Задачи ГОС. экз. по АЯФ

№1

$T_0 = 300K$

Усл-е: медный шарик: $r = 1$см; $C_v = 0{,}38 \frac{Дж}{г \cdot K}$; $\rho = 8{,}9 \frac{г}{см^3}$. Поверхность шарика – абс. черная. Местонахождение шарика – вакуум с $T_B = 0K$. Конечная темп. шарика: $T' = T_0/1{,}5 = 200K$. За какой промеж. времени это произошло (t)?

Р-ие: баланс эн-ий: $dE = \delta Q$, где dE – эн-я, излуч. шариком (за время dt) с его пов-ти; δQ – кол-во потерянного тепла при указ. процессе. Здесь:

$$\begin{cases} \delta Q = -c_v m\, dT \\ dE = MS\,dt = \sigma S T^4 dt \end{cases}$$

; тут M – энергетич. светимость т/т; $S = 4\pi r^2$; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-5} \frac{эрг}{с \cdot см^2 K^4}$ – пост. Стеф.-Больцмана.

Приравняем и проинтегрируем δQ и dE, с учетом, что $m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$:

$$4\pi r^2 \sigma \cdot t = -C_v \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \int_{T_0}^{T'} \frac{dT}{T^4} = \frac{1}{9} C_v \rho 4\pi r^3 \left[\frac{1}{T'^3} - \frac{1}{T_0^3}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t = \frac{C_v \rho r}{9\sigma}\left[\frac{1}{T'^3} - \frac{1}{T_0^3}\right]}} = \frac{C_v \rho r}{9\sigma T_0^3}\left[1{,}5^3 - 1\right]$$

Подставляя числ. значения $t \approx 5830с \approx 1{,}6ч$ // $C_v = 0{,}38 \cdot 10^7 \frac{эрг}{г \cdot K}$ //

Ответ: $t \approx 1{,}6ч$

№2

Усл-е: $T_0 = 2 \cdot 10^3 K$ – темп. изл-я. $\lambda_{max} = \lambda_{0\,max} + 0{,}25$мкм, где λ_{max} – наиболее вероятная дл. волны в спектре излучения. T – ?

Р-ие: по з-ну Вина: $\nu_{max} = b_\nu T$, т.е. $\lambda_{max} = b_\lambda T^{-1}$ ($\nu = \frac{c}{\lambda}$; c – ск. света).

Т.е. $\frac{b_\lambda}{T} = \frac{b_\lambda}{T_0} + 0{,}25 \cdot 10^{-4}$см; здесь $b_\lambda = 0{,}29$ см·K (табл. дан.) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow T' = T_0 \cdot \frac{b_\lambda}{b_\lambda + \Delta\lambda T_0} = (\Delta\lambda = 0{,}25 \cdot 10^{-8}см) = \frac{0{,}29}{0{,}29 + 0{,}05} T_0 \approx 1706K;$$

$T_0 - T' \approx 294K$

№3

Усл-е: природный углерод C состоит из изотопов ${}^{12}_{6}C$ и ${}^{13}_{6}C$. Массы: $m(C) = 12{,}01115$ а.е.м.; $m({}^{13}_{6}C) = 13{,}03354$ а.е.м. Найти процентное содержание ${}^{12}_{6}C$ и ${}^{13}_{6}C$ в C.

Р-ие: известно, что система измерения „а.е.м" строится таким образом, что $m({}^{12}_{6}C) = 12$ а.е.м. Тогда строим нехитрую пропорцию:

$$x \cdot m({}^{12}_{6}C) + (1-x)\, m({}^{13}_{6}C) = m(C)$$, откуда

$$x = \frac{m(C) - m({}^{13}_{6}C)}{m({}^{12}_{6}C) - m({}^{13}_{6}C)} \approx 0{,}989 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: содержание ${}^{12}_{6}C$ в C – 98,9%; ${}^{13}_{6}C$ – 1,1%.

№4

Усл-е: предположение Вина: $U(\nu) = A\nu^3 \exp(-\frac{\alpha\nu}{T})$; $\alpha = 7{,}64 \cdot 10^{-12}$ с·К;

темп. излуч. – $T = 2 \cdot 10^3$ К, ν_{max} – ? (наибол. вер. част. излуч.)

