВ встречаются описываемые схемой тавтологий.

(∗) $(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

1 ж 0 0 0 1 1 0 0 0

то добавив к построенному выше выводу из гипотез *Г* вывод этой схемы тавтологий не привлекающий гипотез, получим ее вывод из гипотез Г в котором встречаются импликации $B \Rightarrow A$ и $\neg B \Rightarrow A$. Дописав к этому выводу формулы

$(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow A$ [следует из схемы тавтологий **(∗)** и $B \Rightarrow A$ по МР]

А [следует из предыдущей формулы и $\neg B \Rightarrow A$ по МР]

получим вывод формулы *A* из списка гипотез *Г*.

Если доказывать более простое утверждение, чем то, которое означает достаточность, а именно: можно указать конечное число тавтологий – схем аксиом обеспечивающее выводимость всех тавтологий, то можно не беспокоиться о выводе формулы **(∗)** приняв ее как аксиому. Ниже мы так и поступаем относя вывод **(∗)** и других схем тавтологий, необходимых для проводимого рассуждения, к громоздковатым и скучноватым, хоть и полезным упражнениям ▸.

Лемма. Из гипотез – литералов – составляющих элементарной конъюнкции истинной при заданном наборе значений истинности пропозициональных переменных, выводится всякая формула ИВ построения из всех или только из части этих переменных, истинная для указанного набора истинностных значений, и отрицание всякой такой формулы ложной для этого набора истинностных значений. Иными словами справедлива (истинна) секвенция

(∗∗) $A_1^{a_1}, \ldots, A_k^{a_k} \to A^{a(a_1, \ldots a_k)}$

где $A_1, \ldots, A_k$ - пропозициональные переменные из которых или из части которых строится формула А, $a_1, \ldots, a_k$ – набор истинностных значений этих переменных, $a_1, \ldots, a_k$ – соответствующее истинностное значение формулы А, и по определению

$A^0 \equiv \neg A, A^1 \equiv A$ т.ч. $A_k^{a_k} = 1 \Leftrightarrow |A_k| = a_k$.

◂ Индукция по числу связок в формуле *A*.

Начальный шаг индукции. Если связок нет вообще *A* = А и требуемое тривиально:

$\mathrm{A}^a \to \mathrm{A}^a$

– вывод A^a из гипотезы A^a состоит из единственной формулы–гипотезы A^a. Не нарушая выводимость список гипотез можно расширить литералами построенными из других переменных.

Предположение индукции. Для любой формулы *A* содержащей не более чем n связок истинна секвенция (∗∗).

Индукция. Рассмотрим формулу A содержащую n+1 связку. Для простоты будем рассматривать формулировку ИВ с основными связками $\neg$ и $\Rightarrow$. Тогда либо а) $A=\neg B$, либо б) $A=(B\Rightarrow C)$, где формулы B и C содержат не более чем n связок.

а) Если a=1, то b=0 и по предположению индукции $A_1^{a_1},\ldots,A_k^{a_k}\to\neg B=A$.

Если a=0, то b=1 и по предположению индукции $A_1^{a_1},\ldots,A_k^{a_k}\to B$. Т.к $\neg A=\neg\neg B$

добавим к аксиомам схему тавтологий $A\Rightarrow\neg\neg A$ (при использовании конкретного списка аксиом надо было бы доказать, что это схема теорем). Вывод B становится выводом $A^a=\neg A$ добавлением к нему "аксиомы" $B\Rightarrow\neg\neg B$ и формулы $\neg\neg B=A^a$ следующей из "аксиомы" и B по МР.

б) $A=B\Rightarrow C$. Если a=1 то возможны b=c=0, b=c=1 и b=0, c=1.

Нужны "аксиомы"

$\neg B\Rightarrow(\neg C\Rightarrow(B\Rightarrow C))$

1 0 0 1 0 0 ж 0 0

$B\Rightarrow(C\Rightarrow(B\Rightarrow C))$

1 0 1 0 ж 0 0.

$\neg B\Rightarrow(C\Rightarrow(B\Rightarrow C))$

1 0 0 1 0 ж 0 0

Если a=0, то b=1 и c=0. Нужна "аксиома"

$B\Rightarrow(\neg C\Rightarrow\neg(B\Rightarrow C))$.

1 0 1 0 0 0 1 ж 0 ▸

Осталось вывести в рассматриваемой формулировке ИВ использованные в рассуждении "аксиомы". Вывод будет основан на следующем вспомогательном утверждении.

Имеют место секвенции

L1. $A\Rightarrow B, B\Rightarrow C\to A\Rightarrow C$;

L2. $A\Rightarrow(B\Rightarrow C), B\to A\Rightarrow C$.

◂ L1. Докажем секвенцию A, $A\Rightarrow B$, $B\Rightarrow C\to C$ из которой согласно теореме дедукции немедленно следует требуемая секвенция. Имеем

1. A [гипотеза]
2. $A\Rightarrow B$ [гипотеза]
3. B [МР из 1 и 2]
4. $B\Rightarrow C$ [гипотеза]
5. C [МР из 3 и 4].

L2. Докажем секвенцию A,$A\Rightarrow(B\Rightarrow C), B\to C$ из которой согласно теореме дедукции немедленно следует требуемая секвенция. Имеем.

1. A [гипотеза]
2. $A\Rightarrow(B\Rightarrow C$ [гипотеза]
3. $B\Rightarrow C$ [МР из 1 и 2]
4. B [гипотеза]
5. C [МР из 4 и 3] ▸

T1. $\to\neg\neg A\Rightarrow A$

◂ 1.$(\neg A\Rightarrow\neg\neg A)\Rightarrow((\neg A\Rightarrow\neg A)\Rightarrow A$ [$A3$ с $B\to\neg A$]

2.$\neg A\Rightarrow\neg A$ [принцип тождества с $A\to\neg A$]

3.$(\neg A\Rightarrow\neg\neg A)\Rightarrow A$ [1 и 2 согласно L2]

4.$\neg\neg A\Rightarrow(\neg A\Rightarrow\neg\neg A)$ [A1 с $A\to\neg\neg A, B\to\neg A$]

5.$\neg\neg A\Rightarrow A$ [4 и 3 согласно L1] ▸

T2. $\to A\Rightarrow\neg\neg$A

▸ 1.$(\neg\neg\neg A\Rightarrow\neg A)\Rightarrow((\neg\neg\neg A\Rightarrow A)\Rightarrow\neg\neg A)$ [A3 с $A\to\neg\neg A, B\to A$]

2.$\neg\neg\neg A\Rightarrow\neg A$ [T1 с $A\to\neg A$]

3.$(\neg\neg\neg A\Rightarrow A)$ [МР из 2 и 1]

4.$A\Rightarrow(\neg\neg\neg A\Rightarrow A)$ $A1$ с $B\rightarrow\neg\neg\neg A$]

5.$A\Rightarrow\neg\neg A$ [4 и 3 согласно L1] ▸

Секвенция $A,\Gamma\rightarrow A$ имеет место поскольку вывод A из гипотез A,Γ содержит только гипотезу A.
Т3.$\rightarrow A\Rightarrow(B\Rightarrow(A\Rightarrow B)$ получается из очевидной секвенции $A,B,A\rightarrow B$ тройным применением теоремы дедукции.
Т4..$\rightarrow\neg A\Rightarrow(B\Rightarrow(A\Rightarrow B))$ получается из очевидной секвенции $\neg A,B,A\rightarrow B$ тройным применением теоремы дедукции.
Т5.$\rightarrow(\neg A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow A)$

◂ Строим вывод секвенции $\neg A\Rightarrow\neg B,B\rightarrow A$ из которой требуемое получается двойным применением теоремы дедукции.

1.$\neg A\Rightarrow\neg B$	[гіпотеза]
2.$(\neg A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow((\neg A\Rightarrow B)\Rightarrow A)$	[A3]
3.$(\neg A\Rightarrow B)\Rightarrow A$	[MP из 1 и 2]
4.$B\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B)$	[A1 с $A\rightarrow B,B\rightarrow\neg A$]
5.B	[гипотеза]
6.$\neg A\Rightarrow B$	[MP из 5 и 4]
7.A	[MP из 6 и 3] ▸

Т6. $\rightarrow(A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A)$

◂ Выводим секвенцию $A\Rightarrow B\rightarrow\neg B\Rightarrow\neg A$ из которой требуемое получается по теореме дедукции.

1.$A\Rightarrow B$	[гипотеза]
2.$\neg\neg A\Rightarrow A$	[T1]
3.$\neg\neg A\Rightarrow B$	[2 и 1 согласно L1]
4.$B\Rightarrow\neg\neg B$	[T2 с $A\rightarrow B$]
5.$\neg\neg A\Rightarrow\neg\neg B$	[3 и 4 согласно L1]
6.$(\neg\neg A\Rightarrow\neg\neg B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A)$	[T5 с $A\rightarrow\neg A,B\rightarrow\neg B$]
7.$\neg B\Rightarrow\neg A$	[MP из 5 и 6] ▸

Т7. $\rightarrow A\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg(A\Rightarrow B))$.

◂ Начинаем с записи MP в виде секвенции $A,A\Rightarrow B\rightarrow B$. Дважды применяя теорему дедукции имеем $\rightarrow A\Rightarrow((A\Rightarrow B)\Rightarrow B)$. Но $\rightarrow$ $((A\Rightarrow B)\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg(A\Rightarrow B))$ [T6 с $A\rightarrow A\Rightarrow B$]. Согласно L1 отсюда имеем требуемое ▸

Т8. $\rightarrow\neg A\Rightarrow(\neg B\Rightarrow(A\Rightarrow B))$

◂ Выводим секвенцию $\neg A,\neg B\rightarrow A\Rightarrow B$ отсюда требуемое получается двойным применением теоремы дедукции.

