

М.О. Азарєнков, В.О. Гірка,
В.І. Лапшин, В.І. Муратов

ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ

Харків -2005

М.О. Азарєнков, В.О. Гірка,
В.І. Лапшин, В.І. Муратов

ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ

Рекомендовано

Вченою Радою Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна в якості навчального посібника

Харків -2005

УДК 533.9.01

ББК 22.336

А 35

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук Волков Є.Д., член-кор. НАН України,
професор Степанов К.М.

М.О. Азарєнков, В.О. Гірка, В.І. Лапшин, В.І. Муратов,

А 35 Теорія коливань та хвиль. – Харків, 2005. – 154 с.

ISBN – 966-623-316-9

Навчальний посібник з єдиної точки зору знайомить студентів фізичних, інженерно – фізичних та технічних спеціальностей із спільними властивостями коливальних процесів різної фізичної природи, а також із теоретичними та експериментальними методами їх дослідження.

Не використовуючи складних математичних викладок, автори описують основні закономірності та характеристики, що є загальними для різноманітних хвильових процесів (механічних, акустичних, електромагнітних та інших).

Іл. 69 Бібліогр. 12

© **М.О. Азарєнков, В.О. Гірка,
В.І. Лапшин, В.І. Муратов**

ISBN – 966-623-316-9

Навчальне видання

**Азарєнков Микола Олексійович
Гірка Володимир Олександрович
Лапшин Володимир Ілліч
Муратов Володимир Іванович**

ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ

Українською мовою

**Азаренков Николай Алексеевич
Гирка Владимир Александрович
Лапшин Владимир Ильич
Муратов Владимир Иванович**

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Видано в авторській редакції

Комп'ютерний набір: Желтоп'ятова Н.О., Попенко Н.В.

Підписано до друку: 23.11.05. Формат 84×100/32. Друк офсетний. Папір офсетний. Умов. друк. арк. 9,5. Тираж 100 пр. Зам. № 1536/05

ЗМІСТ

Вступ до теорії коливань різної фізичної природи	4
1. Класифікація коливань та коливальних систем	6
2. Власні коливання лінійних консервативних систем з одним ступенем волі	10
3. Власні коливання лінійних дисипативних коливальних систем	18
4. Вимушені коливання лінійних осциляторів	26
5. Явище лінійного резонансу	28
6. Параметричні коливання	32
7. Автоколивальні системи	44
8. Використання теорії коливань для опису еволюції біосистем	52
9. Наближені аналітичні методи аналізу коливань нелінійних осциляторів	57
10. Коливання системи трьох нелінійно зв'язаних осциляторів	69
11. Резонансне поглинання коливань	74
Вступ до теорії хвиль	77
12. Синусоїдальні хвилі	79
13. Лінійні дисперсні хвилі	86
14. Групова швидкість	92
15. Поляризація хвиль	100
16. Скалярне хвильове рівняння	105
17. Рівняння Максвелла і хвилі	110
18. Зв'язані моди	117
19. Відбиття та заломлення хвиль	120
20. Енергія та імпульс хвиль	127
21. Інтерференція	133
22. Дифракція	139
23. Випромінювання	145
24. Звукові хвилі від'ємної енергії у потоці рідини	150
Список літератури	154

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ РІЗНОЇ ФІЗИЧНОЇ ПРИРОДИ

Існує поділ фізики на механіку, акустику, оптику, молекулярну фізику, електрику, тощо. Такий поділ склався історично, він має під собою ту основу, що кожен розділ вивчає якісно різні (до певної міри) форми руху матерії. Значну роль в цьому відіграло те, що ці форми руху сприймаються різними органами відчуття. Тому вони сприймаються як різні явища. Розглянемо для ілюстрації цієї тези кілька експериментів, в яких форми руху є справді різними, але є в них дуже багато спільного.

1. Коливання вискового маятника. Візьмемо висок, прикріпимо до нього невеликий пакунок з піском, зробимо у пакунку малий отвір, щоб пісок висипався тонким струмком. Під виском розташуємо стрічку вологого паперу. Відхиливши висок від положення рівноваги на малу (порівняно з довжиною виска) відстань, дамо йому можливість рухатися. При відповідному виборі координат зсув піскової лінії з напрямку, що є перпендикулярними до руху стрічки, описується (приблизно) гармонічним законом.

2. Коливання камертону. Розглянемо камертон, до ніжки якого прикріплено маленьке люстерко, яке освітлюється променем світла так, що відбитий промінь потрапляє на екран. Коли камертон мовчить, то на екрані видно маленьку плямочку світла. Коли камертон звучить, то на екрані – вже смуга світла. Якщо на шляху відбитого променя до екрану встановити багатогранну систему дзеркал, що обертається навколо своєї осі та відбиває світло на екран, тоді в залежності від стану камертону на екрані буде видно синусоїду, або світлу пляму.

3. Коливання електричного поля. Якщо з генератора електричних коливань подати на вхід Y осцилографа певний електричний сигнал, то (залежно від режиму синхронізації) на екрані осцилографа побачимо багато синусоїд, що рухаються, або стале зображення синусоїди.

4. Коливання тиску повітря. Від електричного генератора, що дозволяє отримувати електричний сигнал з частотою звуку ($20 \div 20000$ Hz), за допомогою навушників можна генерувати звук якоїсь частоти. Під дією цього звуку можна змінювати тиск повітря у приладі Квінке. Далі за допомогою електричного перетворювача зміну тиску повітря можна спостерігати на екрані осцилографа.

Зробимо загальні висновки. У дослідах, про які ми говорили, *те*, що колиалося, було різним, але *те*, як це відбувалося, було однаковим. Часто при розв'язанні конкретних фізичних задач приходить цікавитися саме тим, *як* та *чому* відбуваються коливання, а не тим, *що* саме коливається. Часто незрозумілі питання у одній галузі фізики стають зрозумілими при вивченні явищ з іншої галузі фізики. Таким чином, вивчаючи звук, світло, механічні коливання та електромагнітні явища, ми завжди маємо справу з певними спільними закономірностями. Ці закономірності вивчає теорія коливань та хвиль. З розвитком фізики, взагалі, стає зрозумілішим зв'язок між різними галузями фізики. Тому стає зрозумілим потреба у вивченні окремої науки про коливання та хвилі.

Дамо кілька визначень, які будуть корисними для вивчення теорії коливань та хвиль. Коливання – процес почергового зростання та зменшення величини певного параметра фізичної системи, яку досліджують, порівняно з його стаціонарним значенням. Хвилею (біжучою) називають процес поширення коливань у певному середовищі (навіть вакуумі) з обмеженою за величиною швидкістю. Коливання та хвилі від інших рухів матерії відрізняються тим, що їх, у цілому, можна охарактеризувати кількома параметрами (наприклад, частотою та амплітудою) за відносно довгий проміжок часу, тоді як для інших рухів слід знати положення системи у будь-який час для будь-якої точки простору.

1. КЛАСИФІКАЦІЯ КОЛИВАНЬ ТА КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Перед початком дослідження різних типів коливань корисним виглядає спроба ввести певну класифікацію коливальних процесів. За кінематичним принципом коливання бувають таких типів: періодичні, неперіодичні, аперіодичні (лімітаційний рух), ангармонічні (нелінійні). Спробуємо дати визначення цим коливанням.

1. Періодичними коливаннями називають такі, для яких $y(t) = y(t + T N)$, де N – натуральне число. Тоді T – період коливань. Окремим випадком періодичних коливань є гармонічні коливання: $y = y_0 \sin(\omega t + T)$. Гармонічні коливання описують малі коливання консервативних автономних систем.

2. Неперіодичними коливаннями називають такі, для яких $y = y_0(t) \sin(\omega t + \varphi(t))$; тобто значення $y(t_0)$ не повторюється через якийсь час T , як це було для періодичних коливань. До неперіодичних належать, наприклад, загасаючі коливання: $y = y_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi)$ ($\beta \ll \omega$); а також биття (тобто суперпозиція, наприклад, двох періодичних коливань з різними амплітудами, частотами та початковими фазами).

3. Окремим типом коливань можна вважати лімітаційний рух (аперіодичні коливання). Хоча, за умов ортодоксального ставлення до визначень, цей рух взагалі можна не вважати за коливання. Справа у тому, що перші два з названих типи коливань є часто близькими до гармонічних коливань (хоча б на малому проміжку часу). А лімітаційний рух уже по формі дуже відрізняється від гармонічних коливань. У випадку аперіодичних коливань коливальна система, яку вивели з стану рівноваги та залишили спокої, почне рухатися до стану рівноваги, не виконуючи навіть одного повного коливання. До аперіодичних належать, наприклад, сильно загасаючі коливання, декремент загасання яких є більшим за частоту: $\beta > \omega$.

4. Існує величезний клас коливань, які називаються ангармонічними. Вони описуються нелінійними диференціальними рівняннями, їх амплітуда на відміну від гармонічних коливань не є малою, часто навіть є дуже великою. Про нелінійні коливання важко зробити загальний висновок. Їх амплітуда та частота визначається не тільки параметрами системи, їх величини змінюються з часом, відбувається генерація вищих гармонік основної частоти.

В залежності від характеру збудження коливання можна поділити на такі типи:

1. Власні коливання. Власні коливання виникають в ізольованій від зовнішніх сил системах після тимчасового зовнішнього збурення. Їх характер визначається практично тільки внутрішніми силами, фізичною побудовою системи. Енергію в таку систему було вкладено один раз, під час тимчасового зовнішнього збурення.

2. Вимушені коливання. Вимушені коливання відбуваються в наслідок дії зовнішніх сил, які діють незалежно від коливань самої системи. Характер вимушених коливань визначається не тільки внутрішніми якостями системи, але істотно залежить від зовнішньої сили. Найчастіше саме вона визначає характер цих коливань. Енергія в систему поступає через зовнішню силу.

3. Параметричні коливання. Це особливий тип вимушених коливань, відрізняється в решти тим, що зовнішня сила періодично замінює який-небудь фізичний параметр системи (наприклад, масу маятника, довжину його підвісу, таке інше). Енергія поступає до системи через зовнішню силу, але в залежності від фазових співвідношень зовнішня сила або виконує додатну роботу, тоді амплітуда коливань зростає, або від'ємну роботу, тоді амплітуда зменшується. На лінійній стадії параметричні коливання є або параметрично нестійкими (реалізується режим параметричного збудження), або параметрично стійкими, тоді реалізується

режим загасання. На нелінійній стадії параметричної нестійкості відбувається її насичення через нелінійний зсув фази коливань відносно фази зовнішньої сили.

4. Автоколивання. Це нелінійний квазіперіодичний рух, що виникає у системі в наслідок самозбудження, за умов відсутності зовнішньої сили. Характер автоколивання визначається структурою коливальної системи та побудовою внутрішнього джерела та системи зворотного зв'язку. Ці коливання не загасають з часом, хоч у системі є суттєві втрати енергії, які компенсуються тим, що до системи порціями надходить енергія від внутрішнього джерела, яке є частиною системи. Автоколивання самі регулюють періодичність надходження та кількість енергії, яка компенсує втрати через дисипативні процеси. Автоколивання реалізуються в осциляторному та релаксаційному (розривному) режимах. Перший режим реалізується для коливальних систем з малим рівнем дисипації енергії, а другий – для систем з високим рівнем дисипації. Осциляторні автоколивання нагадують за формою гармонічні коливання, а в релаксаційному режимі ці коливання характеризуються чергуванням періодів стрімкої та повільної зміни стану системи в часі.

Можна виділити десять типів коливальних систем, властивості яких є попарно взаємно протилежними.

- Автономні та неавтономні системи. Залежно від того, входить, чи не входить час явним чином до диференціального рівняння, що описує коливальну систему, системи діляться на автономні і неавтономні. Автономні системи виконують вільні коливання та автоколивання, що самозбуджуються, частота цих систем визначається тільки структурою системи. Неавтономні системи виконують параметричні та вимушені коливання. Частота таких систем дуже залежить від частоти зовнішньої сили, співвідношення власної частоти коливальної системи та частоти зовнішньої сили.

- Стаціонарні та нестаціонарні системи. Якщо параметри системи не залежать від часу, то це стаціонарна система, а у протилежному випадку – це нестаціонарна коливальна система. Для нестаціонарних систем коефіцієнти у диференціальних рівняннях залежать від часу (приклад – параметричні коливання).
- Консервативні та неконсервативні системи. Якщо енергія не надходить до системи та не зникає з неї, то це консервативна система. В такій системі діють тільки потенціальні сили. Звичайно, слід розуміти, що це ідеалізована модель. Неконсервативні системи поділяються на дисипативні системи, в яких повна енергія з часом зменшується, та автоколивальні системи, в яких енергія надходить до системи від внутрішнього джерела.
- Лінійні та нелінійні системи. З вигляду диференціальних рівнянь, що описують коливальну систему, можна визначити чи це лінійна, чи це нелінійна система. Для лінійних систем працює принцип суперпозиції розв’язків. Амплітуди лінійних коливань є малими порівняно з характерними масштабами задачі, а амплітуди нелінійних коливань, як правило, є дуже великими.
- Системи із скінченною кількістю ступенів волі та континуальні системи. Коливальні системи бувають з однією, двома та багатьма ступенями волі. Число ступенів волі (кількість незалежних параметрів, що повністю визначає положення та стан системи) залежить від вибору моделі коливальної системи та системи узагальнених координат. Для континуальних систем характерним є неперервний розподіл параметрів системи. Коливального руху описується за допомогою функції кількох змінних, а диференціальне рівняння записується у частинних похідних. Наведемо для прикладу моделі континуальних систем: одновимірні (стрижні, для цього випадку є тільки дві змінні – одна координата та час); двовимірні (оболонки); тривимірні (пружні тіла, газ, рідина).

- 2. ВЛАСНІ ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВОЛІ

2.1. Загальний розгляд власних коливань.

