Буц Вячеслав Александрович
Евгений Владимирович

Введение в
компьютерное моделирование

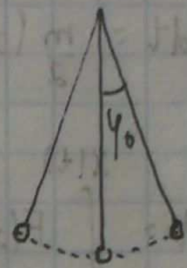
Мельник Дарья Александровна

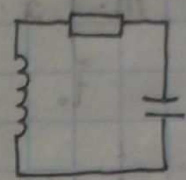
Моделирование динамич. систем. **Лекция № 1** 12.02.13.

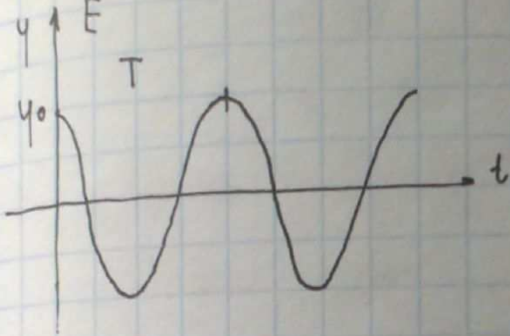
Линейный осциллятор

Нелинейная динамика

1) Лин. осцил. Примеры:







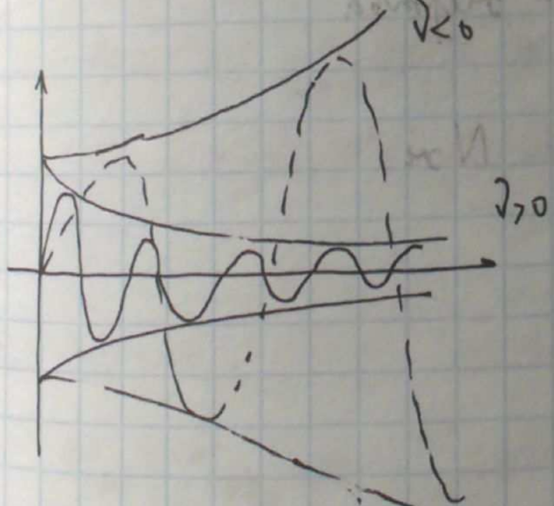
$\omega = \frac{2\pi}{T}$

∂ - затухания

if $\partial > 0$ амплит. ↓

$$\ddot{x} + 2\partial\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

if $\partial < 0$ сист. с отрицат. трением



1) Автономные системы $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} F_k(\vec{x})$

if все пар-ры явно не зав. от времени - это автономные системы

2) Консервативные системы

$$W = W_k + W_n = const \qquad m\ddot{x} = F(x) \;\Big|\cdot \dot{x},\ \int_{t_0}^{t} dt$$

$$m\cdot\int_{t_0}^{t} \ddot{x}\cdot\dot{x}\,dt = \frac{m}{2}(\dot{x})^2\Big|_{t_0}^{t} \qquad \ddot{x}\,dt = d(\dot{x})$$

$$\dot{x}\,dt = dx$$

$$\int_{t_0}^{t} F(x)\dot{x}\,dt = \int_{x(t_0)}^{x(t)} F(x)\,dx$$

$$-\omega^2\int_{x(t_0)}^{x(t)} x\cdot dx = -\omega^2\frac{x^2}{2}\Big|_{x(t_0)}^{x(t)}$$

3) Система „хищник – жертва"

кролик (жертва) – число $N_{кр}$

1) $\Delta N_{кр} = \varepsilon_1 \cdot N_{кр}\cdot \Delta t$

прирост числа кроликов

2) $\Delta t \to 0$ $\boxed{\dot{N}_{кр} = \varepsilon_1 \cdot N_{кр}}$ $N_{кр} = N_{кр}(0)\,e^{\varepsilon_1 t}$

2) хищники

$\Delta N_x = -\varepsilon_2 \cdot N_x \cdot \Delta t$ $\boxed{\dot{N}_x = -\varepsilon_2 \cdot N_x}$ $N_x = N_x(0) e^{-\varepsilon_2 t}$

количество пойманых хищников (еды нет)

3) $\begin{cases} \dot{N}_ж = \varepsilon_1 N_ж - \gamma_1 N_ж \cdot N_x \\ \dot{N}_x = -\varepsilon_2 N_x + \gamma_2 N_x \cdot N_ж \end{cases}$

4) $\begin{cases} \text{Стац. точки} \\ \text{Особые точки} \end{cases}$

$\dot{N}_{ж0} = \dot{N}_{x0} = 0$

1) $N_ж(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_x) = 0 \Rightarrow N_ж = 0, \; N_{x0} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$

$N_x(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_ж) = 0 \Rightarrow N_x = 0, \; N_{ж0} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$

5) $\left. \begin{matrix} N_x = N_{x0} + n_2; & n_2 \ll N_{x0} \\ N_ж = N_{ж0} + n_1; & n_1 \ll N_{ж0} \end{matrix} \right| \Rightarrow 3)$

$\underbrace{\dot{N}_{ж0}}_{=0} + \dot{n}_1 = \varepsilon_1(N_{ж0} + n_1) - \gamma_1[N_{ж0} + n_1][N_{x0} + n_2]$

$\dot{n}_1 = \varepsilon_1 n_1 + \underbrace{\boxed{\varepsilon_1 N_{ж0} - \gamma_1 N_{ж0} \cdot N_{x0}}}_{=0} - \gamma_1 n_1 N_{x0} - \gamma_1 n_2 N_{ж0}$

б) $\begin{cases} \dot n_1 = -\varepsilon_2 \cdot \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} n_2 \\ \dot n_2 = \varepsilon_1 \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot n_1 \end{cases}$

$\ddot n_1 = -\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot n_1;$ $\boxed{\ddot n_1 + \Omega^2 n_1 = 0}$ $\Omega^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$

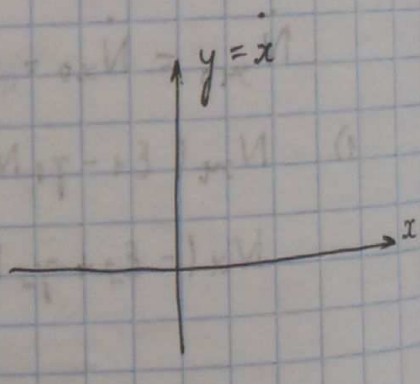
Фазовое пространство

$$\dot x_i = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} F_k(\vec{x}, t)$$

Размерность фаз. пр. = N

Число степеней свободы = $\frac{N}{2}$

Пример: $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -\omega^2 \cdot x \end{cases}$ $\Big| + F(t)$



$$\frac{dt}{d\tau} = 1$$

$\frac{dx}{d\tau} = y$ $\frac{dy}{d\tau} = -\omega^2 x$ $\frac{dt}{d\tau} = 1$

Резонанс

$$\ddot x + 2\gamma \dot x + \omega_0^2 x = f \cdot \cos \omega t$$

1) переход к комплексн. переменным

$$\ddot{x} + 2\gamma \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = f \cdot e^{i\omega t}$$

Практика:

12.02.13.

I) $\dot{x} = y$

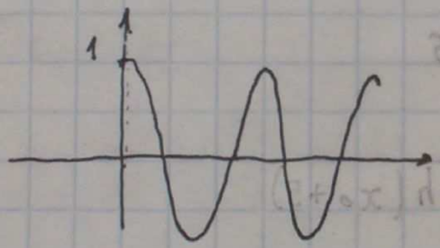
$\dot{y} = -\omega_0^2 x$

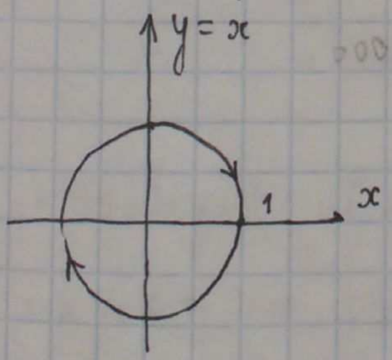
$\tau = t \cdot \omega_0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y \\ \frac{dy}{d\tau} = -x \end{cases}$$

$t = 0$

$x(0) = 1$

2) 

3) 

$$F = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \cdot \frac{x^2}{2} = C = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \cdot \frac{x^2}{2}$$

Метод Эйлера

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i \qquad y(t_0) = y_0$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = h$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = h f(x_i, y_i) + y_i$$

$h = 0.1$

$\frac{dy}{dx} = x + 5$

$y_0 = 1$

$y_1 = y_0 + h(x_0 + 5)$

$N = 1000$

```
for i=1 to N
 begin
  x[i+1] = x[i] + h
  y[i+1] = y[i] + h(x[i] + 5)
   Chart(x[i+1], y[i+1])
  end
```

Реализация:

```
yi := 1; xi := 1; h := 0,1;
for i:=1 to 1000 do
begin
Chart1.Series[0].add XY(xi,yi);
yi := yi + h*(xi+5);
xi := xi + h;
end;
```

Осциллятор:

$$\frac{dx}{dt} \to \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} = y_i$$

$$\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta h} = -x_i$$

$y_0 = 0$
$x_0 = 1$

$$\begin{cases} y_1 = -hx_0 + y_0 \\ x_1 = hy_0 + x_0 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = hy_1 + x_1 \\ y_2 = -hx_1 + y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{i+1} = hy_i + x_i \\ y_{i+1} = -hx_i + y_i \end{cases}$$

Реализация:

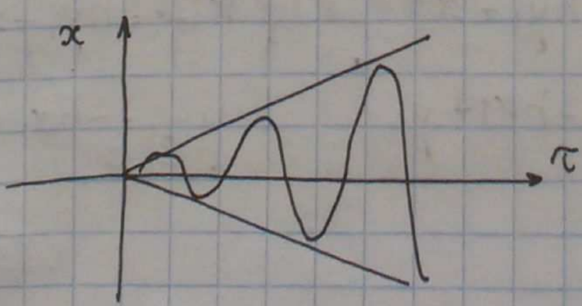
```
for i:=1 to 100 do
begin
Series2.Add xy(ti, xi)
Series3. Add xy(ti, yi)
Series4. Add xy(xi, yi)
xi = h * yi + xi;
yi = -h * xi + yi;
ti = ti + h;
end;
```

19.02.13.

