5.09.12

§ Квазиклассическое приближение

№1 Рассм. гармонич. осциллятор:

$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ - пот. энергия

$$p(x) = \sqrt{2m\,[E_n - U(x)]} = \sqrt{2mE_n}\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x^2}{2E_n}}$$

по правилу Бора-Заммерфельда:

$$\int_a^b dx\, p(x) = \pi\hbar(n + 1/2)$$

$$\sqrt{2mE_n}\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x^2}{2E_n}} = \left\| \begin{matrix} \frac{m\omega^2 x^2}{2E_n} = \sin^2\varphi \\ \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E_n}}\,x = \sin\varphi \\ dx = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}}\cos\varphi\, d\varphi \end{matrix} \right\| =$$

Найдем точки поворота:

$$= \frac{2E_n}{\omega}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\cos^2\varphi = \frac{2E_n}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi E_n}{\omega} = \pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Через полн-я энергия:

$$E_n = \frac{p^2(x)}{2m} + \frac{x^2 m\omega^2}{2}$$

$$\frac{p^2(x)}{(\sqrt{2mE_n})^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}}\right)^2} = 1$$

$$2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) = \pi\sqrt{2mE_n}\sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}} = \frac{2\pi}{\omega}E_n;\quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

№2 Бесконечно-глубок. прямоуг. яма:

$$U(x) = \begin{cases} \infty ; & x < -a/2,\ x > a/2 \\ 0 ; & -a/2 < x < a/2 \end{cases}$$

$p(x) = \sqrt{2mE_n}$

т.к. n - большие, 1/2 - можно пренебречь

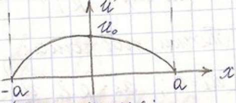
$$\int_{-a/2}^{a/2} dx \sqrt{2E_n m} = \pi\hbar\,(n + 1/2)$$

$$\sqrt{E_n m}\, a = \pi\hbar\,(n + \cancel{1/2})\ ; \quad n \gg 1$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

№3 Прохождение параболического барьера:

$$U(x) = \begin{cases} U_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$



Хотим найти коэф. прохождения:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b dx\,|p(x)|\right)$$

$$|p(x)| = \sqrt{2m\,|E_n - U_0(1 - x^2/a^2)|} =$$

$$= \sqrt{2m(U_0 - E)}\sqrt{\frac{U_0}{U_0 - E} - \frac{x^2}{a^2} - 1}$$

ошибка

$x_{1,2} = \pm a\sqrt{1 - \frac{E}{U_0}}$ - точки поворота

Вычисляем $\int$

$$\sqrt{2m(U_0-E)}\int_{x_2}^{x_1} dx\sqrt{\frac{U_0}{U_0-E}\frac{x^2}{a^2}-1} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \frac{U_0}{U_0-E}\frac{x^2}{a^2} = \sin^2\varphi \; ; \; \frac{x}{a}\sqrt{\frac{U_0}{U_0-E}} = \sin\varphi \\ x = a\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}\cdot\sin\varphi \end{array} \right\| =$$

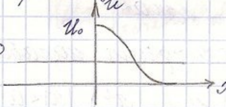
$$= -a\sqrt{2m(U_0-E)(1-E/U_0)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\sin^2\varphi-1}\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a}{2}\sqrt{2mU_0}\left(1-\frac{E}{U_0}\right)$$

$$D = D_0\exp\left(-\frac{\pi a}{\hbar}\sqrt{2mU_0}\left(1-\frac{E}{U_0}\right)\right)$$

№4 Найти коэф. прохожд.

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ U_0\exp\left(-\frac{x}{R}\right), & x>0 \end{cases}$$



Точки поворота:

$$x_1 = 0\; ; \quad x_2 = R\ln\frac{U_0}{E}$$

$$D = D_0\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int dx\,|p(x)|\right)$$

$$-\frac{2}{\hbar}\int_0^{R\ln\frac{U_0}{E}} dx\sqrt{2m(U(x)-E)} = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\int_0^{R\ln\frac{U_0}{E}} dx\sqrt{\frac{U}{E}\exp\left(-\frac{x}{R}\right)-1}$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \frac{U_0}{E}\exp\left(-\frac{x}{R}\right)-1 = t^2 \\ \frac{U_0}{E}\left(-\frac{1}{R}\right)\exp\left(-\frac{x}{R}\right)dx = 2t\,dt \\ dx = -\frac{2tRE}{U_0}\exp\left(\frac{x}{R}\right)dt \end{array} \right\|$$

$$\left\| dx = \frac{-2tR}{(1+t^2)}\,dt \right\|$$

$$t = \sqrt{\frac{U_0}{E} - 1}$$

$$= -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\int_{\sqrt{U_0/E-1}}^{0} \frac{2t^2R}{(1+t^2)}\,dt =$$

$$= \left\| \int \frac{t^2\,dt}{1+t^2} = \int dt\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) = (t - \operatorname{arctg} t)\Big|_{\sqrt{\frac{U_0}{E}-1}}^{0} = \right.$$
$$\left. = \sqrt{\frac{U_0}{E} - 1} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{U_0}{E}-1} \right\|$$

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{4}{\hbar}\sqrt{2mE}\,R\left(\sqrt{\frac{U_0}{E}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{U_0}{E}-1}\right)\right)$$

§ Спин

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y - ?$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

т. к. $\hat{\sigma}_z$ - недиаг. : $a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = 0$

$(\hat{l}_x)_{m,m-1} = (\hat{l}_x)_{m-1,m} = \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$ - сим-на