Розглянемо коливальні системи з дуже слабким загасанням, у яких величина енергії, що розсіюється за період, є малою в порівнянні з загальним запасом енергії в коливальній системі на початку коливань. У таких системах найбільш яскраво виявляються їхні коливальні властивості. Обмежуючись не занадто великим проміжком часу порівняно з періодом коливань, можна розглядати дану систему як консервативну. Консервативні коливальні системи – це ідеалізовані системи, у яких запас енергії в процесі здійснення коливань залишається незмінним.

Розглянемо найпростіший тип диференціального рівняння другого порядку, що описує коливання у консервативній системі:

$$\ddot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

Для механічних систем друга похідна від x представляє зведену силу інерції, а права частина – силу, що зв'язана тільки з положенням маси системи. В електричних системах ліва частина (2.1) залежить від електрорушійної сили, що виникає на індуктивності, а права від аналогічної сили на ємності коливального контуру. До рівняння (2.1) зводиться, наприклад, рівняння гармонійного осцилятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.2)$$

Для ідеального математичного маятника рівняння руху, записане для кутової координати φ , буде мати вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2.3)$$

де $\omega_0^2 = g / \ell$.

У випадку електричного коливального контуру, в якому відсутні втрати енергії, рівняння коливального руху, здобуте з рівняння Кірхгофа, приймає

вигляд $L\ddot{q} + q/C = 0$, якщо $x = q$ (заряд) і $\omega_0^2 = 1/(LC)$. Рівняння (2.2) описує процеси в лінійній коливальній системі, тому що воно є лінійним щодо координати x . А рівняння (2.3), навпаки, описує рух у нелінійній системі, бо $\sin \varphi$ можна представити у вигляді нескінченного ряду за ступенями φ .

Введемо в рівняння (2.1) нову змінну $y = \dot{x}$, що дозволяє виключити з рівняння коливального руху час у явному вигляді, хоча при цьому $x = x(t)$ і $y = y(t)$. Вважаємо також, що функція $f(x)$ може бути у загальному випадку нелінійною функцією координати x . Тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} y.$$

У нових координатах рівняння (2.1) приймає вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)/y \quad (2.4)$$

Проінтегрувавши його, одержимо наступне співвідношення:

$$0.5y^2 - \int f(x)dx = Const \quad (2.5)$$

Інтегральний вираз $\int f(x)dx$ фактично є нормованою потенціальною енергією $V(x)$, а величина $y^2/2$ - зведена (нормована) кінетична енергія. Тому вираз (2.5) є наслідком початкової умови про консервативність коливальної системи, що знаходить своє відображення в сталості загального запасу енергії в системі.

Кожному стану коливальної системи відповідає пара значень x і y , тобто точка на фазовій площині, яку називають ілюструючою точкою. Крива, вздовж якої з часом рухається ілюструюча точка, називається фазовою траєкторією. З загальних властивостей диференціальних рівнянь випливає, що через кожную точку фазової площини повинна проходити

тільки одна фазова траєкторія, за винятком особливих точок, у яких $f(x)$ і y одночасно звертаються в нуль.

Розглянемо умови, за яких у системі виникає стан рівноваги. У рівноважному стані швидкість руху дорівнює нулю й у системі відсутні сили, що викликають рух, тому:

$$y = \dot{x} = 0, \text{ а також } \dot{y} = \ddot{x} = 0 \quad (2.6)$$

Звідси випливає, що в точках $y = 0, x = x_i$

$$f(x_i) = 0 \quad (2.7)$$

і потенціальна функція $V(x)$ при $x = x_i$ має екстремум, тому що

$$\dot{y} = f(x) = -\frac{d}{dx}V(x), \text{ а при } x = x_i:$$

$$f(x_i) = \frac{d}{dx}V(x)\Big|_{x=x_i} = 0 \quad (2.8)$$

Особливі точки, які задовольняють умові (2.8), називаються особливими точками першого роду. Отже, положення рівноваги системи відповідає особливим точкам на фазовій площині. Нехай координати особливої точки $x = x_i, y = 0$. Позначимо $V(x_i) = c_i$. Якщо потенціальна функція $V(x)$ при $x = x_i$ має мінімум, то

$$\frac{d}{dx}V(x)\Big|_{x=x_i} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2}{dx^2}V(x)\Big|_{x=x_i} > 0 \quad (2.9)$$

В околиці точки $x = x_i$ потенціальну енергію $V(x)$ розкладемо в ряд за ступенями $x - x_i$

$$V(x) = V(x_i) + \frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \dots \quad (2.10)$$

Поблизу положення рівноваги можна написати рівняння фазових траєкторій (2.5):

$$y^2 + \frac{d^2V(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_i} (x - x_i)^2 = 2(c - c_i) \quad (2.11)$$

Таким чином, з точністю до вищих ступенів $x - x_i$ одержуємо поблизу положення рівноваги, що відповідає мінімуму потенціальної функції, (а, значить, і енергії) рівняння еліпсів (2.11). Вони відрізняються величиною напівосей, що визначається різницею $c - c_i$. Наявність на фазовій площині замкнених фазових траєкторій указує на існування періодичних рухів. Реальний рух є тим ближчим до гармонічного, чим менше перевищення запасу енергії системи над запасом енергії в точці рівноваги.

Якщо потенціальна функція є квадратичною за координатою, то рівняння фазових траєкторій має вигляд:

$$y^2 + \alpha x^2 = \text{const} \quad (2.12)$$

при будь-яких значеннях константи, при цьому $\left(\alpha = \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=x_i} > 0 \right)$.

Отже, описане положення рівноваги відповідає на фазовій площині особливій точці типу центр. Це положення рівноваги, щодо якого система виконує гармонічні коливання чи такі, що є близькими до них. Для представлення на фазовій площині таких рухів характерною є наявність сімейства замкнутих фазових траєкторій, що оточують центр, причому вони завжди прагнуть до еліпсів при зменшенні амплітуди коливань. Таку систему характеризує *ізохронність* коливань, тобто незалежність періоду коливань від амплітуди. Період коливань дорівнює $T = 2\pi/\omega$, він є однаковим для всіх еліпсів.

Доведемо це. Лінійна система описується рівнянням $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$.

$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \left(\frac{x}{y} \right)$. У цьому випадку $\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} c$. Для коливань з амплітудою a при $x = \pm a$ та $y = 0$ одержуємо:

$$c = \omega_0^2 a^2, \text{ та також } y = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \omega_0.$$

Для половини періоду коливань маємо наступний вираз:

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{\omega_0}.$$

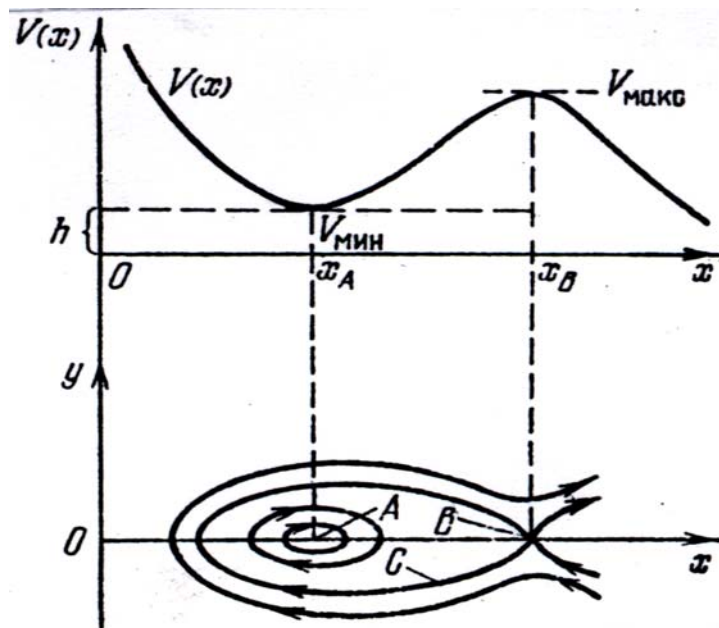
Розглянемо тепер випадок, що відповідає максимуму потенціальної функції $V(x)$. Для малих варіацій y і x одержимо рівняння при

$$\left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_k} = -\alpha < 0, \text{ воно має такий вигляд:}$$

$$y^2 - \alpha(x - x_k)^2 = 2(c - c_k) \quad (2.13)$$

Це рівняння фазових траєкторій для околиці досліджуваної особливої точки задає гіперболи з асимптотами

$$y = \pm \sqrt{\alpha}(x - x_k) \quad (2.14)$$



Мал.2.1. Побудова фазових траєкторій для заданої функції $V(x)$.

Таким чином, через особливу точку на фазовій площині, що відповідає максимуму потенціальної функції, проходять тільки дві фазові траєкторії. В її околиці всі інші фазові траєкторії будуть гіперболами. Такі точки відповідають нестійкому положенню рівноваги, тому що будь-яке відхилення системи призводить до віддалення від точки рівноваги. Це

відповідає виходу ілюструючої точки з положення, що відповідає особливій точці, та її подальшому руху вздовж однієї з фазових траєкторій, які виходять з особливої точки.

Намалюємо фазовий портрет (сукупність фазових траєкторій і особливих точок на фазовій площині) консервативної коливальної системи (Мал.2.1). Якщо побудувати графіки $V(x)$ і фазових траєкторій на підставі рівняння $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = c$, то, задаючи різними значеннями константи, одержимо два характерних випадки (точки A і B на Мал.2.1). Значення $x = x_A$ відповідає мінімуму $V(x)$ і точка $A(x_A, 0)$ є особливою точкою типу центр. Точка x_B відповідає максимуму $V(x)$, і $B(x_B, 0)$ є особливою точкою типу сідло, що відповідає нестійкому положенню рівноваги. Рухи різного характеру розділяються кривою C , що носить назву сепаратиси. Вона виділяє навколо точки A область, усередині якої існують коливальні рухи навколо стійкого положення рівноваги. Поза неї ці рухи відсутні і вигляд фазових траєкторій може бути визначений тільки при завданні $V(x)$ для більшої області зміни x .

2.2. Коливання маятника

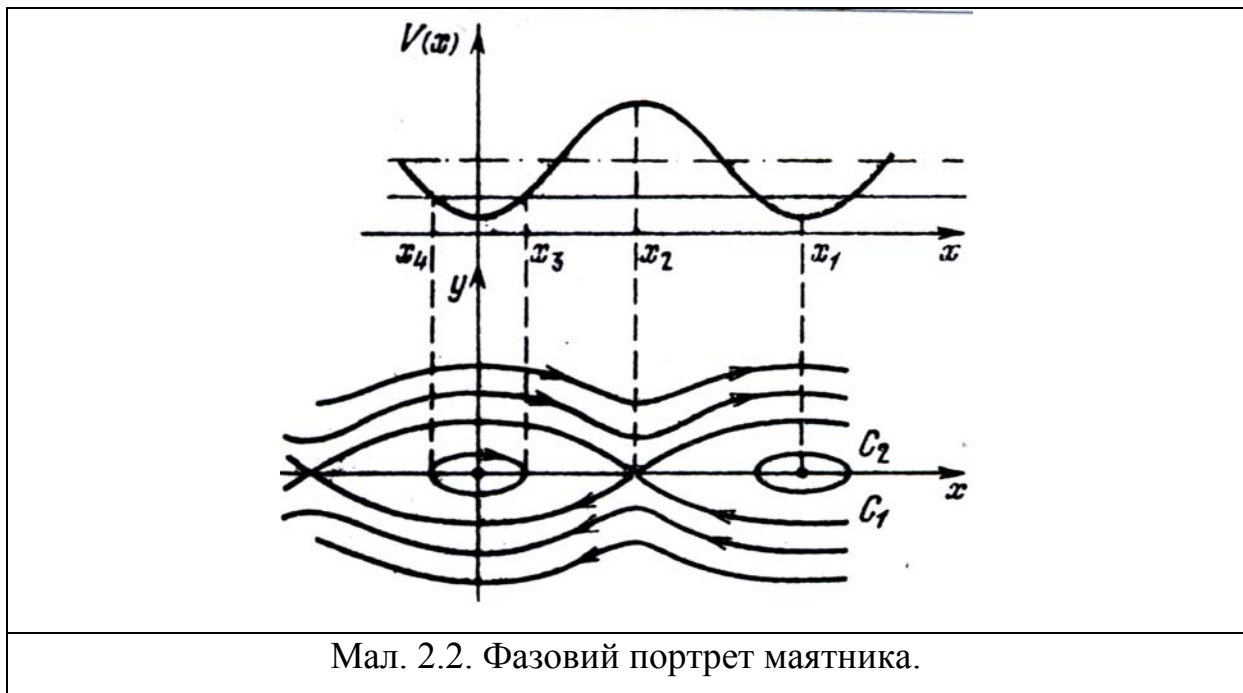
Як приклад нелінійних консервативних систем розглянемо коливання ідеального маятника. Рівняння його руху має вигляд:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin x \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2 \sin x}{y}.$$

Тоді з точністю до константи запишемо його розв'язок:

$$V(x) = -\omega_0^2 \cos x \quad \text{та} \quad \frac{1}{2}y^2 = c + \omega_0^2 \cos x \quad (2.15)$$

На Мал. 2.2. представлений фазовий портрет маятника, побудований за формулою (2.15).



Мал. 2.2. Фазовий портрет маятника.

На ньому представлено два типи фазових траєкторій, які відповідають двом різним типам руху. Замкнені траєкторії, що оточують особливі точки ($y=0$, $x=2\pi n$), описують коливальні рухи маятника навколо стійкого нижнього положення рівноваги, коли $V(x)$ мінімальна. Особливі точки ($y=0$, $x=(2n-1)\pi$) є точками типу сідло і відповідають верхньому положенню рівноваги маятника – максимуму потенціальної енергії.