Лекция №2

1) $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = f \cos \omega t$

$\omega \to \omega_0$



$x \sim t$

$(\omega - \omega_0) = \delta$

$\delta t \ll 1$

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$

1) Решение : $x = x_{общ} + x_ч$

общее решение однородного ур-я

+ частное решение неоднородного ур-я

$x = Ae^{\lambda t}$ $(f = 0)$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ // ищем общее реш-е одноp. ур-я //

характерист. ур-е

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ реш-е хар-го ур-я

$x_{одн} = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \sim e^{-\gamma t}$ эти решения затухают

$\omega \gg \gamma$

Общее решение одн. ур-я затухает!

2) возьмем времена $\gamma t \gg 1$

3) $x_ч =$

Искуственный прием, упрощающий выкладки

$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = fe^{i\omega t}$ $\underline{\underline{z = x + iy}}$

$Re\, z = x$

$z_ч = Be^{i\omega t}$

$$[(-\omega^2+\omega_0^2)+2\partial i\omega]\ B=f$$

$$B=\frac{f}{[(-\omega^2+\omega_0^2)+2\partial i\omega]}$$

4) Анализ: $B=B'+iB''=b e^{i\delta}$, $b=\sqrt{(B')^2+(B'')^2}$

$$\delta=\operatorname{arctg}\left(\frac{B''}{B'}\right)$$

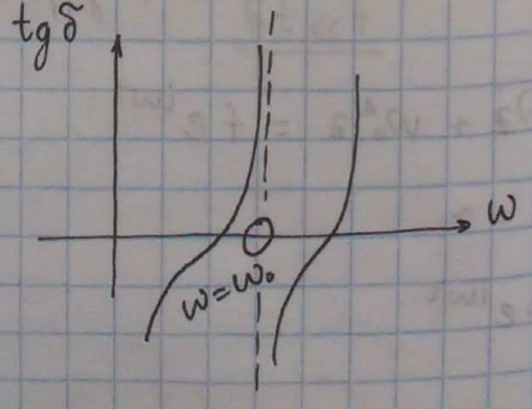
$$B=\frac{f[(-\omega^2+\omega_0^2)-2i\partial\omega]}{\{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+4\partial^2\omega^2\}}=\frac{f(\omega_0^2-\omega^2)}{\{\dots\}}+i\,\frac{(-2\partial\omega)}{\{\dots\}}$$

$$B'=\frac{f(\omega_0^2-\omega^2)}{\{\dots\}},\qquad B''=-\frac{2\partial\omega}{\{\dots\}}$$

$$b=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\partial^2\omega^2}},\qquad \operatorname{tg}\delta=\frac{2\omega\partial}{\omega^2-\omega_0^2}$$

max будет, когда внешн. част. ω совпад. с собств. частотой ω_0

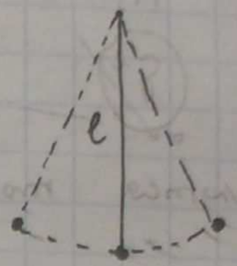
$$\boxed{b_{max}=\frac{f}{2\partial\omega}}$$



Параметрический резонанс

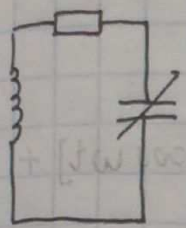
ур-е Матье

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + \varepsilon \cdot \cos 2\omega t]\, x = 0$$



маятник: меняем длину l

колеб. контур: периодич. изменение емкости



В общем случае, аналитически решить нельзя

ε - амплитуда изменения пар-ов.

$\varepsilon \ll 1$

Рез-ты: 1. $x \sim e^{\alpha t}$ сравнить с $x \sim t$ (обычным резонансом)

2. $\gamma \neq 0$ не ограничивает x, но возникает порог $x \sim e^{(\alpha - \gamma)t}$

$\alpha \sim \varepsilon$

$\alpha, \gamma > 0$

1) Решение ($\varepsilon \ll 1$)

$$x = A(t) \cdot \cos \omega t + B(t) \cdot \sin \omega t + \varepsilon \cdot V(t)$$

$$(\omega - \omega_0) = \delta \sim \varepsilon$$

пусть $\varepsilon = 0 \Rightarrow A = const,\ B = const$

$\dot{x} \Rightarrow$ появятся члены $\dot{A}, \dot{B} \sim \varepsilon$

$\ddot{x} \Rightarrow \ddot{A} \sim \ddot{B} \sim \cancel{\varepsilon^2} \to$ такие члены учитывать не будем

$\cancel{\delta^2}$

$\underset{0}{}$

Остаются только члены $\sim \varepsilon$

$\ddot{x} \to$ в ур-е подставим и получим:

2) $\varepsilon[\ddot{V} + \omega_0^2 V] = -\omega_0[-\dot{A}\cdot\sin\omega t + \dot{B}\cdot\cos\omega t] +$

$+ 2\omega_0\delta[A\cdot\cos\omega t + B\cdot\sin\omega t] - \varepsilon\omega_0^2\cdot\cos(2\omega t)\cdot$

$\cdot[A\cdot\cos\omega t + B\cdot\sin\omega t]$

3) $\varepsilon[\ddot{V} + \omega_0^2 V] = \omega_0\overset{=0}{[\dot{A} + 2\delta B - \varepsilon\omega_0 B]}\sin\omega t -$

$-\omega_0\underset{=0}{[\dot{B} - 2\delta A + \varepsilon\omega_0 A]}\cos\omega t + \ldots$

требую, чтобы $\begin{cases} \dot{A} + 2\delta B - \varepsilon\omega_0 B = 0 \\ \dot{B} - 2\delta A + \varepsilon\omega_0 A = 0 \end{cases}$

$A = ae^{\lambda t}, \quad B = be^{\lambda t}$

$$\boxed{\lambda^2 = (\omega_0^2\varepsilon^2 - 4\delta^2)}$$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_0^2\varepsilon^2 - 4\delta^2}$

$$x = A(t)\cdot \cos\omega t + B\cdot \sin\omega t$$

$$A = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\boxed{\omega_0 \varepsilon > 4\delta^2}$$

$$\ddot{x} + 2\vartheta\dot{x} + \omega_0^2[1 + \varepsilon\cdot\cos 2\omega t]x = 0$$

1) $x = z e^{-\vartheta t}$

$$\dot{x} = (\dot{z} - \vartheta z)e^{-\vartheta t}$$

$$\ddot{x} = [\ddot{z} - 2\vartheta\dot{z} + \vartheta^2 z]e^{-\vartheta t}$$

$$[\ddot{z} - 2\vartheta\dot{z} + \vartheta^2 z] + 2\vartheta[\dot{z} - \vartheta z] + \omega_0^2(1 + \varepsilon\cdot\cos\omega t)z = 0$$

$$\ddot{z} + [\vartheta^2 - 2\vartheta^2]z + \omega_0^2[1 + \varepsilon\cdot\cos 2\omega t]z = 0$$

$$\ddot{z} + \omega^2[(1 - \frac{\vartheta^2}{\omega_0^2}) + \varepsilon\cdot\cos 2\omega t]z = 0$$

$$\ddot{z} + \Omega_0^2[1 + \varepsilon_1\cdot\cos 2\omega t]z = 0 \qquad \omega \to \Omega$$

$$x = z e^{-\vartheta t} = a e^{\sqrt{\omega_0^2\varepsilon^2 - 4\delta^2} - \vartheta t}$$

26.02.13.

Теорема Флоке

Дано: $\ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0$ $\quad \omega(t+T) = \omega(t)$

Пример: $\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon \cdot \cos 2\omega t) = 0$ ур. Матье

$\sum \cos n\omega t$ - ур. Хилля

Найти: $x = A\varphi_1(t)e^{\lambda_1 t} + B\cdot\varphi_2(t)e^{-\lambda t}$ $\quad A, B = const$

$\varphi_i(t+T) = \varphi_i(t)$ если $Re\,\lambda \neq 0$ условие парамет. неустойчивости

Если λ имеет действ. часть, то неуст.

Решение (док-во)

1. $x_1(t)$ $\quad x_2(t)$ - линейно-независ. решения

$\Rightarrow$ фундамент. сист. решений, т.е. любое реш. м.б. представлено в виде суммы данных реш.

2. $t \to t + T$

ур-е не поменялось

$x_i(t+T) = \alpha_i x_1(t) + \beta_i x_2(t)$

3. $x_1(t+T) = \gamma_1 x_1(t)$ $\qquad x_2(t+T) = \gamma_2 \cdot x_2(t)$

Смотрю могу ли?: $x_1(t+T) = \gamma_1 x_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2$

$\boxed{x_1(\gamma_1 - \alpha_1) + x_2\beta_2 = 0}$ только, когда $\beta_2 = 0$, $\alpha_1 = \gamma_1$

Результаты: $x_1(t+T) = \gamma_1 \cdot x_1(t)$

$$x_2(t+T) = \gamma_2 x_2(t)$$

④ $\begin{cases} \ddot{x}_1 + w^2(t)\, x_1 = 0 & \Big| \cdot x_2 \\ \ddot{x}_2 + w^2(t)\, x_2 = 0 & \Big| \cdot x_1 \end{cases}$ $(-)$

$\ddot{x}_1 \cdot x_2 - \ddot{x}_2 \cdot x_1 = 0$ $\qquad \dfrac{d}{dt}[\dot{x}_1 \cdot x_2 - \dot{x}_2 \cdot x_1] = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\dot{x}_1 \cdot x_2 - \dot{x}_2 \cdot x_1 = const}$$

$\dot{x}_1(t+T)\, x_2(t+T) - \dot{x}_2(t+T)\, x_1(t+T) = C$

⑤ $\gamma_1 \gamma_2 [\dot{x}_1(t) \cdot x_2(t) - \dot{x}_2(t) \cdot x_1(t)] = (\dot{x}_1 \cdot x_2 - \dot{x}_2 \cdot x_1)$

$\gamma_1 \gamma_2 = 1$

⑥ $\gamma_i = \exp[\lambda_i T]$ $\qquad \lambda_i$ - новая константа

$\gamma_1 \gamma_2 = \exp[(\lambda_1 - \lambda_2) T] = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -\lambda_1}$

⑦ Введем новые функции: $\varphi_i = x_i(t) e^{-\lambda_i t}$

$\varphi_i(t+T) = x_i(t+T) e^{-\lambda_i (t+T)} = \gamma_i x_i(t) e^{-\lambda_i t} e^{-\lambda_i t} = \varphi_i(t)$

$= 1$

⑧ $x = A x_1(t) + B x_2(t) = A \cdot \varphi_1(t) e^{\lambda_1(t)} + B \cdot \varphi_2(t) e^{\lambda_2 t} = -\lambda_1 t$

Фундаментальные эффекты нелинейности.