1.$\neg A$	[гипотеза]
2.$(\neg B\Rightarrow\neg A)\Rightarrow(A\Rightarrow B)$	[T5 с $A\rightarrow B,B\rightarrow A$]
3.$\neg B\Rightarrow(A\Rightarrow B)$	[2 и 1 согласно L2]
4.$\neg B$	[гипотеза]
5.$A\Rightarrow B$	[MP из 4 и 3] ▸

Математическая логика. Mathematical Logic
Математична логіка

В процессе познания в сознании человека формируются образы изучаемых объектов и явлений, классифицируя которые по тем или иным признакам, он концентрирует имеющиеся сведения в абстрактных понятиях. Это позволяет получать утраченную или существенно новую детальную информацию о том, что изучается, путем рассуждений, которые проявляются как определенные языковые манипуляции.

Логика – это анализ методов рассуждения, призванный выяснить как следует рассуждать, чтобы делать правильные выводы. Математическая логика – это логика, использующая математические методы и направленная на наиболее удобные для анализа математические рассуждения. Чтобы сделать объект исследования более обозримым, а само исследование более эффективным, обычно, хотя бы для начала, в математической логике сосредотачиваются на анализе рассуждений в теории множеств, используя для этого тот или иной надежно установленный и достаточно ясно сформулированный фрагмент этой теории. Задача – минимум – создание непротиворечивой аксиоматической теории множеств, адекватной существующим полуформальным представлением о бесконечных множествах – идеальных элементах, введение которых существенно упрощает математические рассуждения с непосредственными практическими приложениями.

Математическая логика выделяет в рассуждении три аспекта:

1) формальный или синтаксический, изучаемый посредством создания идеализированного формального языка или, что то же самое, - аксиоматической теории;

2) семантический или содержательный, который исследуется путем теоретико-множественных интерпретаций формального языка и основанного на этом понятии истины;

3) алгоритмический или рецептурный, изучаемый путем использования того или иного представительного класса словарных алгоритмов, напр., основанного на понятии машины Тьюринга (Turing A)

<u>Формальный язык (аксиоматическая теория) и метаязык</u>

Formal Language (axiomatic theory) and metalanguage

Формальна мова (аксіоматична теорія) та метамова.

Создание формального языка необходимо, чтобы избавиться от смысловых и структурных неопределенностей, характерных для обычного языка и присущих ему вследствие его универсальности, связанной с этим избыточности выразительных средств, проявляющейся, в частности, в существовании большого числа синонимов со слабо различающимся смыслом, важности контекста, интонации, жестикуляции, намеков. Эта задача решается благодаря узконаправленности формального языка на теорию множеств.

<u>Формальный язык (теория</u>) задан, если указаны его алфавит (совокупность нерасчленимых символов или знаков), правила построения выражений (конечных последовательностей символов, допускающих стандартную содержательную интерпретацию), совокупность аксиом (содержательно – истин, принимаемых как таковые без доказательства) и правила вывода (рецепты переработки одних истин в другие). Все это, конечно, есть и в обычном языке, но в формальном доведены до абсолюта четность формулировок и строгость соблюдения правил.

Формальный язык может развиваться безотносительно к какой-либо содержательной интерпретации и связанного с ней понятия истины. Конечно, только в весьма рафинированных исследованиях можно полностью исключить содержательный аспект.

Важно, что обычно исследователь знает или, скорее, умеет больше, чем в состоянии формализовать в данный момент. Поэтому формальная теория – это способ определенно высказаться, когда это возможно, об определенном завершенном фрагменте содержательной теории, выделить в последней бесспорное, поставить и на определенном уровне решить некоторые проблемы.

Мы вовсе не обязаны думать только формально. Более того, плодотворность качественных, неформальных, творческих рассуждений, в противовес чисто формальным, доказана извечной практикой, как общества в целом, так и каждого отдельного индивида. Но назначение формальных рассуждений, в общем, иное – служить творческому процессу опосредовано, путем создания надежной базы и упорядочения достигнутого. Образно говоря, в знаниях формальная логика играет роль скелета, который растет и развивается вместе с организмом и дает возможность нормально функционировать живой ткани.

<u>Метаязык -</u> это содержательный фрагмент обычного языка, которому можно придать особую ясность, благодаря его направленности на формальный. Часть метаязыка может быть формализована и изучаться вместе с формальным языком-объектом, как независимо, так и как составляющая надлежаще понимаемого языка-объекта.

В учебнике английского языка, написанном по-русски, английский- это язык-объект, а русский – метаязык. В учебнике русского языка, написанном по-русски, обе роли играет русский язык.

Метаязык позволяет отделить изучаемое от средств исследования, проводя различие между изучаемым формальным языком и языком исследователя, снимает ограничение снизу на уровень сложности языка-объекта, позволяя рассматривать языки, которые неспособны описывать сами себя, отодвигает проблемы, которые возникают при применении теории к самой себе, разделяя вещи и имена вещей в языковых исследованиях.

Промежуточное положение метаязыка в языковой триаде между обычным и формальным, отражено в его названии: греч. μετα – после, через, между.

<u>Знаки, знакосочетания, алфавит.</u>

Signs, Strings of Symbols, Alphabet

Знаки, знакосполучення, алфавіт

Нерасчленимая единица (атом) формального языка – это знак или символ. Знаки не обязательно должны реализовываться как материальные объекты (как при письме), роль знаков могут играть состояния материальных объектов (состояния ячеек памяти вычислительной машины). Не исключено, что именно атомарная структура языка, обнаруженная отчетливо с возникновением письменности, навеяла древним атомистам идею атома (Мок Сидонский, XII в до н.э., древнефиникийский философ, территория нынешних Сирии, Ливана).

Пренебрегая ограниченностью наших материальных, временных, пространственных и энергетических возможностей, а также физическими законами, накладывающими очевидные ограничения, считают, что каждый знак может воспроизводиться ("печататься") в произвольной конечной последовательности с другими знаками неограниченное число раз в виде, позволяющем его однозначную идентификацию, использованного в записи, как такового. То же относится и ко всей последовательности знаков в целом. При необходимости любой знак (или знаки) в любой последовательности знаков может быть уничтожен ("стерт") без какого-либо заметного влияния на определяющие черты других знаков, однако сам по себе, без целенаправленного воздействия на него, сохраняется вечно. Знаки и последовательности знаков, не меняя своей сути как таковых, выдерживают неограниченное число однозначных "прочтений" (идентификаций).

Совокупность всех различных символов (знаков) формального языка – это его алфавит. Число символов в алфавите потенциально не ограничено, т.е. после использования любого конечного числа символов, всегда можно ввести в употребление еще одни, а значит и любое конечное число, символов отличных от уже использованных и друг от друга.

Удобно представлять алфавит как объединение множеств, которые состоят из символов, играющих в чем-то близкие роли. Это позволяет легко выделять части формального языка, которые представляют самостоятельный интерес, и постепенно наращивать объем создаваемого или изучаемого формального языка.

Словом или знакосочетанием в заданном алфавите называют произвольную конечную, возможно пустую, последовательность символов этого алфавита. Никаких других составных лингвистических объектов в формальном языке обычно не предполагают. Отсутствие в формальном языке многоэтажных выражений, вытягиваемых в строчки в надлежащих, возможно не самых удобных или наглядных обозначениях, упрощает анализ, но не ограничивает выразительных возможностей языка. Конечно многоэтажные выражения сами могут быть объектом формального исследования: скелетные формулы (диаграммы), деревья вывода и т.п. Текст из многих слов, разделенных пробелами, можно рассматривать как одно слово, воспринимая пробел как символ – разделитель слов, построенных из "обычных" символов, т.е. без пробелов.

Знакосочетания обладают всеми упомянутыми выше свойствами знаков (знакосочетаний из одного символа). Это позволяет вводить сокращения, обозначая некоторые знакосочетания более короткими или специальными символами, и исключать некоторые символы, заменяя их подходящими знакосочетаниями из других знаков. В рассуждениях которые не направлены на рассмотрение знакосочетаний можно отождествлять соответственные при таких заменах объекты.

Число символов в слове (знакосочетании) называется его длиной. Длина слова –неотрицательное целое число.

****

Операции над словами
Operations on words
Операції над словами.

Будем обозначать заглавными буквами P, Q, R, … из конца латинского алфавита знакосочетания в некотором фиксированном алфавите, а символы этого алфавита – строчными буквами a, б, c, … из начала латинского алфавита. Здесь и ниже слова "будем обозначать …посредством…", где … обозначает…" и т.п. применительно к знакосочетаниям формального языка означают обращения к метаязыку. Введенные таким образом символы метаязыка могут использоваться вперемешку и знакосочетаниями формального языка, которые в подобных случаях использоваться автономно, т.е. как названия для самих себя, принадлежащие, конечно, метаязыку.

Применительно к обозначениям знакосочетаний формального языка в метаязыке будем использовать как символ метаязыка знак равенства =, чтобы выразить утверждение о тождественном совпадении знакосочетаний формального языка, чьи названия в метаязыке соединены этим знаком.