Р-ие: $U(\nu)$ – объемная спектр. плотность излучения. Найдем max этой ф-ии (ему и будет соответствовать ν_{max}):

$$U'_\nu(\nu) = 3A\nu_{max}^2 \exp(-\frac{\alpha\nu}{T}) - A\nu_{max}^3 \cdot \frac{\alpha}{T} \exp(-\alpha\nu/T) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{\nu_{max}\,\alpha}{T} \Rightarrow \nu_{max} = \frac{3T}{\alpha} = \frac{6 \cdot 10^3}{7{,}64 \cdot 10^{-12}} \approx 7{,}85 \cdot 10^{-14}\ \text{с}^{-1}$$

Ответ: $\nu_{max} \approx 7{,}85 \cdot 10^{-14}$ с$^{-1}$

№5

Усл-е: протон с $K_p = 1,2$ МэВ рассеивается на атоме золота в инт. углов $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$. Найти соотв. такому расс. σ.

Р-ие: из ф-лы Резерфорда: $d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{4K_p}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ указанное сечение: $\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{4K_p}\right)^2 2\pi \int\limits_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$. Вычислим интеграл:

$$\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = 2\int \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2\cdot 2\int \frac{d\sin\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} = -2\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + Const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = -4\pi\left(\frac{q_1 q_2}{4K_p}\right)^2\left[\underbrace{\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}}_{=1} - \underbrace{\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}}}_{=4}\right] = 12\pi\left(\frac{q_1 q_2}{4K_p}\right)^2$$

$q_1 = e;\ q_2 = Ze = 76e \Rightarrow \sigma \approx 2\cdot 10^{-22}\ см^2$

№6

Усл-е: солн. спектр $\approx$ спектр а.ч.т., для кот. $\lambda_{max} = 0,48$ мкм. Солнце: $M_S = 2\cdot 10^{30}$ кг; $R_S = 7\cdot 10^8$ м.

Найти: мощность тепл. изл-я Солнца; время уменьш. массы Солнца на 1% за счет изл-я

Р-ие: мощность изл-я $\Leftrightarrow$ эн-я изл-я за ед. вр $\Rightarrow P = M\cdot S = 4\pi R_S \cdot \sigma T^4$

(M – энерг. светимость; σ – пост. Ст.-Больцмана, $\sigma = 5,67\cdot 10^{-5} \frac{эрг}{с\cdot см^2\cdot K^4}$)

По з-ну Вина: $\lambda_{max} = \frac{b_\lambda}{T} \Rightarrow P = 4\pi R_S \sigma\cdot\left(\frac{b_\lambda}{\lambda_{max}}\right)^4$ // $b_\lambda = 0,29$ см$\cdot$K //

Для получения размерности $[P] = $ Вт используем $\sigma = 5,67\cdot 10^{-8} \frac{Вт}{см^2\cdot K^4} \Rightarrow \boxed{P \approx 4,65\cdot 10^{26}\ Вт}$;

Изменение массы Солнца за счет изл-я приводет к изменению эн-й покоя до и после излучения: энерг. баланс $-c^2\Delta M_S = M\,S\,t = Pt \Rightarrow \boxed{t = \frac{0,01 M_S\cdot c^2}{P} \approx 3,9\cdot 10^{18}\ с}$

(57)

Усл-е: 2 протона на расстоянии $r = 1$ фм др. от др., $m_p = 1{,}67\cdot10^{-24}$ г; $e = 4{,}8\cdot10^{-10}$ $СГС_q$; $G_0 = 6{,}67\cdot10^{-8}\frac{см^3}{г\cdot с^2}$. $F_{гр}, F_{кул}, F_{яд}$ — ?

Р-ие: $F_{грав} = G_0 \cdot \frac{m_p^2}{r^2} \approx 1{,}86\cdot10^{-29}$ дина $\sim 10^{-29}$ дина

$F_{кул} = \frac{e^2}{r^2} = 23\cdot10^6$ дина $\sim 10^7$ дина

$F_{яд} \sim \frac{E_{нукл}}{r} \approx 128\cdot10^6$ дина (предположит. так предлагают делать)

по Юкаве: $F_{яд} = \frac{U_0}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_0}}\left[\frac{\lambda_0}{r_0}+1\right] = \left\| \begin{matrix}\lambda_0 = 1{,}4\cdot10^{-13} см \\ U_0 = 50 МэВ\end{matrix} \right\| \approx 9\cdot10^8$ дина $\sim 10^9$ дина

С Юковой версией: $F_{яд} : F_{кул} : F_{грав} = 1 : 10^{-2} : 10^{-38}$

(58)

Усл-е: Энерг. светимость — $M = 5{,}7\frac{Вт}{см^2}$. λ_{max} — ?