Качественное рассмотрение

1) Неизохронность $\omega = \omega(x, \dot{x})$

2) Ангармонизм $x = \sum C \exp(in\omega_0 t)$

$x = A \cdot \cos(\omega t)$ - гармон колеб.

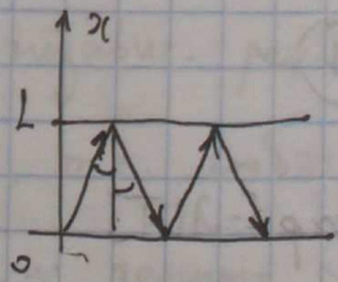
3) Автоколебания

4) Мультистабильность

5) Динам. хаос

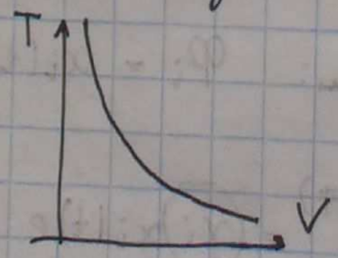
① - зависимость частоты колебаний от коорд. и скорости

Пример - качели

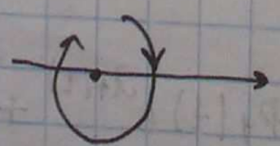


Колебат. процесс движ. част.

$T = \frac{2L}{V}$

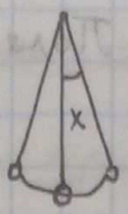


$\omega_H = \frac{eH}{mc}$



$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

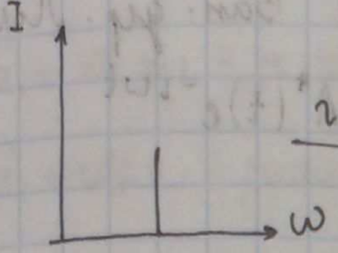
Пример:



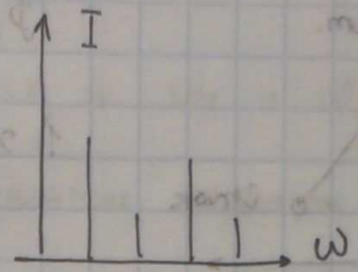
$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x \qquad x \ll 1$$

$$\ddot{x} + \omega^2 \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\Omega^2} x = 0$$

②



гармонизм



ангармонизм

спектр ↑

Пусть есть опред. нелин. действ. на сигнал $\hat{N}(x)$

$$\hat{N}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$x = \varepsilon = \left(\frac{eE}{mc\omega}\right) \ll 1$ Гарм. колеб. $x = A \cdot \cos\omega t$:

$$x \to a_1 A \cos\omega t$$

$$x \to a_2 [A^2 \cdot \cos^2 \omega t] = a_2 A^2 [1 + \cos 2\omega t]$$

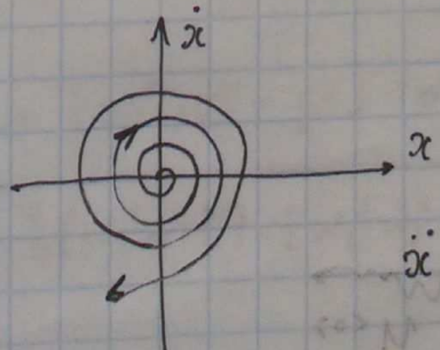
вторая гармоника

Эффект детектирования

$$x \to a_3 [\cos\omega t - \beta \cdot \cos 3\omega t$$

самовоздействие

③ Фазовая пл-ть



$(x, \dot{x} = 0$ неустойчив.$)$

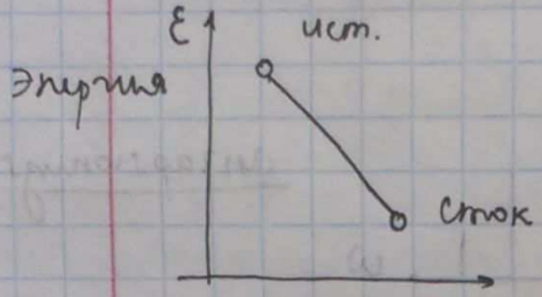
$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda < 0$$

$\ddot{x} - (\lambda - \alpha x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0$ Ван-дер-Поля

$\lambda > 0$

предельный цикл $\alpha x^2 = \lambda$



Решение ур-я Ван-дер-Поля

1) $x = A(t)e^{i\omega t} + A^*(t)e^{-i\omega t}$

Практика №2:

1) $x = A(t)e^{i\omega t} + A^*(t)e^{-i\omega t}$

Линейный и парам. резонанс

I. $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cdot\cos\omega t$

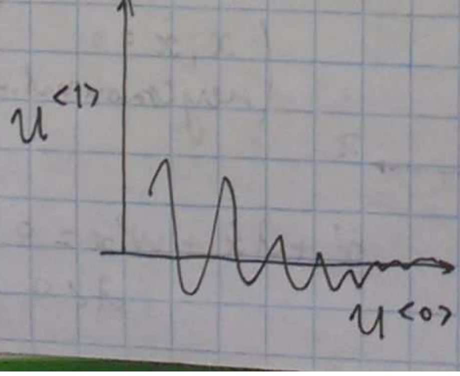
II. $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon\cdot\cos 2\omega t)x = 0$

$IC := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → нач. усл. $x = y$ $D(t, x) := \begin{pmatrix} y_1 + \dots \\ y_0 + \dots \end{pmatrix}$

$M = 100$ · кол-во точек

$t_n := 0$; $t_k := 10$;

$U := rkfixed(IC, t_n, t_k, M, D)$



05.03.13.

Связанные лин. осцилляторы.

Парциальные частоты. Нормальные частоты. „Расщепление". Теорема единственности.

$$(1)\begin{cases}\ddot{x}_1+\omega_1^2 x_1=\mu_1 x_2\\ \ddot{x}_2+\omega_2^2 x_2=\mu_2 x_1\end{cases}$$

if $\mu_i=0 \Rightarrow \omega_1$ и ω_2 - парциальные частоты

Какие св-ва у системы (1)?

Нужно ее решить!

Решение:

1. $x_1=a_1 e^{i\omega t}$; $x_2=a_2 e^{i\omega t}$

2. $a_1(\omega_1^2-\omega^2)=\mu_1 a_2$
   $a_2(\omega_2^2-\omega^2)=\mu_2 a_1$

$$\begin{vmatrix}(\omega_1^2-\omega^2) & -\mu_1\\ -\mu_2 & (\omega_2^2-\omega^2)\end{vmatrix}=0$$

$\boxed{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)-\mu^2=0} \Rightarrow \Delta(\omega)=0$ дисперс-е ур-е

в подавляющем больш-ве случаев $\mu_1=\mu_2$

if $\mu_1\neq\mu_2 \Rightarrow$ невзаимные системы, не вып-ся 3-й з-н Ньютона.

3. $\omega^4-\omega^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+[\omega_1^2\cdot\omega_2^2-\mu^2]=0$

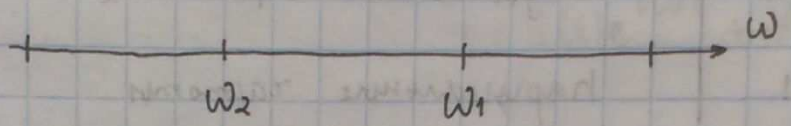
$$(\omega^2)_{1,2}=\frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2+\omega_2^2)-[\omega_1^2\cdot\omega_2^2-\mu^2]}$$

Норм. частоты: $\Delta(\omega) = 0$

Св-во норм. частот:

„расщепление"

н.ч. — Ω_{min} Ω_{max} — н.ч.



Док-во:

1. $\mu = 0$ $(\omega^2)_{1,2} = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 + 2\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 - 4\omega_1^2 \cdot \omega_2^2} = \frac{1}{2}(\ ) \pm \frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2);$

2. $\mu \neq 0$ $(\omega^2)_{1,2} = \frac{1}{2}(\ ) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\ }$

„расщепление" означает, что min н.ч. Ω_{min} оказывается меньше парциальной ω_2, а max н.ч. Ω_{max} больше max парц. частоты ω_1.

Теорема взаимности.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \mu x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 \cdot x_2 = \mu x_1 + F \cdot \cos \Omega t \end{cases}$$

Воздействие внешн. сил на систему св. осцил-в.

1. Мы хотим посмотреть на частные решения

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = A \cdot \cos \Omega t \\ x_2 = B \cdot \cos \Omega \cdot t \end{cases}$$

2. Подставляем в (2): $(\omega_1^2 - \Omega^2) A = \mu B$

$(\omega_2^2 - \Omega^2) B = \mu A + F$

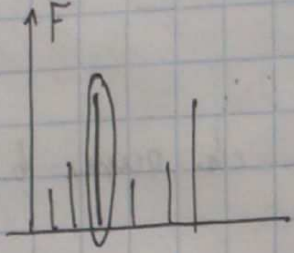
ам. колебаний первого осцил., когда вн. сила действует на второй осцил-р

$$\boxed{A = \frac{\mu F}{\Delta(\Omega)}} \qquad B = \frac{F(\omega_1^2 - \Omega^2)}{\Delta(\Omega)}$$

3. Анализ решений:

1) Ω - норм. ч-та $\Rightarrow$ $\Delta(\Omega) = 0$ - резонанс

2) пример: вода в трюме раскачиваться не будет if частота совпадает с частотой вн. силы F

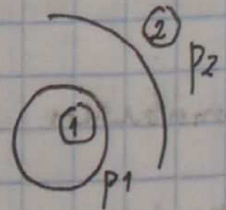


<u>th взаимности:</u> амплитуда колебаний II-го осцил., когда вн. сила действ. на I-й совпад. с амплит. I-го осцил·ра, когда сила действ. на II

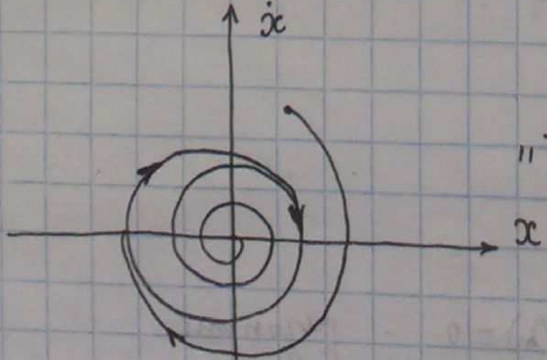
$$\boxed{B = \frac{\mu F}{\Delta(\Omega)}} \qquad A = \frac{F(\omega_2^2 - \Omega)}{\Delta}$$

в ЭД: $\vec{p}_1 \vec{E}_{2(1)} = \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_{1(2)}$

два диполя



<u>Пред. цикл. ур. Ван. дер-Поля</u>



„мягкое" возбуждение

Это такая замкнутая кривая, к которой стремятся все траектории на фаз. плоскости.