Для двух слов P и Q будем обозначать PQ соединения (произведение, композицию, -- этих слов, т.е. слово получающееся, если к одной конечной последовательности символов – слову P приписать другую конечную последовательность символов – слово Q, так что возникает новое слово, длина которого есть сумма длин перемноженных слов. Используя обычным образом скобки, чтобы указать последовательность построения композиции более чем двух слов, имеем---умножения слов

$$(P_1P_2)\ P_3 = P_1(P_2P_3),$$

что позволяет записывать композицию более чем двух слов без скобок, без потери однозначности результата, ибо всякая последовательность соединения составляющих слов в одно без изменения их порядка приводит к одному и тому же результату. В случае трех слов имеем два варианта построения композиции $(P_1P_2)P_3$ и P_1 (P_2P_3); сначала строится композиция знакосочетаний заключенных в скобки, а затем – композиция полученного таким образом знакосочетания со знакосочетанием не вошедшим в скобки; в любом случае имеем один и тот же результат $P_1P_2P_3$.

Умножение слов обладает единицей, роль которой играет пустое слово, Λ т.е. пустая последовательность символов формального языка:

$$P\Lambda=\Lambda\ P = P$$

для любого слова P.

Конечно коммутативность для умножения слов не имеет места: в общем случае

$$PQ \neq QP,$$

хотя, когда одно из слов пустое или представляют собой произведение нескольких экземпляров другого, и только в этих случаях, произведение слов коммутативно.

Слово Q входит в слово P и называется подсловом слова P, называемого в таком случае подсловом для слова Q, если существуют такие слова U и V, возможно пустые,что P=VQU.Собственно подслово – это подслово, которое не пустое и не совпадает со всем словом. Может быть несколько разных вхождений подслова Q в слово P (с разными V и U), причем в общем случае некоторые из вхождений могут перекрываться (часть символоа из одного вхождения может принадлежать к другому).

Результатом подстановки слова R вместо заданного вхождения слова Q в слово P = VQU называют слово URV. В терминах этого действия могут быть описаны все словарные алгоритмы (теория марковских, А.А.Марков,1954, алгоритмов и тезис Черга, A.Church 19)

Результат одновременной подстановки слова Q вместо всех вхождений символа, a в слово P обозначают P(a ⁄ Q).Если

$$P=U_o\ a\ U_1\ a\ldots aU_n,$$

где $U_o,\ldots Un$ – подслова не содержащие вхождений символа а, то

$$P(a/Q) = U_oQU_1Q\ldots QU_n.$$

Результат одновременной подстановки слов $Q_1,\ldots,Q_k$ вместо разных символов $a_1\ldots,\ a_к$, соответственно, в слово P обозначают $P(a_{1/}Q_1,\ldots a_k/Q_k)$.Подчеркнем, что результат одновременной подстановки вместо нескольких символов не совпадает в общем случае с результатом последовательных подстановок вместо этих символов если они входят и в подставляемые слова.

Выражения формального языка
Expressions of Formal Laguage
Вирази формальної мови

Выражение формального языка – это знакосочетание (слово) этого языка, допускающее каноническую содержательную интерпретацию.Соответственно, канонической содержательной интерпретации некое выражение формального языка является либо термом, либо формулой. Term [tэ:m] formula[“fxmju(э].При содержательной интерпретации терм – это выражение служащее индивидуальным именем (названием) некоторого объекта или общим именем (названием) объектов из некоторой совокупности. При содержательной интерпретации формула – это выражения служащее утверждением с взаимном свойстве объектов, вполне определяющих или произвольно выбираемых из некоторых совокупностей.

Множество выражений языка-объекта определяется индуктивно:

а) постулируются какие символы алфавита являются термами или формулами; эти символы называютя буквами;

б) постулируется как используем структурные и вспомогательные символы можно слова –выражения соединить в более сложные слова-выражения языка;

в) постулируется, что никакие другие слова, кроме тех, что могут быть получены по указанным правилам, выражениями не являются.

Правила построения выражений формулируются так, чтобы существовала эффективная разрешающая процедура (алгоритм) позволяющая за конечное число шагов по по любому заданному слову выяснить принадлежит ли оно языку-объекту, а также является ли оно выражением и, если да, то каким именно – термом или формулой.

Длиной выражения называют число использованных для его построения структурных символов. Длина выражения – неотрицательное целое число. Разобъем процедуру построения составного выражения на шаги, каждый из которых состоит в применении одного структурного символа и приводит к появлению нового выражения, сконструированного из выражений построенных на предыдущих шагах или/и простейших выражений символов. Тогда длина выражения – это число шагов его индуктивного построения.

Структурный знак языка содержательно указывает тип связи содержания (смысла) построенного с его помощью составного выражения с содержанием (смыслом) составляющих.

Следует отметить, что иногда, в определенной системе обозначений, структурный знак может фигурировать в записи неявно, как, скажем, знак умножения в записи $xyz\equiv x\cdot y\cdot z$, или квантор общности в формуле (x) $P(x) \equiv \forall_x P(x)$.Однако, соответствующие шаги индуктивного построения выражений конечно сохраняются и в таких “экономных” обозначениях.

Вспомогательные знаки (знаки пунктуации) призваны облегчить написание и прочтение составных выражений, а также однозначность чтения результата многошаговой процедуры при фиксированной форме записи результата одного шага; вспомогательные знаки также облегчают поиск и устранение ошибок. В надлежаще выбранной системе обозначений вспомогательные знаки можно полностью исключить из употребления, однако обычно пользоваться такими "экономными" обозначениями неудобно. Скобки необходимые при обычной записи арифметических действий, когда знак бинарной операции стоит между выражениями к которым она применяется, $(x+y)\cdot z \neq x \div (y \cdot z)$, исчезают в бескобочных обозначениях, когда знак операции стоит перед (или после) выражений к которым она применяется, $\cdot + xyz \neq + x\cdot y\cdot z$ или $xy + z \neq xyz \cdot +$.

Структурные знаки формального языка
Structural signs of Formal Language
Структурні знаки формальної мови

Теория первого порядка – это формальная теория, в которой нет классификатора, нет признаков и функций для предикатных функциональных символов, где кванторы не применяются к предикатным и функциональным символам. Теория множеств может быть построена как теория ZFC первого порядка. Ограничения рассмотрения теориями первого порядка призвано упростить анализ, т.е. не является принципиальным. Так формулировка BNG теории множеств использующая классификатор обладает очевидными достоинствами. В метаязыковых записях естественен выход за рамки символики теории первого порядка, в честности, - применение кванторов к функциональным предметным символам.

Обычно в языке-объекте обходятся в качестве вспомогательных символов скобками (,) и запятой,.В метаязыковых записях запас вспомогательных символов может быть существенно шире: разные виды скобок [,] {, }, <, >, … , точка с запятой;, многоточие … и т. д.

В содержательных записях, кроме знаков языка-объекта, используемых автономно, широко используются

Знаки начала ◂ и конца ▸ доказательства (первый можно читать как "доказательство", а второй – что и требовалось доказать);

Знак тождества ≡, означающий что соединенных им выражения рассматриваются как обозначения одного и того же.

Знак равенства по определению : = или = : , означающий что из соединенных им выражений, стоящее со сторон двоеточия по определению равно другому;

Разные скобки, черточки дробей и линии диаграмм, стрелки и т.д. и т.п.

Переменные и константы (постоянные)
Uariables and constants
Зминні та сталі (константи)

Независимая переменная или аргумент – это символ алфавита, служащий общим названием (именем) объектов из некоторой совокупности – совокупности, области или множества значений этой переменной. Переменная полностью характеризуется совокупностью ее значений. Иногда говорят, что переменная пробегает область своих значений. Придать переменной некоторое значение из области ее значений – значит указать название отдельного объекта из этой области. С помощью активного, а не пассивного залога то же самое выражают, говоря, что переменная принимает указанное значение. Говоря о значениях переменной обычно отождествляют объект и его название.Равенство (совпадение) переменных означает совпадение их областей значений и совпадение принимаемых значений: всякий раз когда одна из двух равных переменных принимает какое-либо значение, вторая принимает то же самое значение.

Постоянная (константа) – это символ алфавита, служащий индивидуальным названием (именем, обозначением) некоторого объекта. Константу можно рассматривать как переменную, область значений которой состоит из одного-единственного объекта. Равенство (совпадение) констант означает совпадение обозначенных ими объектов.

Переменные с общей областью значений называются переменными одного типа или однотипными переменными.

Лингвистической называется переменная, область значений которой составляет лингвистические объекты: символы алфавита, знакосочетания (слова), выражения, формулы, термы и т.д. Предметной называется переменная область значений которой составляют нелингвистические объекты, объекты внешнего мира. Деление переменных и констант на предметные и лингвистические условно, как и деление объектов на лингвистические и объекты внешнего мира.

Дополнение 3

Теорема про граничный переход в равенстве.

Если две функции совпадают на множестве, которое имеет точку сгущения, и имеют пределы в указанной точке, то эти пределы тоже совпадают.
Если две последовательности, которые имеют пределы, содержат одну и ту же подпоследовательность, то их пределы совпадают.

Теорема про граничный переход в неравенстве.
Если одна из двух функций меньше, строго или нет, другой на множестве, которое имеет точку сгущения, и обе функции имеют пределы в указанной точке, то предел первой функции также меньше, вообще говоря, нестрого, предела другой.

Если в одной из двух последовательностей, которые имеют пределы, содержится подпоследовательность, которая меньше, строго или нет, какой-либо подпоследовательности, другой последовательности, то предел первой из этих последовательностей меньше, вообще говоря, нестрого, предела второй.

Теорема про сравнение функций по сравнению пределов.
Если две функции имеют пределы в некоторой точке и предел первой из них строго меньше предела второй, то существует проколотая окрестность указанной точки в которой на пересечении областей определения взятых функций, первая строго меньше второй.

Если две последовательности имеют пределы, из которых первая строго меньше второй, то, начиная с некоторого номера, первая последовательность меньше другой.

Если значение одной из двух непрерывных в некоторой точке функций меньше значения другой, то существует окрестность этой точки, в которой первая функция меньше другой в общих точках областей определения.