$(\hat{l}_y)_{m,m-1} = -(\hat{l}_y)_{m-1,m} = -\frac{i}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$ - не сим-на

$a_{12} = (\hat{\sigma}_x)_{1/2,-1/2} = 1 \qquad b_{12} = (\hat{\sigma}_y)_{1/2,-1/2} = -i$

$a_{21} = (\hat{\sigma}_x)_{1/2,-1/2} = 1 \qquad b_{21} = (\hat{\sigma}_y)_{-1/2,1/2} = i$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

12.09.
2012 г

① Найти форму опер. проекц. спина на ось $\vec{n}$ в состоян. с опред. знач. проекц. спина $S_z = \pm 1/2$

$$\hat{\vec{S}} = \hat{S}_x \vec{e}_x + \hat{S}_y \vec{e}_y + \hat{S}_z \vec{e}_z$$

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$\hat{\vec{S}} \cdot \vec{n} = \hat{S}_n = \hat{S}_x (\vec{e}_x \cdot \vec{n}) + \hat{S}_y (\vec{e}_y \cdot \vec{n}) + \hat{S}_z (\vec{e}_z \cdot \vec{n}) =$$
$$= \sin\theta \cos\varphi \, \hat{S}_x + \sin\theta \sin\varphi \, \hat{S}_y + \cos\theta \, \hat{S}_z$$

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \hat{S}_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{S}_n \rangle_{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left\{ (1 \; 0) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left\{ (\cos\theta \;\; \sin\theta\, e^{-i\varphi}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \cos\theta = \frac{1}{2} \cos\theta$$

$$\langle \hat{S}_n \rangle_{-1/2} = -\frac{1}{2} \cos\theta \qquad \langle \hat{S}_n \rangle = S_z \cos\theta$$

Найдем вер-ти:

$$W_+ + W_- = 1$$

$$\frac{W_+}{2} - \frac{W_-}{2} = S_z \cos\theta$$

$W_+ = S_z \cos\theta + 1/2$

$W_- = 1/2 - S_z \cos\theta$

$W_+ |_{S_z = 1/2} = \cos^2 \theta/2 \qquad W_+|_{S_z=-1/2} = \sin^2 \theta/2$

$W_- |_{S_z = 1/2} = \sin^2 \theta/2 \qquad W_-|_{S_z=-1/2} = \cos^2 \theta/2$

(2) Найти вер-ти проекции спина 1 на направл. $\vec{n}$.

$S = 1 \Rightarrow S_z = 1; 0; -1$

$W_1 + W_0 + W_{-1} = 1$

По теореме произведений: (ссылаясь на предыдущ. задачу)

$W_1 = W_+ \cdot W_+ = \cos^4(\theta/2)$

$W_{-1} = W_- \cdot W_- = \sin^4(\theta/2)$

$W_0 = W_+ W_- + W_- W_+ = 2\cos^2(\theta/2)\sin^2(\theta/2)$

(3) Есть частица со спином 1/2. Найти для этой частицы в матричной форме $\hat{S}_+$, $\hat{S}_-$.

$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y \qquad S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$

$\hat{S}_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{S}_+^2 = 0$

$\hat{S}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{S}_-^2 = 0$

④ Найти в матричн. виде $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ для $S=1$.

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ - по диагонали собств. знач.

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ; \quad \hat{S}_y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

В представл. где $\hat{S}_z$ - диаг-но, $\hat{S}_x$ и $\hat{S}_y$ не диаг-ны =>

$$\Rightarrow a_{11} = a_{22} = a_{33} = b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$$

$$(\hat{l}_x)_{m,m-1} = (\hat{l}_x)_{m-1,m} = \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$$

$$(\hat{l}_y)_{m,m-1} = -(\hat{l}_y)_{m-1,m} = -\frac{i}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$$

$$a_{12} = \hat{S}_{x\,1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = a_{21}$$

$$a_{23} = \hat{S}_{x\,0,-1} = 1/\sqrt{2} = a_{32}$$

$$a_{13} = \hat{S}_{x\,1,-1} = a_{31} = 0$$

$$b_{12} = \hat{S}_{y\,1,0} = -i/\sqrt{2} = -b_{21}$$

$$b_{23} = \hat{S}_{y\,0,-1} = -i/\sqrt{2} = -b_{32}$$

$$b_{13} = b_{31} = 0$$

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

l - не может быть отриц.

(5) Найти ср. знач. произвед. $\langle \hat{\vec{S}}_1 \hat{\vec{S}}_2 \rangle$ (2 част.); полный спин $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$.

Возведем в квадрат: $\hat{\vec{S}}^2 = \hat{\vec{S}}_1^2 + 2\hat{\vec{S}}_1\hat{\vec{S}}_2 + \hat{\vec{S}}_2^2 \rightarrow$

$$\rightarrow \hat{\vec{S}}_1\hat{\vec{S}}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{S}}^2 - \hat{\vec{S}}_1^2 - \hat{\vec{S}}_2^2\right) \qquad \langle \hat{\vec{S}}^2 \rangle = S(S+1)$$

$$\langle \hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)\right]$$

Рассмотрим частный случай: $S_1 = S_2 = 1/2$

1) $S = 0$

$$\langle \hat{\vec{S}}_1 \hat{\vec{S}}_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right] = -\frac{3}{4}$$

2) $S = 1$

$$\langle \hat{\vec{S}}_1 \hat{\vec{S}}_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

(6) Упростить выражение:

$(\vec{a}\,\hat{\vec{\sigma}})^n$, n - целое число, $\vec{a}$ - const, $\hat{\vec{\sigma}}$ - набор м. Паули

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k = \delta_{ik} + i\,\varepsilon_{ikl}\,\hat{\sigma}_l$$

$$(\vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}})^2 = (a_i\hat{\sigma}_i)(a_k\hat{\sigma}_k) = a_i a_k \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_k =$$

$$= \underbrace{a_i a_k(\delta_{ik}}_{=a^2} + i\,\underbrace{\varepsilon_{ikl}\hat{\sigma}_l}_{=0}) = \vec{a}^2 + 0$$

- если n - четн. $\rightarrow$ задача решена $\vec{a}^n$
- если n - нечетн. $\rightarrow$ $a^{n-1}(\vec{a}\,\hat{\vec{\sigma}})$

19.09.2012 г

(1) $\langle(\hat{\vec{\sigma}}_1, \hat{\vec{\sigma}}_2)\rangle$ $\qquad \hat{\vec{S}} = \frac{1}{2}\hat{\vec{\sigma}}$

1) $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$, $\hat{\vec{S}}^2 = \hat{\vec{S}}_1^2 + \hat{\vec{S}}_2^2 + 2\hat{\vec{S}}_1\hat{\vec{S}}_2$

$\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2 = 2\hat{\vec{S}}^2 - 2\hat{\vec{S}}_1^2 - 2\hat{\vec{S}}_2^2$ $\quad 4S(S+1)$

$\langle\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2\rangle = 2S(S+1) - 3$

$\langle\hat{\vec{\sigma}}_1, \hat{\vec{\sigma}}_2\rangle = \begin{cases} -3, S=0 \\ 1, S=1 \end{cases}$

2) $(\hat{\vec{\sigma}}_1, \hat{\vec{\sigma}}_2)^2 =$

$(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2 - 1)(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2 + 3) = 0$

$(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2)^2 = -2\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2 - 3 = 0$

$\langle(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2)^2\rangle = \begin{cases} 9, & S=0 \\ 1, & S=1 \end{cases}$

3) $(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2)\chi = (-3 + 2\hat{\vec{S}}^2)\chi$

$S = 1$: - триплетное состояние (3 проекц. спина)

$\hat{\vec{S}}^2\chi_T = S(S+1)\chi_T = 2\chi_T \Rightarrow \hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2\chi_T = \chi_T$

$S = 0$: - синглетное (1 проекц. спина)

$\hat{\vec{S}}^2\chi_S = 0 \Rightarrow \hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2\chi_S = -3\chi_S$

$(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2)^n\chi_T = \chi_T$

$(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2)^n\chi_S = (-3)^n$

$(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2)^n = A + B(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2)$

Нужно найти A и B → подставим в равенства с χ_T и χ_S:

$$\left(A + B(\hat{\vec{\sigma}}_1 \hat{\vec{\sigma}}_2)\right) \chi_T = \chi_T \qquad (A+B)\chi_T = \chi_T$$

$$\left(A + B(\hat{\vec{\sigma}}_1 \hat{\vec{\sigma}}_2)\right) \chi_S = (-3)^n \chi_S \Rightarrow (A-3B)\chi_S = \chi_S$$

опустим χ_T и χ_S:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - 3B = (-3)^n \end{cases} \Rightarrow \quad B = \frac{1-(-3)^n}{4}; \quad A = \frac{3+(-3)^n}{4}$$

$$(\hat{\vec{\sigma}}_1 \hat{\vec{\sigma}}_2) = 7(\hat{\vec{\sigma}}_1 \hat{\vec{\sigma}}_2) - 6$$

Модель Томаса-Ферми

$$\boxed{\langle F(r)\rangle = \frac{\int d^3r\, F(r)\, n(\vec{r})}{\int d^3r\, n(\vec{r})}}$$

② $$\langle r\rangle = \frac{\int d^3r\; r\, n(\vec{r})}{\int d^3r\, n(\vec{r})} = \frac{4\pi \int_0^\infty dr\, r^3 n(r)}{4\pi \int_0^\infty dr\, r^2\, n(r)} \sim$$

$$\left\| r \sim \frac{\hbar^2}{me^2} \cdot Z^{-1/3} x \right\| \sim \frac{\hbar^2}{me^2} Z^{-1/3}; \quad \langle r^2\rangle \sim Z^{-2/3}$$

* ③ Найти зав-ть от Z энергии ... (эл./ядра)

$$V_{eN} = -\frac{Ze^2}{r}; \quad |\langle V_{eN}\rangle| = Ze^2 \left\langle \frac{1}{r}\right\rangle = Ze^2 \frac{1}{\langle r\rangle} \sim$$

$$\left\| \langle r\rangle \sim Z^{-1/3} \frac{\hbar^2}{me^2} \right\| \sim \frac{Z^{4/3} e^4 m}{\hbar^2}$$

* ④ Найти зав-ть от Z средних значений энергии и импульса

Квантовая теорема вириала: вирес-сила

$\langle [\hat{H}, \hat{F}]\rangle$ - предпол. спектр дискретный состоян. стационарное

$\hat{H} = \hat{H}^+$

$$\langle[\hat{H},\hat{F}]\rangle = \langle \hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}] = \langle \Psi_n | \hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H} | \Psi_n \rangle = \| \hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n \|$$

$$= E_n \langle \Psi_n | \hat{F} | \Psi_n \rangle - E_n \langle \Psi_n | \hat{F} | \Psi_n \rangle = 0 \quad \text{ч.т.д.}$$