Попробуем построить модель такого пред. цикла.
Напишем простейшее ур-е Ван-дер-Поля.

$\ddot{x} - (\lambda - \alpha x^2)\dot{x} + x = 0$ частота этого осцил. = 1

вблизи нуля смотрим 1) $x \ll 1$, $\lambda > 0$

$\ddot{x} - \lambda\dot{x} + x = 0$ это осцил-р с отрицат-м трением.

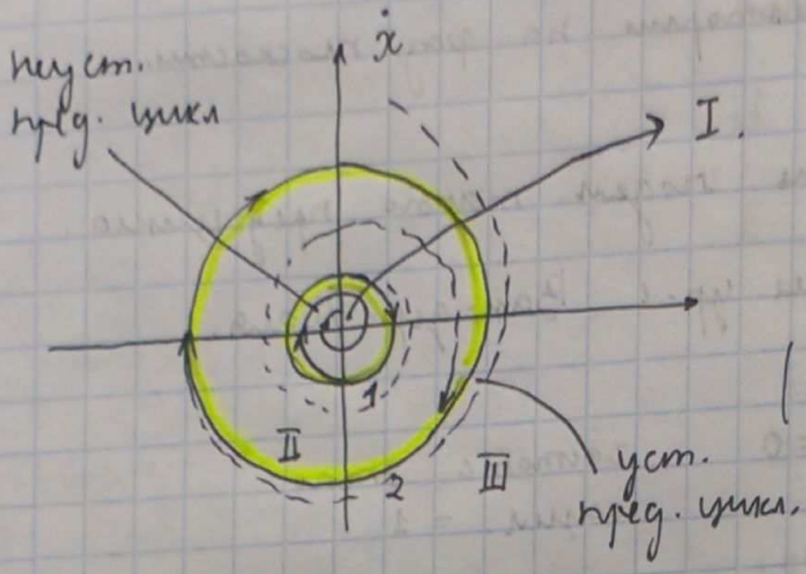
амплитуда такого осцил. exp-но ↑ (кривая раскручивается)

2) $x \uparrow$ растет $\alpha x^2 > \lambda$ $\alpha > 0$

$\ddot{x} + (\alpha x^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0$ трение положит-но

3) На самом пред. цикле тр. = 0 затухание положит-е и отрицат-е компенсируют др. друга.
Это мягкое возбуждение

„жесткое" возбуждение колебаний осц. В-дер-П



I. „скручивается", положит. трение - есть затухание (область внутри 1-ой замкн. кривой)

две замкн-е кривые: „1" и „2"

II. между замкн. кривыми „1" и „2" раскручивание

III. вне замкн. кривой „2".
Устойчивый пред. цикл.

Как нужно модифицир-ть ур-е Ван-дер-Поля?

$\ddot{x} + (\lambda - \alpha x^2)\dot{x} + x = 0$ положит. трение

$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + x = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = t \\ \dot{t} + (\lambda - \alpha x^2)t + x = 0 \end{cases}$$

$pt = \dot{t}$

$$\begin{cases} t \\ (p + (\lambda - \alpha x^2))t + x = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + (\lambda - \alpha x^2 + \beta x^4)\dot{x} + x = 0$$

когда x – мало → работает только слаг. λ в ( )

при больших x играет член $-\alpha x^2$

раскручивание, траектории нарастают

Практ. занятие 12.03.13.

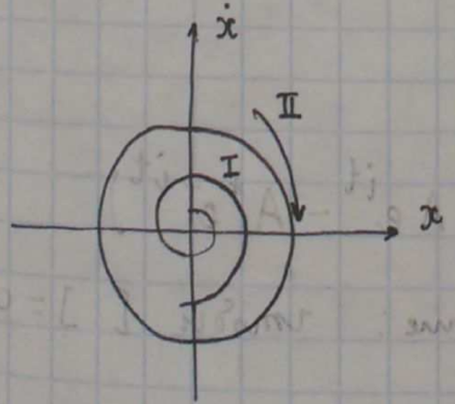
I. $\ddot{x} - (\lambda - \alpha x^2)\dot{x} + w^2 \cdot x = 0 \Rightarrow \ddot{x} - (\lambda - \alpha x^2)\dot{x} + x = 0$

1) $w = 1$, $\tau = wt$

$x \sim 0.1$ $\lambda \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$

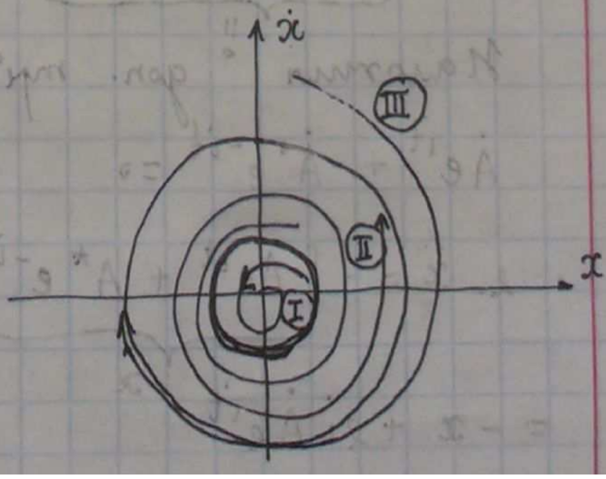
$x^2 \ll 1$ $\alpha = 1$

2)



II.

$$\ddot{x} + (\lambda - \alpha x^2 + \beta x^4)\dot{x} + x = 0$$



II $\ddot{x} + (\lambda - \alpha x^2 + \beta x^4)\dot{x} + x = 0$

Общая схема анализа.

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki} f_i(\vec{x}) \quad 1) \quad \boxed{\dot{\xi}_k = \varepsilon \cdot \sum \beta_{ki} F(\vec{\xi}, t) \quad \varepsilon \ll 1}$$

каноническая система

2) Усреднение $\frac{1}{T}\int_0^T dt \Rightarrow \langle \dot{\xi} \rangle = \dot{\xi} =$

$\xi = 1 + \varepsilon \cdot t$

$t \sim \frac{1}{\varepsilon}$

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 0$$

Решение ур-я Ван-дер-Поля:

1. $x = [A(t) e^{it} + A^* e^{-it}]$

$x \to \{A = A' + i A''\}$

$$\dot{x} = \underbrace{[\dot{A} e^{it} + \dot{A}^* e^{-it}]}_{=0\,!!} + i(A e^{it} - A^* e^{-it})$$

Наложим !! доп. требование: чтобы [ ] = 0

$\dot{A} e^{it} + \dot{A}^* e^{-it} = 0$

2. $$\ddot{x} = -\underbrace{[A e^{it} + A^* e^{-it}]}_{x} + i[\dot{A} e^{it} - \dot{A}^* e^{-it}] =$$

$= -x + 2i\dot{A} e^{it}$

3. $2i\dot{A} - i(\lambda - |A|^2)A + iA^3 \cdot e^{2it} + i(\lambda - |A|^2)A^* e^{-2it} -$

$- i(A^*)^3 \cdot e^{-3it} = 0$

4. Усредним: $\boxed{2i\dot{A} = i(\lambda - |A|^2)A}$ Канонич. форма
Укороченное ур-е
(усредненное)

5. $A = ae^{i\psi}$, $\dot{A} = (\dot{a} + \dot{\psi}a)e^{i\psi}$

$|A|^2 = a^2$

$\dot{a} + i\dot{\psi}a = \frac{1}{2}(\lambda - a^2)a$

6. Приравняем действ. и мн. части

$\boxed{\dot{a} = \frac{1}{2}(\lambda - a^2)a, \quad \dot{\psi} = 0} \Rightarrow \psi = C$

7. $a \cdot \dot{a} = \frac{1}{2}(\lambda - a^2)a^2$; $\rho \equiv a^2$

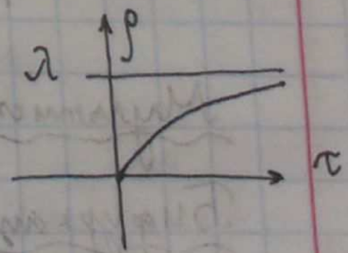
$\boxed{\dot{\rho} = (\lambda - \rho)\rho}$

ст. точки: $\rho_0 = \lambda$, $\rho_0 = 0$

устойчивость ст. точек

8. Качеств. анализ

$\rho = \rho_0 + \delta$



$\rho_0 = 0$

$\Downarrow$

$\dot{\delta} = \delta \cdot \lambda \Rightarrow \lambda > 0$ неуст.

$\rho_0 = \lambda \Rightarrow (\dot{\lambda} + \dot{\delta}) = \rho_0(-\delta)$

$\boxed{\dot{\delta} = -\lambda \cdot \delta}$ - устойч. ст. т.

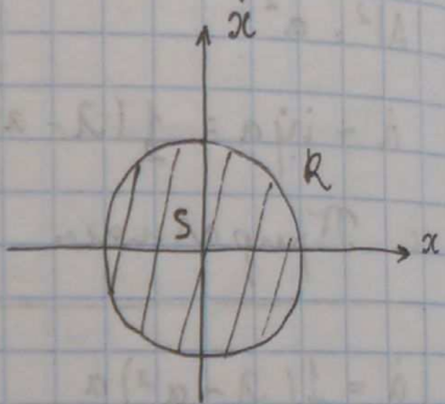
Теор. Бендиксона:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

Если $\left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right]$ - знакопостоянная

т.о. пред. цикл отсутствует

Док-во:



1. $\dot{x} \neq 0$ нет стационара

$\dot{y} \neq 0$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q} \Rightarrow dx \cdot Q - P \cdot dy = 0$$

2. $$\iint\limits_S \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right] dx \cdot dy = \oint\limits_R [Q \cdot dx - P \cdot dy] = 0$$

теор. Грина

Мультистабильность. Бассейны притяжения.