Теорема про граничный переход в двойном неравенстве (принцип двухстороннего ограничения, теорема про двух милиционеров).
Если в проколотой окрестности точки между двумя функциями, которые имеют общий предел в указанной точке, содержится третья функция, то она имеет тот же самый предел в рассматриваемой точке.

Если из трех последовательностей две имеют общий предел, а третья, хотя бы начиная с некоторого номера, лежит между ними, то она имеет тот же самый предел.

Правило Лопиталя (с отношением производных).
Если функции f и g имеют производные в точке a, где они обе обращаются в нуль, $f(a)=g(a)=0$, то предел их отношения в точке, которая рассматривается, равна отношению производных в этой точке:
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} \Leftarrow \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$, если последнее не представляет собой неопределенность, то есть производные рассматриваемых функций, в указанной точке не обращаются одновременно ни в нуль, ни в бесконечность.
В данном случае для адекватного отображения соотношения между искомой границей и отношением производных использован символ «$\Leftarrow$», который следует читать как: «

равно, если следующее выражение имеет смысл». Это удобно в прямых вычислениях, так как позволяет точно передать смысл того, что делается, не беспокоясь заранее про применимость правила, которое, собственно, и определяется следующей выкладкой. В случае неприменимости правила, соответствующая доля вычислений выделяется из текста, как обычно, волнистыми вертикальными линиями.

Правило Лопиталя (с пределом отношения производных).

Если функции f и g дифференцируемы в (односторонней) проколотой окрестности $\hat{U}_a^{\pm}$ точки a расширенной $-\infty$ и $+\infty$ числовой прямой, где производная второй из них не обращается в нуль, $g'(x) \neq 0\,\forall x \in \hat{U}_a^{\pm}$, и существует одноименный односторонний предел отношений их производных в точке a, возможно равный $-\infty$ или $+\infty$, тогда существует и равен этому пределу предел отношения функций, то есть:

$$\lim_{x\to a\pm 0}\frac{f(x)}{g(x)} \Leftarrow \lim_{x\to a\pm 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\left(\Leftarrow \lim_{x\to a\pm 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \Leftarrow \ldots \Leftarrow \lim_{x\to a\pm 0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\right),$$

при условии, что одноименные односторонние пределы обеих функций в точке a нулевые:

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = \lim_{x\to a\pm 0} g(x) = 0,$$

или граница знаменателя в этой точке бесконечна:

$$\lim_{x\to a\pm 0} g(x) = \infty.$$

Правило Лопиталя с пределом отношения производных можно использовать повторно, уже для нахождения предела отношения производных, которые отображают равенства, указанные в скобках.

Символы асимптотического сравнения.

Будем рассматривать символы (функции) $f, g, h, \ldots$, которые зависят от одной переменной x, области определения которых имеют точку сгущения a и одинаковые в некоторой проколотой окрестности этой точки. По определению

1) $f = o(g)$ в точке a $\Leftrightarrow$ $\exists h$ $f = hg$ и $\lim\limits_{x\to a} h = 0$.
2) $f = O(g)$ в точке a $\Leftrightarrow$ $\exists h$ $f = hg$ и h ограничена в точке a, то есть $\exists U_a, M$ $\forall x \in U_a \cap D(h)$ $|h(x)| \leq M < +\infty$
3) $f \sim g$ в точке a $\Leftrightarrow$ $\exists h$ $f = hg$ и $\lim\limits_{x\to a} h = 1$.
4) $f \succ\!\!\prec g$ в точке a $\Leftrightarrow$ $\exists h$ $f = hg$ и h – ограничена и отделена от нуля в точке a, то есть $\exists U_a, m, M$ $\forall x \in U_a \cap D(h)\; 0 < m \leq |h(x)| \leq M < +\infty$

Иногда вместо $f \succ\!\!\prec g$ пишут $f = O^*(g)$, а вместо «в точке a» – при $x \to a$ («при x стремящемся к a»).

Варианты чтения:

$f = o(g)$ – f равна «о» малому от g; f имеет более высокий порядок малости, чем g; g имеет более высокий порядок роста, чем f; f пренебрежима относительно g.

$f = O(g)$ – f равна «О» большому от g; f ограничена по сравнению с g; f подчинена g.

$f \sim g$ – f эквивалентна g; f и g эквивалентны.

$f \succ\!\!\prec g$ – f и g – величины одного порядка; f и g – ограничены друг относительно друга; эти же варианты прочтения имеет также запись $f = O^*(g)$ – f равна «О» большому со звездочкой от g.

Соответственно данному определению, запись «$f = o(1)$» значит, что f является бесконечно малой, «$f = O(1)$» – что f является ограниченной величиной, «$f \succ\!\!\prec 1$» – что f

является ограниченной и отделенной от нуля, «$f \sim 1$» – что *f* стремится к единице при $x \to a$.
Эквивалентность функции в некоторой постоянной точке *a* иногда выражают словами, что функция финально постоянна в точке *a*. Другими словами функция финально постоянна в точке *a*, если существует такое число *k*, что $f \sim k$ при $x \to a$.Соответственно, равенство «*f* = *O*(*g*), когда $x \to a$», читают «*f* финально ограничена в точке *a*», а соотношение «$f \asymp 1$ при $x \to a$» – «*f* финально ограничена и отделена от нуля в точке *a*».
Соотношение разнопорядковости (символ «о» малое) величины, относительной ограниченности (символ «О» большое) и однопорядковости (символ «O^*» большое со звездочкой) нечувствительны умножению сравниваемых величин на ненулевые постоянные, то есть если $k_1, k_2 \neq 0$, то:

$$f = o(g) \;\Leftrightarrow\; k_1 f = o(k_2 g);$$
$$f = O(g) \;\Leftrightarrow\; k_1 f = O(k_2 g);$$
$$f \asymp g \;\Leftrightarrow\; k_1 f \asymp k_2 g,$$

где соотношения в обеих частях эквивалентностей пишутся в одной и той же точке.
В частности, эти соотношения не чувствительны к изменению знака одной или обеих сравниваемых величин:

$$f = o(g) \Leftrightarrow f = -o(g) \Leftrightarrow f = o(-g) \Leftrightarrow f = -o(-g);$$
$$f = O(g) \Leftrightarrow f = -O(g) \Leftrightarrow f = O(-g) \Leftrightarrow f = -O(-g);$$
$$f \asymp g \Leftrightarrow f \asymp -g \Leftrightarrow -f \asymp g \Leftrightarrow -f \asymp -g,$$

где в каждой цепочке эквивалентностей все соотношения написаны для одной и той же точки.
Подчеркнем, что эквивалентность величин, в общем, теряется при умножении на числа, не равные единице, в частности, - при изменении знака при одной из величин, которые сравниваются. Однако:

$$f \sim g \Leftrightarrow -f \sim -g,$$

в точке, которая рассматривается.
Например, $x = o(x^2)$, при $x \to +\infty$; $x^2 = o(x)$, при $x \to 0$;
$\sin x = o(x \sin x)$ в тточк ∞; $\sin x \sim x$, при $x \to 0$;
$\sin\dfrac{1}{x} \asymp (2 + \operatorname{tg} x)\sin\dfrac{1}{x}$ в точке 0; $x = O(x \sin x)$, при $x \to \infty$;
$8^{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}$ и $2^{\frac{1}{x}}$ непосредственно не сравниваются в точке 0, так как их частное не имеет там предела, неограниченна и не отделена от нуля.
Отношение *f* = *o*(*g*) и *f* = *O*(*g*) устанавливают на множестве величин, области которых совпадают в некоторой окрестности точки *a* и имеют точкой сгущения эту точку, порядок, подобно тому, как соотношения «меньше» (<) и «меньше или равно» ($\leq$) устанавливают порядок на множестве действительных чисел.
Отношение $f \asymp g$ и $f \sim g$ являются отношениями эквивалентности (равности по определению). Однако, в отличие от чисел, которые всегда можно сравнить, не всякие величины можно непосредственно связать с одним из приведенных здесь отношений.
Вышеупомянутые свойства этих соотношений проявляются в указанных ниже свойствах транзитивности, симметричности, рефлексивности и антисимметричности. А именно, все указанные отношения транзитивны, например

$$f = o(g) \text{ и } g = o(h) \Rightarrow f = o(h).$$

Отношения $\sim, O, \asymp$ рефлексивны.
Отношения $\sim$ и $\asymp$ симметричны, например, $f \asymp g \Rightarrow g \asymp f$.
Антисимметричность «О» большого это эквивалентность $f \asymp g \Leftrightarrow f = O(g) \wedge g = O(f)$.