Траєкторії, які побудовано для констант ($c > \omega_0^2$), відповідають обертальним рухам маятника, що виникають при наданні йому початкового імпульсу, який забезпечує прохід через верхнє положення зі швидкістю відмінної від нуля. На фазовій площині (Мал.2.2.) це відповідає виходу ілюструючої точки за межі області фазового простору, яка обмежена *сепаратрисами* C_1 та C_2 , що розділяють топологічно різні області: фінітний рух в області замкнених траєкторій та інфінітний рух вздовж незамкнених траєкторій.

Визначимо період коливань нелінійного маятника:

$$\dot{x} = y = \sqrt{2(c - V(x))}, \quad t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(c - V(x))}}.$$

Якщо при $x = \pm a$ (a - амплітуда) маємо $y=0$, тоді $c = V(a) = -\omega_0^2 \cos a$, значить, ми одержимо для половини періоду коливань наступний вираз:

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{\omega_0^2 \cos x - \omega_0^2 \cos a}} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{2 \cos a}} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{\cos x}{\cos a} - 1}} \quad (2.16)$$

Таким чином, у нелінійній системі коливання будуть неізохронними, тобто такими, для яких період залежить від амплітуди.

3. ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИСИПАТИВНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Якщо власні коливання в системі без загасання можуть існувати необмежено довго і їхня амплітуда визначається тільки початковими умовами, то в дисипативній системі завжди можна вказати такий кінцевий інтервал часу, після настання якого амплітуда руху при будь-яких реальних початкових умовах буде меншою за будь-яку наперед задану величину. Це означає, що дисипативні системи, які не містять джерел енергії, мають тільки один стаціонарний стан – спокій.

Рівняння коливань при наявності сили тертя, що залежить лінійно від швидкості, має вигляд

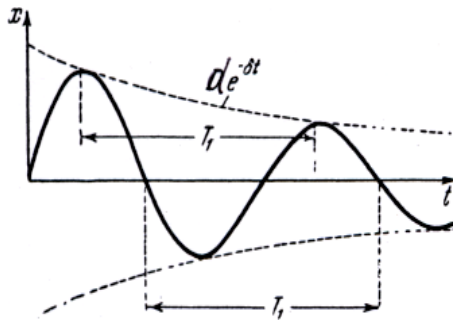
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.1)$$

Воно має частинний розв'язок у вигляді $ae^{\lambda t}$, підставивши його до (3.1) можна здобути характеристичне рівняння для визначення величини λ :
 $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega$. Загальний розв'язок рівняння (3.1) запишеться в такому вигляді

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} (ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}) \quad (3.2)$$

де a і b - постійні, які залежать від початкових умов. Оскільки $x(t)$ - дійсне число, то a і b – комплексно спряжені величини, значить, їх можна замінити на нові дійсні константи d і β за допомогою наступних заміन змінних: $2a = de^{-i\beta}$, $2b = de^{i\beta}$. Тоді розв'язок рівняння загасаючих коливань має вигляд: $x(t) = de^{-\delta t} \cos(\omega t - \beta)$, де d і β - *const*, що залежать від початкових умов, а величина δ характеризує час, протягом якого продовжуються власні коливання. Вона називається коефіцієнтом загасання, для неї можна записати:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad (3.3)$$



Мал.3.1.

Величина $\tau = \frac{1}{\delta}$ є постійною для даної системи. З (3.3) видно, що через час τ величина максимальних відхилень від положення рівноваги зменшиться в e раз. Крива, яку представлено на Мал. 3.1., не є періодичною. Однак можна увести величину

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, що називають умовним періодом, що характеризує час між двома послідовними проходженнями положення рівноваги в один бік чи між двома крайніми відхиленнями в один бік. Для характеристики загасання часто використовують безрозмірну величину $\eta = \delta T_1 = \frac{2\pi\delta}{\omega}$, яку називають *декрементом*.

Якщо в даний момент часу t зсув x параметра коливальної системи має величину $x = de^{-\delta t}$, а через T_1 – ця величина: $x_1 = de^{-\delta(t+T_1)}$, тоді:

$$\frac{x_1}{x} = e^{-\delta T_1}, \quad \delta T_1 = \ln\left(\frac{x}{x_1}\right) \text{ і можна записати:}$$

$$\eta = \ln(x / x_1) \quad (3.4)$$

Оскільки визначення (3.4) є справедливим для будь-якого моменту часу, то можна взяти x у той момент, коли воно сягає найбільшого значення; тоді логарифм відносини двох послідовних в часі амплітуд дорівнює декременту. Значить, величина декременту характеризує зменшення розмахів (амплітуд) коливань.

Отже, δ (чи τ) визначають час загасання, а η - число коливань до настання стану загасання. Простежимо, як буде змінюватися характер коливань при збільшенні тертя в системі. Значення $\delta = \omega_0$ називається

критичним значенням коефіцієнта загасання. За цих умов величина $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ звертається в нуль, а значить T_1 і η прямують до нескінченності. Якщо величина декременту загасання є більшою за критичне, тоді значення ω і η будуть уявні. Рух у цьому випадку не буде коливальним; система, виведена з положення рівноваги, зменшуючи швидкість, одразу прямує до нього, або, пройшовши тільки один раз через положення рівноваги, знову таки повертається до нього. Ми говорили раніше, що такий рух називається лімітаційним. Отже, критичне значення коефіцієнта загасання визначає межу між коливальним і лімітаційним рухами в системі.

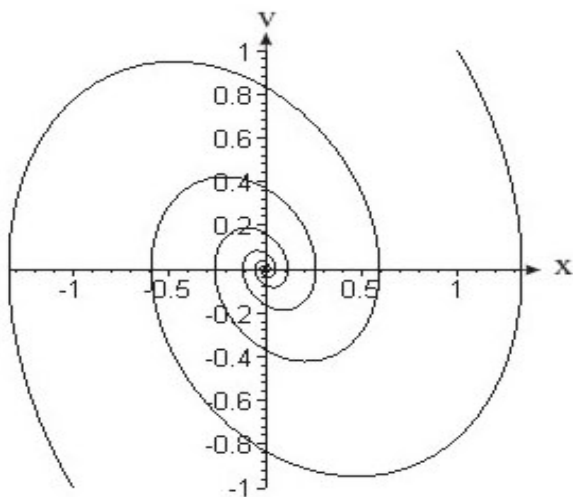
Інколи при дослідженні коливального процесу немає потреби в розв'язанні диференціального рівняння та в здобутті явного виразу для розв'язку, а потрібно знати поведінку осцилятора в загальних рисах. В цьому випадку використовують метод фазових площин, на яких стан осцилятора в певний момент часу зображено ілюструючою точкою в системі координат x та dx/dt . Зміна стану осцилятора зображується лінією, що проходить через усі послідовні положення ілюструючої точки, називають цю лінію фазовою траєкторією. Фізично задаючи початковий стан осцилятора, ми ставимо йому у відповідність положення ілюструючої точки на фазовій площині. Тоді аналізуючи хід фазових траєкторій, можна в загальних рисах описати еволюцію стану осцилятора. Наведемо три фазові портрети лінійного дисипативного осцилятора, коливання якого описуються рівнянням, яке легко отримується з (3.1) шляхом заміни усіх параметрів, залежних та незалежних змінних на безрозмірні величини:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon \frac{dx}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

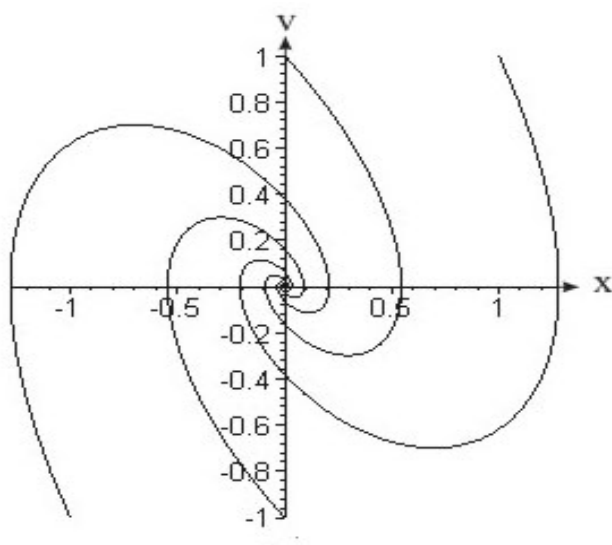
Ці три випадки відрізняються значенням параметра ε , воно послідовно пробігає значення 0.5; 1; 10, що дозволяє прослідкувати: які зміни

відбуваються з цими коливаннями в процесі зміни величини дисипативної сили, яка діє в даній лінійній коливальній системі.

Зобразимо ці фазові портрети відповідно на Мал. 3.2, 3.3 та 3.4.



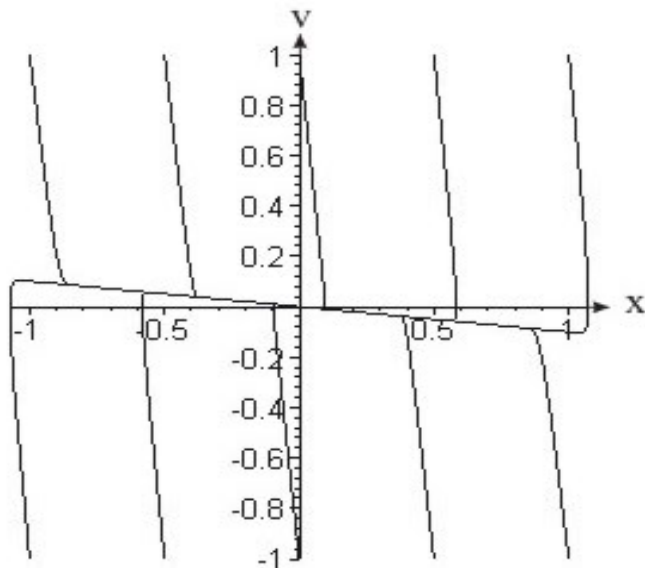
Мал. 3.2. Фазовий портрет осцилятора, коливання якого описуються рівнянням (3.5) за умови $\varepsilon = 0.5$, по осі ординат відкладено швидкість зміни параметра x в часі: $V = dx/dt$.



Мал. 3.3. Фазовий портрет осцилятора, коливання якого описуються рівнянням (3.5) за умови $\varepsilon = 1$, по осі ординат відкладено швидкість зміни параметра x в часі: $V = dx/dt$.

З Мал.3.2 видно, що фазові траєкторії осцилятора, що описується рівнянням (3.5), схожі на майже круглі спіралі, які поступово асимптотично наближуються в своєму розвитку до стану рівноваги, особливої точки типу фокус, яка знаходиться в фазових координатах $x = 0$, $dx/dt = 0$.

Збільшення величини дисипативної сили від 0.5 до 1.0 призводить (див. Мал. 3.3) до деформації спіралевидних фазових траєкторій, які тепер швидше прямують до асимптотичного стану рівноваги. І, нарешті, коли параметр $\varepsilon = 10$, ми бачимо на Мал. 3.4, що, по-перше, фазові траєкторії трансформувалися в лінії, які нагадують, до певної міри, шматки парабол; по-друге, на фазовому портреті з'явилася фазова траєкторія у вигляді прямої лінії, що проходить через асимптотичний стан рівноваги з другого у четвертий квадрант; по-третє, відбулася зміна типу особливої точки: замість фокуса тепер на фазовому портреті лінійного дисипативного осцилятора з'явилася особлива точка типу вузол; і останнє, четверте,



Мал. 3.4. Фазовий портрет осцилятора, коливання якого описуються рівнянням (3.5) за умови $\varepsilon = 1$, по осі ординат відкладено швидкість зміни параметра x в часі: $V = dx/dt$.

фазові траєкторії тепер прямують до стану рівноваги, особливої точки типу вузол, не виконуючи навіть одного повного оберту навколо особливої точки, тобто не перетинаючи вищезазначеної нової фазової траєкторії у вигляді прямої лінії.