Р-ие: з-н Стеф.-Больц.: $M = \sigma T^4$; з-н Вина: $\lambda_{max} = \frac{b_\lambda}{T}$ =>

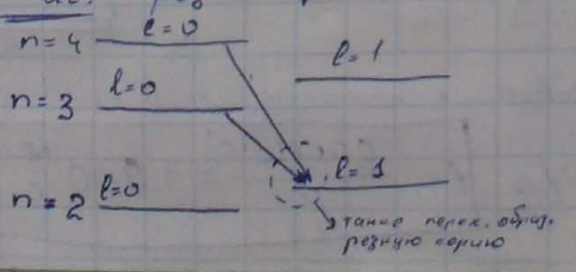
=> $\lambda_{max} = b_\lambda \cdot \frac{1}{(M/\sigma)^{1/4}} = b_\lambda \sqrt[4]{\frac{\sigma}{M}}$

Значения: $\sigma = 5{,}7\cdot10^{-12}\frac{Вт}{см^2\cdot K^4}$; $b_\lambda = 0{,}29$ см·K => $\boxed{\lambda_{max} = 2{,}9\cdot10^{-4} см = 2{,}9 мкм}$

(59)

Усл-е: атом Li; длина волны: резкой серии — 0,813 мкм; коротковолн. границы — 0,349 мкм. $E_{св}$ — ? (эн-я связи вал. эл-на)

Р-ие: резкая серия ≡ спектр. переходов с ур-й $l=0$ на ур-ни $l=1$. Здесь подразумевается, что 0,813 мкм — это длина волны, соотв. гол. линии резкой серии; 0,349 мкм — дл. волны,



соотв. коротковолн. границе указ. серии, т.е. переход $(l=0, n\to\infty) \to (l=1, n=2)$

Замечание: для лития эл. конф.: $1s^2 2s$, т.е. вал. эл-н нах. на ур-е $n=2$

Учитывая соответствие $E = \frac{1240}{\lambda(нм)}$ (эВ) можно писать:

$$|E_{n=2,l=1}| - |E_{n=3,l=0}| = \frac{1240}{\lambda_{г.к.р.с.}} = \frac{1240}{813} \approx 1{,}53 \text{ эВ}$$

$$|E_{n=2,l=1}| - |E_{n\to\infty,l=0}| = \frac{1240}{\lambda_{к.г.р.с.}} = \frac{1240}{349} \approx 3{,}55 \text{ эВ}$$

$$E_{n\to\infty,l=0} \to 0 \Rightarrow |E_{n=3,l=0}| = 3{,}55 - 1{,}53 = 2{,}02 \text{ эВ} = \frac{13{,}6 \text{ эВ}}{(3-\sigma_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-\sigma_0 = \sqrt{\frac{13{,}6}{2{,}02}} \Rightarrow \sigma_0 = 3 - \sqrt{\frac{13{,}6}{2{,}02}} \approx 0{,}4$$

Наша задача: $E_{св} = |E_{n=2,l=0}| = \frac{13{,}6 \text{ эВ}}{(2-\sigma_0)^2} \approx 5{,}3$ эВ

Ответ: $E_{св}(Li) = 5{,}3$ эВ

510 (5.15)

Усл-е: состояния атомов ^4P, ^5D. Определить возможные знач-я полн. мех. мом.

Р-ие: 1) $^4P \Leftrightarrow L=1,\ S=\frac{3}{2}$; $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ — опер. полн. мех. мом. $\Rightarrow$

$\Rightarrow |L-S| \le J \le L+S$, т.е. $\frac{1}{2} \le J \le \frac{5}{2}$ или $J = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$

Приходится писать такие вещи: $|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\,\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar; \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar; \frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$

2) $^5D \Rightarrow 0 \le J \le 4$ $(L=2;\ S=2) \Rightarrow J = 0, 1, 2, 3, 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\,\hbar = 0; \sqrt{2}\hbar; \sqrt{6}\hbar; 2\sqrt{3}\hbar; 2\sqrt{5}\hbar$

№11

<u>Усл-е:</u> e^- не может находиться в p.