Величина, которая арифметически превращена в ограниченную, отделена от нуля и наоборот.
Величина, которая имеет конечный предел, когда x стремится к a, ограничена в этой точке, но не наоборот.
Леммы о бесконечно малых, свойствах ограниченных функций относительно сложения и умножения, и теоремы про предел сложной функции дают:

$$o(f)\pm o(f)=o(f) \qquad o(f)\cdot o(g)=o(fg) \qquad o(o(f))=o(f)$$
$$O(f)\pm O(f)=O(f) \qquad O(f)\cdot O(g)=O(fg) \qquad O(O(f))=O(f)$$
$$o(f)\pm O(f)=O(f) \qquad o(f)\cdot O(g)=o(fg) \qquad o(O(f))=O(o(f))=o(f),$$

то есть в сумме сравненных с одной величиной имеем наибольшее «о», которое встречается среди слагаемых; в произведении получаем наименьшее «о», которое встречается среди сомножителей от произведения всех величин, с которыми делается сравнение в соотношениях; в суперпозиции нескольких «о» имеем наименьшее «о», которое встречается среди суперпонируемых.
Отметим, что, например равенство $o(o(f))=o(f)$ - это уже ранее рассмотренное свойство транзитивности «о» малого.
Разность двух величин имеет более высокий порядок малости, чем каждая из них тогда и только тогда, когда они эквивалентны в точке рассмотрения.
Т.е. $f-g=o(f)$ и $f-g=o(g)$ в точке $a \iff f\sim g$ в точке a.
Любая величина, которая эквивалентна, называется ее асимптотой. Часто интересуются асимптотами какого-нибудь специального вида, выплывающего из условий задачи, или из уже полученных значений: степенными, полиномиальными, логарифмическими и другими.
При вычислении предела произведения или частного, можно заменять сомножители, числители и знаменатели, эквивалентными величинами не влияя на существование и величину предела. Для сумм и разностей это не так.
У плюс бесконечности показательная функция с основанием больше (меньше) единицы возрастает (убывает) быстрее какой либо степени, а логарифмическая – медленнее. В нуле логарифмическая функция возрастает по модулю медленнее какой-либо отрицательной степени.

$x^{\mu}=o(a^{x})$ и $\log_a x=o(x^{\mu})$, при $x\to+\infty$ для $\mu>1,\ a>1$;

$\log_a x=o(x^{-\mu})$, при $x\to+0$ для $\mu>0$.

Если среди функций заданного типа найдена эквивалентная, то говорят, что в последней выделена главная часть или ведущий член указанного типа в рассматриваемой точке. Название выплывает из приведения соотношения между функцией f и ее главной частью g в виде:
$f = g + o(g)$ в точке a.
Конечно, ведущий член наперед заданной функции может и не существовать.
Функция f имеет порядок ρ (ρ∈R) относительно функции g в точке a, если $f \asymp g^{\rho}$ в точке a. Не каждую функцию можно охарактеризовать порядком относительно наперед заданной функции.

Например: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\lim\cos^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\sin^2 x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin^2 x}{2x^2}=-\dfrac{1}{2}$;

$\sqrt{x^2+x}\sim x$, при $x\to+\infty$, однако $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\dfrac{1}{2}$;

$P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, при $x\to+\infty$, если $a_n\neq0$; $P_n(x)\sim a_0$, если $a_0\neq0$; среди функций пропорциональных степенным (вида x^{μ}) нет ведущего члена для синуса, $\sin x$, и для показательной функции, a^x в точке $+\infty$; e^x нельзя охарактеризовать порядком x в точке $+\infty$, а e^{-1/x^2} - в точке 0; если $f = x^2 + x, g = x^2$, то в точке $+\infty$ $f - g = o(g)$, однако $f - g \neq o(1)$; при тех же f и g в той же точке $+\infty$ $f \sim g$, однако $e^f \sim e^g$ не имеет места, если $f_1 = x^2 + x, g_1 = x^2 + x\sin x,\ f_2 = g_2 = x^2$, то в точке $+\infty$ $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$, но не верно что $f_1 - f_2 \sim g_1 - g_2$.

Семейство Φ функций с общей областью определения, которая сгущается в точке a, называется шкалой сравнения в точке a (или при $x \to a$), если каждая из этих функций не тождественный нуль в какой-либо проколотой окрестности точки a, и из каких-либо двух разных функций семейства одна – высшего порядка малости, чем другая при $x \to a$:

$\forall \varphi \in \Phi \quad \forall \hat{U}_a \quad \exists x \in D(\varphi) \cap \hat{U}_a \quad \varphi(x) \neq 0$

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi \quad \varphi_1 \neq \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = o(\varphi_2) \vee \varphi_2 = o(\varphi_1)$ в точке a.

Если существует число $c \neq 0$ и функция φ из шкалы Φ сравнения в точке a такие, что для заданной функции f в точке a имеем $f \sim c\varphi$, то функция $\psi = c\varphi$ называется главной частью функции f относительно шкалы Φ в точке a.

Главная часть функции относительно заданной шкалы сравнения, если она существует, определяется однозначно.

Асимптотическое разложение f в точке a относительно шкалы Φ с точностью до φ_n - это равенство вида

$f = L_1\varphi_1 + L_2\varphi_2 + \ldots + L_n\varphi_n + o(\varphi_n)$, когда $x \to a$, (*)

где $L_i \neq 1, i = 1, 2, \ldots, n, \varphi_{i+1} = o(\varphi_i)$ в точке a для $i = 1, \ldots, n-1; \varphi_i \in \Phi, i = 1, \ldots, n$. Если асимптотический ряд можно продолжить неограниченно, то пишут

$$f \approx L_1\varphi_1(x) + L_2\varphi_2(x) + \ldots + L_n\varphi_n(x) + \ldots + \equiv \sum_{n=0}^{\infty} L_n\varphi_n(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x).$$

Это асимптотический ряд – символ, с которым ассоциируется бесконечная последовательность асимптотических формул вида (*) для i=1,2,… Знак ≈ читается «асимптотично равно».

Асимптотический нуль шкалы сравнения Φ - это функция более высокого порядка малости, чем какая-либо из функций шкалы.

Асимптотично равными (совпадающими) функциями относительно шкалы Φ в точке a называются функции, разность которых является асимптотическим нулем в указанной шкале сравнения.

Единственность асимптотического разложения. Если функция имеет асимптотическое разложение по данной шкале сравнения, то оно единственное.

Функции, которые имеют асимптотическое разложение по данной шкале сравнения, имеют одинаковые разложения тогда и только тогда, когда эти функции асимптотически совпадают по указанной шкале.

Все возможные типы асимптотического поведения невозможно описать в рамках фиксированной шкалы сравнения.

Сумму в правой части асимптотического разложения (*), или так, или иначе найденную главную часть, называют асимптотой данной функции; асимптоту, которая представляет собой многочлен называют алгебраической асимптотой порядка равного степени многочлена; алгебраическая асимптота первого порядка называется наклонной, а алгебраическая асимптота нулевого порядка – горизонтальной.

Например, степенные шкалы сравнения:

$1 \equiv x^0, x \equiv x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ при $x \to 0$;

$x^3, x^2, x^1, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^n}, \ldots$ при $x \to \infty$;

$x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_n}, \ldots,$ при $x \to 0,$ если $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots;$

в степенной шкале $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ при $x \to 0$ функция e^{-1/x^2} - асимптотический нуль; в любой степенной шкале при $x \to +\infty$ функция e^{-x} - асимптотический нуль; поведение функции $\sqrt[3]{x}$, при $x \to 0$ не описывается асимптотическими формулами в шкале $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$; $\sin x$ и $\sin x + e^{-x^2}$, при $x \to +\infty$ асимптотично равны в любой степенной шкале сравнения.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + o(1)$ в точке *a*; $\psi_0 = b \cdot 1$; горизонтальная асимптота *y*=*b*.

Функция дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, при $x \to x_0$;

Наклонная асимптота $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, если производная ненулевая $f'(x_0) \neq 0$.

В случае нулевой производной $f'(x_0) = 0$ про дифференцируемую функцию говорят, что она имеет горизонтальную асимптоту в точке $x = x_0$. Этим придается смысл понятию горизонтальной асимптоты для дифференцируемой функции, утерянный, так как условие дифференцируемости существенно сильнее условия существования общего предела: функция $f(x)$ *n* раз дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \text{ при } x \to x_0;$$

полиномиальная асимптота *n*-го порядка $y = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

В асимптотических формулах ни существование предела функции, ни существование предела функции шкалы сравнения, не обязательны; скажем при $x \to \infty$ ни функция $(x^3 - x^2 + 2x + 1)\sin x$, ни первые четыре производные функции шкалы $x^3 \sin x, x^2 \sin x, \ldots, x^{-n} \sin x, \ldots$, которые входят в ее асимптотическое разложение, не имеют пределов.

Асимптотическое равенство – это предельное соотношение, использование которого с вычислительной целью при $x \neq a$ возможно только после дополнительной работы с оценкой остатка; замена асимптотой дает в достаточной близости к *a* довольно малую ошибку, но абсолютная ошибка может быть как угодно большой: скажем при $x \to \infty$ имеем для $f(x) = x^2 + x$, что $f(x) = x^2 + o(x^2)$, относительная ошибка $(f(x) - x^2))/x^2 \to 0$, абсолютная ошибка $f(x) - x^2 \to \infty$.

Арифметические действия над степенными асимптотическими разложениями в шкале сравнения $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$; $n = 0,1,2,3,\ldots$ $x \to x_0$.

Если $\quad f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$

и $\quad g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$,

то

$$(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k)(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \text{ где } c_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \text{ где } \sum_{m=0}^{k} d_m b_{k-m} = a_k.$$

Дифференцирование степенного асимптотического разложения.

В случае функции, которая дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, и представленной в виде степенного асимптотического разложения в этой точке:

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$, когда $x\to x_0$, для каждой производной $f'(x)$ также имеем степенное разложение:

$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}ka_k(x-x_0)^{k-1}+o((x-x_0)^{n-1})$ когда $x\to x_0$, что вытекает из разложения для функции подвергнувшейся дифференцированию. Отметим, что степень многочлена в разложении производной на единицу ниже степени соответственного многочлена для функции, а сумма в разложении производной начинается с k=1, которое соответствует члену в нулевой степени.

Интегрирование асимптотического разложения. Если производная функции $f(x)$, которая дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой точке степенной асимптотическое степенное разложение:

$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}ka_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$ когда $x\to x_0$,

то и сама функция $f(x)$ имеет в точке x_0 степенное асимптотическое разложение вида:

$f(x)=f(x_0)\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+o((x-x_0)^{n+1})$ когда $x\to x_0$.