Випадок лінійного тертя в осциляторній системі описується рівнянням (3.1), з якого зручно отримати і рівняння інтегральних кривих, що описують коливання дисипативних систем з одним ступенем волі. Воно має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\delta y + \omega_0^2 x}{y} \quad (3.6)$$

яке можна розв'язати безпосередньо. Однак можна, не розв'язуючи (3.6), якісно визначити хід фазових траєкторій. Це буває особливо корисним у випадку нелінійних осциляторів, коли відповідне рівняння для інтегральних кривих є значно складнішим за (3.6). Для цієї мети скористаємося методом *ізоклін*, суть якого полягає в тому, що на фазову площину наносяться криві, які перетинають фазові траєкторії тільки під одним визначеним кутом. Розглядаючи ряд ізоклін, можна зрозуміти, який буде хід інтегральних кривих або в усій фазовій площині, або бодай в її певних областях. Рівняння ізоклін можна здобути з рівняння (3.6), якщо в ньому покласти: $dy/dx = A$, де $A = \text{const}$, тоді маємо:

$$y = -\frac{\omega_0^2}{A + 2\delta} x. \quad (3.7)$$

При різних A це набір прямих, що проходять через початок координат. Знайдемо таке значення A , при якому $y = Ax$ буде одночасно і фазовою траєкторією й ізокліною. Підставляючи $y = Ax$ до (2.7), одержуємо:

$$A = -\omega_0^2 / (A + 2\delta). \quad A = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (3.8)$$

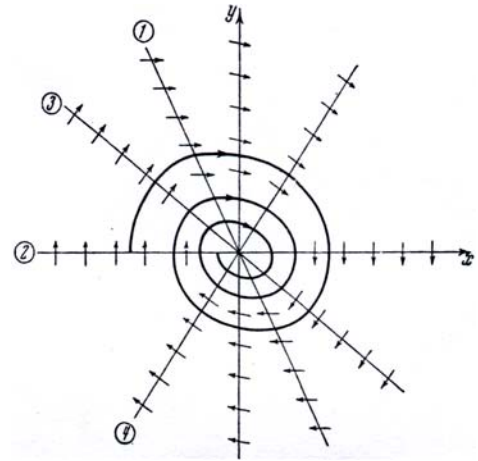
У випадку, який ми досліджуємо, ($\omega_0 > \delta$), тому таких ізоклін (чи таких фазових траєкторій) немає. Задамо величині A інші різні значення і побудуємо ряд ізоклін для досліджуваної системи (див. Мал. 3.5):

$$1. \quad A = 0, \quad y = -\frac{\omega_0^2}{2\delta} x$$

$$2. \quad A = \infty, \quad y = 0$$

$$3. \quad A = 1, \quad y = -\frac{\omega_0^2}{1+2\delta} x$$

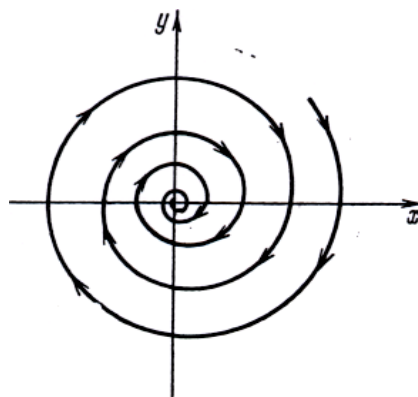
$$4. \quad A = -1, \quad y = \frac{\omega_0^2}{1-2\delta} x .$$



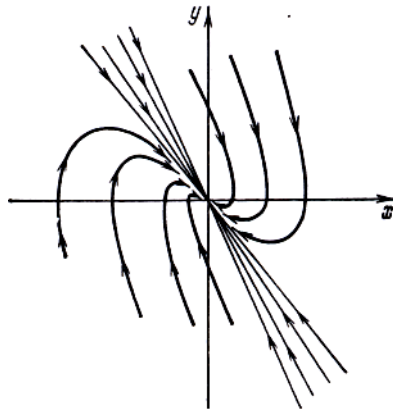
Мал. 3.5.

При $x = 0$, тобто на осі ординат, $\frac{dy}{dx} = -2\delta$.

Накресливши достатню кількість ізоклін, можна провести фазову траєкторію, що у нашому випадку має вигляд спіралі, яка скручується до початку координат. З будь-якого початкового положення ілюструючи точка з часом наближається до початку координат, тобто система прямує до положення рівноваги. Особлива точка в цьому випадку називається стійким *фокусом*. Усі фазові траєкторії асимптотично наближаються до особливої точки, не перетинаючись, та спіралеподібно накручуючись одна на одну.



Мал.3.6. Фазовий портрет лінійної системи з загасанням менше критичного.



Мал. 3.7. Фазовий портрет лінійної системи з загасанням більше критичного.

Для $\omega_0^2 < \delta$ рух буде лімітаційним, і фазові траєкторії мають вигляд кривих, що сходяться в особливу точку типу вузол без обходів навколо неї (див. Мал. 3.4 та Мал. 3.7). В обох випадках у дисипативній системі особливі точки (фокус чи вузол) є стійкими і відповідають єдиному положенню рівноваги системи – стану спокою, до якого система приходить з будь-яких початкових умов, тобто при будь-якому початковому чи зсуві від положення рівноваги, чи при будь-якому значенні початкової швидкості.

У коливальній системі наявність лінійного загасання призводить до якісної зміни фазового портрета системи в порівнянні з випадком, коли $\delta = 0$. При цьому зникають точки типу центр, що існували у випадку консервативної системи, замість замкнених фазових траєкторій виникають спіралі, що прямують до стійкої особливої точки типу фокус.

З'являються дві прямі, інтегральні криві – ізокліни, кутовий коефіцієнт яких визначається за формулами (3.8):
 $1) y = -(\delta + A)x, \quad 2) y = (A - \delta)x$.
 Всі інтегральні криві, що лежать між цими прямими, повинні, не перетинаючись, пройти до початку системи координат, не виходячи з кута між ними.

4.ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

1. Розглянемо спочатку самий простий випадок, коли величина частоти зовнішньої сили є далекою від власної частоти коливальної системи. Коливання системи під дією зовнішньої періодичної сили називаються вимушеними, їх характер визначається не тільки параметрами системи (ω_0 і δ), але й зовнішньою силою. Дослідимо в якості першого прикладу дію гармонічної сили на механічну коливальну систему без тертя. Рівняння руху системи в цьому випадку має вигляд:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (4.1)$$

де F_0 та ω це амплітуда зовнішньої сили та її кругова частота, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ - власна частота осцилятора, k - коефіцієнт жорсткості пружини. Знайдемо частинний розв'язок (4.1). Нехай $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$; підставимо цей вираз до (4.1) і знайдемо такі постійні x_0 та φ , при яких це рівняння буде задовольнятися при будь-якому моменті часу.

$$x_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (4.2)$$

З (4.2) видно, що воно задовольняється при $\varphi = 0$ і

$$x_0 = \frac{F_0 / k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.3)$$

Загальний розв'язок буде мати вигляд

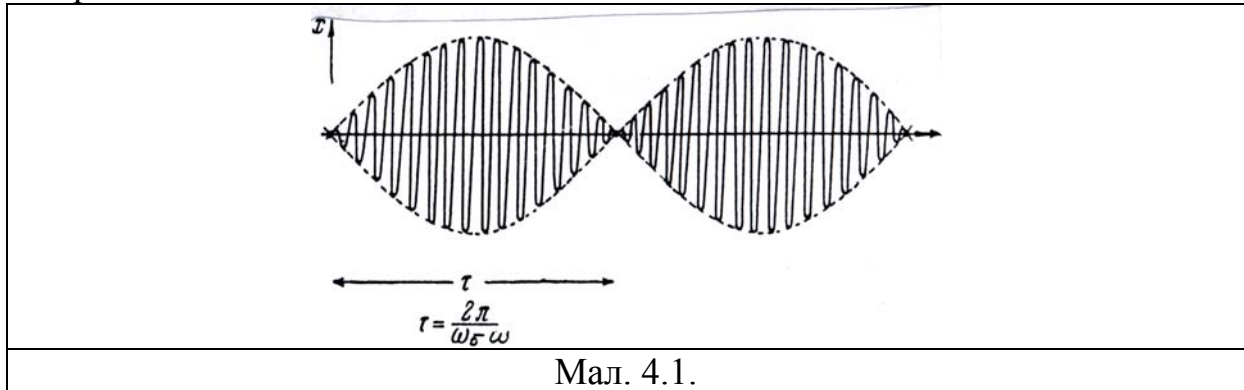
$$x(t) = \frac{F_0 / k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \cos \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (4.4)$$

тут A та B – це константи, що визначаються початковими умовами, ω_0 – власна частота, ω - частота зовнішньої періодичної сили.

Отже, перший член у (4.4) представляє собою вимушені коливання, наступні – власні коливання. Вимушені коливання відбуваються з частотою зовнішньої сили, їх амплітуда визначається амплітудою і частотою зовнішньої сили і параметрами системи. Власні коливання відбуваються з частотою ω_0 , а їх амплітуда і фаза залежать від зовнішньої сили і початкових умов. Отже, коливання будуть відбуватися з двома частотами ω і ω_0 , і результуюче коливання не буде гармонічним.

2. Цікаві коливання реалізуються в системі, на яку діє періодична зовнішня сила з частотою ω , що є досить близькою до власної частоти ω_0

коливальної системи. У цьому випадку ($\omega \approx \omega_0$) коливальний процес відбувається в режимі, який називають *биттям*. Биття мають вигляд, зображений на Мал.4.1.



Мал. 4.1.

Виберемо початкові умови у наступний спосіб: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Підставляючи їх до (4.4), одержуємо:

$$x(0) = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + A = 0, \quad \dot{x}(0) = \omega_0 B = 0. \quad (4.5)$$

Загальний розв'язок при зазначених початкових умовах буде мати вигляд

$$x(t) = \frac{2F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t \quad (4.6)$$

При $\omega \approx \omega_0$ вираз (4.6) можна приблизно розглядати як гармонічне коливання на частоті $\frac{\omega + \omega_0}{2}$ із змінною амплітудою, період зміни якої

$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega}$. Іншими словами, частота биттів $\frac{2\pi}{\tau} = \omega_0 - \omega$ дорівнює різниці

власної частоти і частоти зовнішньої сили. Отже, при відсутності загасання коливання завжди будуть складатися з гармонічних коливань двох частот.

Однак, при деяких початкових умовах (а саме: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \omega x_0$) загальний розв'язок рівняння (4.1) буде мати вигляд:

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \sin \omega t. \quad (4.7)$$

Відзначимо, що якою б малою не була величина загасання через якийсь час власні коливання загасають і в системі залишаються тільки вимушені коливання з частотою ω .

5. ЯВИЩЕ ЛІНІЙНОГО РЕЗОНАНСУ

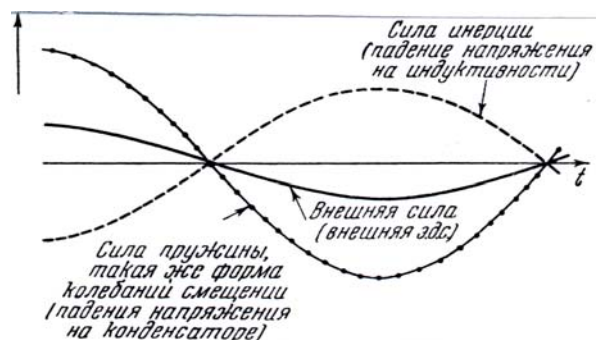
1. Резонанс в лінійних консервативних системах.

Залежність амплітуди вимушених коливань від частоти зовнішньої сили задається формулою (4.3). При низьких частотах $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1\right)$ амплітуда коливань майже дорівнює $\frac{F_0}{k}$. Зі збільшенням частоти амплітуда коливань починає зростати і при $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 1$ маємо: $x_0 \rightarrow \infty$. Це явище називається *резонансом*. У реальних системах ($\delta \neq 0$) неможливо одержати нескінченно велике значення амплітуди. При $\frac{\omega}{\omega_0} > 1$ амплітуда коливань зменшується, і при $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$ вона прямує до нуля. Різниця фаз між коливаннями зсуву параметра x відносно рівноважного значення і коливаннями сили змінюється при переході через резонанс стрибком на π . До резонансу сила і зсув синфазні, після резонансу вони знаходяться в протифазі.

Розглянемо зміну всіх сил у часі для вимушених коливань. Величину $m\ddot{x}$ можна назвати силою інерції, і тоді рівняння руху (4.1) є не що інше як твердження, що зовнішня сила дорівнює сумі сили інерції і сили пружності пружини.

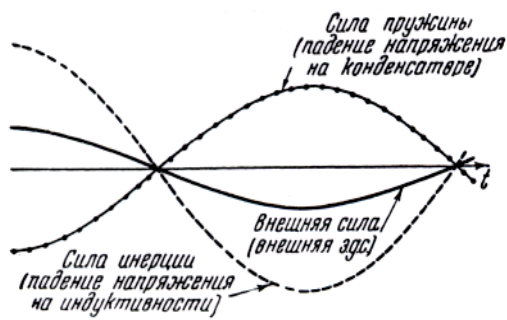
При вимушених коливаннях $x = x_0 \cos \omega t$ маємо: сила інерції $m\ddot{x} = -x_0 m \omega^2 \cos \omega t = -m \omega^2 x$ завжди знаходиться в протифазі зі зсувом, сила пружності пружини $kx_0 \cos \omega t$ завжди у фазі зі зсувом. До резонансу $x_0 > 0$, зовнішня сила знаходиться у фазі зі зсувом, після резонансу – у протифазі.

Графік зміни сил з часом для випадку $\omega < \omega_0$ показаний на Мал.5.1. Сила пружності є синфазною до зовнішньої сили, сила інерції знаходиться у протифазі до неї, різниця цих сил дорівнює зовнішній силі. До резонансу сила пружності завжди за абсолютною величиною є більшою за зовнішню силу $k > m\omega^2$.



Мал.5.1.

Після резонансу при $\omega > \omega_0$ (Мал. 5.2.) сила інерції стає синфазною



Мал.5.2.

до зовнішньої сили і завжди буде більшою за зовнішню силу, тому що $m\omega^2 > k$; при дуже великих частотах різниця між ними дуже мала, сила інерції майже дорівнює зовнішній силі. Оскільки зсув завжди син фазний з силою пружності, то до резонансу зовнішня сила і зсув знаходяться у фазі, а після резонансу – навпаки, у протифазі.

При сталих вимушених коливаннях зовнішня сила врівноважується різницею сил інерції і пружної сили. При наближенні до резонансу $k \rightarrow m\omega^2$, а тому сила інерції майже дорівнює пружній силі. Для того, щоб урівноважити визначену кінцеву зовнішню силу, необхідна дуже велика амплітуда коливань зсувів, тільки тоді дві близькі величини дадуть потрібну кінцеву різницю.

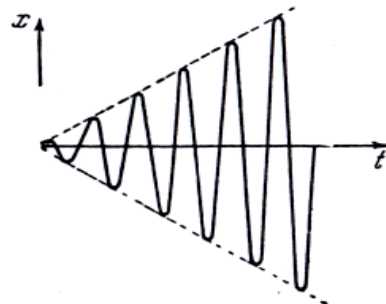
Визначимо характер коливань після включення зовнішньої сили. Для цього перепишемо розв'язок (4.5) при початкових умовах $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ у наступному вигляді:

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega)} \frac{\sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t}{\frac{\omega_0 - \omega}{2}} t \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$$

і розглянемо граничний випадок: $\omega \rightarrow \omega_0$. Тоді для будь-якого кінцевого значення часу одержимо:

$$x = \frac{F_0}{2\omega_0 m} t \sin \omega_0 t \quad (5.1)$$

Отже, при резонансі коливання зростають пропорційно часу t , тобто не буде сталих гармонічних коливань (Мал.5.3.). Вигляд розв'язку при резонансі залишається таким саме і при інших початкових умовах. До виразу (5.1) додаються лише члени $x(0)\cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \dot{x}(0)\sin \omega_0 t$, що представляють власні коливання системи.



