Δ аналогично пункту №5 : $[\hat{A},\hat{B}^n] = \hat{A}\hat{B}^n - \hat{B}^n\hat{A} = in\,\hat{B}^{n-1}$

$[\hat{A},\hat{B}^{n+1}] = \hat{A}\hat{B}^{n+1} - \hat{B}^{n+1}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}^{n+1} - \hat{B}(\hat{B}^n\hat{A}) = \hat{A}\hat{B}^{n+1} - \hat{B}(\hat{A}\hat{B}^n -$

$- in\,\hat{B}^{n-1}) = \hat{A}\hat{B}^{n+1} - \hat{B}\hat{A}\hat{B}^n + in\,\hat{B}^n = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{B}^n + in\hat{B}^n = i(n+1)\hat{B}^n$ ▲

№6

т.д. $[f(\hat{A}),\hat{B}] = i f'(\hat{A})$;

Δ Разложим $f(\hat{A})$ в ряд Тейлора: $f(\hat{A}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\hat{A}^n f^{(n)}(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow [f(\hat{A}),\hat{B}] = [\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!} f^{(n)}(0), \hat{B}] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\hat{A}^n\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^n) =$

$= \{$из п. №4$\} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} n i\,\hat{A}^{n-1} = i\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\hat{A}^n\right)' = i f'(\hat{A})$ ▲

№7

$[\hat{A}, f(\hat{B})] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}[\hat{A},\hat{B}^n] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, in\,\hat{B}^{n-1} = i\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\hat{B}^n\right)' = if'(\hat{B})$

(2)

№1

$\hat{A}_x = \frac{d}{dx} + x$; $\hat{A}_x^2$ - ?

$\left(\frac{d}{dx} + x\right)^2 \Psi(x) = \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left\{\frac{d\Psi}{dx} + x\Psi\right\} = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + x\frac{d\Psi}{dx} +$

$+ \frac{d}{dx}x\Psi + x^2\Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + x\frac{d\Psi}{dx} + x\frac{d\Psi}{dx} + \Psi + x^2\Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + 2x\frac{d\Psi}{dx} + x^2\Psi + \Psi =$

$= \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + x^2 + 1\right)\Psi = \hat{A}_x^2\Psi$

№2

$\hat{A}_x = \frac{d}{dx} + \frac{1}{x}$; $\hat{A}_x^2$ - ?

$\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right)\left\{\frac{d\Psi}{dx} + \frac{1}{x}\Psi\right\} = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Psi}{dx} + \frac{1}{x}\frac{d\Psi}{dx} - \cancel{\frac{1}{x^2}\Psi} + \cancel{\frac{1}{x^2}\Psi} =$

$$= \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}\right)\Psi^1 = \hat{A}_x^2 \Psi \Rightarrow \hat{A}_x^2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}\right)$$

Д/З: как построить 2-х рядную матрицу, чтоб она была эрмитовной и унитарной (самый общий вид). $\{ A^+A = E;\ A^+ = A \}$

ДОЗА №1 19.02.12

① Дано:
A - двурядная матрица
$A = A^+$ - эрмитова
$AA^+ = A^+A = E$ - унитарна

A - ?

Р-ие: Построим самый общий вид двурядной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} a_1 - ia_2 & c_1 - ic_2 \\ b_1 - ib_2 & d_1 - id_2 \end{pmatrix}$$

(все коэффициенты – вещественны)

1) Требуем, чтоб она была Эрмитова:

$$\begin{cases} a_1 + ia_2 = a_1 - ia_2 \\ d_1 + id_2 = d_1 - id_2 \\ b_1 + ib_2 = c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 = b_1 - ib_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_2 = 0; & d_2 = 0; \\ b_1 = c_1; & c_2 = -b_2 \end{matrix}}$$

2) Требуем унитарности:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 + ib_2 \\ b_1 - ib_2 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 + ib_2 \\ b_1 - ib_2 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \\ d_1^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \\ a_1b_1 + b_1d_1 + i(a_1b_2 + b_2d_1) = 0 \\ a_1b_1 + d_1b_1 - i(a_1b_2 + d_1b_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -d_1; \quad a_1 = \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}$$

Но т.к. $a_1 \in Re \Rightarrow$ $b_1^2 + b_2^2 \leq 1$. Тогда самый общий вид такой матрицы можно написать так:

Ответ: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - b_1 - b_2} & b_1 + ib_2 \\ b_1 - ib_2 & -\sqrt{1 - b_1 - b_2} \end{pmatrix}$, где $b_1^2 + b_2^2 \leq 1$, $b_1, b_2 \in Re$

Такая классная матрица, как ~~опер~~ матрица оператора Адамара

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ - эрмитова и унитарна

21.02.12

№1

$[\hat{A}, \hat{B}] = i$

$[\hat{A}^2, \hat{B}^2] = \hat{A}^2\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B}^2\hat{A} - \hat{A}\hat{B}^2\hat{A} = \hat{A}(\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A}) +$
$+ (\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A})\hat{A} = 2i(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) = 2i(\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B} - i) =$
$= 4i\hat{A}\hat{B} + 2$

№2

$\hat{A}_{\vec{r}} = i\hbar\nabla + \vec{A}(\vec{r}) \Rightarrow \hat{A}^2_{\vec{r}} = -\hbar^2\Delta + 2i\hbar\vec{A}\nabla + i\hbar(\operatorname{div}\vec{A}) + \vec{A}^2$

№3

т.д., что $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$ $\forall \hat{F}$, где $\hat{A} = \hat{A}^+$; $\hat{B} = \hat{B}^+$

Δ $\hat{F}^+ = \hat{A} - i\hat{B} \Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{F} + \hat{F}^+)$

$\hat{B} = \frac{i}{2}(\hat{F}^+ - \hat{F})$ ▲

№4

$(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$; $\lambda = o(1)$ Разложить по λ

Р-ие: $(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \hat{C}_n$ $\hat{C}_n - ?$

Подействуем на обе стороны оператором $\hat{A} - \lambda\hat{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = (\hat{A} - \lambda\hat{B})\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \hat{C}_n$. Используем независимость разн. степ. малости λ

Выделим член с λ^n: $0 = \hat{A}\hat{C}_n - \hat{B}\hat{C}_{n-1} \Rightarrow \hat{A}\hat{C}_n = \hat{B}\hat{C}_{n-1}$

у 1: $\hat{C}_0 = \hat{A}^{-1}$ $\Rightarrow$ $\underline{\hat{C}_n} = \hat{C}_0 \hat{B} \hat{C}_{n-1} = \underline{\hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{C}_{n-1}}$ $\Rightarrow$ {по рекурсии с уч. $\hat{C}_0 = \hat{A}^{-1}$}

$$\Rightarrow \boxed{(\hat{A} - \lambda \hat{B})^{-1} = \hat{A}^{-1} \sum (\lambda \hat{B} \hat{A}^{-1})^n}$$

$$\hat{C}_n = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{C}_{n-1} = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{C}_{n-2} = \hat{A}^{-1} (\hat{B} \hat{A}^{-1})^n$$

№5

$\hat{A} = -i \frac{d}{dx}$ собств. функции – ?

Р-ие: $\hat{A} \Psi = k \Psi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ур-е на собств. знач-я k: $-i \frac{d}{dx} \Psi(x) = k \Psi(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d\Psi(x)}{dx} = ik \Psi(x) \Rightarrow \Psi_k(x) = C e^{ikx}$, $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \Psi_k^*(x) \Psi_{k'}(x) = \delta(k-k')$$ – такая нормировка для Ψ, кот.

не явл. квадратично интегр. на действительной оси

$$|C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{i(k'-k)x} = \delta(k-k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(k-k')} dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow |C|^2 \delta(k'-k) 2\pi = \delta(k-k') \Rightarrow |C| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\Rightarrow$ {можно сказать, что $C \in \mathbb{R}$} $\times (1+x)^m$?

$$\Rightarrow \boxed{\Psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}}$$

№6

$\hat{A} = -i \left(\frac{d}{dx} + x \right)$. Собств. ф-ии – ?

$-i \frac{d\Psi}{dx} - i \Psi_k = k \Psi \Rightarrow \frac{d\Psi}{dx} = ik\Psi - x\Psi$

$\ln \Psi_k = ikx - \frac{1}{2} x^2 + C \Rightarrow \Psi_k = C e^{(ikx - \frac{1}{2}x^2)}$

$|C|^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(k-k')} e^{-x^2} dx =$ {интеграл сходится} $= \delta_{kk'}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{ix\lambda} dx = \left\{ x^2 - ix\lambda - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} = \left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4} \right\} =$$

$$= e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)^2} d\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = e^{-\frac{\lambda^2}{4}} I;$$

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy = \{\text{переходим к полярным координатам } \rho, \varphi$$

$$\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix} \quad ; \quad J = \rho \quad \} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho\, \rho\, e^{-\rho^2} = \pi \Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{ix\lambda} dx = e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \sqrt{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |C|^2 = \frac{e^{\frac{\lambda^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \boxed{\psi_k(x) = \frac{e^{\frac{\lambda^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{\left(ikx - \frac{1}{2}x^2\right)}}$$

№1

28.02.12

$\frac{d}{dt}(\hat{A}\hat{B})$ - ?