Бифуркация слияния устойчивых и неуст-х точек.

1) нарис. потенц.
2) пр-во фазовых точек (фаз. портрет)

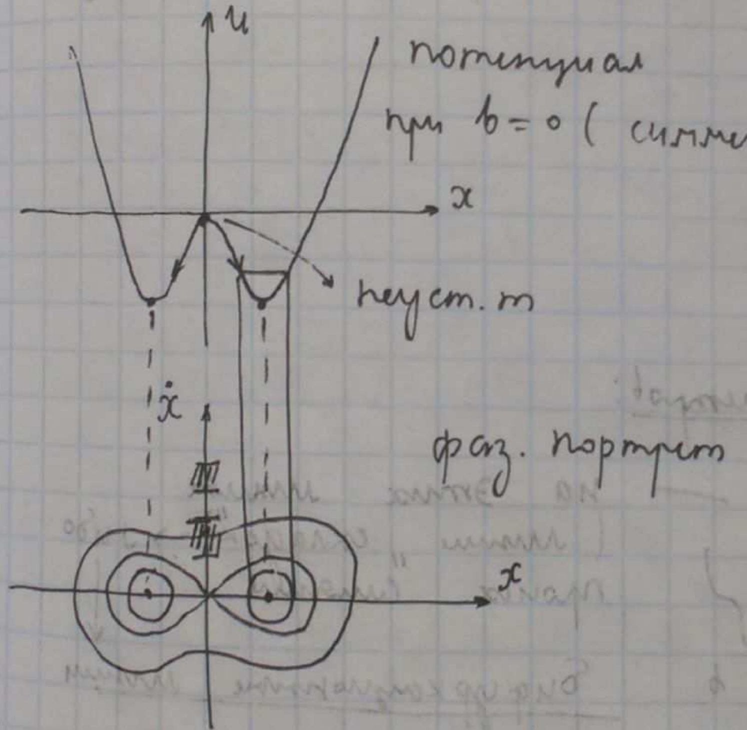
Пример: ур-е Дюффинга

$U = x^4 - ax^2 + bx$ - потенциал

a, b - пар-ры

if частица в таком потенциале, пишут:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -b + 2ax - 4x^3$$

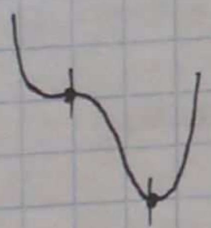


Что в таких сист-х понимают под мультистабильностью?

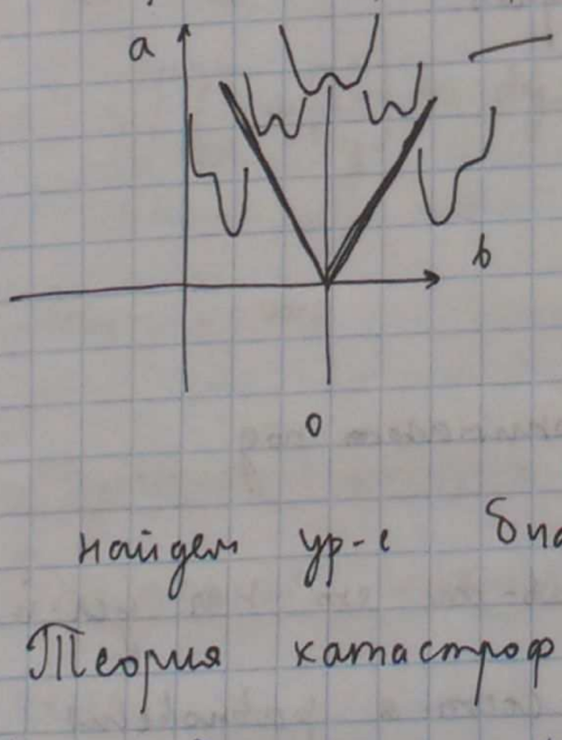
в изуч-ой системе, в зав-ти от нач. усл-й имеется два и > уст-х сост-я равновесия (в нашем простейшем примере таких сост-я 2) бассейны притяжения: область фаз. пр-ва которая (с какой-то области мы стартуем и попадаем в нех. обл. притяжения)

if слабое затухание - тонкие слои

бифуркация слияния - процесс слияния уст. и неуст-х точек



Пр-во параметров:



на этих линиях ("линии складок") → либо происх. "слияние" ↓ бифуркационные линии

найдем ур-е бифуркационных линий

Теория катастроф (теория бифуркаций)

Линии бифуркации - неуст. точки сливаются с устойчивыми

Хотим найти положение линий складок. 19.03.13

Найдем ур-е для линии складок:

$u = x^4 - ax^2 + bx$; $\ddot{x} = -4x^3 + 2ax - b$

1) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x^3 + 2ax - b \end{cases}$

2) На этих линиях расположены точки покоя:

$y = \dot{x} = 0$ на линиях $\dot{x} = \dot{y} = 0$

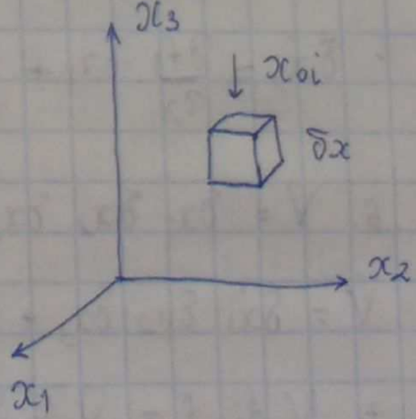
$4x^3 - 2ax + b = 0$ (1)

3) На линиях $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ → точки перегиба

$12x^2 - 2a = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{6}}$

4) подставляем x в ур. (1):

$\pm\sqrt{\frac{a}{6}} \cdot \left[\frac{2a - 6a}{3}\right] + b = 0 \Rightarrow b = \pm 8\left(\frac{a}{6}\right)^{3/2}$



Сжатие фазового объема

$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\vec{x}) \\ \dot{x}_{i0} = f_i(\vec{x}_0) \end{cases}$

$x_i = x_{0i} + \delta x_i$

Определить динамику фазового объема:

1. Объем маленький
2. Выбираем центр. точку x_{0i}. Для неё $\dot{x}_{0i} = f_i(\vec{x}_0)$
3. Получить ур. для объема
4. Для любой точки $x_i = x_{i0} + \delta x_i$
5. Подставим: $\dot{x}_{i0} + \delta \dot{x}_i = f_i(\vec{x}_0 + \delta \vec{x}) = f_i(\vec{x}_0) +$

$$+ \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta x_k$$

$$\delta \dot{x}_i = A_{ik} \cdot \delta x_k$$

Перепишем для 3-х мерного фазового объема:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot \delta x_3 & \Big| \times \delta x_2 \cdot \delta x_3 \\ \delta \dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot \delta x_3 & \Big| \times \delta x_1 \cdot \delta x_3 \\ \delta \dot{x}_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdot \delta x_3 & \Big| \times \delta x_1 \cdot \delta x_2 \end{cases}$$

6. $V = \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3$

$$\dot{V} = \delta \dot{x}_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3 + \delta x_1 \cdot \delta \dot{x}_2 \cdot \delta x_3 + \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta \dot{x}_3$$

7. $V \cdot \operatorname{div} f = V \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right]$

$$\dot{V} = V(\operatorname{div} f) + \overbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \delta x_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \cdot \delta x_2 \right) (\delta x_1)^2 + \ldots + \ldots}^{\star} = 3V(\operatorname{div} f$$

Generated by CamScanner from intsig.com

$$\star = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot \delta x_3 \cdot \delta x_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot \delta x_2 \cdot \delta x_1 \cdot \delta x_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3) +$$

$$+ \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\delta x_2 \cdot \delta x_1 \cdot \delta x_3) = V\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right]$$

8. Вывод: $\dot{x}_i = f_i(\vec{x})$, если $\text{div}\, f < 0$ - сжатие фаз. объема

Н-р: модель Лоренца

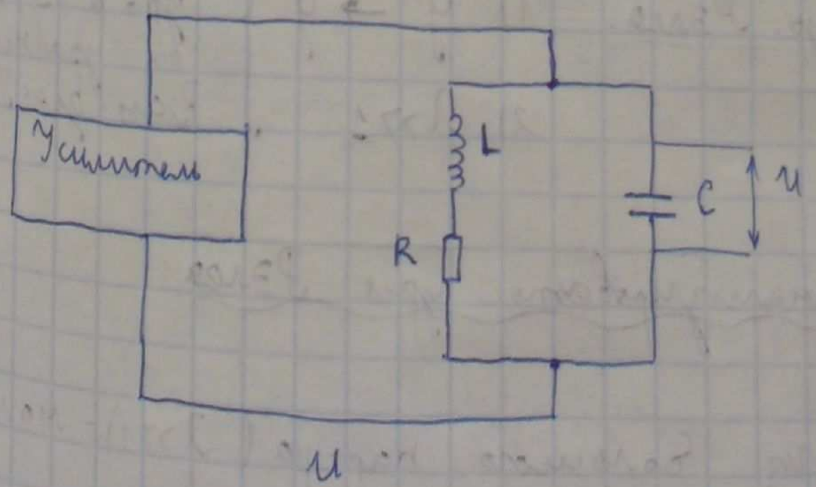
$$\begin{cases} f_1 & \dot{x} = -P(x-y) \\ f_2 & \dot{y} = -y + 2x - xz \\ f_3 & \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

$\text{div}\, f = -(P + 1 + b)$

по x от 1-го, по y от 2-го, по z от 3-го

$P > 0;\ b > 0 \Rightarrow \text{div}\, f < 0$

Пример, как в реальной ситуации возник. пред. циклы!



① сумма токов в узле = 0! $\sum I_k = 0$

② $\sum u_k = u_{акт.}$

Колебат. контура

1. Восп. правилом Кирхгофа: $R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dU} + u = M \cdot \frac{di}{dt}$

$u = \frac{1}{C}\int^{t} i\,dt$

$\ddot{u} - \omega_0^2 (M a_0 - RC - 3 M a_1 u^2)\dot{u} + \omega_0^2 \cdot u = 0$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

26.03.13.