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^2 + U(\vec{r})} \qquad \begin{matrix} \hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n \\ \hat{H}^+\Psi_n^* = E_n\Psi_n^* \end{matrix}$$

$$\hat{F} = \vec{r}\cdot\hat{\vec{p}}$$

$$\langle[\hat{\vec{p}}^2\ \vec{r}\cdot\hat{\vec{p}}]\rangle = \langle \hat{\vec{p}}^2\vec{r}\cdot\hat{\vec{p}} - (\vec{r}\hat{\vec{p}})\hat{\vec{p}}^2 \rangle =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \vec{r}\cdot\hat{\vec{p}} = xp_x + yp_y + zp_z \\ \hat{\vec{p}}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \\ [p_x, x] = -i\hbar \\ [x, \hat{p}_x] = x\hat{p}_x - \hat{p}_x x = i\hbar, \quad \hat{p}_x x = x\hat{p}_x - i\hbar \end{matrix} \right\| =$$

$$= \langle \hat{p}_x^2(x\hat{p}_x + y\hat{p}_y + z\hat{p}_z) - (x\hat{p}_x + y\hat{p}_y + z\hat{p}_z)\hat{p}_x^2 + \ldots \rangle =$$

$$= \langle \hat{p}_x^2 x\hat{p}_x - x\hat{p}_x\hat{p}_x^2 + \ldots \rangle = \langle \hat{p}_x(x\hat{p}_x - i\hbar)\hat{p}_x - x\hat{p}_x\cdot\hat{p}_x^2 \rangle =$$

$$= \langle (x\hat{p}_x - i\hbar)\hat{p}_x^2 - i\hbar\hat{p}_x^2 - x\hat{p}_x\hat{p}_x^2 \rangle = \langle \cancel{x\hat{p}_x^3} - i\hbar\hat{p}_x^2 -$$

$$- i\hbar\hat{p}_x^2 - \cancel{x\hat{p}_x^3} \rangle = -2i\hbar\langle\hat{p}_x^2\rangle$$

$$\langle[\hat{\vec{p}}^2, \vec{r}\hat{\vec{p}}]\rangle = -2i\hbar\langle\hat{\vec{p}}^2\rangle \qquad U(\vec{r}) = -\frac{ze^2}{r}$$

$$\left\langle\left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}, \vec{r}\hat{\vec{p}}\right]\right\rangle = \langle[\hat{T}, \vec{r}\hat{\vec{p}}]\rangle = -2i\hbar\langle\hat{T}\rangle \qquad \langle[\hat{H}, \vec{r}\hat{\vec{p}}]\rangle = 0$$

$$\langle[\hat{U}(\vec{r}), \vec{r}\hat{\vec{p}}]\rangle = \langle \hat{U}(\vec{r})\vec{r}\hat{\vec{p}} - \vec{r}\hat{\vec{p}}\,\hat{U}(\vec{r}) \rangle =$$

$$= i\hbar\left\langle \vec{r}\,\frac{d\hat{U}(\vec{r})}{dr}\right\rangle = i\hbar\left\langle r\,\frac{ze^2}{r^2}\right\rangle = i\hbar z\left\langle\frac{e^2}{r}\right\rangle \sim$$

$$\sim \frac{i\hbar ze^2}{\langle r\rangle}$$

$$-2i\hbar\langle T\rangle + i\hbar\frac{ze^2}{\langle r\rangle} = 0$$

$2\langle T\rangle = \frac{Ze^2}{\langle r\rangle} \Rightarrow 2\langle T\rangle = \langle U\rangle$

Подставляем $\langle r\rangle$:

$$\langle T\rangle = \frac{Ze^2}{\hbar^2}\,\frac{me^2Z^{1/3}}{1} \Rightarrow \boxed{\langle T\rangle = \frac{Z^{4/3}me^4}{\hbar^2}}$$

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2m}\langle \vec{p}^{\,2}\rangle \Rightarrow \langle \vec{p}^{\,2}\rangle \sim \frac{m^2e^4Z^{4/3}}{\hbar^2}$$

$\langle T\rangle \sim Z^{4/3}$

$\langle p\rangle \sim Z^{2/3}$

$$\boxed{\langle p\rangle \approx \frac{me^2Z^{2/3}}{\hbar}}$$

*5) Найти среднюю величину орбит. момента.

$$\langle \hat{\vec{l}}\rangle = \langle \hat{\vec{r}}\,\hat{\vec{p}}\rangle \sim \langle \hat{r}\rangle\langle \hat{p}\rangle = \frac{\hbar^2}{me^2}Z^{-1/3}\,\frac{me^2}{\hbar}\cdot Z^{2/3} = \hbar Z^{1/3}$$

*6) Найти зав-ть от Z энергии ионизации.

$$\langle U_{\text{ион.}}\rangle \sim Z U_{eN} = Z^{7/3}\frac{me^4}{\hbar^2}$$

*7) Эн. взаимод. $2^x\ e^-$

$$\langle U_{ee}\rangle = \left\langle \frac{e^2}{r}\right\rangle \sim \frac{e^2}{\langle r\rangle} \sim \frac{e^2me^2}{\hbar^2Z^{-1/3}} = \frac{e^4m}{\hbar^2}Z^{1/3}$$

26.09.2012 г.