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}] \quad ; \quad \frac{d\hat{B}}{dt} = \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{B}]$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{A}\hat{B}) = \frac{\partial}{\partial t}(\hat{A}\hat{B}) + \frac{i}{\hbar}[H, (\hat{A}\hat{B})] = \hat{A}\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\hat{B} + \frac{i}{\hbar}\{\hat{H}\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{H}\}$$

$$= \hat{A}\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\hat{B} + \frac{i}{\hbar}\{\hat{H}\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{H} + \hat{A}\hat{H}\hat{B} - \hat{A}\hat{H}\hat{B}\} =$$

$$= \hat{A}\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\hat{B} + \frac{i}{\hbar}\{[\hat{H}, \hat{A}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{H}, \hat{B}]\} = \frac{d\hat{A}}{dt}\hat{B} + \hat{A}\frac{d\hat{B}}{dt}$$

итого $\frac{d(\hat{A}\hat{B})}{dt} = \frac{d\hat{A}}{dt}\hat{B} + \hat{A}\frac{d\hat{B}}{dt}$

№2

$[x, [x^2, \hat{p}_x^2]] - ?$

$[x^2, \hat{p}_x^2] = x^2\hat{p}_x^2 - \hat{p}_x^2 x^2 + \hat{p}_x x^2 \hat{p}_x - \hat{p}_x x^2 \hat{p}_x = (x^2\hat{p}_x - \hat{p}_x x^2)\hat{p}_x + \hat{p}_x(x^2\hat{p}_x - \hat{p}_x x^2) =$

$= [x^2, \hat{p}_x]\hat{p}_x + \hat{p}_x[x^2, \hat{p}_x];$

$[x^2, \hat{p}_x]\psi(x) = x^2\hat{p}_x\psi(x) - \hat{p}_x x^2\psi(x) = \cancel{-x^2 i\hbar \frac{d\psi}{dx}} + \cancel{x^2 i\hbar\frac{d\psi}{dx}} + 2xi\hbar\psi(x) =$

$\Rightarrow [x^2, \hat{p}_x^2]\psi = 2xi\hbar\hat{p}_x\psi + \hat{p}_x 2xi\hbar\psi = \cancel{2xi\hbar\hat{p}_x + 2\hbar^2}$

$= -2xi\hbar\, i\hbar\frac{d\psi}{dx} - 2i\hbar x i\hbar\frac{d\psi}{dx} - 2xi\hbar\, i\hbar\psi \Rightarrow \cancel{4xi\hbar\hat{p}_x}.$

$\Rightarrow [x^2, \hat{p}_x^2] = 4xi\hbar\hat{p}_x + 2\hbar^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x, [x^2, \hat{p}_x^2]] = [x, 4xi\hbar\hat{p}_x] = 4i\hbar[x, x\hat{p}_x];$

$[x, x\hat{p}_x]\psi = x^2\hat{p}_x\psi - x\hat{p}_x x\psi = \cancel{-x^2 i\hbar\frac{d\psi}{dx}} + \cancel{x^2 i\hbar\frac{d\psi}{dx}} + i\hbar x\psi \Rightarrow$

$\Rightarrow [x, [x^2, \hat{p}_x^2]] = -4x\hbar^2 \Rightarrow [x, [x^2, \hat{p}_x^2]] = -4\hbar^2 x$

№3

$\psi_d(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\,\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ - волнов. ф-ия дейтрона; $\alpha = \frac{\sqrt{mE}}{\hbar}$; E-эн-я связи дейтрона

Вероятность распределения импульса - ?

$a_d(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\psi_d(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int\frac{d^3r}{r}e^{-i\vec{k}\vec{r}-\alpha r} =$

= / выбираю ось z вдоль вектора k и перейдем к сфер. координатам:

$\vec{k}\vec{r} = kr\cos\theta;\quad d^3r = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \quad \int = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\, e^{-ikr\cos\theta}\int_0^{\infty} dr\, r^2\frac{e^{-\alpha r}}{r} =$

$= \frac{1}{ik\sqrt{2\pi\hbar^3}}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_0^{\infty} dr\, e^{-ikr\cos\theta}\Big|_0^{\pi}\, e^{-\alpha r} = \frac{\sqrt{\alpha}}{ik\sqrt{4\pi^2\hbar^3}}\int_0^{\infty} dr\,(e^{ikr} - e^{-ikr})\, e^{-\alpha r} =$

$= \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^3}}\,\frac{1}{ik}\left\{\frac{1}{ik-\alpha}e^{r(ik-\alpha)}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\alpha+ik}e^{-(\alpha+ik)r}\Big|_0^{\infty}\right\} = \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^3}}\,\frac{1}{ik}\left\{\frac{1}{\alpha-ik} - \frac{1}{\alpha+ik}\right\} =$

$$= \cancel{\sqrt{\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^3}}\,\frac{1}{ik}\left\{\frac{\ldots}{\alpha^2 - ik\alpha}\right\}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\hbar^3}}\cdot\frac{1}{ik\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2ik}{\alpha^2+k^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Должно так: $a_\alpha(\vec{p}) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi\hbar^{3/2}}\,\frac{1}{\alpha^2+k^2}$

12

Волновой пакет

$$I(\alpha) = \int dq\, |(\alpha\Delta\hat{F} - i\Delta\hat{G})\Psi|^2 \geq 0 \quad \text{(вводится в } \hat{S} \text{ сост. коорд.)}$$

$$(\alpha\Delta\hat{F} - i\Delta\hat{G})\Psi = 0 \Rightarrow I(\alpha) = 0 \qquad [\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{k} \qquad (1)$$

Тогда $\alpha = \frac{\langle \hat{k} \rangle}{2\langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle}$

Если $\hat{F} = z$; $\hat{G} = p_z$, причём $\langle z \rangle = z_0$; $\langle p_z \rangle = p_0$

то $\Delta\hat{F} = z - z_0$; $\Delta\hat{G} = \hat{p}_z - p_0 = -i\hbar\frac{d}{dz} - p_0$

$[\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar \Rightarrow \hat{k} = \hbar$

Тогда, переписывая (1), получаем

$$\left[\frac{\hbar(z-z_0)}{2\langle(\Delta z)^2\rangle} + i\left(-i\hbar\frac{d}{dz} - p_0\right)\right]\Psi(z) = 0 \qquad \langle\,\rangle \equiv \langle(\Delta z)^2\rangle$$

$$\left[\frac{d}{dz} + \frac{z-z_0}{2\langle\,\rangle} - \frac{ip_0}{\hbar}\right]\Psi(z) = 0$$

$$\frac{d\Psi}{dz} = \left[\frac{ip_0}{\hbar} - \frac{z-z_0}{2\langle\,\rangle}\right]\Psi. \text{ Решая, можно получить:}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\langle\,\rangle}}\exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{4\langle\,\rangle} + \frac{ip_0 z}{\hbar}\right]$$

$$\langle(\Delta p_z)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4\langle\,\rangle} \Rightarrow \langle(\Delta z)^2\rangle\langle(\Delta p_z)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$a(p_z) = \int \Psi(z)\,\Psi_p^*(z)\,dz = \sqrt[4]{\frac{2\langle\,\rangle}{\pi\hbar^2}}\exp\left[-\frac{\langle(\Delta z)^2\rangle(p_z-p_0)^2}{\hbar^2} + \frac{i(p_0-p_z)z}{\hbar}\right]$$

$$\psi_p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p z\right)$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Psi(z,t) = \iint dp\, dz'\, \psi_p\, \psi_p^*(z')\, \Psi(z') \exp\left(-\frac{i p^2 t}{2m\hbar}\right) = \Big/ k = 2m\langle\,\rangle \Big/ =$$

$$= \left[\frac{mk}{\pi(k+i\hbar t)^2}\right]^{1/4} \exp\left[-\frac{(m(z-z_0)-p_0 t)^2 (k-i\hbar t)}{2m(k^2+\hbar^2 t^2)} - \frac{i p_0^2 t}{2m\hbar} + \frac{i p_0 z}{\hbar}\right]$$

$$\langle z(t)\rangle = z + \frac{p_0}{m} t \qquad \langle p(t)\rangle = p_0$$

$$\langle (\Delta z(t))^2 \rangle = \langle (\Delta z)^2 \rangle \left[1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\langle\,\rangle^2}\right] \qquad T = \frac{2m\langle\,\rangle}{\hbar}$$

$$\langle (\Delta p(t))^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4\langle\,\rangle}$$

$\langle\,\rangle$ может быть большое но конечное.

Дисперсия со временем растет $\Rightarrow$ волн. пакет расплывается, это есть следствие принципа неопределенности.