Релаксационные автоколебания

простейший пример:

ур-е Рэлея: $\ddot{y} + (\lambda - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0$

Особенности ур. Рэлея: 1) $y^2 \to \dot{y}^2$ 2) $\lambda \gg 1$ } осн. отличия ур-я Рэлея от уравнения Ван-дер-Поля

Задача: проанализировать ур-е Рэлея:

Цель: сделать из большого пар-ра ($\lambda \gg 1$) - малый

Введу такое время: $\tau = \frac{t}{\lambda}$ и такую ф-ю u:

$u = \frac{y}{\lambda^{3/2}}$

Получу ур-е: $\varepsilon \ddot{u} - (1 - \dot{u}^2)\dot{u} + u = 0$; $\varepsilon = \frac{1}{\lambda^2} \ll 1$

$\dot{u} = \frac{du}{d\tau}$ Такой класс ур-й с малым пар-м при старшей производной

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

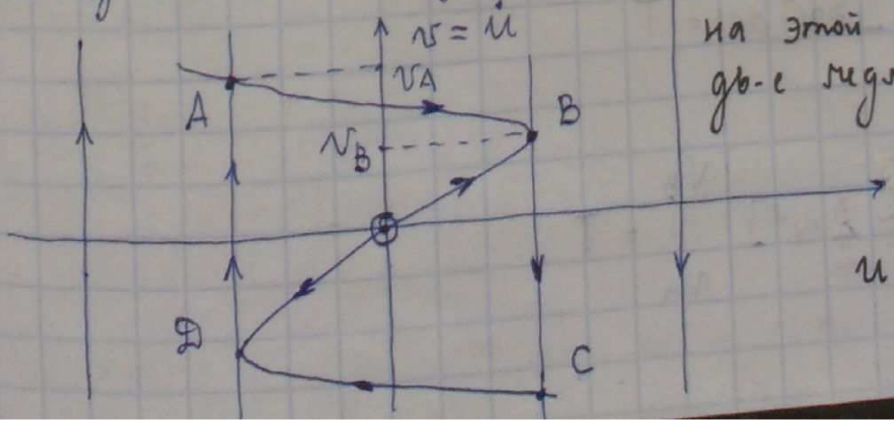
2. $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \varepsilon \dot{v} = (1 - v^2)v - u \quad (*) \end{cases}$

3. Введем быстрые и медленные движения:

медленные движения: условие, при котором правая часть ур-я (*) обращается в ноль ⇒ движение по такой кривой $(1 - v^2)v - u = 0$

$\boxed{u = (1 - v^2)v}$ – медленное движение

быстрое движение – движение во всех других точках



на этой кривой – дв-е медленное (она удовлетв. ур-ю $u = (1 - v^2)v$

4. Быстрые движения $\frac{dv}{du} = \frac{(1-v^2)v - u}{\varepsilon v}$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \frac{dv}{du} \to \infty$

5. $u_0 = 0, \quad v_0 = 0$

$u = u_0 + \delta u; \quad v = v_0 + \delta v \Rightarrow \begin{cases} \delta\dot{u} = \delta v \\ \varepsilon\delta\dot{v} = \delta v - \delta u \end{cases}$

$\varepsilon\delta\ddot{v} - \delta\dot{v} + \delta v = 0$

Рассмотрим период движения по этому предельному циклу

6. Период: Будем анализировать только движ. по медленным участкам пред. цикла.

$\frac{du}{d\tau} = v \Rightarrow \frac{du}{v} = d\tau$

Учтем медл. траекторию: $\frac{d(1-v^2)\cdot v}{v} = d\tau$

$$2\int_{v_A}^{v_B}\left[\frac{1}{v} - 3v\right]dv = T$$

$$2\left[\ln v - \frac{3}{2}v^2\right]\Bigg|_{v_A}^{v_B} = T$$

7. v_B - ? $\quad \frac{dv}{du} \to \infty, \quad \frac{du}{dv} = 0 \to -1 - 3v_B^2 = 0$

$v_B = +\frac{1}{\sqrt{3}}$

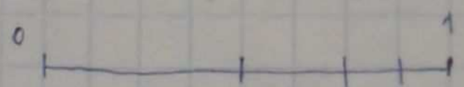
Аналогично, $v_D = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$A(u, v) = A(u_A, v_A) = A(u_D, v_A)$

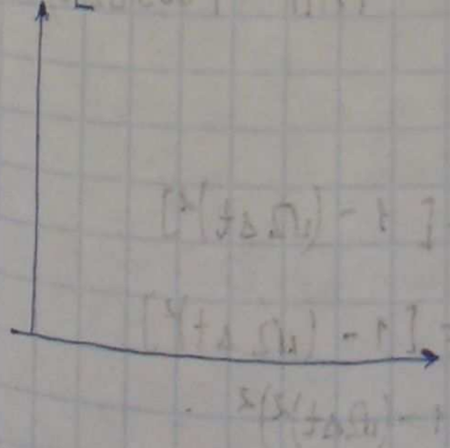
1) $v_D = v_A$

2) $u_A, v_A \in u_A = u_A(1 - v_A^2)$

Парадокс Зенона



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



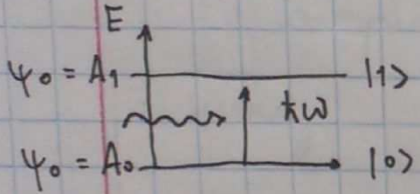
Квантовый эффект Зенона.

1. З-н распада в общем случае не есть экспоненц-н.
2. Коллапс волновой ф-ции (Наблюдение)

1. $N = N_0 \cdot e^{-Gt}$ $\quad W = e^{-Gt}$ $\quad G\cdot t \ll 1$ $\quad W = 1 - G\cdot t$

2. Переходы на малых временах не поддаются этому закону.

Док-во:



с увел. → переход вверх

с умен. → переход вниз

Если нет возмущ. то это конст. с опред. нач. усл.

$$\left.\begin{array}{l} i\hbar \dot{A}_0 = V A_1 \\ i\hbar \dot{A}_1 = V A_0 \end{array}\right| \begin{array}{l} V \sim E \text{ возм.} \\ \hbar\omega = E_1 - E_0 \end{array}$$

2. $A_1 = \cos\Omega t$ $\quad \left(\Omega = \frac{V}{\hbar}\right)$ - частота Раби
$A_0 = \sin\Omega t$

Вероятность перехода: $W = |\psi|^2 \sim |A_1|^2 = |\cos^2\Omega t| =$

$W = \left(1 - \frac{(\Omega t)^2}{2}\right)^2 = 1 - (\Omega t)^2$

3. Δt, t $\quad W_1 = [1 - (\Omega\Delta t)^2]$

$T = n\cdot\Delta t$ $\quad n \gg 1$ $\quad T = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)$ $\quad W_2 = [1 - (\Omega\Delta t)^2]$

$W_{1,2} = (1 - (\Omega\Delta t)^2)^2$

Наблюдение: $n \to \infty \Rightarrow \ln W_{1n} \to 0$ $\quad W_{1n} = [1 - (\Omega\Delta t)^2]^n$

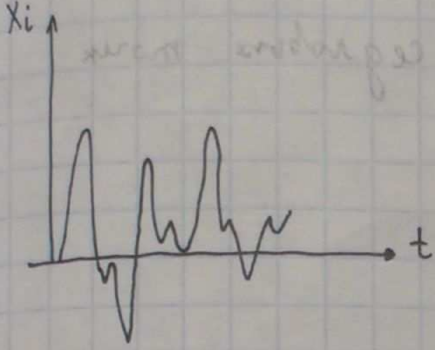
$W_{1n} \to 1$

* $(\Omega\Delta t)^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\cdot\Delta t\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}$

Динамический хаос (Дx)

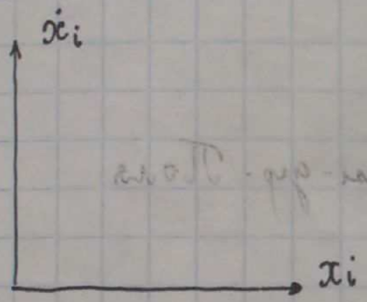
09.04.13.

$\dot{x}_i = F_i(\vec{x}, \vec{p}, t)$ ← нет случ. сил или парам.



Удивительное, что $N_{\text{ст. св.}} \geq 1{,}5$

Пример: $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \cdot \sin \omega t$



$N_{\text{фаз}}$ = числу ур-й

$N_{\text{ст. св}} = \frac{N_{\text{ф}}}{2}$

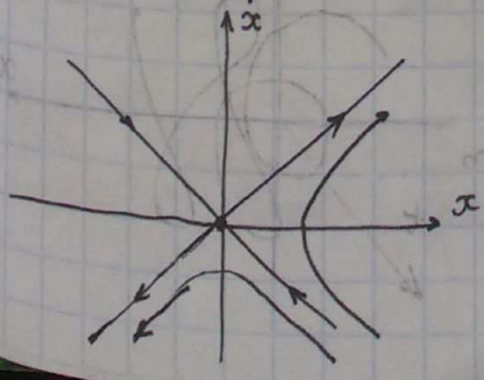
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = -\sin x_0 + \varepsilon \cdot \sin \omega t \\ \frac{dt}{d\tau} = 1 \end{cases}$$

расшир. фаз пр-во

~~кол-во степ. своб. 1.5~~

Парадигмы Д.x.

1 Локальная неуст-ть



ос. точка типа седло

$\Delta \bar{x} \sim e^{\alpha t}$

$x \sim t^n$ ... в фазовое пр-во

$x \sim e^{\alpha t}$ дин. системы в режиме

с дин. хаосом состоит

$x \sim \dfrac{1}{(t-t_0)^2}$ $\beta > 0$ из седловых точек

Локальная н-ть

2. Система д.б. нелинейной

$$\ddot{r} - \gamma \cdot \dot{r} + \omega^2 \cdot r = 0$$

$$\ddot{r} - (\gamma + \alpha r^2)\dot{r} + \omega^2 \cdot r = 0$$ Ван-дер-Поля

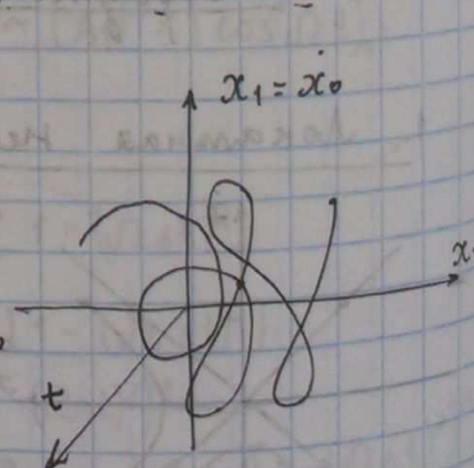
нелин-ть играет роль возвращения траектории из бесконечности.