Тут значение функции $f(x)$ в рассматриваемой точке x_0 не определяется производной и играет в асимптотическом разложении функции роль нулевой степени.

Степень многочлена в асимптотическом разложении функции на единицу выше степени соответствующего многочлена в разложении производной.

Дополнение 4

§ ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

<u>Т</u>.

1. Пусть X - некоторое числовое поле. Если $\exists\ M\in\mathbf{R}\mid\forall x\in X\ \ M\ \geq x$ то множество X **называется** ограниченным сверху, а число M называется его верхней границей. Наименьшая из верхних границ M^* множества X называется его верхней гранью и обозначается $M^*=\sup X$. Таким образом, число $M\in\mathbf{R}$ называются верхней гранью множества X, если:

   а) $\forall x\in X\quad x\leq M^*$;   б) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ x_1\in X\mid\ x_1>M^*-\varepsilon$.

   Если $M^*\in X$, то оно называется наибольшим элементом множества X и обозначается $\mid\forall x\in X^*=\sup X$.
2. Пусть X – некоторое числовое множество. Если $\exists\ m\in\mathbf{R}\mid\forall x\in X\ \ x\leq m$ то множество X **называется** ограниченным снизу, а число m называется его нижней границей. Наибольшая из нижних границ m^* множества X называется его нижней гранью и обозначается $m^*=\inf X$. Таким образом, число $m\in\mathbf{R}$ называется нижней гранью множества X, если:

   а) $\forall\ x\leq X\quad x\geq m^*$;   б) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \ x_2\in X\mid\ x_2<m^*+\varepsilon$.

   Если $m^*\in X$ то оно **называется** наименьшим элементом множества X и обозначается

   $m^*=\min X$.
3. Множество X ограниченное сверху и ограниченное снизу называется ограниченным.

4. Понятие ограниченности, верхней и нижней границ и граней, а также наибольшего и наименьшего значения функции $y = y(x)$ определяются как соответствующие элементы ее области значений $E(y)$.
5. Понятие предела функции.

$\lim\limits_{x\to a} y(x) = b \Leftrightarrow y(x)\to b$ при $x\to a$ $\Leftrightarrow$ $a\in D(y)'$ $\forall x\in D(y)$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0$ | $x\in \hat{U}_{a,\delta} \Rightarrow$ $y\in U_{b,\varepsilon}$.

Здесь $D(y)$ – область определения функции $y(x)$, $D(y)'$ – множество ее предельных точек,

$\hat{U}_{a,\delta}$ – проколотая δ-окрестность точки, $U_{b,\varepsilon}$ – ε-окрестность точки b. В частности,

если в качестве окрестности точки $x_0\in\mathbf{R}$ взять равносторонний интервал с центром в

x_0, то: $\lim\limits_{x\to a} y(x) = b \Leftrightarrow a\in D(y)'$ $\forall x\in D(y)$ $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)\rangle 0$

| $0\langle|x-a|\langle\delta \Rightarrow |y(x)-b|\langle\varepsilon$.

6. Формулы связанные с замечательными пределами (везде $x\to 0$)

I. Замечательные пределы	II. Замечательные эквивалентности	III. Замечательные равенства
1. $\lim\frac{\sin x}{x}=1$	1. $\sin x\sim x$	1. $\sin x = x+o(x)$
2. $\lim\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$	2. $\mathrm{tg}x\sim x$	2. $\mathrm{tg}x = x+o(x)$
3. $\lim\frac{\arcsin x}{x}=1$	3. $\arcsin x\sim x$	3. $\arcsin x = x+o(x)$
4. $\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	4. $(1+x)^{\frac{1}{x}}\sim e$	4. $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e+o(1)$
5. $\lim\frac{\ln(x)}{x}=1$	5. $\ln(1+x)\sim x$	5. $\ln(1+x)=x+o(x)$
6. $\lim\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	6. $a^x-1\sim x\ln a$	6. $a^x-1=x\ln a+o(x)$
7. $\lim\frac{e^x-1}{x}=1$	7. $e^x-1\sim x$	7. $e^x-1=x+o(x)$
8. $\lim\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$	8. $(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x$	8. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$

IV. Пять замечательных разложений в ряд.

1. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

2. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

4. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

5. $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$.

А.3.

1(389). Определить нижнюю и верхнюю грань функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, для $x\in\mathbf{R}$.

2(401*). На языке «ε- δ» доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$. Указать правило нахождения «δ» по заданно-

му «ε».

3. Во всех нижеследующих записях предполагается, что $a\in D(f)'$ и $x\in D(f)$. Для каких функций $f(x)$ справедливы утверждения:

а) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;
б) $\exists\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;
в) $\forall\varepsilon\ \exists\ \delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;
г) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;
д) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;
е) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \mid |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;
ж) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \mid |x-a|>\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;
з) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|>\varepsilon$;
и) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)-b>\varepsilon$
к) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>\varepsilon$

4(407*). Пусть $y=f(x)$. Сформулировать на языке ”ε – δ” следующие утверждения:

а) $y\to b-0$ при $x\to a$; б) $y\to b-0$ при $x\to a+0$;
в) $y\to b+0$ при $x\to a-0$; г) $y\to b+0$ при $x\to+\infty$;
д) $y\to b$ при $x\to-\infty$; е) $y\to b-0$ при $x\to+\infty$;
ж) $y\to\infty$ при $x\to-\infty$; з) $y\to-\infty$ при $x\to+\infty$.

Найти пределы:

5(418*) $\lim\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ а) $x\to 1$, б) $x\to 2$, в) $x\to 5$, г) $x\to 3$.

6(419) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$. **7(420)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$. **8(425*)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x^9-1}$.

9(436) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$. **10(446)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}}{x+x^2}$. **11(447)**
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

12(448) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. **13(457)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$. **14(458)**
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]$. **15(462)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$. **16(503)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.
17(505) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

18(507) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$. **19(508)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$. **20(509)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}$.

21(517) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$. **22(519)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$. **23(531)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ (a > 0).

24(532) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$. **25(533)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln\left(x^{10}+x+1\right)}$.

26(561) $\lim\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}$ а) $x\to-\infty$, б) $x\to+\infty$. **27(562)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

28(563) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$. **29(1324)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$. **30(1325)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}$.

31(1349) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$. **32(1398)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. **33(1399)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$. **34(1400)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

35(1401) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

36(1402) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{x^6-1}\right]$. **37(1406.1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Т.

1. $f(x) = O(1)$ для $x\in X \Leftrightarrow \exists A\in\mathbf{R}\ \ \forall x\in X \mid |f(x)|\le A$.

   Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве X. Если $X=\hat{U}_a$ – проколотая окрестность точки a (возможно несобственной), то говорят что $f(x)$ ограничена в предельном процессе $x\to a$.
2. $f(x) = g(x)O(1) \Leftrightarrow f(x) = O(g(x))$.
   Функция $f(x)$ называется ограниченной по сравнению с функцией $g(x)$.
3. Если в некотором предельном процессе существует, конечен и не равен нулю $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ то заведомо выполнены соотношения $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$. В этом случае пишут $f(x) = O^*(g(x))$ и величины $f(x)$ и $g(x)$ называются величинами одного порядка.
4. Если $f(x) = O(g(x))$ то отсюда, в общем случае, не следует существование предела отношения двух функций.
5. Если в некотором предельном процессе $\lim f(x)=0$ то говорят, что f(x) есть бесконечно малая в данном предельном процессе. Это обозначается так: $f(x) = o(1)$.
6. $f(x) = g(x)o(1) \Leftrightarrow f(x) = o(g(x))$
   Функция $f(x)$ является бесконечно малой по сравнению с $g(x)$.
7. Если в некотором предельном процессе $f(x) = g(x) + o(g(x))$ то величина $g(x)$ называется главным членом величины $f(x)$ в данном предельном процессе.

А.З.

38(646) Показать, что при $x \to a$

а) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; б) $O(o(f(x))) = o(f(x))$; в) $o(O(f(x))) = o(f(x))$;
г) $O(O(f(x))) = O(f(x))$; д) $O(f(x))+o(f(x))=O(f(x))$

39(561) Показать, что при $x \to +\infty$:

а) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$; б) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$; в) $x + x^2 \sin x = O(x^2)$;

г) $\dfrac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; д) $\ln x = O(x^\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$; е) $x^p e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

40(653) При $x \to 0$ найти главный член простейшего вида для функций:

а) $2x - 3x^3 + x^5$; б) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$; в) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$; г) $\mathrm{tg}x - \sin x$.

41(655) При $x \to 1$ найти главный член простейшего вида для функций:

а) $x^2 - 3x + 5$; б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$; в) $\ln x$; г) $e^x - e$; д) $x^x - 1$.

42(658) При $x \to 1$ найти главный член простейшего вида для функций:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; в) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; г) $\dfrac{1}{\sin \pi x}$; д) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

43 Определить главные члены простейшего вида для величин:

а) $\ln(x^2 + e^x) \cdot \arcsin \mathrm{tg}\dfrac{1}{x^2}$ $(x \to \pm\infty)$; б) $\left(e^{\frac{1}{1+x}} - 1\right)\left[\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^\pi - 1\right] \cdot \cos\dfrac{x+2}{x+3}$ $(x \to \infty)$;

в) $\left(e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^3}\right) \cdot \cos\dfrac{\pi(x-1)}{2} \cdot \ln(2+x)$ $(x \to \pm 0)$; г) $\mathrm{arctg}x^3 \cdot \sin\left(2^{x^2} - 1\right) \cdot \left[\left(\cos x + x^2\right)^\pi - 1\right]$ $(x \to 0)$.