Мал. 5.3.

2. Резонанс в лінійних дисипативних системах.

Рівняння вимушених коливань для механічної системи при наявності сили тертя буде мати вигляд:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (5.2)$$

Розв'язок цього рівняння можна записати у наступний спосіб:

$$x(t) = x_1(t) + ae^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (5.3)$$

де $x_1(t)$ - частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.2) (вимушені коливання) і другий член представляє собою загальний розв'язок однорідного рівняння (власні коливання; a і φ - константи, які визначаються з початкових умов).

У теорії вимушених коливань часто замість декременту $\eta = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

уводять величину Q , яку називають добротністю коливальної системи;

вона визначається як $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$. Перепишемо вираз для декременту

механічної системи, підставивши $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ і $\delta = \frac{h}{2m}$ (h - коефіцієнт тертя),

у вигляді $\eta = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{mk}{h^2} - \frac{1}{4}}}$, величина його при невеликому загасанні має вигляд

$\eta \approx \frac{\pi h}{\sqrt{mk}}$. Встановимо зв'язок між Q та η .

$$\eta = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} \quad (5.4)$$

При малих декрементах коливальної системи добротність є величиною, що зворотна декрементові та дорівнює: $\eta \approx \frac{\pi}{Q}$. При великих загасаннях слід

користуватися точною формулою (5.4). Очевидно, що при $Q = \frac{1}{2}$ декремент звертається в нескінченність, що відповідає межі коливального режиму.

Коливальні рухи в системі при $Q < \frac{1}{2}$ будуть лімітаційними.

Легко показати, що добротність системи дорівнює власній частоті, що поділена на ширину резонансної кривої на половині її висоти. Ширина резонансної кривої є мірою вибіркості коливальної системи. Вона вказує область тих частот, для яких енергія вимушених коливань буде більша за половину енергії коливань при резонансі для тієї ж амплітуди сили.

Ширина резонансної кривої зв'язана з добротністю формулою: $Q = \frac{\omega_0}{\omega - \omega'}$.

Тому добротність також зв'язана з вибірківістю коливальної системи. Важливо підкреслити, що добротність характеризує як гостроту резонансної кривої, так і час установлення. Чим гостріше резонансна

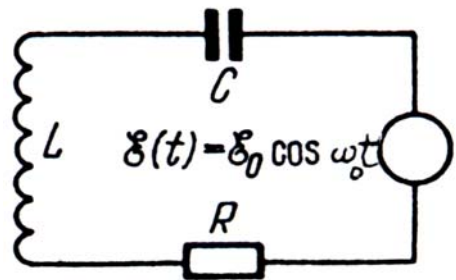
крива, тим більшим є час установлення стаціонарного вимушеного коливання.

Рівняння (5.2) при резонансі ($\omega_0 = \omega$) з урахуванням тертя має вигляд: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_0 t$. Розв'язок цього рівняння містить періодичне вимушене коливання з частотою ω_0 . Доведемо це. Якщо відбувається таке коливання, вираз $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (у конкретному випадку тягарця на пружині, сила інерції в точності дорівнює в кожен момент часу пружній силі) і, отже, $2\delta\dot{x} = f_0 \cos \omega_0 t$. Зовнішня сила в кожен момент часу в точності компенсується силою тертя. Це має місце при:

$$\dot{x} = \frac{f_0}{2\delta} \cos \omega_0 t, \quad x = \frac{f_0}{2\delta\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (5.5)$$

Амплітуда є зворотно пропорційною до загасання δ і звертається в нескінченність при $\delta \rightarrow 0$.

Обговоримо отриманий результат у застосуванні до електромагнітних вимушених коливань. На Мал.5.4. зображено коливальний контур, що входить до складу радіоприймача. Струм, що збуджується в антені, наводить у контурі ЕРС типу $\varepsilon_0 \cos \omega_0 t$ (контур налаштовано у резонанс із цією силою). Напруга U , що виникає на конденсаторі, подається на вхід підсилювача. Ця напруга становить найбільший інтерес. Воно дорівнює $U = C/q$, де q - заряд. Диференціальне рівняння контуру має вигляд:



Мал. 5.4. Електрична коливальна система з зовнішньою електрорушійною силою (ЕРС).

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c} = f_0 \cos \omega_0 t \quad (5.6)$$

тут $2\delta = \frac{R}{L}, f_0 = \frac{\varepsilon_0}{L}$.

Звідси, використовуючи (5.5), одержимо

$$q = \frac{\varepsilon_0 L}{L\omega_0 R} \sin \omega_0 t, \quad \dot{q} = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos \omega_0 t \quad (5.7)$$

Значить, $u = \frac{\varepsilon_0}{\omega_0 R c} \sin \omega_0 t = Q\varepsilon_0 \sin \omega_0 t$, де $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ добротність контуру.

Отже, амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює добутку амплітуди зовнішньої ЕРС на добротність контуру. Наприклад, якщо $Q=100$, то ЕРС у 10 мВ підтримує на конденсаторі напругу в 1В. Це посилення напруги за допомогою резонансу відіграє істотну роль у радіотехніці.

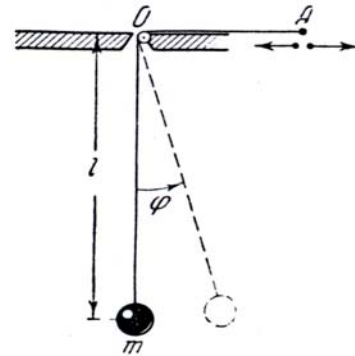
6. ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

6.1. Загальний опис параметричних коливань.

Дотепер ми розглядали коливальні системи, у яких відбувалися або власні коливання, характеристики яких визначаються виключно початковими умовами, або вимушені коливання, що виникають під дією зовнішньої сили.

Однак, можливим є такий вплив зовнішнього чинника на коливальну систему, що зовнішня сила за певним законом змінює один з параметрів системи з часом. Такі коливання називаються *параметричними*, вони можуть бути наростаючими і загасаючими в часі. Особливий інтерес представляють наростаючі коливання й умови їхнього виникнення. Явище виникнення таких коливань при параметричному впливі зовнішньої сили називається параметричним резонансом (або параметричною нестійкістю).

Досліджуючи системи з одним ступенем волі, обмежимо задачу вивчення параметричних нестійкостей випадком періодичної модуляції певного параметра. Найпростішим прикладом параметричної нестійкості є математичний маятник з періодично змінною довжиною (дитячі “гойдалки”). Нехай довжина ℓ змінюється за гармонічним законом (Мал. 6.1.), тоді точка A коливається з частотою ω та амплітудою a . За цих умов рівняння обертання матеріальної точки поблизу осі (точка O) можна записати так:



Мал. 6.1.

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + 2m\ell\dot{\varphi}\frac{d\ell}{dt} + mg\ell\sin\varphi = 0 \quad (6.1)$$

Нехай $\ell = \ell_0 \left(1 + \frac{a}{\ell_0} \cos \omega t\right)$. Тоді у припущенні $\frac{a}{\ell_0} \ll 1$ (зміна довжини маятника є малою в порівнянні з його середньою довжиною) і $\sin \varphi \approx \varphi$ (амплітуди коливань маятника малі) рівняння (6.1) зводиться до вигляду:

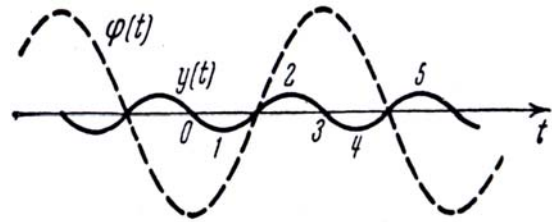
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell_0 + a \cos \omega t} \varphi = 0 \quad (6.2)$$

чи в загальному вигляді –

$$\ddot{\varphi} + \psi(t)\varphi = 0. \quad (6.3)$$

Рівняння (6.3) називається рівнянням Хілла, воно є найпростішим типом рівнянь, що описують коливальні системи, у яких можуть виникнути наростаючі у часі параметричні коливання.

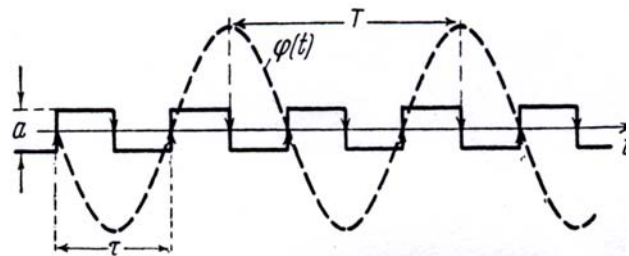
Нехай маятник, що складається з невагомої, нерозтяжної нитки та вантажу малих розмірів порівняно з довжиною нитки (тому його можна вважати матеріальною точкою) виконує власні коливання з частотою, що приблизно дорівнює $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$. У той же час змінюється довжина маятника. Нехай частота її змін є удвічі більшою за ω_0 , а фаза є такою, як на Мал. 6.2. Там же показано коливання точки підвісу $y(t)$ і коливання маятника $\varphi(t)$.



Мал. 6.2.

Коли маятник має малу швидкість, вантаж опускається, а коли маятник має найбільшу швидкість коливань, то вантаж піднімається. Механічне напруження нитки при підніманні вантажу є більшим, ніж при опусканні. Отже, зовнішня система, що змінює довжину маятника, виконує додатню роботу, тобто передає енергію маятнику. При цьому амплітуда коливань маятника повинна зростати, якщо тертя відсутнє. При наявності тертя в коливальній системі, якщо робота зовнішньої системи буде більшою за втрати енергії через наявність тертя при коливаннях, то амплітуда коливань також буде зростати. Це явище називають параметричним резонансом. Розглянемо найпростішу схему, у якій довжина маятника змінюється стрибком. Нехай частота поштовхів у два рази більша за частоту власних коливань, а фаза зміни така, що підймання відбувається в той момент, коли маятник проходить рівноважне положення (див. Мал.6.3.).

Елементарний розрахунок показує, що за період енергія коливань маятника збільшиться на величину $\Delta E \sim 6 \frac{a}{\ell_0} E$, пропорційну



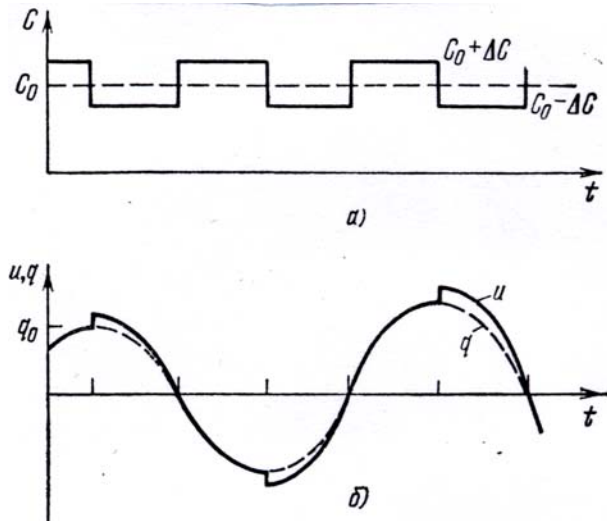
Мал. 6.3.

повній енергії коливань. Втрати енергії за період внаслідок тертя при гармонічних коливаннях також пропорційні енергії коливань

$\Delta E' \sim 2\eta E$, де η - декремент. Таким чином, критерієм параметричної нестійкості буде умова $\frac{3a}{\ell_0} > \eta$, при виконанні якої амплітуда коливань

буде необмежено зростати навіть при наявності тертя в системі. Однак це справедливо тільки в лінійному наближенні. Зі збільшенням амплітуди коливань істотну роль починають грати нелінійні члени рівняння (6.1), тому амплітуда коливань насправді буде обмеженою.

Розглянемо параметричну нестійкість лінійного коливального контуру з ємністю, що змінюється в часі, як показано на Мал.6.4.а). Припустимо, що заряд q на конденсаторі змінюється за гармонічним законом. Нехай частотні і фазові співвідношення між $q(t)$ та $c(t)$ є такими, що ємність конденсатора зменшується щоразу у ті моменти часу, коли заряд на ємності, змінюючись в часі, набуває свого максимального значення, яким відповідають екстремуми на Мал. 6.4. б).



Мал. 6.4. Графіки зміни C (а) і (б) при параметричному впливі на коливальну систему.

При цьому вкладання енергії в систему буде максимальним, тому що при розсуванні обкладинок конденсатора виконується максимальна робота проти електростатичних сил притягіння між пластинами. Частота зміни ємності на величину Δc в цьому випадку вдвічі більше частоти коливань у контурі.