3. Сист. должна иметь $N_{св} \geq 1.5$

Это вытекает из теоремы единственности

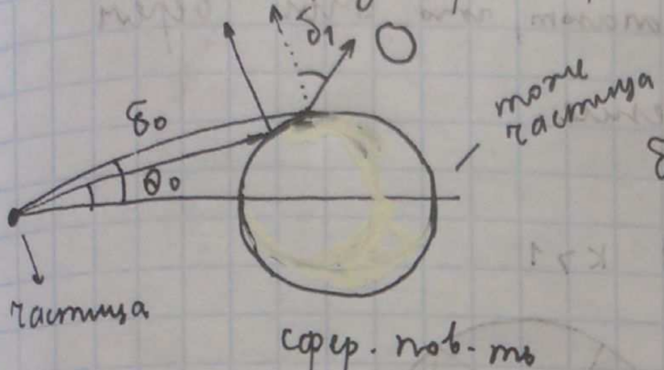
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = -\sin x_0 \end{cases}$$ 1 ст. свободы

th единственности не позволяет на плоскости организовать перемешивание



Крылов рассм. осн. задачу динам. хаоса:

он описал физ. процесс, в кот. реализ. неуст-ть



$\delta_1 = k \cdot \delta_0, \quad k > 1$

$\delta_2 = k \cdot \delta_1 = k^2 \cdot \delta_0$

$\boxed{\delta_n = k^n \cdot \delta_0} > \pi$

Пример: газ $\tau_{св. пр.} \sim 10^{-12}$ сек

Хотим наблюдать за отд. молек. в теч. 1 сек $\Rightarrow$

$n = \frac{t}{\tau} \sim 10^{12}$

Как только δ_n будет $> \pi$ будет непредсказуемо.

$\delta_n > \pi$ усл-е непредсказуемости

δ_0 - это неточность измерений координат

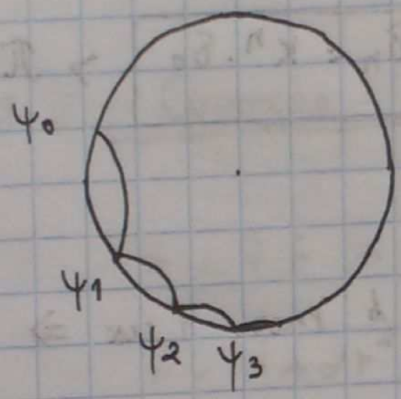
моей частицы (рассеивание одной молекулы на другой).

Смотрю как эволюционирует моя неточность $\underline{\underline{\delta}}$!

Пример 2: $\psi_{n+1} = \{K\psi_n\}$ $\quad 0 < \psi_n \leq 1$

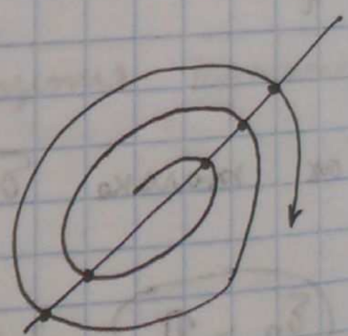
$\{..\}$ - эти скобки означают, что мы берем дробное значение.

1) $K < 1$



2) $K > 1$

Точечные отображения

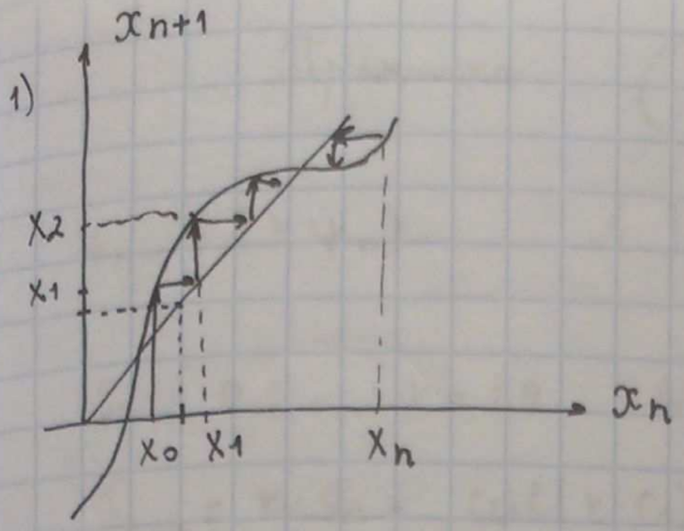


Одномерное $\psi_{n+1} = f(x_n)$

Идея: не изучать всю фазов. траекторию, а изучать следы этой траектории на секущей плоскости

Диаграмма Кронига-Ламерея

(лестница Ламерея)



$$x_{n+1} = f(x_n)$$

2) выбираем биссектрису $x_{n+1} = x_n = f(x_n)$

3) Рисую $f(x_n)$

4) Рисую последоват-ть.

$x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1)$

$x_3 = f(x_2)$

1) $x_{n+1} = f(x_n)$

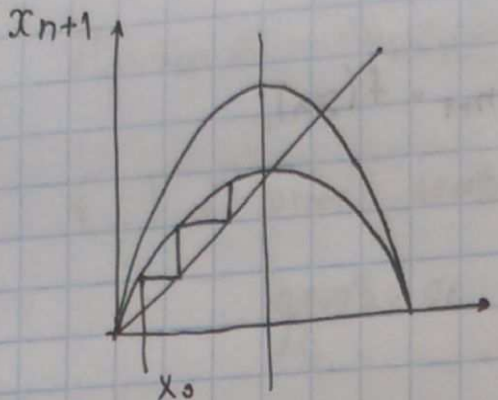
$x^*_{n+1} = x^*_n$ - стац.

2) $x_{n+1} = \cancel{x}^*_{n+1} + \delta_1 = f(x_n^* + \delta_0) = f(\cancel{x}_1^*) + f'(x_n^*)\cdot\delta_0$

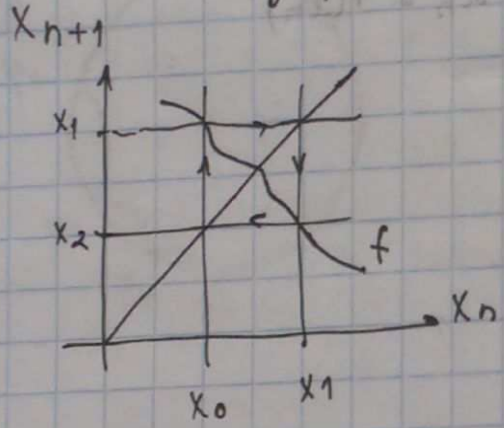
$$\boxed{\delta_1 = f'(x_n^*)\cdot\delta_0} \Rightarrow$$

$f'(x_n^*) > 1$ - неуст.

$f(x_n^*) < 1$ - уст.



Двукратная стац. точка



$x_0 \to x_1 \to x_0$

$\frac{\partial f}{\partial x_n} < 0$

$x_{n+1} = f(x_0)$

1) $x_0 = x_0^* + \delta_0, \quad x_1 = x_1^* + \delta_1$

$x_2 = x_2^* + \delta_2$

2) $x_1^* + \delta_1 = f(x_0^* + \delta_0) = f(x_n) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_n^*} + \delta_{0n}$

$\delta_{1n} \approx \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_n + \delta_{0n}}$

при $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_n^*} > 1$ - неуст-ть

$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_n^*} < 1$ - уст-ть

Практика: Лаба 5

$\psi_{n+1} = \{k\psi_n\}$ $\{\ \}$ - дробная часть

$S_0 := 0.1$ $k := 1.4$ $N := 1000$ $n = 0, 1 \dots N$

$S_{n+1} = k \cdot S_n - \operatorname{ceil}(k \cdot S_n) + 1$ $j := 0 .. 100$

$x1$ - среднее

$$C_j := \sum_{i=0}^{N-101} \frac{(S_i - x1)(S_{i+j} - x1)}{N}$$

2) $x_{n+1} = a[1 - (x_n)^2]$

07.05.13.

1. Лоренц
2. Критерий ДХ
3. Подавление ДХ

Лоренца система:

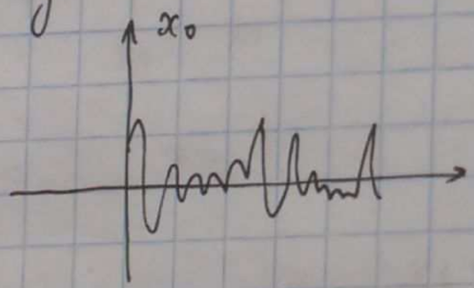
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \sigma(x_1 - x_0) + \mu \cdot x_3 \\ \dot{x}_1 = r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{cases}$$

$\sigma = 10$

$r = 28$

$b = \frac{8}{3}$

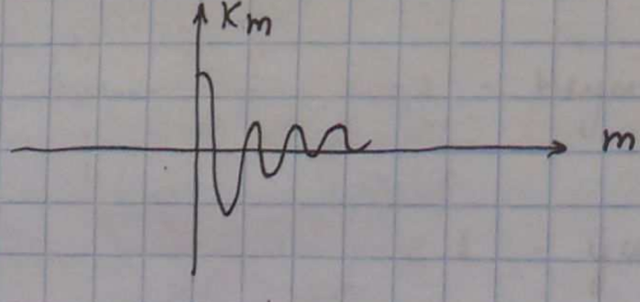
лок. неуст-ть



$m = 0, 1, .. 100$

автокорелиц. ф-я:

$$K_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-(m+1)} (x_{0_n} - \bar{x}_0)(x_{0_{n+m}} - \bar{x}_0)$$



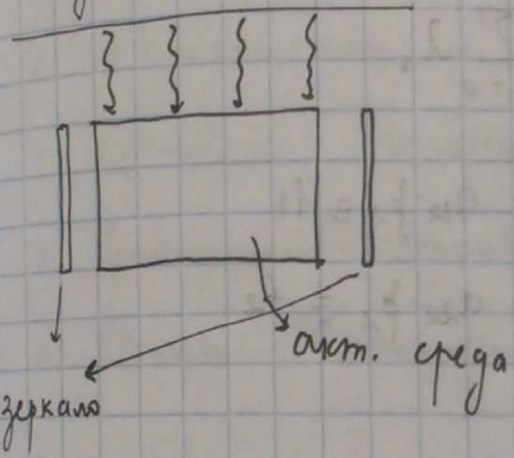
$\boxed{\dot{x}_3 = -\mu x_0}$ $\quad \mu = 8$

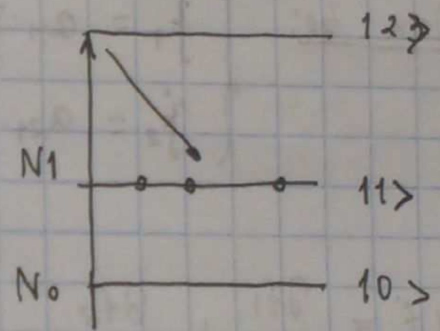
эффект юмн

Физическое содержание сист. Лоренца.