№1

$\psi(x) = C\cdot \exp\left[\frac{i p_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right]$ $\qquad C-?\ \langle x\rangle -?\ \langle x^2\rangle -?$

$\langle p_x\rangle,\ \langle p_x^2\rangle,\ \langle(\Delta x)^2\rangle;\ \langle(\Delta p_x)^2\rangle -?$

$\boxed{a>0}$ $\qquad j_x -?$

Р-ие: 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi(x)|^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow C^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[-\frac{\cancel{2}(x-x_0)^2}{\cancel{2}a^2}\right] = \{x = x_0 + ay\} =$

$= aC^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2} = aC^2\sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow \boxed{C = (\pi a^2)^{-\frac{1}{4}}}$

2) $\langle x\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*_{(x)}\hat{x}\psi_{(x)} = (\pi a^2)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx =$

$= \{x = x_0 + ay\} =$

$= a(\pi a^2)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_0+ay)e^{-y^2}dy = a(\pi a^2)^{-1/2}\left\{x_0\sqrt{\pi} + a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d(-y^2)\, e^{-y^2}\right\} =$

$= a(\pi a^2)^{-1/2}\left(x_0\sqrt{\pi} - ae^{-y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = \sqrt{\pi}^{-1}\left(x_0\sqrt{\pi} - ae^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = \underline{\underline{x_0}}$

т.е. $\boxed{\langle x\rangle = x_0}$

3) $\langle x^2\rangle = (\pi a^2)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2}dx = \{x = x_0+ay\} = (\pi a^2)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, a(x_0+ay)^2 e^{-y^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[x_0^2\sqrt{\pi} + a^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^2 e^{-y^2}\right] = \left\{y^2 = t;\ dy = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt\right\} =$

$= x_0^2 + 2\frac{a^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} dy\, y^2 e^{-y^2} = x_0^2 + \frac{a^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} dt\,\sqrt{t}\,e^{-t} = x_0^2 + \frac{a^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

$$= \left| \Gamma(b) = \int_0^\infty dz\, z^{b-1} e^{-z} \right| = \left| \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi};\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \right| =$$

$$= x_0^2 + \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = x_0^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow \boxed{\langle x^2 \rangle = x_0^2 + \frac{a^2}{2}}$$

4) $$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \left(-i\hbar \frac{d\psi}{dx}\right) = -i\hbar (\pi a^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{\left\{-\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\}} \left(\frac{ip_0}{\hbar} - \frac{(x-x_0)}{a^2}\right) e^{\left\{\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\}} =$$

$$= -i\hbar (\pi a^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{\frac{ip_0}{\hbar} - \frac{(x-x_0)}{a^2}\right\} e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2} = p_0 (\pi a^2)^{-\frac{1}{2}} a \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2} +$$

$$+ i\hbar (\pi a^2)^{-1/2} \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0)}{a^2} e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2} dx} = p_0 \Rightarrow \boxed{\langle p_x \rangle = p_0}$$

~~5) $\hat{p}_x^2$? $\hat{p}_x \hat{p}_x \psi = -i\hbar \frac{d}{dx}\left(i\hbar \frac{d\psi}{dx}\right)$~~

5, 6, 7) — дома

8) $$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi]$$

$$j_x = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx}\right] = \frac{i\hbar}{2m} (\pi a^2)^{-\frac{1}{2}} \left[e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2} \left(-\frac{ip_0}{\hbar} - \cancel{\frac{(x-x_0)}{a^2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{ip_0}{\hbar} - \cancel{\frac{(x-x_0)}{a^2}}\right) e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2} \right] = + \frac{\cancel{i\hbar}}{\cancel{2}m} (\pi a^2)^{-1/2} e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2} \cdot \frac{\cancel{2}ip_0}{\cancel{\hbar}} =$$

$$= \frac{p_0}{m} (\pi a^2)^{-1/2} e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2} = \frac{p_0}{\sqrt{\pi}\, a m} e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2}$$

Т.о. $$\boxed{j_x = \frac{p_0}{\sqrt{\pi}\, m a} \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2\right]}$$

Д/31 пост. то-же, для $\psi(x) = C \cdot \exp[ikx - \alpha^2 x^2]$

~~$\hat{p}_x^2 = \hat{p}_x \hat{p}_x \psi = -i\hbar \frac{d}{dx}\left(-i\hbar \frac{d\psi}{dx}\right) = -\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\psi = \hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$~~

~~$\langle p^2 \rangle = (\pi a^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx$~~ ~~$\hat{p}^2 \psi = \hat{p}_x \hat{p}_x \psi = \hat{p}_x \hat{p} \psi = \hat{p}_x \psi = p \psi$~~

~~5) $\langle p_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \hat{p}_x^2 \psi = \{ \hat{p}_x^2 \psi = p_x^2 \psi$, т.к. ψ есть собств. функ. ф-ия оператора $\hat{p}_x^2$; p_x находится из соотн. $\hat{p}_x \psi = p_x \psi$ ⇒~~

~~⇒ $\hat{p}_x \psi = -i\hbar \left(\frac{i p_0}{\hbar} - \frac{x - x_0}{a^2} \right) \psi = \left(p_0 + i\hbar \frac{(x - x_0)}{a^2} \right) \psi$~~

5) $\langle p_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \hat{p}_x^2 \psi = \left\{ \hat{p}_x^2 \psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \right\} =$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \frac{\hbar^2}{\sqrt{\pi a^2}} e^{\left(-\frac{i p_0 x}{\hbar} - \frac{(x - x_0)^2}{2a^2} \right)} \left\{ e^{\left(\frac{i p_0 x}{\hbar} - \frac{(x - x_0)^2}{2a^2} \right)} \right\}''_x =$$

$$= \left\{ \psi'' = \left\{ \left(\frac{i p_0}{\hbar} - \frac{(x - x_0)}{a^2} \right) \psi \right\}' = -\frac{1}{a^2} \psi + \left(\frac{i p_0}{\hbar} - \frac{x - x_0}{a^2} \right)^2 \psi \right\} =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{\sqrt{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[-\frac{1}{a^2} + \left(\frac{i p_0}{\hbar} - \frac{x - x_0}{a^2} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{x - x_0}{a^2} \right)^2} = \frac{\hbar^2}{\sqrt{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{a^2} + \frac{p_0^2}{\hbar^2} + \cancel{2 \frac{i p_0}{\hbar} \left(\frac{x - x_0}{a^2} \right)} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{x - x_0}{a^2} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2} = \frac{\hbar^2}{\sqrt{\pi a^2}} \cdot \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{p_0^2}{\hbar^2} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2} -$$

$$- \frac{\hbar^2}{a^2 \sqrt{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 e^{-\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2} dx = J;$$

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2} = a \int_{-\infty}^{+\infty} d\left(\frac{x - x_0}{a} \right) e^{-\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2} = a\sqrt{\pi}$;

б) $a \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 e^{-\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2} d\left(\frac{x - x_0}{a} \right) = a \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \cancel{a \frac{1}{3} \int e^{-y^2} dy^3} =$

$$= \cancel{\frac{a}{3} y^3 e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2a}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} y^4 e^{-y^2}} = 2a \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \{ y^2 = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y\,dy = dt;\ y = \sqrt{t} \} = a \int_0^{+\infty} t\, e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = a \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-t} dt =$$

$$= \left\{ \Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} dt\, t^{\beta - 1} e^{-t} \right\} = a\Gamma\left(\tfrac{3}{2} \right) = \{ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \} = a\Gamma\left(1 + \tfrac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{a}{2} \Gamma\left(\tfrac{1}{2} \right) = \frac{a\sqrt{\pi}}{2};\ \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \left[\frac{\hbar^2}{a^2\sqrt{\pi a^2}}\, a\sqrt{\pi} + \frac{p_0^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\hbar^2}{\sqrt{\pi a^2}}\sqrt{\pi a^2}\right] - \frac{\hbar^2}{a^2\sqrt{\pi a^2}}\cdot\frac{a\sqrt{\pi}}{2} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{a^2} + p_0^2 - \frac{\hbar^2}{2a^2} = p_0^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}$$

Т.е. $\boxed{\langle p_i^2\rangle = p_0^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}}$

6) $\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle(x-x_0)^2\rangle = \{x_0 = \langle x\rangle\} = \langle x^2 - 2xx_0 + x_0^2\rangle = \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle^2 + \langle x\rangle^2$

$= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = x_0^2 + \frac{a^2}{2} - x_0^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \boxed{\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{a^2}{2}}$

7) $\langle(\Delta p)^2\rangle = $ /аналогично пункту 6/ $= p_0^2 + \frac{\hbar^2}{a^2} - p_0^2 = \frac{\hbar^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{\langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{a^2}}$

№1

20.03.12

волн. функц. водорода

$$\psi_H(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\, e^{-\frac{r}{a_0}} \quad ; \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$ Вероятность распр. импульса — ?

Реш: $a(\vec p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\; e^{-i\vec k\vec r}\,\psi_H(r)$;

$$\int d\Omega\, e^{-i\vec k\vec r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cdot e^{-ikr\cos\theta} = +\frac{2\pi}{ikr}\int_0^{\pi} d(-ikr\cos\theta)\, e^{-ikr\cos\theta} =$$

$$= \frac{2\pi}{ikr}\, e^{-ikr\cos\theta}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{ikr}\left[e^{ikr} - e^{-ikr}\right] = \frac{4\pi\sin kr}{kr} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(\vec p) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\,\frac{4\pi}{k(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_0^{\infty} dr\; r\cdot \sin kr\cdot e^{-\frac{r}{a_0}} = -\frac{4}{k\pi(2\hbar a_0)^{3/2}}\,\frac{d}{dk}\int_0^{\infty} dr\,\cos kr\, e^{-\frac{r}{a_0}} =$$

$$= -\frac{4}{k\pi(2\hbar a_0)^{3/2}}\,\frac{d}{dk}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} dr\, e^{\left(-\frac{r}{a_0}+ikr\right)} = -\frac{4}{k\pi(2\hbar a_0)^{3/2}}\,\frac{d}{dk}\mathrm{Re}\; e^{\left(-\frac{r}{a_0}+ikr\right)}\Big|_0^{\infty}\left(\frac{1}{-\frac{1}{a_0}+ik}\right) =$$

$$= +\frac{4}{k\pi(2\hbar a_0)^{3/2}}\,\frac{d}{dk}\mathrm{Re}\,\frac{a_0}{ika_0 - 1} = -\frac{4a_0}{k\pi(2\hbar a_0)^{3/2}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{i a}{(ika-1)^2}\right].$$