<u>Р-ие:</u> по принц. неопр. $\Delta x \Delta p \sim \hbar$. В нашем случае $\Delta x \sim 1$ фм (размеры ядра ~ размеры протона) $\Rightarrow \Delta p \sim \frac{\hbar}{r_p}$; $\Delta p \sim p$, где p – импульс эл-на $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (учитывая, что эл-н движ. с ультрарелят. скор.) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow K_e \sim c\Delta p \sim \frac{\hbar c}{r_p} \approx 0{,}316 \cdot 10^{-3} \text{ эрг} \approx 200 \text{ МэВ}$$

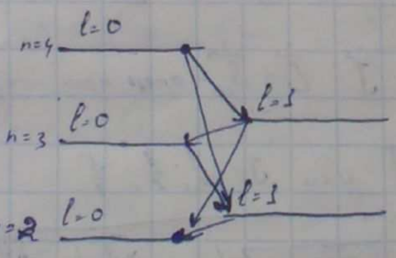
– такая эн-я по крайней мере необходима для локализации e^- в объеме с лин. разм. $\sim 10^{-13}$ см.

Таких сил в природе не обнаружено $\Rightarrow e^-$ не может быть составляющей, в частности, протона.

№12 (5.4)

<u>Усл-е:</u> атом Li нах. в возб. сост. $4S$. Сколько спектр. линий возникает при переходе в осн. сост ($2S$).

<u>Р-ие:</u>



Правило отбора по кв. числу l гласит, что переходы между ур-ями возможны только при $\Delta l = \pm 1$. (учетом этого показано, что из сост. $4S$ ($n=4$, $l=0$) в осн. ($n=2$, $l=0$) возможно наблюдение 6-и спектр. линий: $4S \to 3P$; $4S \to 2P$; $3P \to 3S$; $3P \to 2S$; $3S \to 2P$; $2P \to 2S$.

№13

Усл-е: атом ${}_4^7Be$: $m_a({}_4^7Be) = 7{,}016981$; атом ${}_3^7Li$: $m_a({}_3^7Li) =$ $= 7{,}016005$ а.е.м. Возможна ли реакция: ${}_4^7Be \to {}_3^7Li + e^+$?

Р-ие: энергет. возможность реакции — $m_я({}_4^7Be) \geq m_я({}_3^7Li) + m_e$

Заметим, что индексы „я" и „а" у масс означают, соотв., яд. и ат. массы. $\Rightarrow$

$\Rightarrow m_a({}_4^7Be) \geq m_a({}_3^7Li) + 2m_e$. Домножая полученное на c^2 и учитывая, что $1 а.е.м. \cdot c^2 = 931{,}5$ МэВ; $m_e c^2 \approx 0{,}51$ МэВ, получаем (в цифрах):

$6536{,}3178 \geq 6535{,}4086 + 1{,}02 = 6536{,}4286$, что не есть правда.

Ответ:

№14

Усл-е: нейтрон пересекает расстояние $= 2R_я({}_{92}^{235}U)$; $E_n = 1$ МэВ. t - ?

Р-ие: Полагая, что E - кинет. эн-я движ-я, причем она не есть релятив., получаем: $t = \frac{R_я}{v} = \frac{2r_0 A^{1/3}\sqrt{m_n}}{\sqrt{2E_n}} = \frac{2{,}1{,}4 \cdot 10^{-13} \cdot (92)^{1/3}\sqrt{1{,}67 \cdot 10^{-24}}}{\sqrt{2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}} \approx 10^{-21}$ с

Данное время порядка характерного времени взаимодействия (ядерного)

Ответ: $t \approx 10^{-21}$ с

√ №15 (5.16)

Усл-е: атом имеет 2 вал. эл – s и p (ост. обол. – заполн.). Термы атома?

Р-ие: s и p эл-ны будут определять кв. числа L, S, J атома и, соотв., его терм. Кв. числа эл-нов: $s - l = 0, s = \frac{1}{2}$; $p - l = 1, s = \frac{1}{2}$ =>

=> из соотношений $\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2}$ и $\vec{S} = \vec{s_1} + \vec{s_2}$ получаем:

$1 \le L \le 1$; $0 \le S \le 1$, т.е. $L = 1$; $S = 0; 1$

Пользуясь Рассел-Саунд. связью: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ получаем:

$\begin{cases} L = 1; S = 1: & 0 \le J \le 2 \Rightarrow J = 1; 2; 0 \\ L = 1; S = 0: & 1 \le J \le 1 \Rightarrow J = 1 \end{cases}$

Объединяя получ. результ., получ. все возможные термы атома таковы: ${}^3P_0$; ${}^3P_1$; ${}^3P_2$; ${}^1P_1$

√ №16 (11.18)

Усл-е: ядро ${}^{238}_{92}U$: $\tau = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет – время жизни; оно распадается на свинец в течении „жизни" Земли: $t_З = 2{,}5 \cdot 10^9$ лет. Сколько свинца ($\overbrace{\text{}}^{\text{его масса}}$) образовалось из $m({}^{238}_{92}U) = 1$ кг?