44 На языке “$\varepsilon - \delta$” для $x \to a$ и для $x \to \infty$ записать утверждения о том, что функция $y(x)$ является:

а) ограниченной; б) неограниченной; в) имеет конечный предел;
г) бесконечно малой; д) бесконечно большой; е) отделённой от нуля.

Д.3.1.

Определить верхнюю и нижнюю грани функций:

45(350) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, x \in (0, +\infty)$. **46(391)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$.

Найти значения следующих функций:

47(412) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$. **48(416)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

49(423) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$. **50(421.1)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$. **51(437)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$. **52(440)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. **53(641)** $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

54(469) Найти постоянные a и b из условия: $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$.

55(474) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. **56(475)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$. **57(476)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$. **58(484)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a}{x-a}$. **59(495)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. **60(499)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$. **61(514)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$. **62(523)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$. **63(525)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$. **64(528)** $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

Д.3.2.

Найти пределы:

65(535) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$. **66(540.1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(nx+\sqrt{1-n^2x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$.

67(544) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$. **68(545.3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2\left(\pi\cdot 2^x\right)}{\ln\left[\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)\right]}$. **69(567)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+xe^x\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

70(571) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$. **71(579)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\mathrm{th}x}$.

72(650) Пусть $x\to 0$. Показать, что:

а) $2x-x^2=O(x)$; б) $x\sin\sqrt{x}=O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$; в) $x\sin\frac{1}{x}=O(x)$; г) $\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right),\ \varepsilon>0$;

д) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$; е) $\mathrm{arctg}\frac{1}{x}=O(1)$; ж) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

73(652) Доказать, что при достаточно большом $x>0$ имеют место неравенства:

а) $x^2+10x+100<0{,}001x^3$; б) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$; в) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

74(656) Пусть $x\to+\infty$. Найти главный член и определить порядок роста величин:

а) $x^2+100x+1000$; б) $\frac{2x^5}{x^3-3x+1}$; в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

75(657) Пусть $x\to+\infty$. Найти главный член и определить порядок малости величин:

а) $\frac{x+1}{x^4+1}$; б) $\sqrt{x+1}\sqrt{x}$; в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$; г) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

Найти пределы:

76(1320) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x - x}{x-\sin x}$. **77(1326)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$. **78(1331)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

79(1332) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **80(1333)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$. **81(1354)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

82(1363.3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{arctgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. **83(1404)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. **84(1405)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Д.З.

85(381) Показать, что функция, определяемая условиями: $f(x) = n$, если $x=\dfrac{m}{n}$, $m, n\in\mathbf{Z}$, взаимно-простые и $n > 0$ и $f(x) = 0$, если x – иррационально, конечна, но не ограничена в каждой точке x (т.е. не ограничена в любой окрестности этой точки).

86(384) Показать, что $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$, однако не является бесконечно большой при $x \to 0$.

87(385) Исследовать на ограниченность функцию $f(x)=\ln x\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{x}$ в интервале $0 < x < \varepsilon$.

88(387) Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте [a,b]. Чему равны ее нижняя и верхняя грани на этом сегменте?

89(400) Пусть функция $f(x)$ определена в области $[a, +\infty)$ и ограниченна на каждом сегменте $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Положим: $m(x)=\inf\limits_{a\le\xi\le x} f(\xi)$ и $M(x)=\sup\limits_{a\le\xi\le x} f(\xi)$. Построить графики функций $y = m(x)$ и $y = M(x)$, если: а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = \cos x$.

90(450) Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

91(470) Найти a_i и b_i ($i = 1, 2$) из условий:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_ix-b_i\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0.$$

92(481) Доказать равенства:

а) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; б) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$; в) $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{tg}a=\mathrm{tg}a$ $\left(a\ne\dfrac{2n-1}{2}\pi, n\in Z\right)$.

93(564) Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$ ($a > 1$, $n > 0$).

94(565) Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^{\varepsilon}}$ ($a > 1$, $\varepsilon > 0$).

Найти:

95(603) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ (здесь $[z]$ – целая часть числа z, т. е. наибольшее целое число, не превышающее z).

96(604) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

97(605) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

98(606) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\sin.......\sin x$ n раз.

99(612) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi$.

Построить графики функций:

100(613) а) $y = 1 - x^{100}$, б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - x^{2n}\right)$ $x\in[-1, 1]$.

101(614) а) $y = \dfrac{x^{100}}{1+x^{100}}$ $(x \ge 0)$, б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x \ge 0)$.

102(620) а) $y = \sin^{1000} x$, б) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} x$.

103(624) $y = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

104(625.1) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\mathrm{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{tg^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+1}(x \ge 0)$.

105(625.2) $y = \lim\limits_{n\to\infty} x\,\mathrm{sgn}\left|\sin^2(n!\pi x)\right|$.

106(630) Вычислить:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{8}....\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$

О.

1. 0; 1. **2**. Например $\delta < \dfrac{\varepsilon}{19}$. **3**. а) $f(x) \to b$ при $x \to a$, б) $f(x)$ ограничена при $x \to a$, в) нет таких $f(x)$, г) $f(x) = \mathrm{const} = b$, д) $f(x)$ любая, е) $f(x)$ непрерывна при $x = a$ и $f(x) = b$, ж) $f(x) \to b$ при $x \to \infty$, з) $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, и) $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, к) $f(5x) \to +\infty$ при $x \to a$. **4**. а) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid 0< |x - a| < \delta \Rightarrow b - \varepsilon < y \le b$, б) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 \mid a < x < a + \delta \Rightarrow b - \varepsilon < y \le b$, в) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 \mid a - \delta < x < a \Rightarrow$
$b \le y < b + \varepsilon$, г) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \mid |\,x\,| > \delta \Rightarrow b \le y < b + \varepsilon$, д) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \mid x < \delta \Rightarrow |\,y - b| < \varepsilon$,
е) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \mid x > \delta \Rightarrow b - \varepsilon < y \le b$, ж) $\forall\varepsilon\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) \mid x < \delta \Rightarrow |\,y\,| > \varepsilon$, з) $\forall\varepsilon\ \exists\ \delta(\varepsilon) \mid x > \delta \Rightarrow y < \varepsilon$.
5. а) $\dfrac{1}{4}$, б) 0, в) ∞, г) $-\dfrac{1}{2}$. **6.** $\dfrac{1}{2}$. **7.** 1. **8.** $\dfrac{10}{9}$. **9.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **10.** $\dfrac{1}{4}$. **11.** $\dfrac{2}{27}$. **12.** $\dfrac{3}{2}$. **13.** $\dfrac{1}{2}(a+b)$. **14.** $\dfrac{1}{2}$.

15. 2. **16.** 0. **17.** 0. **18.** 0. **19.** 0. **20.** 0. **21.** e. **22.** 1. **23.** $\dfrac{1}{a}$. **24.** 0. **25.** $\dfrac{1}{5}$. **26.** а) 0, б) $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$. **27.** ln8. **28.** –ln2.

29. $\dfrac{1}{3}$. **30.** $\dfrac{1}{6}$. **31.** 1. **32.** $-\dfrac{1}{12}$. **33.** $\dfrac{1}{3}$. **34.** $-\dfrac{1}{4}$. **35.** $\dfrac{1}{3}$. **36.** $\dfrac{1}{6}$. **37.** $\dfrac{19}{90}$. **40.** а) $2x$, б) x, в) $\dfrac{x^2}{2}$, г) $\dfrac{x^3}{2}$.

41. а) $3(x-1)^2$, б) $\dfrac{(1-x)^{1/3}}{\sqrt[3]{2}}$, в) $x - 1$, г) $e(x - 1)$, д) $x - 1$. **42.** а) $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$, б) $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$, в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$,

г) $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1-x}$, д) $\dfrac{1}{1-x}$. **43.** а) $\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{\ln x^2}{x^2}$ б) $-\dfrac{\pi\cos 1}{x^2}$, в) $\dfrac{\pi\ln 2}{2}xe^{\frac{1}{x}}$; $\dfrac{\pi\ln 2}{2}\dfrac{1}{x^2}$, г) $\dfrac{\pi\ln 2}{2}x^7$.

44. а) $\exists\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |y| < \varepsilon$;) $\exists\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \mid |\,x\,| > \delta \Rightarrow |y| < \varepsilon$,
б) $\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \mid 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\,y\,| > \varepsilon$; $\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta\ \exists x \mid |x| > \delta \Rightarrow |\,y\,| > \varepsilon$;

в) $\exists b\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \mid\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$; $\exists b\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \mid\ |x|>\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$,
г) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \mid\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$; $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \mid\ |x|>\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$,
д) $\forall\varepsilon\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>\varepsilon$; $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \mid\ |x|>\delta\Rightarrow|f(x)|>\varepsilon$,
е) $\exists\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \mid\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>\varepsilon$; $\exists\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \mid\ |x|>\delta\Rightarrow|f(x)|>\varepsilon$. **45.** 0; 1. **46.** 2; $+\infty$.

47. 6. **48.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. **49.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. **50.** $2\frac{1}{24}$. **51.** $\frac{4}{3}$. **52.** $-\frac{1}{16}$. **53.** $\frac{2}{3}$. **54.** $a=1$, $b=-1$. **55.** $\frac{1}{2}$. **56.** $\frac{1}{2}$. **57.** 2.

58. $\sec^2 a\ \left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z\right)$. **59.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **60.** $\frac{1}{4}$. **61.** e^{-2}. **62.** 1. **63.** e. **64.** $e^{\frac{x^2}{2}}$. **65.** $\frac{3}{2}$. **66.** n. **67.** e^2.