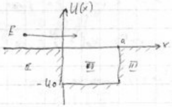
$$= \frac{d}{dk}\mathrm{Re}\frac{(+1+ika_0)}{1+k^2a_0^2} = -\frac{4a_0}{k\pi(2\hbar a_0)^{3/2}}\,\frac{d}{dk}\,\frac{1}{(1+k^2a_0^2)} = +\frac{4a_0}{\pi(2\hbar a_0)^{3/2}}\cdot\frac{2ka_0^2}{(1+k^2a_0^2)^2} =$$

$$= \frac{(2a_0)^3}{\pi\,(2\hbar a_0)^{3/2}\,(1+k^2a_0^2)^2} = \left(\frac{2a_0}{\hbar}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{\pi(1+k^2a_0^2)^2}$$

Т.е. для атома водорода получили такое импульсное распределение: $a(\vec{p}) = \left(\frac{2a_0}{\hbar}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{\pi(1+k^2a_0^2)^2}$

№2

$$U(x) = \begin{cases} 0; \ x<0, \ x>a \\ -U_0; \ x\in[0,a] \end{cases} \Rightarrow$$



$U_0>0; \ E>0; \ D-?$

Р-ие:
$$\begin{cases} \psi_I = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx} \\ \psi_{II} = B_1e^{i\varkappa x} + B_2e^{-i\varkappa x} \\ \psi_{III} = Ce^{ikx} \end{cases}, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \ \varkappa = \frac{\sqrt{2m(E+U_0)}}{\hbar}$$

$$D = \left|\frac{C}{A_1}\right|^2.$$

гр. усл.:
$$\begin{cases} A_1+A_2 = B_1+B_2 \\ A_1-A_2 = \frac{\varkappa}{k}(B_1-B_2) \\ B_1e^{i\varkappa a} + B_2e^{-i\varkappa a} = Ce^{ika} \\ B_1e^{i\varkappa a} - B_2e^{-i\varkappa a} = \frac{k}{\varkappa}Ce^{ika} \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[B_1\left(1+\frac{\varkappa}{k}\right) + B_2\left(1-\frac{\varkappa}{k}\right)\right]$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[C\left(1+\frac{k}{\varkappa}\right)\right]e^{-i\varkappa a} = \frac{Ce^{-i\varkappa a}}{2}\left(1+\frac{k}{\varkappa}\right)e^{ika}$$

$$B_2 = \frac{C}{2}e^{i\varkappa a}\left(1-\frac{k}{\varkappa}\right)e^{ika}$$

$$\Rightarrow A_1 = e^{ika}\frac{C}{4}\left[e^{-i\varkappa a}\left(1+\frac{\varkappa}{k}\right)\left(1+\frac{k}{\varkappa}\right) + e^{i\varkappa a}\left(1-\frac{\varkappa}{k}\right)\left(1-\frac{k}{\varkappa}\right)\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ {выр-е аналогично, как и для барьера – см. лекцию} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{1+\left(\frac{(\varkappa^2-k^2)}{2k\varkappa}\sin\varkappa a\right)^2}$$

$\sqrt{3}$

$U(x) = -a\,\delta(x)$, $a > 0$ — найти нормированную волн. ф-цию дискр. спектра

Ур-ие: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - a\delta(x)\psi = E\psi(x)$

Ищем р-ие в виде $\psi(x) = \begin{cases} A e^{\varkappa x}, & x<0 \\ B e^{-\varkappa x}, & x>0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \; E<0 \\ E = -\frac{\hbar^2}{2m}\varkappa^2;\ \varkappa>0 \Rightarrow \psi'' = \varkappa^2\psi \end{cases}$

Усл-е нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx = 1$;

$\int\limits_{-\infty}^{0}dx|A|^2 e^{2\varkappa x} + |B|^2\int\limits_{0}^{+\infty}dx\, e^{-2\varkappa x} = $ {из усл. сшивки в $x=0$ $A=B$} $=$

$= |A|^2\left\{\frac{1}{2\varkappa}e^{2\varkappa x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2\varkappa}e^{-2\varkappa x}\Big|_{0}^{\infty}\right\} = |A|^2\left\{\frac{1}{2\varkappa} + \frac{1}{2\varkappa}\right\} = \frac{|A|^2}{\varkappa} = 1 \Rightarrow |A|^2 = \varkappa \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{\varkappa}$

Замечание: в $x=0$ ψ'' долж. исп. скачок (из ур-я Шредингера).

$-\varepsilon < x < \varepsilon$; $\varepsilon > 0$; $\varepsilon = o(1)$. Интегрируем ур-е Шред., после чего $\varepsilon \to 0$.

$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'(\varepsilon) + \frac{\hbar^2}{2m}\psi'(-\varepsilon) = a\psi(0)$

$\left\{ E\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}dx\,\psi(x) = 2\varepsilon E\,\psi(0) = \{\varepsilon\to 0\} = 0 \right\}$
по th о среднем

$\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon) = -\frac{2ma}{\hbar^2}\psi(0)$; $\qquad \begin{matrix}\psi'(\varepsilon) = -A\varkappa e^{-\varkappa\varepsilon} \\ \psi'(-\varepsilon) = A\varkappa e^{\varkappa\varepsilon}\end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A\varkappa\left(e^{\varkappa\varepsilon} + e^{-\varkappa\varepsilon}\right) = \frac{2ma}{\hbar}\psi(0)$ $\quad$; $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \{\psi(0) = A\} \Rightarrow$

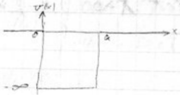
$\Rightarrow \varkappa = \frac{2ma}{2\hbar^2} \Rightarrow \varkappa = \frac{ma}{\hbar^2}$

$$\boxed{E = -\frac{\hbar^2 \varkappa^2}{2m} = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2}}$$ – один энерг. ур-нь в яме.

27.03.12

$\sqrt{1}$

$0 \le x \le a \rightarrow \Psi(x) = C \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$; $\langle E \rangle, \langle (\Delta E)^2 \rangle$ – ? C – ?



– глуб. яма

Р-ние: (1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x)\Psi(x)\,dx = 1 \Rightarrow |C|^2 \int\limits_0^a \sin^4 \frac{\pi x}{a}\,dx = 1$;

$$\int\limits_0^a \sin^4 \frac{\pi x}{a}\,dx = \int\limits_0^a \frac{\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)^2}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^a \left[1 - 2\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{a}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^a \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^a \frac{1+\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)}{2}\,dx = \ldots = \frac{3a}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \sqrt{\frac{8}{3a}}}, \text{ т.е. } \Psi(x) = \sqrt{\frac{8}{3a}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

(2) $\langle E \rangle = \int\limits_0^a dx\, \Psi^*(x)\, \hat{H}\, \Psi(x) = \left\{ \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \right\} =$

$$= -\frac{8}{3a}\int\limits_0^a dx\, \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = -\frac{\hbar^2}{3am}\int\limits_0^a \left(1-\cos 2\frac{\pi x}{a}\right) \frac{d^2}{dx^2}\left(1-\cos 2\frac{\pi x}{a}\right) =$$

$$= -\frac{4\pi^2}{a^2}\frac{\hbar^2}{3am}\int\limits_0^a \left(1-\cos 2\frac{\pi x}{a}\right)\cos 2\frac{\pi x}{a}\,dx = \frac{2\cdot 4\pi^2\hbar^2}{3a^3 m}\int\limits_0^a \left(\frac{1+\cos 4\frac{\pi x}{a}}{2}\right) dx =$$

$$= \boxed{\langle E \rangle = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2 m}}$$

③ $\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$

$$\langle E^2 \rangle = \int_0^a dx\, \psi^*_{(x)} \frac{\hbar^4}{4m^2} \frac{d^4}{dx^4} \psi_{(x)}$$

Финт: $\int dx \left(\psi^* \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi = \{\hat{p}^2 \text{ - эрм. оп.}\} = \int dx \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi \right|^2 \Rightarrow$ {и это доп. св. так - док. поймут}

$$\Rightarrow \langle E^2 \rangle = \frac{8}{3a} \int_0^a \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \left(1 - \cos 2\frac{\pi x}{a}\right) \right|^2 dx = \frac{8}{3a} \int_0^a \left| \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cos 2\frac{\pi x}{a} \right|^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3a} \frac{\hbar^4}{4m^2} \frac{16\pi^4}{a^4} \int_0^a \frac{1 - \cos 4\frac{\pi x}{a}}{2} dx = \frac{4\pi^4 \hbar^4}{3a^4 m^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle (\Delta E)^2 \rangle = \frac{8}{9} \frac{\pi^4 \hbar^4}{a^4 m^2}}$$

№2

$\psi(x) = C \exp\left[\frac{i p_0 x}{\hbar}\right] \varphi(x)$; $\varphi(-\infty) = \varphi(\infty) = 0$; $\varphi(x)$ - хор. ф-ция

C - ? $\langle p_x \rangle$ - ?