1) Найти спиновые функции для частицы со спином $S=1/2$, описывающие состояние частицы с опред. знач. ... на ось x, y, z

$\chi(S_i)$

$i = x, y, z \quad ; \quad S = 1/2$

x:

$\chi(S_x) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$|\chi(S_x)|^2 = 1 \Rightarrow \chi\chi^+ = E\ 1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} |a| = 1 \\ |b| = 1 \end{matrix}$

Запишем ур-е на собств. ф. и собств. значения:

$\hat{S}_x \chi(S_x) = S_x \chi(S_x)$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = S_x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

чтобы выполнялось равенство:

$\begin{matrix} b = 2aS_x \\ a = 2bS_x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 4S_x^2 a \\ 4S_x^2 = 1 \Rightarrow S_x = \pm 1/2 \end{matrix}$

$\chi(S_x = + 1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\chi(S_x = -1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

y: $\chi(S_y) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$\hat{S}_y \chi(S_y) = S_y \chi(S_y)$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -id \\ ic \end{pmatrix} = S_y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} d = 2S_y ci \\ c = -2S_y di \end{matrix} \Rightarrow d = 4S_y^2 d \Rightarrow S_y = \pm 1/2$

$\chi(S_y = +1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$; $\chi(S_y = -1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

z: $\chi(S_z) = \begin{pmatrix} e \\ l \end{pmatrix}$

$$\hat{S}_z \chi(S_z) = S_z \chi(S_z)$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ l \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e \\ -l \end{pmatrix} = S_z \begin{pmatrix} e \\ l \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} e = 2 S_z e \\ l = -2 S_z l \end{matrix} \Rightarrow S_z = \pm \frac{1}{2}$$

$$\chi(S_z = 1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi(S_z = -1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② Найти ср. значение: $\langle \hat{S}_x \rangle, \langle \hat{S}_y \rangle, \langle \hat{S}_z \rangle$ для частицы $s = 1/2$ в состоян. с волн. функц.

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{S}_x \rangle = Sp \langle \chi | \hat{S}_x | \chi \rangle = Sp \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} (a^* \; b^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= Sp \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \frac{1}{2} (b^* \; a^*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Sp \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \frac{1}{2} (ab^* + ba^*) =$$

$$= \frac{Re(ab^*)}{|a|^2 + |b|^2}$$

$$\langle \hat{S}_y \rangle = \frac{1}{2} Sp \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} (a^* \; b^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} Sp \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} (b^* i \; -ia^*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{i}{|a|^2 + |b|^2} (ab^* - ba^*) =$$

$$= \frac{Im(a^* b)}{|a|^2 + |b|^2}$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \frac{1}{2} Sp \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} (a^* \; b^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} Sp \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} (a^* \; -b^*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} (aa^* - bb^*) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|a|^2-|b|^2}{(|a|^2+|b|^2)}$$

③ Найти величину, для частицы со спином $S=1/2$

$$\langle \hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{\sigma}} \rangle$$

Когда есть орбит. момент и спин → сохр-ся полный момент. Может быть 2 состояния.

$$j = l \pm 1/2$$

$$\hat{\vec{j}} = \hat{\vec{l}} + \hat{\vec{S}}$$

$$\hat{\vec{j}}^2 = \hat{\vec{l}}^2 + \hat{\vec{S}}^2 + 2\hat{\vec{l}}\hat{\vec{S}} \Rightarrow 2\hat{\vec{l}}\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{j}}^2 - \hat{\vec{l}}^2 - \hat{\vec{S}}^2 = \hat{\vec{l}}\hat{\vec{\sigma}}$$

$$\langle \hat{\vec{l}}\hat{\vec{\sigma}} \rangle = \langle \hat{\vec{j}}^2 \rangle - \langle \hat{\vec{l}}^2 \rangle - \langle \hat{\vec{S}}^2 \rangle = j(j+1) - l(l+1) - S(S+1) =$$

$$= j(j+1) - l(l+1) - 3/4 =$$

$$\langle \hat{\vec{l}}\hat{\vec{\sigma}} \rangle = \begin{cases} 1.\ l, & j = l + 1/2 \\ 2.\ -l-1, & j = l - 1/2 \end{cases}$$

$$= (l+1/2)(l+3/2) - l(l+1) - 3/4 = l$$

$$= (l-1/2)(l+1/2) - l(l+1) - 3/4 = -l-1$$

④ Найти проекционные операторы:

$$\hat{P}(S_z = 1/2) \qquad \hat{P}(S_z = -1/2)$$

$$\boxed{\hat{P}(S_z = 1/2)\,\chi(1/2) = \chi(1/2)} \qquad \chi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{P}(S_z = -1/2)\,\chi(-1/2) = \chi(-1/2)} \qquad \chi\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\hat{P}(S_z=1/2)\chi(-1/2)=\hat{P}(S_z=-1/2)\chi(1/2)=0$$

$$\frac{1}{2}(1+\hat{\sigma}_z)\chi\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\chi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}(1+\hat{\sigma}_z)\chi\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{1}{2}(1-\hat{\sigma}_z)\chi\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{1}{2}(1-\hat{\sigma}_z)\chi\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\chi\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{P}(S_z=\pm 1/2)=\frac{1}{2}(1\pm\hat{\sigma}_z)$$

$$\hat{P}(S_z=\pm 1/2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\quad \hat{P}(S_z=-1/2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Обобщим: $\hat{P}(S_{\vec{n}}=\pm 1/2)=\frac{1}{2}(1\pm\hat{\vec{\sigma}}\vec{n})$