Р-ие: З-н радиоакт. расп. $N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, т.е. за время $t_З$:

$\frac{N_0}{N} = e^{\frac{5}{9}} \approx 1{,}743$ или $N = 0{,}574 N_0$, т.е. распалось $0{,}426 N_0$ ядер. Сколько же это ядер? $N_{расп} = 0{,}426 \cdot \frac{m({}^{238}_{92}U)}{m_я(U)} = 0{,}426 \cdot \frac{10^3}{238 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24}}$

$\approx 1{,}07 \cdot 10^{24}$. Столько образовалось ядер свинца =>

=> $m(Pb) = m_я(Pb) \cdot N_{расп} \approx 207 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24} \cdot 1{,}07 \cdot 10^{24} \approx 350$ г =>

=> Ответ: $m(Pb) \approx 0{,}35$ кг

№17

Усл-е: атомы $^{27}_{13}Al$ и $^{59}_{27}Co$. $\lambda_{K\alpha}$, $E_{K\alpha}$ - ? (рентг. изл-е)

Р-ие: ф-ла Мозли: $h\nu_{K\alpha} = E_{K\alpha} = 10{,}2(Z-1)^2$ эВ $\approx \frac{1240}{\lambda_{K\alpha}(\text{нм})}$.

$^{27}_{13}Al$: $E_{K\alpha} = 10{,}2 \cdot 12^2 =$ ~~...~~ $1{,}45$ кэВ; $\lambda_{K\alpha} = 844$ пм

$^{59}_{27}Co$: $E_{K\alpha} = 10{,}2 \cdot 26^2 = 6{,}9$ кэВ; $\lambda_{K\alpha} = 179{,}8$ пм.

№18

Усл-е: термы атомов: $^3_1H_2 - {}^2S_{1/2}$; $^9_4Be - {}^1S_0$. Сч. ком. сверхтонк. структуры.

Р-ие: полн. мом. атома (с учетом спина ядра): $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$, где $\vec{J}$ - оп. полн. мех. мом. ат.; $\vec{I}$ - оп. спина ядра.

1) $^3_1H_2$: $j = \frac{1}{2}$; (это из терма); $I = 1/2$ (из модели Шмидта) =>

=> $N_F = 2j+1 = 2I+1 = 2$ -> 2 комп. св. тонк. расщ.

2) ^9_4Be: $j = 0$ (из терма) => $I > j$ => $N_F = 2j+1 = 1$ -> 1 комп. с/т р.

№19

Усл-е. электрон: $E = E_0 + 200$ эВ => λ изм. в 2 раза. λ_0 - ?

Р-ие: де-Бр. дл. в. эл-на: $\lambda = \frac{h}{p}$. Предлагают пользоваться классикой.

Тогда: $E = \frac{p^2}{2m}$ => $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ => $\frac{1}{2}\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2m(E_0+200\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}6)}} = \frac{h}{\sqrt{2m(E_0+\Delta E)}}$,

но $\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2mE_0}}$ => $\frac{h}{\sqrt{2mE_0}} = \frac{2h}{\sqrt{2m(E_0+\Delta E)}}$ => $E_0 + \Delta E = 4E_0$ => $E_0 = \frac{\Delta E}{3}$ =>

=> $\lambda_0 = h\sqrt{\frac{3}{2m\Delta E}} = 6{,}6\cdot 10^{-2} \cdot 2{,}7\cdot 10^{18} \approx 1{,}5\cdot 10^{8}$ см $= 150$ пм

Ответ: $\lambda_0 \approx 150$ пм

№20

Усл-е: 3-я линия серии Бальмера в/п атомов: 108,5нм. $E_{св}$ - ? (эн-я связи эл-на в осн. сост.).