Обчислимо збільшення електростатичної енергії конденсатора $\Delta \varepsilon$, що відбувається в моменти відповідних різких змін величини ємності

$$\Delta \varepsilon = q_0^2 / 2 \left[1 / (c_0 - \Delta c) - 1 / (c_0 + \Delta c) \right] = q_0^2 \Delta c / (c_0^2 - (\Delta c)^2) \quad (6.4)$$

Вважаючи $\Delta c \ll c_0$, маємо

$$\Delta \varepsilon \cong q_0^2 / 2c_0 \cdot 2\Delta c / c_0 = \varepsilon_0 2\Delta c / c_0, \quad (6.5)$$

де ε_0 характеризує енергію, яку має коливальний контур до “стрибка” ємності. Введемо коефіцієнт m , що часто називають глибиною модуляції певного параметра коливальної системи (в нашому випадку цим параметром є величина ємності),

$$m = \frac{c_{\max} - c_{\min}}{c_{\max} + c_{\min}} = \frac{\Delta c}{c_0} \quad (6.6)$$

Тоді збільшення коливальної енергії в контурі після одного стрибкоподібного зменшення ємності дорівнює: $\Delta \varepsilon = \varepsilon_0 2m$. При параметричній дії зовнішньої сили на коливальну систему зміна коливальної енергії є пропорційною до повної енергії ε_0 , яку внесено до осциляторної системи. У відповідності до обраного фазового співвідношення наступне стрибкоподібне збільшення ємності не викликає зміни енергії в системі, тому що у відповідні моменти часу початкова енергія дорівнює нулю ($q=0$ на Мал.6.4.б). За один період коливання

енергія вкладається в систему двічі, приблизно однаковими порціями, тому що $\frac{\Delta c}{c_0} \ll 1$. Отже загальне збільшення енергії за період дорівнює:

$$2\Delta\varepsilon = \varepsilon_0 4m \quad (6.7)$$

Енергія, що втрачається системою за період, дорівнює

$$\frac{1}{2} R \omega_0^2 q_0^2 T = \pi R \omega_0 q_0^2, \quad (6.8)$$

якщо вважати коливання заряду приблизно гармонічними ($q = q_0 \sin \omega_0 t$). Порівняння (6.7) і (6.8) дозволяє знайти умову, за якої в системі відбувається зростання коливань

$$\frac{q_0^2}{2c_0} 4m > \pi R \omega_0 q_0^2, \quad m > \frac{1}{2} \pi R c_0 \omega_0 \quad (6.9)$$

або

$$m > m_{\text{нор}} = \frac{1}{2} \pi R \sqrt{\frac{c_0}{L}} = \frac{1}{2} \eta,$$

де η - логарифмічний декремент загасання електричного коливального контуру. Цей процес зростання амплітуди коливань осцилятора за рахунок періодичної зміни енергоємного параметра будемо називати *параметричним резонансом*. У розглянутому прикладі цей параметр змінювався двічі за період збуджуваних коливань. Однак можна вносити енергію до коливальної системи не так часто, але так щоб виконувалася умова:

$$\omega = \frac{2\omega_0}{n}, \quad (6.10)$$

де n – ціле число. Звичайно, внесення енергії до коливальної системи за період буде тим менше, чим більше n . Слід зазначити, що в лінійних системах за умов параметричного резонансу відбувається необмежене зростання амплітуди збуджених коливань. Це зв'язано з тим, що втрати і внесок енергії є пропорційними до величини коливальної енергії системи. Нагадаємо, що вимушені коливання в лінійній системі мають скінчене значення амплітуди, тому що вкладання енергії є пропорційним першому ступеню амплітуди коливань, а втрати як і раніше пропорційні квадрату амплітуди.

Параметричний резонанс у лінійних системах часто описується диференціальними рівняннями з періодичними коефіцієнтами, частинним випадком таких рівнянь є рівняння Мат'є.

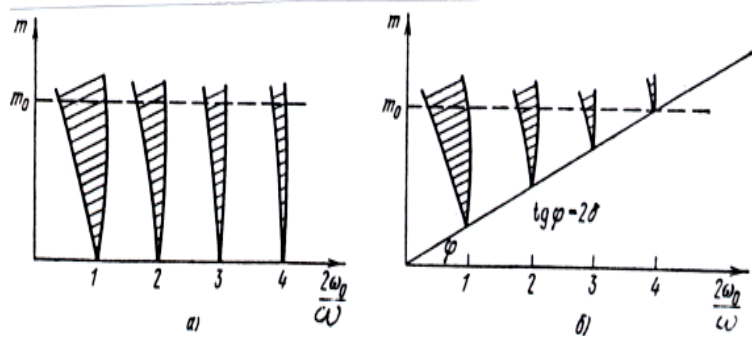
$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + m \cos \omega t) x = 0 \quad (6.11)$$

або для дисипативних систем

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 (1 + m \cos \omega t) x = 0 \quad (6.12)$$

Заштриховані області параметричного резонансу, які описуються цим рівнянням, показано на Мал.6.5.

Видно, що при наявності втрат у системі вершини областей параметричної нестійкості піднімаються, і для заданого значення m_0 глибини модуляції певного параметра ширина областей нестійкості для різних номерів n є різною для випадків консервативної і дисипативної систем. При



Мал. 6.5. Области збудження для параметричних систем без загасання (а) та з загасанням (б).

зростанні цього номера через те, що вкладення енергії відбувається рідко, необхідно збільшити глибину модуляції реактивного параметра для одержання тієї ж ширини області параметричного резонансу.

Наявність нелінійності зовнішньої сили, яка періодично змінюю певний параметр коливальної системи, внаслідок неізохронності коливань буде призводити до зміни частоти ω_0 при зростанні амплітуди, потім до порушення умов резонансу і в результаті, до обмеження амплітуди параметричного збудження коливань.

Таким чином, у випадку параметричного резонансу існують лише обмежені частотні інтервали поблизу $\omega = \frac{2\omega_0}{n}$, усередині яких виникають параметричним способом збуджені коливання. Параметричний резонанс у неконсервативній системі має граничний (пороговий) характер, у силу чого існує обмежене число частотних інтервалів, усередині яких має місце резонанс. У лінійній неконсервативній системі при параметричному резонансі відбувається необмежене зростання амплітуди, тому що внесок і втрати енергії пропорційні квадрату амплітуди і тільки в нелінійній системі (при врахуванні кубічних нелінійних доданків) відбувається обмеження коливань.

6.2. Аналітичне дослідження параметричної нестійкості

Розглянемо випадок, коли параметричні коливання описуються рівнянням Мат'є з малим параметром, тобто має місце рівняння:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0^2 \cos(\gamma t) x, \quad (6.13)$$

де для параметру модуляції виконується нерівність: $\varepsilon \ll 1$, що відповідає випадку слабкої модуляції. В цьому випадку для здобуття наближеного розв'язку цього рівняння можна скористатися теорією збурень. Але відразу застерігаємо читачів від спокуси просто шукати розв'язок у вигляді ряду $x(t) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$ за малим параметром задачі $\varepsilon \ll 1$. Бо в цьому

випадку, після знаходження вже відомого з попередніх розділів $x(t) = x_0 = a_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$ розв'язку в нульовому наближенні, вже в першому наближенні виникає рівняння $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \varepsilon \omega_0^2 \cos(\gamma t) x_0$, яке за умов параметричної дії зовнішньої сили на частоті $\gamma = 2\omega_0$ набуває вигляду рівняння, яке описує коливання лінійного консервативного осцилятора під дією резонансної зовнішньої сили. Розв'язок такого рівняння ми вже знаходили і показали, що воно має секулярний (від англійського secular, віковий) вигляд, тобто необмежено зростає з часом. Це не відповідає результатам експериментального дослідження збудження параметричних коливань.

Тому за методикою, що була запропонована Пуанкаре, будемо вважати, що $\omega_0^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$, тобто має місце не точний резонанс, а існує певна відмінність ω_0 від $\gamma/2$. Тоді розкладаючи $x(t)$ та $\omega_0(t)$ в ряди за ступенями ε замість рівняння (6.13) отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\ddot{x}_0 + \gamma^2 x_0 / 4 = 0, \quad (6.14)$$

$$\ddot{x}_1 + \gamma^2 x_1 / 4 + \omega_1 x_0 = 0.25 \gamma^2 x_0 \cos(\gamma t), \quad (6.15)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{\gamma^2}{4} x_2 + \omega_1 x_1 = \frac{\gamma^2}{4} x_1 \cos \gamma t + (\omega_1 \cos \gamma t - \omega_2) x_0, \quad (6.16)$$

для нульового, першого, другого і так далі наближення.

Для демонстрації можливостей цього методу обмежимося цими трьома рівняннями, тобто знайдемо $x(t)$ в першому наближенні, а частоту осцилятора в режимі параметричної нестійкості знайдемо з точністю до поправки у другому наближенні.

З рівняння (6.14) - нульове наближення, видно, що $x_0 = A \cos(\frac{\gamma}{2} t + \alpha)$, де A визначається початковими, а фаза α - іншими умовами. Наперед про них можна тільки сказати, що це певні сталі величини. Рівняння (6.15) з урахуванням розв'язку, що знайдено в нульовому наближенні, можна записати в такий спосіб:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\gamma^2}{4} x_1 = -\omega_1 A \cos(\frac{\gamma}{2} t + \alpha) + \frac{\gamma^2}{4} A \cos(\frac{\gamma}{2} t + \alpha) \cos(\gamma t) \quad (6.17)$$

Перепишемо його наступним чином:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\gamma^2}{4} x_1 = -\omega_1 A \cos((1.5 - 1)\gamma t + \alpha) + \frac{\gamma^2}{4} A \cos(1.5\gamma t + \alpha - \gamma t) \cos(\gamma t). \quad (6.18)$$

Це дозволить скористатися тригонометричними формулами для косинуса суми двох аргументів та подвоєного аргументу. В результаті чого отримаємо:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\gamma^2}{4} x_1 = \left(\frac{-\gamma^2}{4} - \omega_1 \right) A \cos \frac{\gamma t}{2} \cos \alpha + \left(\omega_1 + \frac{\gamma^2}{4} \right) A \sin \frac{\gamma t}{2} \sin \alpha + \frac{\gamma^2 A}{2} \cos^2 \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \left[\cos \frac{\gamma t}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\gamma t}{2} \sin \alpha \right]; \quad (6.19)$$

Надалі нам стануть в нагоді ще дві формули з курсу тригонометрії: $\cos(3\omega) = 4\cos^3\omega - 3\cos\omega$ та $\sin^3(0.5\gamma t) = 0.75\sin(0.5\gamma t) - 0.25\sin(1.5\gamma t)$. Тепер рівняння (6.19) можна спростити та переписати в наступний спосіб:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\gamma^2}{4} x_1 = 0.125A\gamma^2 \cos(1.5\gamma t + \alpha) - \left(\omega_1 - \frac{\gamma^2}{8} \right) A \cos(0.5\gamma t) \cos \alpha + \left(\omega_1 + \frac{\gamma^2}{8} \right) A \sin \alpha \sin(0.5\gamma t). \quad (6.20)$$

Щоб x_1 була періодичною функцією, а не зростала резонансно, треба два останніх доданки в (6.20) прирівняти до нуля. В протилежному випадку для x_1 матимемо рівняння лінійного осцилятора в полі дії резонансної сили, яке (як вже зазначено вище) призводить до появи секулярних доданків, що в свою чергу обмежує в часі справедливість отриманого наближеного розв'язку. Щоб розв'язок був справедливим для довільного моменту часу слід скористатися можливістю визначити константи ω_1 та α . Виходячи з умови здобуття розв'язку, який би не мав секулярних доданків, обираємо ці константи у наступний спосіб: $\omega_1 = \frac{\gamma^2}{8}; \alpha = 0$. Тоді з

(6.20) маємо:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\gamma^2}{4} x_1 = \frac{\gamma^2 A}{8} \cos(1.5\gamma t + \alpha). \quad (6.21)$$

Це неоднорідне рівняння має розв'язок у вигляді суперпозиції розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння: $x_1 = x_1^{(од)} + x_1^{(ч)}$.

$$x_1 = B \cos(0.5\gamma t + \varphi) - \frac{A}{16} \cos(1.5\gamma t + \alpha); \quad (6.22)$$

тут B та φ - це константи, що визначаються в подальшому дослідженні.

Дослідимо тепер рівняння (6.16), що здобуто у другому наближенні, пам'ятаючи, що $\omega_1 = \gamma^2/8$, а параметр $\alpha = 0$:

$$\ddot{x}_2 + \frac{\gamma^2}{4} x_2 = B \cos\left(\frac{\gamma t}{2} + \psi \frac{\gamma^2}{8}\right) (2\cos\gamma t - 1) + \frac{\gamma^2}{8} (1 - 2\cos\gamma t) \frac{A}{16} \cos(1.5\gamma t) + \left(\frac{\gamma^2}{8} \cos\gamma t - \omega_2\right) A \cos\left(\frac{\gamma t}{8}\right). \quad (6.23)$$

Знову коефіцієнти при $\cos(0.5\gamma t)$ та $\sin(0.5\gamma t)$ в правій частині рівняння мають бути прирівняні до нуля, бо інакше реалізується умова лінійного резонансу. Виокремимо в правій частині рівняння (6.23) доданки, що пропорційні константам A та B , та позначимо праву частину сумою: $\Phi(A) + \Phi(B)$. Проаналізуємо спочатку функцію $\Phi(A)$.