⑤ Найти вер-ти полного момента для частицы с $S=1/2$

$$\hat{\vec{j}}=\hat{\vec{l}}+\hat{\vec{S}},\quad S=1/2$$

Знаем из задачи ③:

$$\langle\hat{\vec{l}}\hat{\vec{\sigma}}\rangle=\begin{cases}l, & j=l+1/2\\ -l-1, & j=l-1/2\end{cases}$$

$W_+,\ W_- - ?$

$$W_+ + W_- = 1$$

$$W_+=\frac{l+1+\langle\hat{\vec{l}}\hat{\vec{\sigma}}\rangle}{2l+1},\quad W_-=\frac{l-\langle\hat{\vec{l}}\hat{\vec{\sigma}}\rangle}{2l+1}$$

3.10.
2012 г

1. ① $Z = 30$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10}$

$L = 0;\ S = 0\ ;\ J = 0$ $\quad {}^1S_0$

$^{2S+1}L_J$

② $Z = 29$ – искл.

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s$

$L = 0\ ;\ S = 1/2\ ;\ J = 1/2$ $\quad {}^2S_{1/2}$

③ $Z = 28$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1 4s^2 3d^8$

$L = 3;\ S = 1\ ;\ J = 4$ $\quad {}^3F_4$

↑↑↑↑↑↓↓↓
2 1 0 -1 -2 2 1 0

④ $Z = 27$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1 4s^2 3d^7$

$L = 3\ ;\ S = 3/2\ ;\ J = 9/2$ $\quad {}^4F_{9/2}$

↑↑↑↑↑↓↓
2 1 0 -1 -2 2 1

⑤ $Z = 26$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1 4s^2 3d^6$

$L = 2;\ S = 2;\ J = 4$ $\quad {}^5D_4$

↑↑↑↑↑↓
2 1 0 -1 -2 2

⑥ $Z = 25$

$3d^5$

$L = 0\ ;\ S = 5/2;\ J = 5/2$ $\quad {}^6S_{5/2}$

↑↑↑↓↓
2 1 0 -1 -2

(7) $Z = 24$ - искл.

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s\, 3d^5$

$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$
$2\ 1\ 0\ {-1}\ {-2}$

$L = 0,\ S = 3;\ J = 3$

$^7S_3$

(8) $Z = 23$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^3$

$L = 3;\ S = 3/2,\ J = 3/2$

$^4F_{3/2}$

$\uparrow\uparrow\uparrow$
$2\ 1\ 0$

(9) $Z = 22$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^2$

$L = 3;\ S = 1;\ J = 2$

$^3F_2$

$\uparrow\uparrow$
$2\ 1$

(10) $Z = 21$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s\, 3d^1$

$L = 2;\ S = 1/2;\ J = 3/2$

$^2D_{3/2}$

(11) $Z = 20$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$

$S = 0;\ L = 0;\ J = 0$

$^1S_0$

(12) $Z = 19$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$

$L = 0;\ S = 1/2;\ J = 1/2$

$^2S_{1/2}$

(13) $Z = 18$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

$L = 0;\ S = 0;\ J = 0$

$^1S_0$

2.

$$\chi = c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \chi\chi^+ = 1$$

$$|c|^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(a^* \; b^*) \overset{Sp}{=} |c|^2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Sp}{=} |c|^2 \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = 1$$

$$|c|^2(|a|^2 + |b|^2) = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}$$ См. 26.09 ①

3. Найти min энергию расщепления атома дейтрона.

Мы знаем, что:
min энергия - пороговая энергия

$$E_{пор.} = \frac{P^2_{пор.}}{4m} + \underset{\text{эн. на расщ.}}{|\mathcal{E}|}$$, m - приведен. масса системы 2х нуклонов

Найдем импульс фотона:

$$\frac{E_{пор.}}{c} = p \Rightarrow E_{пор.} = \frac{1}{4m} E^2_{пор.} + |\mathcal{E}|$$

$$E^2_{пор.} - 4mc^2 E_{пор.} + 4mc^2|\mathcal{E}| = 0$$

$$E_{пор.} = 2mc^2 - \sqrt{4m^2c^4 - 4mc^2|\mathcal{E}|} = 2mc^2\left[1 - \sqrt{1 - \frac{|\mathcal{E}|}{mc^2}}\right] =$$

$$= 2mc^2\left[1 - 1 + \frac{|\mathcal{E}|}{2mc^2} + \frac{|\mathcal{E}|^2}{4mc^2}\right]$$

$$E_{пор.} = |\mathcal{E}|\left[1 + \frac{|\mathcal{E}|}{4mc^2}\right]$$

4. Для частицы с $S = 1/2$ описываемой спинором

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\beta}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Найти ось в пр-ве, если $\vec{n} = 1$, $S_{\vec{n}} = 1/2$

$$\hat{S}_{\vec{n}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_{\vec{n}}\Psi = \frac{1}{2}\Psi$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ e^{i\beta}\sin\alpha & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha + e^{-i\varphi+i\beta}\sin\alpha\sin\theta & 0 \\ e^{i\varphi}\cos\alpha\sin\theta - e^{i\beta}\sin\alpha\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ e^{i\beta}\sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

при каких θ и φ будет равенство?

$$\begin{cases} \cos\theta\cos\alpha + e^{-i\varphi+i\beta}\sin\alpha\sin\theta = \cos\alpha \\ e^{i\varphi}\cos\alpha\sin\theta - e^{i\beta}\sin\alpha\cos\theta = e^{i\beta}\sin\alpha \end{cases}$$