68. –2. **69.** 1. **70.** $\frac{1}{2}$. **71.** 1. **74.** а) x^2, б) $2x^2$, в) $x^{\frac{2}{3}}$, г) $x^{\frac{1}{8}}$. **75.** а) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$, б) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, в) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$, г) $\left(\frac{1}{x}\right)^2$. **76.** 2.

77. $\frac{1}{2}$. **78.** 1. **79.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **80.** $\frac{1}{6}$. **81.** $\frac{1}{2}$. **82.** $e^{-\frac{1}{3}}$. **83.** $\frac{1}{2}$. **84.** 0. **87.** Ограничена сверху и неограниченна снизу. **88.** $f(a)$ и $f(b)$. **90.** $\frac{7}{36}$. **91.** $a_i=\pm1, b_i=\mp\frac{1}{2}$ (i = 1,2). **95.** 1. **96.** 0. **97.** 1. **98.** 0. **100.** б) $y=1$, если $|x|<1$;
$y=0$, если $|x|=1$. **101.** б) $y=0$, если $0\le x<1$; $y=\frac{1}{2}$, если $x=1$; $y=1$, если $1<x<+\infty$. **102.** б) $y=0$, если $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $y=1$, если $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $к\in\mathbf{Z}$. **103.** $y=x$, если $x<0$; $y=\frac{1}{2}$, если $x=0$; $y=1$, если $x>1$. **104.** $y=\sqrt{x}$, если $0\le x<1$ и $4k-1<x<4k+1$; $y=x$, если $4k-3<x<4k-2$ и $4k-2<x<4k-1$; $y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+x\right)$, если $x=2к-1$; $к\in\mathbf{N}$. **105.** $y=0$, если x – рационально; $y=1$, если x – иррационально.
106. $\frac{\sin x}{x}$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

Аудиторные занятия. Демидович: 688, 689, 690, 692, 694, 700, 1*, 2*, 3*, 4*, 5*, 6*, 846, 850, 854, 871, 881, 895, 1*, 2*, 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 9*,10*, 11*,12*, 13*,14*, 985(а, б), 986(а, б, в, г), 999(а, б, в. г), 1036(а, б, в, г), 10(39,41,48,86,87,88,89,92,94), * 1100(а,б), 11(15,25,41,56,59,61,62,65,90) *

А. Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек:

688. $y=\frac{1+x}{1+x^3}$. **689**. $y=\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$. **690**. $y=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$. **692**. $y\sqrt{=\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

694. $y=\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}$. **700**. $y=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$. **1***. $y=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$. **2***. $y=\frac{x}{\cos x}$. **3***. $y=\frac{2}{1-2^x}$.

4*. $y=\operatorname{sgn}\sin\left(x^2-2x-3\right)$. **5***. $y=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **6***. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

Найти производные следующих функций:

846. $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$. **850**. $y = \dfrac{x^2(1-x)^3}{1+x}$. **854**. $y = x\sqrt{1+x^2}$. **871**. $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

881. $y = \dfrac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$. **895**. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **1***. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

2*. $y = e^{-x^2}$. **3***. $y = (1+x)\sqrt{2+x}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$. **4***. $y = e^x\left(x^2-2x+2\right)$.

5*. $y = \left(2-x^2\right)\cos x + 2x\sin x$. **6***. $y = e^x\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)$. **7***. $y = \sin\left(\cos^2 x\right)+\cos\left(\sin^2 x\right)$.

8*. $y = e^x + e^{e^x}$. **9***. $y = \sin(\sin(\sin x))$. **10***. $y = \ln(\ln(\ln x))$. **11***. $y = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

12*. $y = (\sin x)^{\cos x}$. **13***. $y = \left(x^2+x+1\right)^{x^2-x+1}$. **12***. $y = \sin\left(\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right)$.

Найти y'_x если:

985. а) $y = \sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

986. а) $y = f\left(x^2\right)$; б) $y = f\left(\sin^2 x\right)+f\left(\cos^2 x\right)$; в) $y = f\left(e^x\right)\cdot e^{f(x)}$; г) $y = f(f(f(x)))$.

999. Исследовать на дифференцируемость:

а) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; б) $y = |\cos x|$; в) $y = |\pi^2 - x^2|\cdot\sin^2 x$; г) $y = \arcsin(\cos x)$.

1036. Определить область существования обратных функций $x = x(y)$ и найти x'_y если:

а) $y = x + \ln x$; б) $y = \operatorname{sh} x$; в) $y = x + e^x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

Найти y'_x, если:

1039. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$. **1041**. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. **1048**. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

Найти dy, если:

1086. $y = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$. **1087**. $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$. **1088**. $y = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$.

1089. $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$. **1092**. $y = \dfrac{u}{v^2}$. **1094**. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

***)**. Найти: а) $\dfrac{d}{dx^3}\left(x^3-2x^6-x^9\right)$; б) $(x+\ln x)'_{x+e^x}$.

1100. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $\sqrt{0{,}98}$; б) $\sin 29°$.

Найти производные указанного порядка:

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$; y''_{x^2} – ? **1125**. $y = f(x^2)$; y''_{x^2}, y'''_{x^3} – ?

1141. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$; y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} – ? **1156**. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; $y^{(6)}$, $y^{(7)}$ – ?

1199. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$; $y^{(8)}$ – ? **1161**. $y = x^2e^{2x}$; $y^{(20)}$ – ? **1162**. $y = \dfrac{e^{2x}}{x}$; $y^{(10)}$ – ?

1165. $y = x^2\sin 2x$; $y^{(50)}$ – ? **1190**. $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$; $y^{(n)}$ – ?

***)**. Найти d^2f, если $f = f(1+x^2)$, где $x = \sin t$.

<u>Д1. Демидович:</u> 697, 702, 717, 720, 723, 725, 760, 762, 852, 855, 908, 911, 934, 979, 984, 1004, 1040, 1044, 1051, 1054.

687. Определить характер точек разрыва функции $y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

Исследовать на непрерывность и нарисовать эскиз графика функции:

702. $y = x - [x]$. **717**. $y = e^{-\frac{1}{x}}$. **720**. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$, $(x \ge 0)$.

723. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n} x$. **725**. $y = \lim\limits_{n\to\infty} [x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg} x)]$.

760. Найти обратную функцию $x = x(y)$, если $y(x) = x + [x]$.

762. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg} x = kx$ $\forall k \in \mathbf{R}$ и $x \in (0, \pi)$ имеет единственный непрерывный корень $x = x(u)$.

Найти производные функций:

852. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **855**. $y = (1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$. **908**. $y = \dfrac{1}{4x^4}\ln\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{16x^4}$.

911. $y = x[\sin\ln x - \cos\ln x]$. **934**. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$, $(a > 0)$.

979. Найти y' и построить графики $y(x)$ и $y'(x)$, если: $y = \begin{cases} 1-x & x<1 \\ (1-x)(2-x) & 1 \le x \le 2 \\ -(2-x) & x>2 \end{cases}$.

984. Производная от логарифма данной функции $y = f(x)$ называется логарифмической производной этой функции: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{d}{dx}\ln|f(x)| \equiv \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Найти логарифмическую производную, если: а) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3-x)^2}}$;

в) $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$; г) $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$.

1004. Для $f(x)$ определить левую $f'_-(x)$ и правую $f'_+(x)$ производную, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Найти y'_x, если:

1040. $f(x) = \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$. **1044**. $f(x) = \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$. **1051**. $\underset{(\text{парабола})}{\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}}$.

1054. а) $\rho = a\varphi$ (спир. Архимеда); б) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида);
в) $\rho = ae^{m\varphi}$ (логарифмич. спираль); ρ, φ – полярные координаты.

<u>Д2. Демидович:</u> 1090, 1093, 1096(г, д), 1102, 1103, 1105, 1114, 1119, 1122, 1126, 1128, 1132, 1142, 1144, 1148, 1157, 1158, 1164, 1166, 1169, 1173, 1189, 1203, 1207.

1090. Найти: а) $d(xe^x)$; б) $d(\sin x - \cos x)$; в) $d\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$; г) $d\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; д) $d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$;

е) $d\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; ж) $d\ln(1-x^2)$; з) $d\left(\arccos\dfrac{1}{|x|}\right)$; и) $\left[\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

1093. Найти dy, если $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$. **1096**. г) $\dfrac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$; д) $\dfrac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

С помощью дифференциалов, приближенно вычислить: **1102**. arctg1.05. **1103** lg11.

1105. Доказать приближенную формулу: $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$ ($a > 0$), где $|x| << a$ и с ее помощью вычислить: а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

Найти y''_{x^2}: **1114**. $y = \mathrm{tg}x$. **1119**. $y = [\sin\ln x + \cos\ln x]$. **1122**. $y = \ln\dfrac{u}{v}$.

Найти y'''_{x^3}: **1126**. $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. **1128**. $y = f(\ln x)$.

Найти d^2y: **1132**. $y = \dfrac{\ln x}{x}$. **1133**. $y = x^x$.

Найти y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}: **1142**. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$. **1144**. $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$. **1148**. $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Найти производные указанного порядка:

1157. $y = \dfrac{a}{x^m}$; $y''' - ?$ **1158**. $y = \sqrt{x}$; $y^{(10)} - ?$ **1164**. $y = \dfrac{\ln x}{x}$; $y^{(5)} - ?$

1166. $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1 - 3x}}$; $y''' - ?$ **1169**. $y = e^x\cos x$; $y^{\mathrm{IV}} - ?$

1173. Найти $d^{10}y$, если $y = x\cos 2x$.

1189. Найти $y^{(n)}$, если $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

Найти $y^{(n)}$: **1203**. $y = x^2\sin ax$. **1207**. $y = e^x\sin x$.