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \frac{\gamma^2 A}{128} \cos(1.5\gamma t) - \frac{\gamma^2 A}{64} \cos(\gamma t) \cos(1.5\gamma t) + \frac{\gamma^2 A}{8} \cos(\gamma t) \cos \frac{\pi}{2} - \\ &\quad \omega_2 A \cos \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{\gamma^2 A}{128} \cos(1.5\gamma t) + \frac{\gamma^2 A}{64} [2\cos^2(0.5\gamma t)(\cos(0.5\gamma t)\cos(\gamma t) - \\ &\quad \sin(0.5\gamma t)\sin(\gamma t)) - \cos(1.5\gamma t) \\ &\quad + 8\cos(0.5\gamma t) - 16\cos^3(0.5\gamma t)] - \omega_2 A \cos(0.5\gamma t).\end{aligned}\quad (6.24)$$

Використовуючи тригонометричні перетворення ступенів гармонічних функцій в гармонічні функції збільшеного аргументу, вираз (6.24) можна переписати в наступний спосіб:

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \frac{\gamma^2 A}{128} \cos(1.5\gamma t) - \frac{\gamma^2 A}{64} (8\cos^5(0.5\gamma t) - 22\cos^3(0.5\gamma t) - \\ &\quad \cos(1.5\gamma t) + 8\cos \frac{\pi}{2}) - \omega_2 A \cos \frac{\pi}{2} = \\ &\quad \frac{\gamma^2 A}{128} \cos(1.5\gamma t) - \frac{\gamma^2 A}{64} (0.5\cos \frac{5}{2}\gamma t - 4\cos 1.5\gamma t - \frac{7}{2} \cos \frac{\pi}{2}) - \omega_2 A \cos \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\quad (6.25)$$

Проаналізувавши вираз (6.25), можна дійти висновку, що наявність в $\Phi(A)$ косинусів від вищих (порівняно з $\pi/2$) аргументів, а саме: $3\pi/2$, $5\pi/2$ не становить загрози для сходимості розв'язку, бо „резонансними” є ті доданки, що пропорційні $\cos(\pi/2)$. Тому слід обрати ω_2 в такий спосіб: $\omega_2 = 7\gamma^2/128$.

Тепер проаналізуємо доданки в правій частині рівняння (6.23), які є пропорційними до константи B , при цьому для спрощення запису саму константу писати не будемо:

$$\begin{aligned}\Phi(B) &= \frac{1}{4} \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) \cos \gamma t - \frac{1}{8} \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = \frac{1}{8} \cos \varphi \cos 1.5\gamma t + \frac{1}{8} \\ &\quad \cos \varphi \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4} \sin \varphi \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{3}{8} \sin \varphi \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8} \sin \varphi \sin \frac{3}{2}\gamma t - \\ &\quad \frac{1}{8} \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi).\end{aligned}\quad (6.26)$$

В виразі для $\Phi(B)$ має дорівнювати нулю ті доданки, що пропорційні до $\cos(\gamma t/2)$, або $\sin(\gamma t/2)$. Тому $\sin \varphi = 0$, звідки виходить $\varphi = 0$. Таким чином, потрібний нам розв'язок, здобутий у першому наближенні має наступний вигляд:

$$x(t) = A \cos(\gamma t/2) - \frac{A\varepsilon}{16} \cos(3\gamma t/2) + O(\varepsilon^2). \quad (6.27)$$

Вираз для частоти параметричних коливань, розрахований з точністю включно до доданків другого порядку малості має вигляд:

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma^2}{4} + \varepsilon \frac{\gamma^2}{8} + \varepsilon^2 \frac{7\gamma^2}{128} + O(\varepsilon^3). \quad (6.28)$$

Ці вирази співпадають з першими доданками рядів, у вигляді яких можна приблизно записати функції Мат'є C_n для $n=1$ (при розкладанні в ряд Фур'є). Наведемо ці вирази:

$$C_1 = \cos t - \frac{h}{16} \cos 3t + O(h^2), \quad \omega^2(C_1) = 1 + 0.5h + \frac{7}{32}h^2 + O(h^3). \quad (6.29)$$

Таким чином ми показали, що у випадку наявності малого параметра рівняння параметричних коливань, яке має форму рівняння Мат'є, можна розв'язувати наближеними асимптотичними методами, але обов'язково слід брати до уваги зміну частоти цих коливань. Тоді можна обійтися без використання спеціальних функцій Мат'є, отримати наближений простий за формою розв'язок для самої величини, що виконує параметричні коливання, та частоти цих коливань. Сам розв'язок фактично співпадатиме з виразом для функції Мат'є, що розкладена в ряд Фур'є.

6.3. Дослідження стійкості параметричних коливань

Розглянемо рівняння Мат'є з малим параметром модуляції (6.13) $\ddot{x}$. Будемо вважати, що для частоти зовнішньої сили, яка змінює величину параметра $x(t)$, має місце певний зсув відносно власної частоти ω_0 (тобто основний параметричний резонанс: $2\tau = T_0$ виконується наближено). Нехай має місце наступне співвідношення між власною частотою та частотою зовнішньої сили: $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon\delta$; $\varepsilon \ll 1$, ε - це безрозмірний малий параметр.

Розв'язок шукає методом збурень у вигляді:

$$x(t) = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots,$$

де $u_j(a, \psi)$ – періодичні функції фази коливань ψ .

Так що $u_j(\psi) = u_j(\psi + 2\pi)$, ($\psi = \omega t + \alpha$).

Коли малий параметр в задачі $\varepsilon = 0$, тоді розв'язок для осциляцій має простий вигляд: $x = a \cos \psi$. При цьому амплітуда цих коливань не змінюється в часі: $da/dt = 0$, а похідна від фази за часом $d\psi/dt = \omega$. Наявність нелінійного збурення ($\varepsilon \neq 0$) призводить до появи у розв'язку для параметричних коливань обертонів: $x(t) = A \cos(\gamma t/2) + \varepsilon B \cos(3\gamma t/2) +$

$0(\varepsilon^2)$... та залежності амплітуди коливань від часу: $da/dt \neq 0$. Таким чином для da/dt та $d\psi/dt$ маємо:

$$\begin{aligned} da/dt &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \\ d\psi/dt &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (6.30)$$

У випадку параметричних коливань за умов реалізації основного резонансу маємо такий розв'язок: $x = a \cos(\gamma t/2 + \vartheta)$. Тому замість $d\psi/dt = \omega + \varepsilon B_1 + \dots$ можна записати: $d\vartheta/dt = \omega - \gamma/2 + \varepsilon B_1 + \dots$. Обмежимося при розгляді питання про стійкість параметричних коливань лінійним наближенням. Тоді розв'язок матиме наступний вигляд:

$$x = A(\varepsilon t) \cos(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)t + B(\varepsilon t) \sin(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)t + \varepsilon x_1(t); \quad (6.31)$$

В нульовому наближенні ($\varepsilon = 0$) вираз (6.31) звертається у добре відому суперпозицію гармонічних функцій, так що $x_0'' = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \sin(\omega_0 t)$. Оскільки нульове наближення ми вже аналізували у попередньому підрозділі, то перейдемо одразу до аналізу першого наближення. Користуючись виразом (6.31), знайдемо вираз для другої похідної від параметра $x(t)$ за часом та підставимо його до рівняння Мат'є у формі (6.13).

$$\begin{aligned} x'' &= A'' \cos(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)t + B'' \sin(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)t - \\ &2(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon) A' \sin(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)t + \\ &+ 2B'(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon) \cos(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)t - \\ &(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)^2 A \cos(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)t - \\ &- B(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)^2 \sin(\omega_0 + 0.5 \delta \varepsilon)t + \varepsilon x_1''. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Тоді у першому наближенні рівняння Мат'є матиме вигляд:

$$\begin{aligned} -2\omega_0 A' \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \varepsilon \delta A \cos(\omega_0 t) + 2\omega_0 B' \cos(\omega_0 t) - \omega_0 \varepsilon \delta \\ B \sin(\omega_0 t) + \varepsilon x_1'' + \varepsilon \omega_0^2 x_1 = \\ \varepsilon \omega_0^2 \cos(\gamma t) [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]; \end{aligned} \quad (6.33)$$

Оскільки права частина рівняння (6.33) вже пропорційна малому параметру задачі ε , то при подальших перетвореннях слід використати в аргументах гармонічних функцій нульове наближення так, що $\cos(\gamma t) \approx \cos(2\omega_0 t)$. Розкладаючи вираз $\cos 2\omega_0 t (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$, що стоїть у правій частині рівняння (6.33), за допомогою тригонометричних співвідношень для кубів гармонічних функцій,

отримуємо на додачу до основного тону: ω_0 ще й обертон $3\omega_0$. З умови відсутності в правій частині рівняння для першої поправки резонансних доданків, які є джерелом секулярності, потрібно прирівняти до нуля множники при гармонічних функціях основного тону. Таких множників усього два типи, один з них пропорційний до косинуса основного тону, а другий – до синуса. Тому, прирівнявши до нуля коефіцієнти при цих гармонічних функціях, отримаємо систему двох рівнянь:

$$\begin{aligned} 2\omega_0 A' + B\omega_0\delta\varepsilon - 0.5\omega_0^2\varepsilon B &= 0, \\ A\omega_0\delta\varepsilon - 2\omega_0 B' + 0.5\omega_0^2\varepsilon A &= 0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Розв'язки цієї системи мають вигляд: $A, B \sim \exp(\lambda t)$. Тому, взявши похідну, наприклад, від другого рівняння системи (6.34) за часом, та підставивши у здобутий вираз значення A' першого рівняння, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку для B :

$$B'' = B\left(\frac{\varepsilon\delta}{2} + \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4} - \frac{\varepsilon\delta}{2}\right); \quad (6.35)$$

За допомогою підстановки Ейлера знайдемо характеристичне рівняння для коефіцієнта λ :

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\omega_0^2}{4} - \delta^2\right). \quad (6.36)$$

Аналізуючи характеристичне рівняння (6.36), можна дійти висновку, що можливі два різних режими параметричних коливань. Перший реалізується у тому випадку, коли $\lambda^2 > 0$, а другий - при $\lambda^2 < 0$. Якщо $\lambda^2 > 0$, тоді реалізується режим параметричної нестійкості амплітудні коефіцієнти A та B зростають за експоненціальним законом $\propto \exp(+|\lambda|t)$. Це можливо за умови $\omega_0/4 > |\delta|$, яка означає, що різниця між власною частотою та половиною частоти дії зовнішньої сили є величиною меншою за власну частоту даної коливальної системи.

Якщо має місце випадок $\lambda^2 < 0$, тоді реалізується коливальний режим зміни амплітуд A та B , тобто в цьому режимі параметричні коливання будуть схожі на складні биття:

$$x(t) = A_0 \exp(\pm i|\lambda|t) \cos(\omega_0 + 0.5\varepsilon\delta)t + \varepsilon x_1(t) + \dots \quad (6.37)$$

Оскільки величина кореня характеристичного рівняння λ є малою, так що виконуються наступні співвідношення: $|\lambda| \sim \varepsilon/\omega_0$; $\delta \ll \omega_0$; $\delta \ll \varepsilon$, то, значить, косинус змінюватиметься з періодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$, а амплітудний множник нульового наближення змінюватиметься дуже повільно,

порівняно з ним. Характерний масштаб його змін є значно більшим за T_0 , так що можна записати нерівність: $\frac{2\pi}{\varepsilon\omega_0} \gg T_0$.

Насичення параметричної нестійкості відбувається за рахунок нелінійного ефекту зсуву частоти цих коливань. Як ми вже бачили, параметричні коливання є дуже чутливими до реалізації фазового синхронізму, тому при порушенні умов щодо резонансних співвідношень спостерігається обмеження явища зростання амплітуди параметричних коливань. Частіше всього насичення параметричної нестійкості відбувається через урахування кубічної нелінійності $\omega_0^2(x) = \omega_0^2(1 + \varepsilon x^3)$.

7. АВТОКОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ

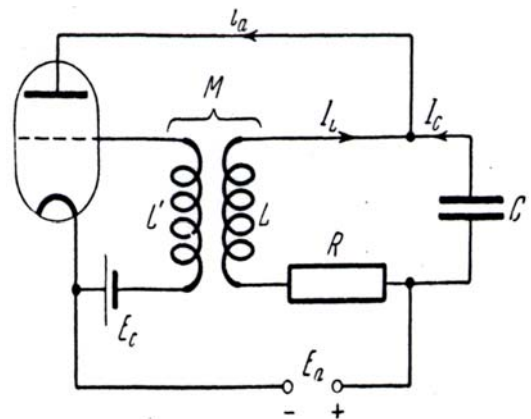
Автоколивальними називають системи, що здатні на незагасаючі коливання, і при цьому до них енергія зовні не підводиться. У цьому і полягає їх головна відмінність від систем, що виконують звичайні вимушені коливання, що реалізується під впливом зовнішньої періодичної сили. Типовими прикладами автоколивальних систем є всі духові і смичкові музичні інструменти, коливання в генераторах радіохвиль, коливання годинникового маятника, звучання людського голосу і багато іншого.

Корисно виділити у автоколивальних системах три основних елементи: 1) власне коливальну систему, яка б в ізолюваному стані була спроможна на загасаючі коливання; 2) ланку “зворотного зв’язку”, яка керує внутрішнім джерелом енергії та зв’язує коливальну систему з джерелом енергії; 3) внутрішнє джерело енергії.

Говорячи про особливості автоколивального процесу, можна виділити три наступні деталі: 1) можливість самозбудження; 2) частота та амплітуда автоколивань визначається параметрами системи; 3) фаза автоколивань довільна. Цікаво порівняти їхні особливості з особливостями інших коливань. Для власних коливань: 1) власна частота визначається параметрами системи; 2) амплітуда та фаза визначаються початковими умовами, а для вимушених коливань про вище зазначені параметри можна сказати наступне: 1) їх частота визначається зовнішніми силами; 2) їх амплітуда та фаза визначаються самою коливальною системою та зовнішньою силою.

7.1. Осциляторні автоколивальні системи

Розглянемо для прикладу автоколивання в режимі самозбудження схему генератора електромагнітних коливань (Мал. 7.1.). Коливальний LCR контур, що знаходиться в анодній мережі лампи, представляє основну коливальну систему з великою добротністю. Котушка L' і лампа складають ланку зворотного зв'язку. Внутрішнім джерелом енергії є батарея E_n . Нехай у контурі виникли власні



Мал. 7.1.