Р-ие: $C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow C = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\varphi(x)|^2 \right)^{-1/2}$;

$$\langle p_x \rangle = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi^* (-i\hbar) \left[\frac{d\varphi}{dx} + \frac{i p_0}{\hbar}\varphi\right] = -i\hbar C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi^* \frac{d\varphi}{dx} + C^2 p_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 dx = \{\text{пусть } \varphi \in Re\} =$$

$$= p_0 - i\hbar C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\, d\varphi = p_0$$

Ответ: $C = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\varphi(x)|^2 \right)^{-1/2}$; $\langle p_x \rangle = p_0$

$\sqrt{3}$

$$[\hat{l}_x, \alpha\vec{r} + \beta\vec{\hat{p}}] = ?$$

$$[\hat{l}_x, \vec{r}] = [\hat{l}_x, \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z] = \vec{e}_y iz - \vec{e}_z iy$$

$$[\hat{l}_x, \vec{\hat{p}}] = [\hat{l}_x, \vec{e}_x \hat{p}_x + \vec{e}_y \hat{p}_y + \vec{e}_z \hat{p}_z] = \vec{e}_y i\hat{p}_z - \vec{e}_z i\hat{p}_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\hat{l}_x, \alpha\vec{r} + \beta\vec{\hat{p}}] = i\alpha(\vec{e}_y z - \vec{e}_z y) + i\beta(\vec{e}_y \hat{p}_z - \vec{e}_z \hat{p}_y)$$

$\sqrt{4}$

$$\langle \hat{l}_x^2 \rangle, \langle \hat{l}_y^2 \rangle, \langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle - ?$$

__Р-ие:__ $\langle l_x \rangle = \langle l_y \rangle = 0$ {т.к. работаем в представлении, где $\hat{l}_z$ - диаг. → там l_y и $\hat{l}_x$ недиаг.}

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y \; ; \quad \langle \hat{l}_+ \rangle = 0$$

$$\hat{l}_+^2 = \hat{l}_x^2 + i\hat{l}_x \hat{l}_y - \hat{l}_y^2 + i\hat{l}_y \hat{l}_x$$

$$\hat{l}_+ \psi_{lm} \sim (m+1)\psi_{lm+1} \Rightarrow \hat{l}_+^2 \psi_{lm} \sim (m+1)(m+2)\psi_{lm+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \psi_{lm}^* \hat{l}_+^2 \psi_{lm} \, d^3r = \int (m+1)(m+2)\psi_{lm}\psi_{lm+2} \, d^3r = 0 \Rightarrow \boxed{\langle \hat{l}_+^2 \rangle = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \hat{l}_x^2 \rangle + i\langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle + i\langle \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle - \langle \hat{l}_y^2 \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \hat{l}_x^2 \rangle = \langle \hat{l}_y^2 \rangle \\ \langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle = -\langle \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle \end{cases}$$

$$\langle \hat{\vec{l}}^2 \rangle = l(l+1)$$

С др. стороны $\langle \hat{\vec{l}}^2 \rangle = \langle \hat{l}_x^2 \rangle + \langle \hat{l}_y^2 \rangle + \langle \hat{l}_z^2 \rangle = 2\langle \hat{l}_x^2 \rangle + m^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \hat{l}_x^2 \rangle = \frac{l(l+1)-m^2}{2} = \langle \hat{l}_y^2 \rangle}$$

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = \hat{l}_x \hat{l}_y - \hat{l}_y \hat{l}_x = i \hat{l}_z \ ;$$

$$\langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle - \langle \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle = i \langle \hat{l}_z \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle = i m \Rightarrow \boxed{\langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle = \frac{im}{2} = -\langle \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle}$$

Д/з: $[\hat{l}_i, \vec{r}^{\,2}]$; $[\hat{l}_i, \hat{\vec{p}}^{\,2}]$; $[\hat{l}_x, (\vec{r}\hat{\vec{p}})]$ - ?

№1: Знаем $[\hat{l}_x, \vec{r}] = \vec{e}_y iz - \vec{e}_z iy$;

$$[\hat{l}_x, \vec{r}^{\,2}] = \hat{l}_x r^2 - r^2 \hat{l}_x + \vec{r}\hat{l}_x\vec{r} - \vec{r}\hat{l}_x\vec{r} = (\hat{l}_x\vec{r} - \vec{r}\hat{l}_x)\vec{r} + \vec{r}(\hat{l}_x\vec{r} - \vec{r}\hat{l}_x) =$$

$$= (\vec{e}_y iz - \vec{e}_z iy)(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z) + \vec{r}(\vec{e}_y iz - \vec{e}_z iy) =$$

$$= izy - izy + izy - izy = 0$$

№2: $[\hat{l}_x, \hat{\vec{p}}^{\,2}] = [\hat{l}_x, \hat{\vec{p}}]\hat{\vec{p}} + [\hat{l}_x, \hat{\vec{p}}]\hat{\vec{p}} = (\vec{e}_y i\hat{p}_z - \vec{e}_z i\hat{p}_y)(\vec{e}_x\hat{p}_x + \vec{e}_y\hat{p}_y + \vec{e}_z\hat{p}_z) +$

$+ \ldots = \{[p_i, p_j] = 0\} = 0$

№3: $[\hat{l}_x, (\vec{r}\hat{\vec{p}})] = \hat{l}_x\vec{r}\hat{\vec{p}} - \vec{r}\hat{\vec{p}}\hat{l}_x = \cancel{// \ \vec{r}\hat{\vec{p}} - \hat{\vec{p}}\vec{r} = 3i\hbar //}$

$\cancel{= \hat{l}_x 3i\hbar - (\hat{l}_x\hat{\vec{p}}\vec{r} + \vec{r}\hat{\vec{p}}\hat{l}_x) = 3i\hbar\hat{l}_x - (\hat{l}_x\hat{\vec{p}}\vec{r} + \vec{r}\hat{\vec{p}}\hat{l}_x - \vec{r}\hat{l}_x\vec{r} - \vec{r}\hat{l}_x)}$

$$= \hat{l}_x\vec{r}\hat{\vec{p}} - \vec{r}\hat{\vec{p}}\hat{l}_x + \vec{r}\hat{l}_x\hat{\vec{p}} - \vec{r}\hat{l}_x\hat{\vec{p}} = (\hat{l}_x\vec{r} - \vec{r}\hat{l}_x)\hat{\vec{p}} + \vec{r}(\hat{l}_x\hat{\vec{p}} - \hat{\vec{p}}\hat{l}_x) =$$

$$= (\vec{e}_y iz - \vec{e}_z iy)(\vec{e}_x\hat{p}_x + \vec{e}_y\hat{p}_y + \vec{e}_z\hat{p}_z) + (\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z)(\vec{e}_y i\hat{p}_z - \vec{e}_z i\hat{p}_y) =$$

$$= iz\hat{p}_y - iy\hat{p}_z + iy\hat{p}_z - iz\hat{p}_y = 0$$

3.04.12

№1

$\langle r\rangle, \langle r^2\rangle$ – ? для осн. сост. атома водорода.

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

1) $\langle r\rangle = \int d^3r\, \psi^*(r)\, r\, \psi(r) = \frac{4\pi}{\pi a_0^3} \int\limits_0^\infty dr\, r^3 e^{-\frac{2r}{a_0}} = \Big/ \frac{2r}{a_0} = \rho$ - введём безразмерную переменную; $dr = \frac{a_0}{2} d\rho \Big/ = \frac{4}{a_0^3} \int\limits_0^\infty d\rho\, \rho^3 \left(\frac{a_0}{2}\right)^4 e^{-\rho} =$

$= \frac{a_0}{4} \int\limits_0^{+\infty} d\rho\, \rho^3 e^{-\rho} = \frac{a_0}{4} \Gamma(4) = \frac{3}{2} a_0 \Rightarrow \boxed{\langle r\rangle = \frac{3}{2} a_0}$

$\Gamma(t) = \int\limits_0^\infty dt\, t^{t-1} e^{-t}$

2) $\langle r^2\rangle = \frac{4}{a_0^3} \int\limits_0^\infty d^4r\; r^4 e^{-\frac{2r}{a_0}} = \Big/ \frac{2r}{a_0} = \rho \Big/ = \frac{4}{a_0^3} \int\limits_0^\infty \left(\frac{a_0}{2}\right)^5 d\rho\, \rho^4 e^{-\rho} =$

$\Gamma \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

$= \frac{a_0^2}{8} \int\limits_0^\infty d\rho\, \rho^{5-1} e^{-\rho} = \frac{a_0^2}{8} \Gamma(5) = \frac{24}{8} a_0^2 = 3 a_0^2$

№2

(l, m); $\langle \hat{l}_{z'}\rangle$, $\langle \hat{l}_{z'}^2\rangle$, $\langle \Delta \hat{l}_{z'}^2\rangle$ – ? $\angle(z, z') = \theta$

<u>Р-ие:</u> $\hat{l}_{z'} = \cos\theta\, \hat{l}_z + \sin\theta\cos\varphi\, \hat{l}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \hat{l}_y$

Т.к. раб. там, где $\hat{l}_z$ и $\hat{l}^2$ - диаг. $\Rightarrow \langle l_x\rangle = \langle l_y\rangle = 0$

$$\boxed{\langle \hat{l}_{z'}\rangle = \cos\theta \langle \hat{l}_z\rangle = m\cos\theta}$$

$\langle \hat{l}_{z'}^2\rangle$ = ?

$\langle \hat{l}_{z'}\rangle^2 = \cos^2\theta \langle \hat{l}_z^2\rangle + \sin^2\theta \left[\langle\cos^2\varphi\rangle\langle \hat{l}_x^2\rangle + \langle\sin^2\varphi\rangle\langle \hat{l}_y^2\rangle\right] =$

$= \cos^2\theta \cdot m^2 + \frac{1}{2}\sin^2\theta \left[\langle \hat{l}_x^2\rangle + \langle \hat{l}_y^2\rangle\right] = \boxed{m^2\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\left[l(l+1) - m^2\right] = \langle \hat{l}_{z'}^2\rangle}$

$$\boxed{\langle \Delta \hat{l}_{z'}^2\rangle = \langle \hat{l}_{z'}^2\rangle - (\langle \hat{l}_{z'}\rangle)^2 = \frac{\sin^2\theta}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]}$$

№3

$\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ в сфер. координатах. — ?