(одно из)

Лазер (одномодовый)





x_0; $\quad \vec{E}(\vec{r},t) = Re[x_0(t)\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}]$

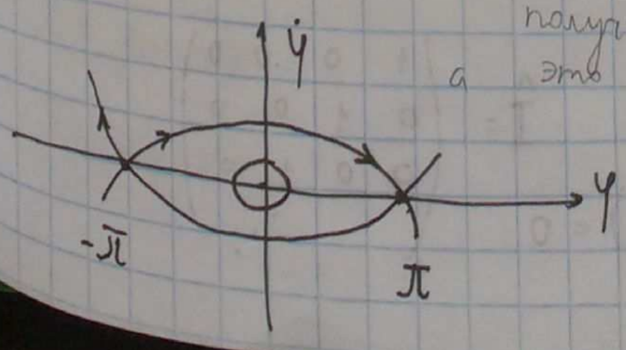
x_1; $\quad \overline{P} = Re[x_1(t)\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}]$

x_2; $\quad \mathcal{D} = N_1 - N_0 \equiv x_2$

Недостатки критерия Ляпунова.

1. Например, есть мат. маятник: $\ddot{y} + \Omega^2 \cdot \sin y = 0$

получается что все неустойчиво,
а это неправда (лок. неуст. + развил
седла - в окр-ти диспан хаос)
седла критерий Ляпунова
разбегается



2. Коэф. M - зав-т от времени

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}) \qquad \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\xi} \Rightarrow \dot{\vec{\xi}} = M \cdot \vec{\xi}$$

<u>Важные св-ва:</u>

$$\operatorname{div} \dot{\vec{\xi}} = \operatorname{div} \vec{f} = Sp\, M = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$$

<u>Док-во:</u>

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = a_{11} \cdot \xi_1 + a_{12} \cdot \xi_2 \equiv f_1 \\ \dot{\xi}_2 = a_{21} \cdot \xi_1 + a_{22} \cdot \xi_2 \equiv f_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} = Sp\, M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} = a_{11}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} = a_{22}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Собств. числа M

$$\det(\hat{M} - \lambda \cdot \hat{I}) = 0 \qquad \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot \lambda^k = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + a = 0$$

Критерии Д.Х.

1. Кр. Ляпунова
2. Автокорреляц. ф-ция
3. Критерий Мельникова
4. Критерий Чирикова
5. Сечение Пуанкаре.

Критерий Чирикова. Динамика движения частицы в поле двух волн.

Дано:

$\longrightarrow$ H_0, z

Движ. только вдоль оси z (одном. движ.)

Продольные волны: $\vec{E} \parallel \vec{k} = (0, 0, k)$

E_1, k_1, ω_1

E_2, k_2, ω_2

Generated by CamScanner from intsig.com

Решение

1. <u>Одна волна</u>: $m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = e \cdot E_1 \cdot \sin(k_1 z - \omega_1 t)$

Вводим: $\psi_1 = (k_1 z - \omega_1 t)$ $\quad \omega_1 t = \tau$

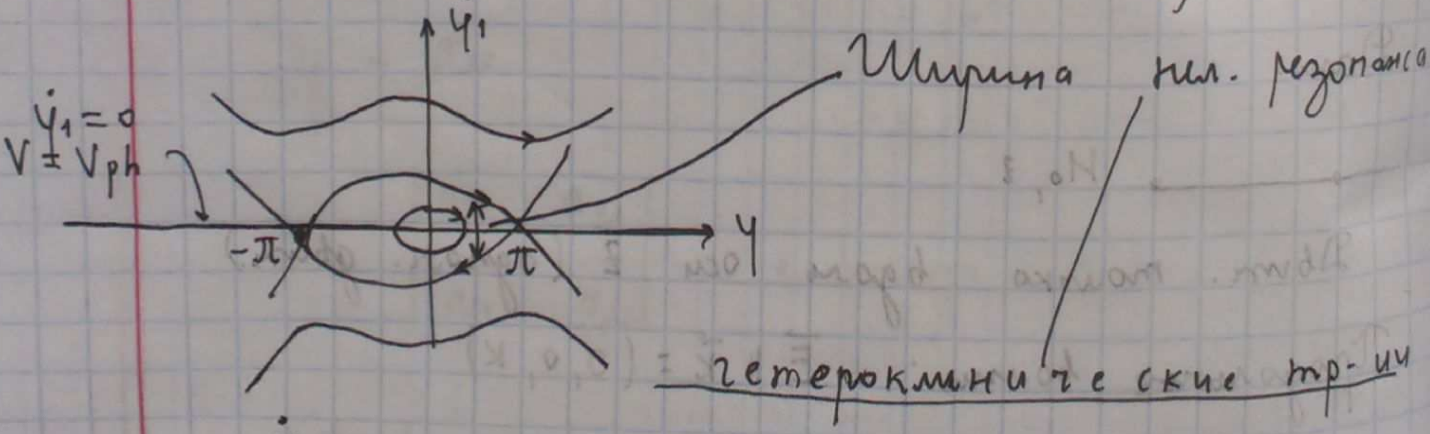
$\dot{\psi}_1 = k_1 \cdot \dot{z} - \omega_1 = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 V = \omega_1} \to V = V_{ph} (*)$

$\ddot{\psi}_1 = k_1 \cdot \ddot{z} \Rightarrow \boxed{\ddot{\psi}_1 + \Omega^2 \cdot \sin\psi_1 = 0}$

$\Omega^2 = \left(\frac{e E_1 \cdot k_1}{m \cdot \omega_1^2}\right)$

ур-е частицы в поле одной волны м. б. сведено к ур-ю мат. маятника.

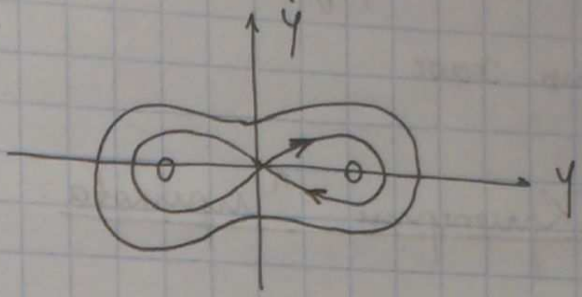
2. Фазовый портрет.



$\dot{\psi} = 0$ – эта линия – усл-е резонанса

$\boxed{V = V_{ph}}$ – усл. Чер. рез. (*)

гомоклинические траектории – из „седла - в седло" - найб. важные в теории динам. хаоса.



3. Шир. Нелин. Рез-са:

$$\int_0^t \dot{y}\cdot\ddot{y}\,dt = \int_0^t \dot{y}\,d\dot{y} = \frac{\dot{y}^2}{2} + C_1$$

$$\Omega^2\int_0^t \sin y_1\cdot\dot{y}_1\cdot dt = \Omega^2\cdot\int \sin y_1\,dy_1 = -\Omega^2\cdot\cos y_1 + C_2$$

$$\frac{\dot{y}^2}{2} - \Omega^2\cdot\cos y_1 = C_3$$

$$\boxed{\dot{y} = \pm\sqrt{2[C_3 + \Omega^2\cdot\cos y_1]}}$$

Две волны:

$$m\cdot\frac{d^2z}{dt^2} = eE_1\cdot\sin(k_1 z - \omega_1 t) + eE_2\cdot\sin(k_2 z - \omega_2 t)$$

4. Движение во второй волне.

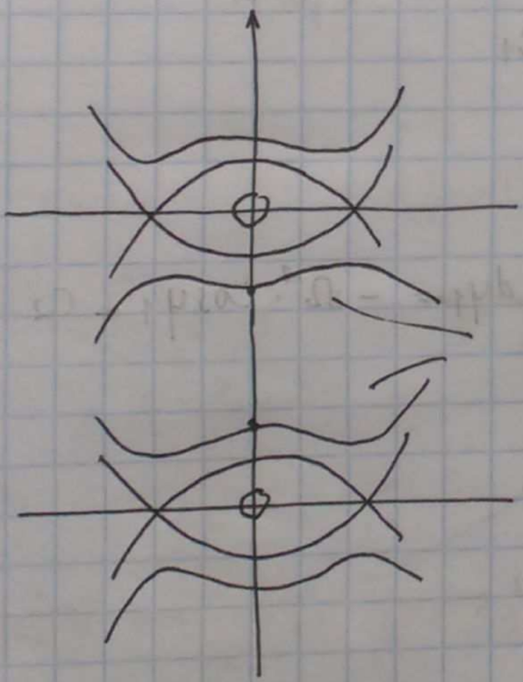
if нел. резонансы соприкоснутся - развив.-ся дин. хаос

Критерий Чирикова:

$$\left[\frac{\Delta\dot{\psi}_1}{2} + \frac{\Delta\dot{\psi}_2}{2}\right] \geqslant$$ расстоянию между резонансами

шир. н.р.

$\Rightarrow$ Д.Х.



когда min одной сепаратрисы соприкоснется с max другой.

5. Расст-е между нелин. рез-ми

$k_1 \cdot V_1 = w_1$

$V_1 = V_{ph1}$

$V = V_1 + \Delta V$

$V = V_2 - \Delta V$

$$V_1 + \Delta V = V_2 - \Delta V$$

$$\boxed{(\Delta V_1 + \Delta V_2) \geq (V_2 - V_1) = (V_{ph1} - V_{ph2})}$$

$$\Delta V_i = \frac{\Delta \dot{y}_i}{K_i}$$