перепишем $2^е$ ур-е:

$$e^{i\varphi-i\beta}\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta = \sin\alpha$$

$$\begin{cases} e^{-i\varphi+i\beta}\sin\theta\sin\alpha = \cos\alpha(1-\cos\theta) = 2\cos\alpha\sin^2\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi-i\beta}\cos\alpha\sin\theta = \sin\alpha(1+\cos\theta) = 2\sin\alpha\cos^2\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

разделим $1^е$ на $2^е$ почленно:

$$e^{-2i\varphi+2i\beta}\,tg\,\alpha = ctg\,\alpha\;tg^2\frac{\theta}{2}$$

$$e^{-2i\varphi+2i\beta}\,tg^2\alpha = tg^2\frac{\theta}{2}$$

$$e^{-i\varphi+i\beta}\,tg\,\alpha = tg\frac{\theta}{2}$$

$$\theta = 2\alpha, \quad \beta = \varphi$$

$S_{\vec n} = 1/2$

1. $\theta = 0,\ \varphi = 0$; $S_{\vec n} = +1/2$

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ e^{i\beta}\sin\alpha\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$$

2. $\theta = \frac{\pi}{2},\ \varphi = 0$; $S_{\vec n} = -1/2$

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ e^{i\beta}\sin\alpha\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$$

З = 27, 28, 29

17.10.12

Формула Борна

Поле центрально-симметричное.

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^{+\infty} dr\, r \sin qr\, U(r)$$

① $U(r) = \frac{U_0 R^2}{r^2}$

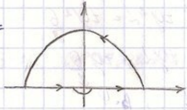
$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^{+\infty} dr\, r \sin qr\, \frac{U_0 R^2}{r^2} = -\frac{2m U_0 R^2}{\hbar^2 q}\int_0^{+\infty} \frac{dr \sin qr}{r} =$$

$$= -\frac{2m U_0 R^2}{\hbar^2 q}\int_0^{+\infty} dr\, \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2ir} =$$

$$= -\frac{2m U_0 R^2}{\hbar^2 q}\, \frac{1}{2i}\left[\int_0^{+\infty} \frac{dr\, e^{iqr}}{r} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dr\, e^{iqr}}{r}\right] =$$

$$= -\frac{2m U_0 R^2}{\hbar^2 q\, 2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr\, e^{iqr}}{r} =$$

$$= \left\| \text{вычет} = 1 \right\| =$$



$$= \frac{i m V_0 R^2}{\hbar^2 q} \pi i \lim_{z\to 0} \underbrace{\frac{z e^{iqz}}{z}}_{1} = -\frac{\pi m V_0 R^2}{\hbar^2 q}$$

② $V(r) = V_0 e^{-r/R}$

$$f(\theta) = \frac{-2m}{\hbar^2 q} \int_0^{+\infty} dr\, r \sin qr\, V_0 e^{-r/R} = \frac{-2mV_0}{\hbar^2 q} \frac{d}{dq} \int_0^{+\infty} dr \cos(qr) e^{-r/R} =$$

$$= \frac{-2mV_0}{\hbar^2 q} \frac{d}{dq} \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} dr\, e^{-r/R + iqr} = \frac{-2mV_0}{\hbar^2 q} \frac{d}{dq} \mathrm{Re} \left. \frac{e^{-r/R + iqr}}{iq - 1/R} \right|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{-2mV_0}{\hbar^2 q} \frac{d}{dq} \mathrm{Re} \frac{1}{\frac{1}{R} - iq}$$

$$\mathrm{Re} \frac{1}{\frac{1}{R} - iq} = \mathrm{Re} \frac{R}{1 - iqR} = \mathrm{Re} \frac{R(1+iqR)}{1+(qR)^2} = \frac{R}{1+q^2R^2}$$

$$= -\frac{2mV_0 R}{\hbar^2 q} \frac{d}{dq} \frac{R}{1+q^2R^2} = -\frac{2mV_0 R}{\hbar^2 q} \frac{2qR^2}{(1+q^2R^2)^2} =$$

$$= -\frac{4mV_0R^3}{\hbar^2 (1+q^2R^2)^2}$$

③ $U(r) = V_0 e^{-r^2/R^2}$

$$f(\theta) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \int_0^{+\infty} dr\, r \sin(qr) e^{-r^2/R^2}$$

$$f(\theta) = -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \int d^3r \exp\left[i\vec{q}\vec{r} - \frac{r^2}{R^2}\right] \ominus$$

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r\, r\, e^{i\vec{q}\vec{r}}\, V(r)$$

$$\ominus -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{iq_x x - x^2/R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{iq_y y - y^2/R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{iq_z z - z^2/R^2} =$$

$$= \Big/\Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{iq_x x - x^2/R^2 + q_x^2 R^2/4 - q_x^2 R^2/4} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-t^2} = \ldots = \pi$$

$$= e^{-q_x^2 R^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[-\left(\frac{x}{R} - \frac{iq_x R}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{iq_x x - x^2/R^2} = \sqrt{\pi}\, R\, e^{-q_x^2 R^2/4} \Big/ \Big/\Big/$$

Ответ: $f(\theta) = -\frac{m U_0}{2\pi \hbar^2} \pi^{3/2} R^3$

24.10.2012 г

① $U(r) = \begin{cases} -U_0, & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$ - рассеяние для прямоуг. ямы