Р-ие: серия Бальмера образована переходами эл-нов из n-го ур-я на 2-й (n>2). ~~, где R-пост. Ридберга, $R=1,1\cdot10^5$ см$^{-1}$~~
R - Const

~~в др. ст. пер. с ур-я n на 1 соотв. изл-е ен фотона: $h\nu_{n1} = E_n - E_1$~~

Эн-я такого перехода: $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_5 - E_2$. Известно, что для в/п ат.:

$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}\cdot\frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2}\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right]$, откуда узнаем Z:

$Z^2 = \frac{[redacted]\cdot hc}{\lambda\cdot 0{,}21}\cdot\frac{2\hbar^2}{m_e e^4} \approx 4 \Rightarrow Z = 2$

Тогда по вышеупомянутой ф-ле Бора определяем $E_{св} = |E_1|$.

$$E_{св} = \frac{Z^2 m_e e^4}{2\hbar^2} \approx 13{,}6\cdot 4\,эВ \approx 54{,}4\,эВ$$

№21

Усл-е: ядра $^{90}_{38}Si$; $t_{1/2} = 28$ лет. $t = 20$ лет и $t = 100$ лет → какая часть ядер останется.

Р-ие: no comments - $N = N_0\cdot e^{-\lambda t}$; $\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -\lambda t_{1/2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \approx 0{,}025$ лет$^{-1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow N(t=20\text{ лет}) = N_0\cdot 0{,}6 \Rightarrow 60\%$ ядер

$N(t=100\text{ лет}) = N_0\cdot 0{,}08 \Rightarrow 8\%$ ядер

√ №22

Усл-е: e^- в водороде: $\psi = A(1+ar)e^{-\alpha r}$; A, a, α - Const.

A, a, α - ? E_e - ? (эн-я эл-на в атоме)

Р-ие: запишем УШ: $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E-U]\psi = 0$ или $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E-U-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right]\psi = 0$

//использовали тот факт, что $\Delta_{\theta,\varphi}\psi = -l(l+1)\psi$ //. Эл-н нах. в поле протона =>

=> $U(r) = -\frac{e^2}{r}$. Распишем отдельно произв.:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\alpha A(1+ar)e^{-\alpha r} + Aae^{-\alpha r} = A[a-\alpha(1+ar)]e^{-\alpha r} = A[(a-\alpha)-\alpha ar]e^{-\alpha r};$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = -\alpha A[(a-\alpha)r^2 - \alpha ar^3]e^{-\alpha r} + A[2(a-\alpha)r - 3\alpha ar^2]e^{-\alpha r} =$$

$$= A[2(a-\alpha)r - (\alpha a - \alpha^2)r^2 - 3\alpha ar^2 + \alpha^2 ar^3]e^{-\alpha r} = A[2(a-\alpha)r - (4\alpha a - \alpha^2)r^2 + \alpha^2 ar^3]e^{-\alpha r}$$

Подст. это в УШ, сокращая на A и $e^{-\alpha r}$ получаем:

$$\alpha^2 ar^3 - (4\alpha a - \alpha^2)r^2 + 2(a-\alpha)r + (1+ar)\cdot r^2\frac{2mE}{\hbar^2} + (1+ar)\cdot$$

$$\cdot\frac{2me^2r}{\hbar^2} - (1+ar)\cdot l(l+1) = 0$$

Приравниваем 0 все коэфф. полинома; ~~приравниваем все~~.

0-й: $l(l+1) = 0 \Rightarrow l = 0$

1-й: $2a - 2\alpha + \frac{2me^2}{\hbar^2} - \overset{\to 0}{l(l+1)}\cdot a = 0$

2-й: $\alpha^2 - 4\alpha a + \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2me^2a}{\hbar^2} = 0$

3-й: $\alpha^2 a + \frac{2mE}{\hbar^2}a = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$

3 ур-я на 3 неизв. (α, a, E) ->

-> $-4\alpha + \frac{2me^2}{\hbar^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{me^2}{2\hbar^2}}$; $\boxed{E = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2e^4}{4\hbar^4} = -\frac{me^4}{8\hbar^2}}$

$\boxed{a = \alpha - \frac{me^2}{\hbar^2} = -\frac{me^2}{2\hbar^2}}$; Или $\alpha = \frac{1}{2r_1}$; $a = -\frac{1}{2r_1}$; $E = \frac{E_1}{4}$

где $r_1 = 0{,}51\cdot10^{-8}$ см - 1-й боровский радиус; $E_1 = -13{,}6$ эВ - 1-й ур-нь Бора ат-вод.

Константа A определяется путем нормировки в/ф:

$$\int d^3r\,|\Psi|^2 = 1 = 4\pi\int_0^\infty r^2 A^2 (1-ar)^2 e^{-2\alpha r}\,dr;$$

Вычисл. можно произвести по частям либо интегр. по параметру α (причем полезно будет учесть, что $a=-\alpha$). Результат: $A = \frac{1}{\sqrt{8\pi r_1^3}}$

?