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right. \rightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{aligned}\right.$$

$$\hat{l}_x = -iy\frac{\partial}{\partial z} + iz\frac{\partial}{\partial y};$$
$$\hat{l}_y = -iz\frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi}; \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = \dots$$

$$\left\{\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin\theta\sin\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos\theta \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\cdot\frac{1}{z}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{z^2}\frac{x}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}} = \frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r^2\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} &= -\frac{\sin\theta}{r} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{r^2\frac{(x^2+y^2)}{z^2}} = \frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r^2\cos^2\theta\,\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\sin^2\theta}{r\sin\varphi} \end{aligned}\right.$$

Тогда: $\hat{l}_x = -i\,(r\sin\theta\sin\varphi)\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + i\,r\cos\theta\,\cdot$

$\cdot\left[\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] = \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{l}_x = i\left[\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]}$$

$$\boxed{\hat{l}_y = i\left[-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]}$$

$$\boxed{\hat{l}_\pm = \exp[\pm i\varphi]\left\{\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}}$$

Д/з: $[\hat{l}_i, a] = 0$, где a - произвольная скалярная ф-ия.

$\hbar[\hat{l}_x, f(\vec{r},\hat{\vec{p}})]\psi = (y\hat{p}_z - z\hat{p}_y)f(\vec{r},\hat{\vec{p}})\psi - f(\vec{r},\hat{\vec{p}})(y\hat{p}_z - z\hat{p}_y)\psi =$

$= i\hbar\left[z\frac{\partial}{\partial y}f - y\frac{\partial f}{\partial z}\right]\psi = i\hbar\left[z\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\vec{e}_y + z\frac{\partial f}{\partial\hat{\vec{p}}}\frac{\partial}{\partial y}\hat{\vec{p}} -\right.$

$\left.- y\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}\vec{e}_z - y\frac{\partial f}{\partial\hat{\vec{p}}}\frac{\partial}{\partial z}\hat{\vec{p}}\right]\psi = \left\{i\hbar\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}[z\vec{e}_y - y\vec{e}_z] +\right.$

$\cancel{+\frac{\partial f}{\partial\hat{\vec{p}}}\hat{\vec{p}}[+y\hat{p}_z + z\hat{p}_y]\}\psi = \{i\hbar\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}[z\vec{e}_y - y\vec{e}_z] + i\hbar\frac{\partial f}{\partial\hat{\vec{p}}}[e}$

$\left.+\frac{\partial f}{\partial\hat{\vec{p}}}[y\hat{p}_z\hat{\vec{p}} - z\hat{p}_y\hat{\vec{p}}]\right\}\psi = \{ч$

$= \{i\hbar\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}[z\vec{e}_y - y\vec{e}_z]$

10.04.12

№1

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

$$[\hat{l}_i, x_j] = i\varepsilon_{ijk}x_k \quad ; \quad [\hat{l}_i, \hat{p}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{p}_k$$

$$[\hat{l}_i, \hat{r}^2] = [\hat{l}_i, x_j x_j] = [\hat{l}_i, x_j]x_j + x_j[\hat{l}_i, x_j] = i\varepsilon_{ijk}x_k x_j + i x_j \varepsilon_{ijk} x_k =$$

$$= 2i\varepsilon_{ijk}x_j x_k \Rightarrow 2i[\vec{r},\vec{r}] = 0$$

№2

Найти вероятность распр. импульсов для част., нах. в глуб. пот. яме (прямоуг)

$$\psi_n^{(+)} = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi n x}{a}, \text{ где } n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\psi_n^{(-)} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}, \text{ где } n = 2, 4, 6, \ldots$$

$$a(\vec{p}) = \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \psi_p^*(x)\,\psi_n(x), \text{ где } \psi_p^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(\vec{p}) = \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-a/2}^{a/2} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}\cos\frac{\pi n x}{a} = \left|\cos\frac{\pi n x}{a} = \frac{e^{i\frac{\pi n x}{a}} + e^{-i\frac{\pi n x}{a}}}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a\pi\hbar}}\int_{-a/2}^{a/2} dx \left\{e^{-i\left(\frac{p}{\hbar} - \frac{\pi n}{a}\right)x} + e^{-i\left(\frac{p}{\hbar} + \frac{\pi n}{a}\right)x}\right\} = \ldots =$$

$$= \frac{a\hbar}{\sqrt{\pi\hbar a}}\left\{\frac{\sin\left(\frac{pa}{2\hbar} - \frac{\pi n}{2}\right)}{pa - \pi n\hbar} + \frac{\sin\left(\frac{pa}{2\hbar} + \frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n\hbar + pa}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}a\hbar}{\sqrt{\pi\hbar a}}\left\{\frac{\cos\frac{pa}{2\hbar}}{pa - \pi n\hbar} - \frac{\cos\frac{pa}{2\hbar}}{\pi n\hbar + pa}\right\} = \ldots =$$

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\boxed{a^+(p) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2n\sqrt{\pi a\hbar^3}\cos\frac{pa}{2\hbar} \Big/ p^2a^2 - \pi^2 n^2\hbar^2} \qquad |a^+(p)|^2 = \frac{4\pi n^2 a\hbar^3\cos^2\frac{pa}{2\hbar}}{(p^2a^2 - \pi^2 n^2\hbar^2)^2}$$

$$\boxed{-}: \quad a^-(p) = -\frac{2n\,(-1)^{\frac{n}{2}}\sin\frac{pa}{2\hbar}}{p^2a^2 - \pi^2 n^2\hbar^2}\sqrt{\pi a\hbar^3} \qquad |a^-(p)|^2 = \frac{4\pi n^2 a\hbar^3\sin^2\frac{pa}{2\hbar}}{(p^2a^2 - \pi^2 n^2\hbar^2)^2}$$

$$\sqrt{3}$$

$l = 1\ ;\quad m = 0;\ \pm 1$

Вероятность различных значений проекции мом. на ось z', причём $\angle z, z' = \theta$.

Р-ие: $\langle \hat{l}_{z'} \rangle = m\cos\theta\ ;\quad \langle \hat{l}_{z'}^2 \rangle = m^2\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}[l(l+1) - m^2] =$

$= m^2 + \left(1 - \frac{3m^2}{2}\right)\sin^2\theta$

$\langle \hat{l}_{z'} \rangle = \sum_m \omega(m)\, m = w(+1) - w(-1) = \cancel{m\cos\theta}$

$\langle \hat{l}_{z'}^2 \rangle = \sum_m \omega(m)\, m^2 = \omega(+1) + w(-1) \cancel{= m^2 + \left(1 - \frac{3m^2}{2}\right)\sin^2\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega(+1) = \dfrac{\langle \hat{l}_{z'} \rangle + \langle \hat{l}_{z'}^2 \rangle}{2} \\ \omega(-1) = \dfrac{\langle \hat{l}_{z'}^2 \rangle - \langle \hat{l}_{z'} \rangle}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\omega(+1) = \frac{1}{2}\left[m^2 + \left(1 - \frac{3m^2}{2}\right)\sin^2\theta + m\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad \omega(-1) = \frac{1}{2}\left[m^2 + \left(1 - \frac{3m^2}{2}\right)\sin^2\theta - m\cos\theta\right]$$

$$\omega(0) = 1 - \omega(+1) - \omega(-1) = 1 - m^2 - \left(1 - \frac{3m^2}{2}\right)\sin^2\theta$$

$$\omega(0) = \cos^2\theta - m^2 + \frac{3m^2}{2}\sin^2\theta = \frac{m^2}{2} + \left(1 - \frac{3m^2}{2}\right)\cos^2\theta$$

Замечание! $\omega(+1) \neq 1$ при $m = 1$, т.к. $\omega(+1)$ – это вероятность проекции мом. на ось z' при $m' = 1$, а $m = 1$ соотв. проекции мом. на ось z.

(Теория ~~возбуждений~~ возмущений Бриллюэна – Вигнера) §4.4 (стр. 574)

Отличие от ~~...~~ способа Релея-Шредингера – величины не будут разлагаться ~~по ...~~ в ряды по степеням малого параметра, т.е. не будут фигурировать такие ф-ии, как $\psi_n^{(i)}$ и $E_n^{(i)}$, где $i=1,2,\ldots$

Стартуем с ур-й следующего вида:

$$(\hat{H}_0 + \hat{V})\psi_n = E_n \psi_n, \quad \text{где} \quad \hat{H}_0 \psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(0)}, \text{ т.е}$$

$\hat{H}_0$ - часть гамильтониана, кот. дает точное р-ие задачи, что и отражено во 2-м ур-е.

Замечание: спектр считаем дискретным и невырожденным.

$E_n^{(0)}$ и $\psi_n^{(0)}$ считаем известными; E_n – ?