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^{\infty} dr\, r \sin qr\, U(r) =$$

$$= +\frac{2m}{\hbar^2 q} U_0 \int_0^R dr\, r \sin qr = \frac{-2m}{\hbar^2 q} U_0 \frac{d}{dq} \int_0^R dr \cos qr =$$

$$= -\frac{2m U_0}{\hbar^2 q} \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{q} \sin qr \right) \Big|_0^R =$$

$$= \frac{-2m U_0}{\hbar^2 q} \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{q} \sin qR \right] = \frac{2m U_0}{\hbar^2 q} \frac{qR \cos qR - \sin qR}{q^3}$$

②

$U(r) = \begin{cases} U_0 (r^2/R^2 - 1), & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^{\infty} dr\, r \sin qr\, U(r) =$$

$$= -\frac{2m U_0}{\hbar^2 q} \int_0^R dr\, r \sin qr \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{2m U_0}{\hbar^2 q} \frac{d}{dq} \int_0^R dr \cos qR \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) =$$

// два интеграла: 2-й вычисляли в предыдущ. задаче (f_1) //

$$= + f_1 + \frac{2mU_0}{\hbar^2 q R^2}(-1)\frac{d^3}{dq^3}\int_0^R dr \cos qR =$$

$$= + f_1 - \left(\frac{2mU_0}{\hbar^2 q R^2}\right)\frac{d^3}{dq^3}\,\frac{\sin qR}{q} =$$

$$\left(\frac{2mU_0}{\hbar^2 q R^2}\right) = b$$

$$= f_1 - b\frac{d^2}{dq^2}\,\frac{qR\cos qR - \sin qR}{q^2} =$$

$$= f_1 - b\frac{d}{dq}\left(\frac{2q^2 R\cos qR - 2q\sin qR - \sin qR\, q^3R^2}{q^4}\right) =$$

$$= f_1 - b\frac{d}{dq}\left(\frac{2qR\cos qR - 2\sin qR - q^2R^2\sin qR}{q^3}\right) =$$

$$= f_1 - b\left(\frac{2q^3R\cos qR - 2q^4R^2\sin qR - 2q^3R\cos qR - 2q^4R^2\sin qR}{q^6} + \right.$$
$$\left. + \frac{6q^2\sin qR + 3q^4R^2\sin qR}{q^6}\right) = \ldots$$

$$f(\theta) = \frac{4mU_0}{\hbar^2 q^5 R^2}\left(3\sin qR - 3q\cos qR - q^2R^2\sin qR\right) \Leftarrow \text{Ответ}$$

③ $U(r) = U_0 R\,\frac{e^{-r/R}}{r}$ — потенциал Юкавы

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr\, r\sin qr\, U(r) =$$

$$= -\frac{2mRU_0}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr\, \cancel{r}\sin qr\,\frac{e^{-r/R}}{\cancel{r}} = -\frac{2mU_0R}{\hbar^2 q}\,Im\int_0^\infty dr\, e^{iqr - r/R} =$$

$$= +\frac{2mU_0R}{\hbar^2 q}\,Im\frac{1}{iq - \frac{1}{R}} = -\frac{2mU_0R}{\hbar^2 q}\,Im\frac{R}{-iqR+1} =$$

$$= -\frac{2mU_0R}{\hbar^2 q}\,Im\frac{(1+iqR)R}{1+q^2R^2} = -\frac{2mU_0R}{\hbar^2 \cancel{q}}\,\frac{\cancel{q}R^2}{1+q^2R^2} =$$

$$= -\frac{2mU_0R^3}{\hbar^2(1+q^2R^2)}$$

④ $$U(r) = U_0 e^{-ar}\left(1-e^{-br}\right) = U_0\left(e^{-ar} - e^{-(a+b)r}\right) =$$

$$= U_a(r) - U_{a+b}(r) \quad ; \qquad U_n(r) = U_0 e^{-nr}$$

$$f_a(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} U_0 \int_0^\infty dr\, r \sin qr\, e^{-ar} =$$

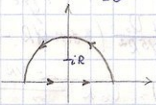
$$= -\frac{4m\,U_0\left(\frac{1}{a}\right)^3}{\hbar^2\left(1+\frac{q^2}{a^2}\right)^2} = -\frac{4m\,U_0\,a}{\hbar^2(a^2+q^2)^2}$$

$$f(\theta) = -\frac{4m U_0}{\hbar^2}\left[\frac{a}{(a^2+q^2)^2} - \frac{a+b}{((a+b)^2+q^2)^2}\right]$$

⑤ $$U(r) = \frac{U_0}{1+\frac{r^2}{R^2}}$$

$$f(\theta) = -\frac{2mU_0}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr\,\frac{r\sin(qr)}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2} = -\frac{mU_0R^2}{\hbar^2 q}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dr\,r}{r^2+R^2}\sin qr =$$

$$= -\frac{mU_0R^2}{\hbar^2 q}\, Im\int_{-\infty}^{+\infty} dr\,\frac{r}{r^2+R^2}\, e^{iqr} =$$



$$= -\frac{mU_0R^2}{\hbar^2 q}\, Im\int_{-\infty}^{\infty} dr\,\frac{r\,e^{iqr}}{(r+iR)(r-iR)} =$$

$$= \| \text{домножаем на } r-iR \| = -2\pi\,\frac{mU_0R^3}{\hbar^2 q}\, Im\left(i\,\frac{iR\,e^{-qR}}{2iR}\right) =$$

$$= -\pi\,\frac{U_0R^2}{\hbar^2 q}\, e^{-qR}$$