№23

Усл-е: яд. материя. ρ, n, ρ_q - ?

Р-ие: - конц. нукл.: $n = \frac{A}{\frac{4}{3}R_A^3\pi} = \frac{3A}{4\pi A r_0^3} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \sim 10^{38}\,\frac{\text{нукл}}{\text{см}^3}$

- плотность яд. мат.: $\rho = \frac{Am_N}{V} = n\,m_N = 1{,}67\cdot10^{14}\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$

- пл. заряда: $\rho_q = \frac{Ze}{V} = \frac{Ze}{A}n = \frac{Z}{A}\,4{,}8\cdot10^{28}\,\frac{\text{СГСЭ}_q}{\text{см}^3} \sim 10^{28}\,\frac{\text{СГСЭ}_q}{\text{см}^3}$

✓ №24 (11.6)

Усл-е: ядро $^{14}_{6}C$ (дерев. предмет): $t_{1/2} = 5570$ лет. Активность предмета = $\frac{3}{5}$ активности нового предмета (фонит меньше). Ск. лет предмету?

Р-ие: $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \approx$ (см. №21) $\approx 124{,}4\cdot10^{-6}$ лет$^{-1}$

Слова усл-я означают, что $N = \frac{3}{5}N_0 = N_0\,e^{-\lambda t}$ =>

=> $\lambda t = \ln\frac{5}{3}$ => $t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{5}{3} \approx 4105$ лет

№25

Усл-е: ~~дран~~ какие длины волн содержат серии Лаймана, Бальмера, Пашена.

Р-ие: 1) Лайман — $\frac{1}{\lambda_Л} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_Л} \in [0{,}75R;\ R] \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_Л \in \left[\frac{1}{R};\ \frac{1{,}33}{R}\right]$, т.е. // $R = 1{,}1 \cdot 10^{5}\ см^{-1}$ // $\lambda_Л \in [91нм;\ 121нм]$

2) Бальмер — $\frac{1}{\lambda_Б} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \lambda_Б \in [364нм;\ 655нм]$

3) Пашен — $\frac{1}{\lambda_П} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \lambda_П \in [818нм;\ 1870нм]$

№26

Усл-е: рентг. трубка с никелевым антикатодом $(Z = 28)$; $|\lambda_{K\alpha} - \lambda_{к.г.т.р.и}| = 0{,}84\,Å$.

U - ? (напряжение в трубке).

Р-ие: под действием напр. U эл-ны разгоняются в трубке и приобретают кин.

эн-ю eU. В едином акте торможения (из-за действия ядер никеля) эл-н может потерять всю свою

эн-ю и остановиться (это соотв. коротковолн. гр. торм. рентг. изл-я — к.г.т.р.и),

в результате чего произойдет изл-я фотона с эн-ией: $h\nu_{кгтри} = eU$, откуда

~~$\lambda_{кгтри} =$~~ $U = \frac{hc}{e\lambda_{кгтри}}$. По усл-ю $\lambda_{K\alpha} - \lambda_{кгтри} = 0{,}84\,Å \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{кгтри} = \lambda_{K\alpha} - 0{,}84\,Å$; по Мозли: $h\nu_{K\alpha} = 10{,}2\,эВ\,(Z-1)^2 \Rightarrow \lambda_{K\alpha} = \frac{1240}{10{,}2 \cdot (Z-1)^2}\ нм =$

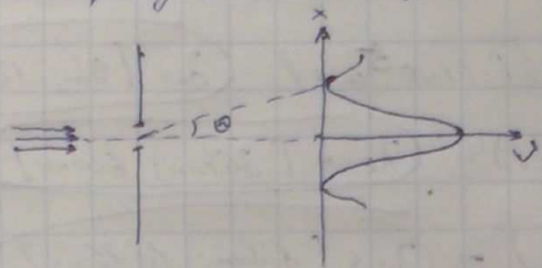
$= 0{,}167нм \Rightarrow \lambda_{кгтри} = 0{,}167 - 0{,}084 = 0{,}083нм \Rightarrow eU = h\nu_{кгтри} = \frac{1240}{0{,}083} = 14{,}9кэВ \Rightarrow$

$\Rightarrow U = 14{,}9кВ$

№27

Усл-е: пучок частиц пролет. через щель шириной b. Показать ~~на этом~~ в этом процессе справедливость $\Delta x \Delta p_x \geq h$

Р-ие:



Пролетая сквозь щель частицы претерпевают ~~интерференцию~~ дифракцию и на приемнике (за щелью) получаем зависимость интенсивности от координаты, как показ. на рис.