$\psi_n^{(0)}$ – полн. ортог. сист. ф-ий $\Rightarrow$ разлагаем ψ_n по $\psi_m^{(0)}$:

$$\boxed{\psi_n = \sum_m C_{mn} \psi_m^{(0)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_m C_{mn} (\hat{H}_0 + \hat{V}) \psi_m^{(0)} = \sum_m C_{mn} E_n \psi_m^{(0)} \quad \Big/ \text{ умн. слева на } \psi_k^{(0)*} \text{ и } \int \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_m C_{mn} \left(E_m^{(0)} \delta_{km} + V_{km} \right) = \sum_m C_{mn} E_n \delta_{km} \Rightarrow \text{имеем сист.}$$

ур-й относ. C_{in}, кот. имеет нетрив. р-ия только в случае, когда:

$$\mathrm{Det}\left[E_m^{(0)} \delta_{km} + V_{km} - E_n \delta_{km} \right] = 0$$

Допустим, выполняется усл-е следующего вида:

$$|V_{nm}| \ll | E_n^{(0)} - E_m^{(0)} |$$

Замечание 51: на самом деле это условие малости возмущений → детальнее смотри лекцию

Тогда:

Замечание 52: Когда мы умн. на $\psi_k^{(0)*}$ к проходящим с 1 до кол-ва волн. ф-ий в дискр. спектре (кол-ва ур-ий дискр. спектра), в рез-те чего и выходит ∞ сист. однор. лин. алгебр. ур-й:

Домножаем на: $\psi_1^{(0)*}$, $\psi_2^{(0)*}$, ..., $\psi_n^{(0)*}$, ...

$$\begin{cases} C_{1n}\left[E_1^{(0)} + V_{11} - E_n\right] + C_{2n}V_{12} + \ldots + C_{nn}V_{1n} + \ldots = 0 \\ C_{1n}V_{21} + C_{2n}\left[E_2^{(0)} + V_{22} - E_n\right] + \ldots + C_{nn}V_{2n} + \ldots = 0 \\ \ldots \\ C_{1n}V_{n1} + C_{2n}V_{n2} + \ldots + C_{nn}\left[E_n^{(0)} + V_{nn} - E_n\right] + \ldots = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

- 1-е приближение: пренебрегаем V_{ij}

$$\boxed{E_n = E_n^{(0)} + V_{nn}}$$

- 2-е приближение: пренебрегаем всеми недиагон. эл-тами кроме V_{in} и V_{ni}

$$\begin{vmatrix} E_1^{(0)} - V_{11} - E_n & 0 & \ldots & V_{1n} & \ldots \\ 0 & E_2^{(0)} - V_{22} - E_n & \ldots & V_{2n} & \\ \ldots & & & & \\ V_{n1} & V_{n2} & \ldots & E_n^{(0)} - V_{nn} - E_n & \\ \ldots & & & & \end{vmatrix} = 0$$

Домножим 1-й ряд на $\frac{V_{n1}}{E_1^{(0)}-V_{11}-E_n}$ и вычтем его из n-го ряда:

$$\begin{vmatrix} V_{m1} & 0 & \cdots & \frac{V_{1n} \cdot V_{n1}}{E_1^{(0)}+V_{11}-E_n} & \cdots \\ 0 & E_2^{(0)}-V_{22}-E_n & \cdots & V_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & V_{n2} & \cdots & E_n^{(0)}+V_{nn}-E_n-\frac{|V_{n1}|^2}{E_1^{(0)}+V_{11}-E_n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Домножим 2-й ряд на $\frac{V_{n2}}{E_2^{(0)}-V_{22}-E_n}$ и вычтем его из n-го ряда:

$$\begin{vmatrix} V_{n1} & 0 & \cdots & |V_{n1}|^2/E_1^{(0)}+V_{11}-E_n & \cdots \\ 0 & V_{n2} & \cdots & |V_{n2}|^2/E_2^{(0)}+V_{22}-E_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_n^{(0)}+V_{nn}-E_n-\frac{|V_{n1}|^2}{E_1^{(0)}+V_{11}-E_n}-\frac{|V_{n2}|^2}{E_2^{(0)}+V_{22}-E_n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Замечание: $\hat{V}$ - эрмитовский оп. $\Rightarrow V_{in} = V_{ni}^*$ $\Rightarrow V_{in} \cdot V_{ni} = |V_{ni}|^2$

Продолжая по аналогии (т.е. продолжая занятие обнуления недиагон. эл-тов n-го строки) получаем (обратно домножив конец из строк):

$$(E_1^{(0)}+V_{11}-E_n)\cdot(E_2^{(0)}+V_{22}-E_n)\cdots\left\{E_n^{(0)}+V_{nn}-E_n+\sum_m{}' \frac{|V_{nm}|^2}{E_n-E_m^{(0)}-V_{mm}}\right\}\cdots = 0$$

Если $E_n^{(0)}$ - невырожд. ур-нь, то в 0 может обращаться выр-е лишь в фиг. скобках:

$$\cancel{E_n^{(0)}+V_{nn}-E_n+\sum_m{}'\frac{|V_{nm}|^2}{E_n-E_m}} \quad E_n = E_n^{(0)}+V_{nn}+\sum_m{}'\frac{|V_{nm}|^2}{E_n-E_m^{(0)}-V_{mm}}$$

В правой части заменим E_n через выр-е, опред. из 1-го приближения, т.к. ищем р-ие этого ур-я методом последовательных приближений.

$$\boxed{E_n = E_n^{(0)}+V_{nn}+\sum_m{}'\frac{|V_{nm}|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}+V_{nn}-V_{mm}}}$$

Эту процедуру можно проводить и дальше

17.04.12

№1

$\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ — ? в представлении, где $\hat{l}_z$ диаг. для $l=1$

Р-ие:

$$\hat{l}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{l}_x)_{m,m-1} = (\hat{l}_x)_{m-1,m} = \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$$

$$(\hat{l}_y)_{m,m-1} = -(\hat{l}_y)_{m-1,m} = -\frac{i}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$$

Вычислим матричн. эл-ты $\hat{l}_x, \hat{l}_y$ и строим матрицы:

$(\hat{l}_x)_{11} = (\hat{l}_x)_{22} = (\hat{l}_x)_{33} = 0;$

$(\hat{l}_x)_{13} = (\hat{l}_x)_{31} = 0;$

$(\hat{l}_x)_{21} = (\hat{l}_x)_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+1)(1-1+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}};$ { m под корнем — проекция, т.е. m=1 или m=0 или m=-1 → ответ один и тот-же }

$(\hat{l}_x)_{32} = (\hat{l}_x)_{23} = \cancel{\tfrac{1}{2}\sqrt{(}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\hat{l}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично: $\hat{l}_y = \cancel{+\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{l}_\pm = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{l}_+ = ($

$\boxed{\text{ЕЩЁ РАЗ:}}$ $\hat{l}_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\hat{l}_y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ 24.04.12

$$\hat{l}_+ = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad \hat{l}_- = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

$$(\hat{l}_x)_{m,m-1} = (\hat{l}_x)_{m-1,m} = \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$$

$$(\hat{l}_y)_{m,m-1} = -(\hat{l}_y)_{m-1,m} = -\frac{i}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)} \qquad \boxed{\begin{matrix} m = -1, 0, 1 \\ l = 1 \end{matrix}}$$

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$; $\quad b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$

$$(\hat{l}_x)_{1,0} = (\hat{l}_x)_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{m=1\}; \quad (\hat{l}_x)_{0,-1} = (\hat{l}_x)_{-1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{m=0\};$$

$$(\hat{l}_y)_{1,0} = -(\hat{l}_y)_{0,1} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \{m=1\}; \quad (\hat{l}_y)_{0,-1} = -(\hat{l}_y)_{-1,0} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \{m=0\}$$

При $m = -1$ $\quad (\hat{l}_x)_{-1,-2}$ и $(\hat{l}_y)_{-1,-2} = 0$

$$\underbrace{(\hat{l}_x)_{1,0} = a_{12}; \quad (\hat{l}_x)_{0,1} = a_{21}; \quad (\hat{l}_x)_{0,-1} = a_{23}; \quad (\hat{l}_x)_{-1,0} = a_{32}}$$

пусть будет так

Тогда $\hat{l}_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

По такой же схеме:

$$(\hat{l}_y)_{1,0} = b_{12}; \quad (\hat{l}_y)_{0,1} = b_{21}; \quad (\hat{l}_y)_{0,-1} = b_{23}; \quad (\hat{l}_y)_{-1,0} = b_{32}$$

$$\Rightarrow \hat{l}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_{12} = a_{12} + i b_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\alpha_{21} = a_{21} + i b_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$\alpha_{23} = a_{23} + i b_{23} = \sqrt{2}$; $\alpha_{32} = 0$ 2

$$\Rightarrow \hat{l}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично: $$\hat{l}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Важная задача

Найти ф-ии энергии ангармонического осциллятора

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x^4$$

Решение

Задача с таким $\hat{H}$ не имеет точного р-ия. Предположим, что α и β – малые величины $\Rightarrow$ можно воспользоваться теорией возмущений:

$$E_n^{(1)} = V_{nn}, \quad E_n^{(2)} = \sum_m{}' \frac{|V_{nm}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

Найдем 1-ю поправку от возмущения βx^4.