Не будем учитывать максимумы n-х порядков, а ограничимся рассмотрением главного мах. (1-го горба). $\Delta x \sim b$ (это естественно). $\Delta p_x \sim p\sin\theta$.

С др. ст. усл. 1-го min: $b\sin\theta = \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{pc} = \frac{h}{p} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{h}{bp} \Rightarrow \Delta x \Delta p \sim \frac{bh}{bp} p \sim h$. Учет всей дифф. картины модифицирует полученное соотношение к виду $\Delta x \Delta p \geq h$

?

№28

Усл-е: $h\nu_{K\alpha} = 26$ кэВ $\quad Z$ - ?

Р-ие: $h\nu_{K\alpha} = 10{,}2\text{ эВ} \cdot (Z-1)^2 \Rightarrow Z = 1 + \left(\frac{h\nu_{K\alpha}}{10{,}2}\right)^{1/2} = 51{,}48$ т.о. либо $Z = 51$ либо $Z = 52$

№29

Усл-е: с этого эл-та возникла L-серия характ. рент. изл. $\lambda_{K\alpha}$ этого эл-та?

Р-ие: L-серия появляется $\Leftrightarrow$ 1 эл-н на M-обол. $(n=3) \Rightarrow Z = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow h\nu_{K\alpha} = 10{,}2 \cdot 100 = 1020$ эВ $\Rightarrow \lambda_{K\alpha} = \frac{1240}{1020} = 1{,}2$ нм

№30

Усл-е: У атома кроме зап. обол. есть 2 p эл-на (с равными n). Термы?

Р-ие: ~~[illegible]~~

таблицы кв. чисел. произв. эл-на:

	m	σ
I	1	1/2
II	0	1/2
III	-1	1/2
IV	1	-1/2
V	0	-1/2
VI	-1	-1/2

, где m – проекция орб. мом.;
σ – проекц. спина

Перебирая эти сост. получаем след. табл. (учитывая, что повтор. сост. с m и σ было нельзя, т.к. n у этих эл-нов равные).

состояния 2-х e^-		M_L	M_S	$\|M_L M_S\rangle$
I + I	✓	2	1	$\|2\,1\rangle$
II + II	✓	0	1	$\|0\,1\rangle$
III + III	✓	-2	1	$\|-2\,1\rangle$
IV + IV	✓	2	-1	$\|2\,-1\rangle$
V + V	✓	0	-1	$\|0\,-1\rangle$
VI + VI	✓	-2	-1	$\|-2\,-1\rangle$
I + II	✓	1	1	$\|1\,1\rangle$
I + III	✓	0	1	$\|0\,1\rangle$
II + III	✓	-1	1	$\|-1\,1\rangle$
I + IV	✓	2	0	$\|2\,0\rangle$
I + V	✓	1	0	$\|1\,0\rangle$
I + VI	✓	0	0	$\|0\,0\rangle$
II + IV	✓	1	0	$\|1\,0\rangle$
II + V	✓	0	0	$\|0\,0\rangle$
II + VI	✓	-1	0	$\|-1\,0\rangle$
III + IV	✓	0	0	$\|0\,0\rangle$
III + V	✓	-1	0	$\|-1\,0\rangle$
III + VI	✓	-2	0	$\|-2\,0\rangle$
IV + V	✓	1	-1	$\|1\,-1\rangle$
IV + VI	✓	0	-1	$\|0\,-1\rangle$
V + VI	✓	-1	-1	$\|-1\,-1\rangle$

$M_L = \sum m_l$; $M_S = \sum m_s$

Собираем в кучу:

1) $\underbrace{\begin{matrix} |2\,1\rangle & |1\,1\rangle; & |0\,1\rangle; & |-1\,1\rangle; & |-2;\,1\rangle \\ |2\,0\rangle & |1\,0\rangle; & |0\,0\rangle; & |-1\,0\rangle; & |-2;\,0\rangle \\ |2\,-1\rangle & |1\,-1\rangle; & |0\,-1\rangle; & |-1\,-1\rangle; & |-2;\,-1\rangle \end{matrix}}_{^3D_1}$

2) $\underbrace{|1\,0\rangle \quad |0\,0\rangle \quad |-1\,0\rangle}_{^1P_1}$

3) $\underbrace{|0\,1\rangle \quad |0\,0\rangle \quad |0\,-1\rangle}_{^3S_1}$