Для этого для удобства делаем такие преобразования:

$x = \xi\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$; $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)$; $\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}\right)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^+\right)$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^+\right)$

Пишем действие оп. на вектор состояния:

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1\rangle$

Тогда: (в принципе это есть и в лекции 15.03.12)

$x_{n-1,n} = \sqrt{\frac{\hbar n}{2m\omega}}$, но нужны матричн. эл-ты x^4:

$x_{n+1,n} = \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2m\omega}}$

$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2 + (\hat{a}^+) + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}\right) = \{[\hat{a}\,\hat{a}^+] = 1\} =$

$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2 + (\hat{a}^+)^2 + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1\right)$ $\Rightarrow$ $\{(\hat{a}^+\hat{a})_{n,n} = n\}$

$(x^2)_{n,n} = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$

$(x^2)_{n,n+2} = (x^2)_{n+2,n} = \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{(n+1)(n+2)}$

$(x^2)_{n,n-2} = (x^2)_{n-2,n} = \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{n(n-1)}$

$\{(\hat{f}\hat{g})_{mn} = \sum_k f_{mk}g_{kn}\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(x^4)_{nn} = \sum_k (x^2)_{nk}(x^2)_{kn} = (x^2)_{nn}(x^2)_{nn} + (x^2)_{n,n-2}(x^2)_{n-2,n} +$
$+ (x^2)_{n,n+2}(x^2)_{n+2,n} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2\left[(2n+1)^2 + (n+1)(n+2) + n(n-1)\right] =$

$\ldots = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 6\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right) = (x^4)_{nn}$;

Теперь перейдем к x^3:

$$(\hat{a}+\hat{a}^+)^3 = \{\hat{a}^3 + (\hat{a}^+)^3 + \hat{a}^2\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}^2 + (\hat{a}^+)^2\hat{a} + \hat{a}(\hat{a}^+)^2 + \hat{a}\hat{a}^+\hat{a} +$$

$$+ \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\} \Rightarrow$$ (можно получить)

$$(x^3)_{n,n-3} = (x^3)_{n-3,n} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\sqrt{n(n-1)(n-2)}$$

$$(x^3)_{n,n-1} = (x^3)_{n-1,n} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\sqrt{9n^3}$$

$$(x^3)_{n,n} = 0$$

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)} = \hbar\omega \qquad E_n^{(0)} - E_{n-3}^{(0)} = 3\hbar\omega$$

$$E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)} = -\hbar\omega \qquad E_n^{(0)} - E_{n+3}^{(0)} = -3\hbar\omega$$

x^3 – эрмит. матрица

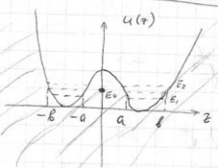
$$E_n^{(2)} = \alpha^2\left[\frac{|x^3_{n-1,n}|^2}{E_n^{(0)}-E_{n-1}^{(0)}} + \frac{|x^3_{n+1,n}|^2}{E_n^{(0)}-E_{n+1}^{(0)}} + \frac{|x^3_{n-3,n}|^2}{E_n^{(0)}-E_{n-3}^{(0)}} + \frac{|x^3_{n+3,n}|^2}{E_n^{(0)}-E_{n+3}^{(0)}}\right] =$$

$$= \alpha^2\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^3\left[\frac{9n^3}{\hbar\omega} + \frac{9(n+1)^3}{-\hbar\omega} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\hbar\omega} + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{-3\hbar\omega}\right] =$$

$$= \ldots = \underline{-30\alpha^2\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^3\frac{1}{\hbar\omega}\left\{n^2+n+\frac{11}{30}\right\}} \Rightarrow$$

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 6\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right) - 30\alpha^2\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^3\frac{1}{\hbar\omega}\left\{n^2+n+\frac{11}{30}\right\}}$$

Частица в двухямном потенциале



$\pm a, \pm b$ – точки поворота

$U(z) = U(-z)$

Тун. эффект приводит к расщепл. ур-ей частицы в яме.

Возможны 2 типа в/ф $\psi_1(z) = \psi_1(-z)$

$\psi_2(z) = -\psi_2(-z)$

$E_2 > E_1$

$\psi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_0(z) + \psi_0(-z)\right]$

$\psi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_0(z) - \psi_0(-z)\right]$

ψ_0 – квазикл. волн. ф-ия (она бы только и была, если бы она была одна)

Если мы берем, что $\psi_0(z)$ опис. част. в правой яме, то $\psi_0(-z)$ – в левой яме, т.е., скажем, в правой яме $\psi_0(-z)$ экспон. мала.

Ур-е Шред для в/ф ψ_1 и ψ_0

$\psi_0'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E_0 - U(z)\right]\psi_0(z) = 0 \quad | \psi_1$

$\psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E_1 - U(z)\right]\psi_1(z) = 0 \quad | \psi_0 \quad$ и $\int_0^\infty = 1$

$\int_0^\infty dz \frac{d}{dz}\left(\psi_1(z)\psi_0'(z) - \psi_0(z)\psi_1'(z)\right) = \frac{2m}{\hbar^2}(E_1 - E_0)\int_0^\infty dz\, \psi_0(z)\psi_1(z)$

$\psi_1(0) = \sqrt{2}\,\psi_0(0)$; $\psi_3'(0)=0$

$$\int_0^\infty dz\, \psi_0(z)\,\psi_1(z) \approx \int_0^\infty dz\, \frac{\psi_0^2(z)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\psi_1(0)\,\psi_0'(0) = \frac{2m}{\hbar^2}(E_1 - E_0)\frac{1}{\sqrt{2}} \ ;$$

$$\psi_0(0) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\pi p_0}}\, \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^a dz\, p(z)\right] \qquad \left\{ C = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\pi}} \right\}$$

$$\psi_0'(0) = \frac{p_0}{\hbar}\,\psi_0(0)$$

$$p_0 = |p(0)| = \sqrt{2m(U_0 - E_0)}$$

$$E_1 - E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{2}\,\psi_1(0)\,\psi_0'(0) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{2}\sqrt{2}\,\frac{p_0}{\hbar}\,\frac{m\omega_0}{2\pi p_0}\, \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^a dz\, |p(z)|\right].$$

Точно также получаем следующее:

$$E_2 - E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^{a} dz\, |p(z)|\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_2 - E_1 = \frac{\hbar\omega_0}{\pi}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^{\infty} dz\, |p(z)|\right]$$

Частица может нах. в обоих ямах, т.е.

$$\psi(z,t) = \cancel{C_1(t)\,\psi_1(z) + C_2(t)\,\psi_2(z)} = C_1(t)\,\psi_0(z) + C_2(t)\,\psi_0(-z)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \Psi(z,t)\, \Psi^{*}(z,t) = 1$$

$$i\hbar \left[\frac{dC_1}{dt} \Psi_0(z) + \frac{dC_2}{dt} \Psi_0(-z) \right] = C_1(t) \hat{H} \Psi_0(z) + C_2(t) \hat{H} \Psi_0(-z)$$

Считаем $\Psi_0(z)$ и $\Psi_0(-z)$ ортогон. $\Rightarrow$ последов. домн. на $\Psi_0^{*}(z)$ и $\Psi_0^{*}(-z)$ и $\int$:

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{dC_1(t)}{dt} = H_{11} C_1(t) + H_{12} C_2(t) \\ i\hbar \dfrac{dC_2(t)}{dt} = H_{21} C_1(t) + H_{22} C_2(t) \end{cases}, \text{ где}$$

$$H_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \Psi_0^{*}(z) \hat{H} \Psi_0(z) = E_0 \quad ; \quad H_{22} = \ldots = E_0$$

$$H_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \Psi_0^{*}(z) \hat{H} \Psi_0(-z) = H_{21}^{*}$$

Считаем $H_{12} = H_{21}$ (они могут отлич. лишь фаз. множителем,

кот., для простоты, полагают равн. 1).

Кроме того $H_{12} = H_{21} = E_0 - E_2 = E_1 - E_0 = -\mathcal{E}$ (не берется ниоткуда) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{dC_1(t)}{dt} = E_0 C_1(t) - \mathcal{E} C_2(t) \\ i\hbar \dfrac{dC_2(t)}{dt} = E_0 C_2(t) - \mathcal{E} C_1(t) \end{cases} \Rightarrow \text{решая получаем} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(t) = \alpha \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 - \mathcal{E}) t \right] + \beta \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 + \mathcal{E}) t \right] \\ C_2(t) = \alpha \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 - \mathcal{E}) t \right] - \beta \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 + \mathcal{E}) t \right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Psi(z,t)=\sqrt{2}\left[\alpha\,\psi_1(z)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_0-\varepsilon)t\right]+\beta\,\psi_2(z)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_0+\varepsilon)t\right]\right]$$

{ заменили $\psi_0(z)$ и $\psi_0(-z)$ через $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ }.

if $\beta=0$, то $C_1(t)=C_2(t)$ $\Rightarrow$ $E_1=E_0-\varepsilon$

if $\alpha=0$, то $E_2=E_0+\varepsilon$ $C_1(t)=-C_2(t)$

? Других стац. состояний не дано.

Пусть $C_1(t)=1$; $C_2(t)=0$ $\Rightarrow$ $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ (подст. в ф-лу для Ψ) $\Rightarrow$ { с уч. $\varepsilon=\frac{E_1-E_2}{2}$ } $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Psi(z,t)=\left\{\psi_0(z)\cos\left(\frac{E_2-E_1}{2\hbar}t\right)+i\,\psi_0(-z)\sin\left(\frac{E_2-E_1}{2\hbar}t\right)\right\}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}$$

Из посл. ф-лы видно, что:

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1=\cos^2\frac{E_2-E_1}{2\hbar}t \text{ - вер. нах. част. в 1-й яме}\\&\omega_2=\sin^2\frac{E_2-E_1}{2\hbar}t \text{ - вер. нах. част. в 2-й яме}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ част. будет совершать период. кол-й между ямами

$$\cancel{T(E_2-E_1)}\quad \tilde{T}=\frac{2\pi\hbar}{E_2-E_1}=\frac{2\pi\hbar\,\pi}{\hbar\omega_0}\exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^{a}dz\,|p(z)|\right]=$$

$$=\pi T\exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^{a}dz\,|p(z)|\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\tilde{T}=\pi T\exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^{a}dz\,|p(z)|\right]}$$