коливання, що через котушку L' впливають на керуючий електрод лампи і тому змінюють анодний струм, який протікає через лампу і контур. Коливання анодного струму i_a підсилюють коливання в контурі. Коливання в контурі зростають, поки коливання анодного струму не досягнуть максимальної величини. Процес зростання коливань називається

самозбудженням. При сталому автоколивальному процесі усі втрати коливальної енергії завчасно поповнює анодна батарея. Процес самозбудження коливань у генераторі описується нелінійним диференціальним рівнянням:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (\alpha - \gamma \dot{x}^2) \dot{x} \quad (7.1)$$

Воно зводиться до лінійного, якщо обмежитися розглядом малих коливань, що відбуваються поблизу стану рівноваги, при яких характеристику лампи можна вважати лінійною. Тоді $\gamma = 0$ і рівняння (7.1) записується у вигляді:

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

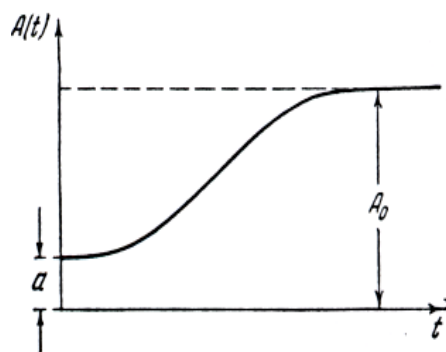
З нього видно, що коливання будуть наростати, якщо $\alpha > 0$. Це є умовою самозбудження, що у термінах параметрів генератора зводиться до $M > \frac{RC}{S}$, де S – крутість характеристики, що представляє похідну струму по напрузі в робочій точці характеристики лампи, а M – коефіцієнт зв'язку.

Для здобуття наближеного розв'язку рівняння (7.1) використовуємо метод Ван - дер - Поля. Вважаючи, що коливання в генераторі є близькими до гармонічних, розв'язок рівняння (7.1) представимо у вигляді:

$$x(t) = A(t) \cos \omega_0 t, \quad (7.2)$$

де $A(t)$ - повільна функція часу, тобто за час порядку декількох періодів її можна вважати

майже постійною. Це наближення $\frac{dA}{dt} \ll \omega_0 A$



Мал. 7.2.

справедливо, якщо величини α і γ у рівнянні є малими. Тоді розв'язок повинен бути близьким до гармонічного, принаймні в певному часовому інтервалі. Підставивши (7.2) до (7.1), і нехтуючи малими членами, одержимо рівняння для амплітуд:

$$2 \frac{dA}{dt} - \alpha A + \frac{3}{4} \gamma \omega_0^2 A^3 = 0 \quad (7.3)$$

яке можна проінтегрувати:

$$2 \int_a^A \frac{dA}{\left(\alpha - \frac{3}{4} \gamma \omega_0^2 A^2 \right) A} = t \quad (7.4)$$

$$A(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4} \gamma \omega_0^2 - \left(\frac{3}{4} \gamma \omega_0^2 - \frac{\alpha}{a^2} \right) e^{-\alpha t}}}$$

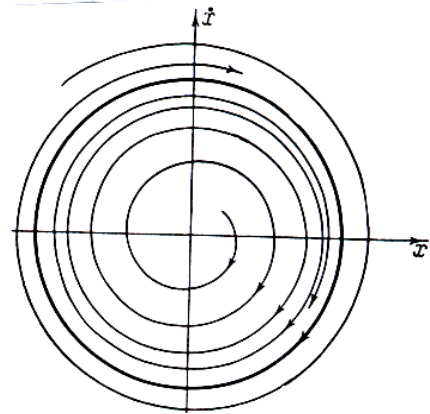
де a – початкова амплітуда. При $t \rightarrow \infty$ $A(t)$ прямує до граничного значення:

$$A_0 = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}}, \quad (7.5)$$

тобто до амплітуди стаціонарного автоколивального режиму.

Графік $A(t)$ показаний на Мал. 7.2. З нього видно, що амплітуда коливань від деякого початкового значення a , викликаного початковим збуренням, зростає, потім зростання припиняється й амплітуда стає постійною величиною, яка дорівнює A_0 . Легко показати, що стаціонарний автоколивальний режим є стійким. Якщо амплітуда $A(t)$ стає більшою чи меншою за A_0 , тоді з часом вона, відповідно зменшується чи збільшується і автоколивальний режим прямує до квазістаціонарного стану.

Отже, після перехідного режиму в генераторі, вільному від усяких зовнішніх впливів, виникає стійкий стаціонарний квазіперіодичний режим. Автоколивання на фазовій площині представляються у вигляді замкненої кривої, до якої при великих значеннях часу прямують усі фазові траєкторії (Мал. 7.3.). Вона називається граничним циклом. Ілюструюча точка усередині циклу рухається по спіралі, що розкручується, і наближається до циклу.



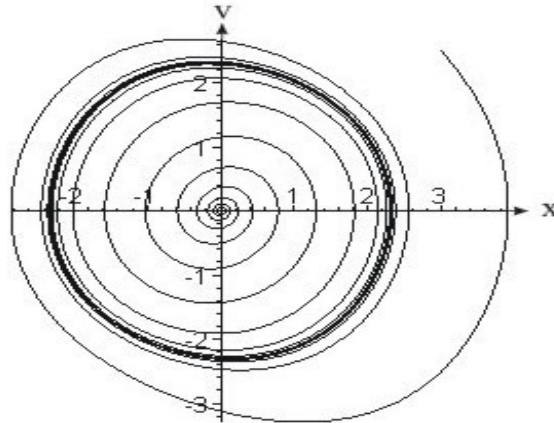
Мал. 7.3.

Поза граничним циклом рух ілюструючої точки відбувається по спіралі, що скручується, і ця точка також наближається до циклу. Граничний цикл представляє стаціонарний режим з визначеною амплітудою, що не залежить від початкових умов, а визначаються тільки конструкцією системи. Оскільки в автоколивальній системі на флуктуаційному рівні існує нескінченна кількість коливань з різними фазами, то хоч одна з них відповідатиме резонансним умовам підводу енергії, тому при автоколивальному процесі фаза коливань може бути довільною.

Проілюструємо на прикладі трансформації фазових портретів автоколивальної системи, що описується рівнянням Ван-дер-Поля (7.1), які зміни відбуваються в характері автоколивань при збільшенні коефіцієнта γ при кубічному нелінійному доданку у виразі для дисипативної сили. Ці фазові портрети приведено на Мал. 7.4 та Мал. 7.5, відповідно. З порівняння цих портретів видно, що збільшення γ призводить до зменшення амплітуди граничного циклу та деформації фазових траєкторій: на Мал. 7.4 граничний цикл є подібними до еліпса, а в наступному випадку він нагадує швидше прямокутник.

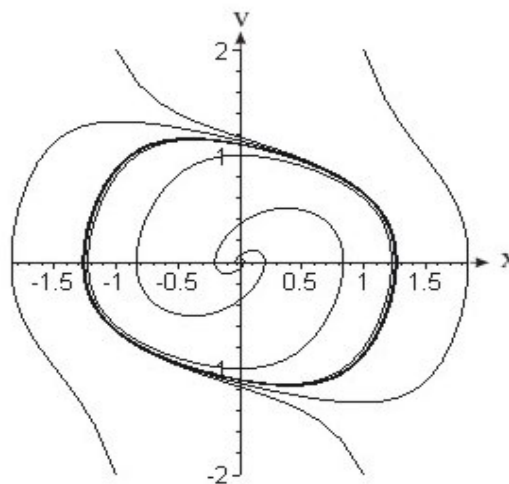
На відміну від замкнених фазових траєкторій консервативного осцилятора, які щільно заповнюють певну область фазового простору,

граничний цикл є ізольованою фазовою траєкторією. Поблизу граничного циклу баланс між дисипативними та активними силами порушено: фазову



Мал. 7.4. Фазовий портрет автоколивань, які описуються рівнянням Ван-дер-Поля (7.1), в якому $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.05$ та $\omega_0^2 = 1$.

площину заповнено траєкторіями, що нагадають спіралі, які навиваються на граничний цикл з внутрішнього та зовнішнього боків. У цьому випадку реалізується стійкий граничний цикл, тобто автоколивання виникають при будь-якому початковому збуренні, тому такий режим автоколивань називають режимом “м’якого” збурення, або режимом самозбудження коливань.



Мал. 7.5. Фазовий портрет автоколивань, які описуються рівнянням Ван-дер-Поля (7.1), в якому $\alpha = 0.2$, $\gamma = 3.0$ та $\omega_0^2 = 1$.

Покажемо, як знаходиться граничний цикл на фазовій площині. З рівняння (7.3) для dA/dt маємо наступне рівняння:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{2} \left(\alpha - \frac{3}{4} \gamma \omega_0^2 A^2 \right) \quad (7.6)$$

На граничному циклі $dA/dt=0$, амплітуда не змінюється (маємо стаціонарний режим автоколивань), тому або $A=0$, або $A^2=4\alpha/3\gamma\omega_0^2$. Це два стаціонарні режими: стан спокою $x=0=y$, а тому і амплітуда $A=0$, а також стан генерації автоколивань з амплітудою $A=\sqrt{4\alpha/3\gamma\omega_0^2}$. Інакше це можна отримати так: $x^2+y^2=A^2=4\alpha/3\gamma\omega_0^2$, (при цьому вважаємо, що $y \approx A \sin \omega t$).

Проаналізуємо граничний цикл на стійкість. Нехай амплітуда автоколивань змінюється на малу величину $|\delta A| \ll A_{st}$, тобто $A = A_{st} + \delta A$, тоді з рівняння (7.6) маємо:

$$\frac{d\delta A}{dt} = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial A} \left(A - \frac{3\gamma}{4\gamma} \omega^2 A^3 \right) \Big|_{A_{st}} \delta A = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{9\gamma\omega^2}{4\alpha} A_{st}^2 \right) \delta A \quad (7.7)$$

Стаціонарний стан є стійким, коли $d\delta A/dt < 0$, бо в протилежному випадку маємо експоненціальне зростання амплітуди, тобто реалізується режим нестійких коливань. Підставимо до виразу (7.7) два вище знайдені значення стаціонарної амплітуди та проаналізуємо результат. Для $A_{st} = 0$ маємо: $d\delta A/dt > 0$, значить це особлива точка на фазовій площині, а саме - нестійкий фокус. Для іншого значення стаціонарної амплітуди $A_{st} = \sqrt{\frac{4\alpha}{3\gamma\omega^2}}$

в результаті підстановки отримуємо: $\frac{d\delta A}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{9\gamma\omega^2}{4\alpha} \frac{4\alpha}{3\gamma\omega^2} \right) \delta A < 0$.

Значить, це і є амплітуда стаціонарного циклу.

Існують також режими “жорстокого” збудження, коли на фазовій площині граничних циклів може бути кілька, одні цикли стійкі, а інші - нестійкі. У цьому випадку для виходу автоколивальної системи на режим стаціонарної генерації необхідно, щоб початкове збудження перевищуватиме певне критичне (порогове) значення. Бо у протилежному випадку коливання з малою початковою амплітудою будуть загасати.

З приводу форми автоколивань можна додати також наступне. Якщо основна складова частина автоколивальної системи являє собою високо добротний коливальний контур, тоді автоколивання будуть близькими до гармонічного. Властивості ланки зворотного зв'язку лише в незначній мірі впливатимуть на форму коливань, в основному, вона служитиме для поповнення енергії коливальної системи протягом виконання автоколивань.

Такі системи одержали назву осциляторних автоколивальних систем. В них втрати енергії за період, а, отже, і величина енергії, що додається з

внутрішнього джерела, є значно меншою, ніж запас енергії, який накопичено в контурі.

Якщо основна складова частина автоколивальної системи являє собою аперіодичний коливальний контур, то форма автоколивань істотно залежить від властивостей ланки зворотного зв'язку. Тоді за умов самозбудження форма генеруємих коливань є далекою від гармонічної, а період коливань визначається часом релаксації системи. Такі автоколивальні системи називаються релаксаційними. У них відбувається майже повний обмін енергії (величина накопиченої енергії практично дорівнює величині енергії, що розсіюється) за характерний масштаб часу коливань, тому енергія має бути поповнена з внутрішнього джерела протягом кожного періоду автоколивань. Розглянемо детальніше цей режим автоколивань.

7.2. Релаксаційні колювання

Релаксаційні колювання реалізуються автоколивальними системами, характер яких є протилежним до вище розглянутого типу, а саме в автоколивальних системах з дуже великим загасанням. Релаксаційні колювання називаються ще, розривними колюваннями. Розривні (релаксаційні) колювання – це автоколювання, при яких має місце стрімка зміна у часі певних величин, що характеризують коливальний процес. Якщо ставитися до них дуже прискіпливо, то можна говорити, що це і не колювання, взагалі, а різкі зміни (стрибки у часі) певних параметрів системи. Але за великим рахунком це такі самі автоколювання, як і ті, що ми розглянули перед цим, хоча за формою інтегральних кривих осциляторні автоколювання в стаціонарному режимі і є майже еліптичними, а розривні – складаються з ділянок повільної та стрімкої зміни параметрів колювань.

У попередньому випадку автоколивальні системи склалися з майже лінійного коливального контуру з великою добротністю, який без зворотного зв'язку може колюватися із слабким загасанням. При осциляторному типі автоколювань саме контур визначав частоту та форму колювань, а зворотній зв'язок забезпечував подачу енергії в систему у потрібний час та в потрібній кількості. А у випадку релаксаційних автоколювань коливальний контур генерує сильно загасаючі колювання, тому ланка зворотного зв'язку грає визначальну роль в процесі генерації цього типу автоколювань.

Таким чином, релаксаційні колювання виникають в неконсервативних системах із сильною нелінійністю, наприклад, коли в рівнянні Ван–дер-Поля (7.1) параметр нелінійності є великим: $\varepsilon \gg 1$. Запишемо рівняння (7.1) за цих умов у наступному вигляді:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z = \varepsilon \left(1 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \frac{dz}{dt}, \quad (7.8)$$

тут час t є безрозмірною величиною. На перший погляд може видатися, що ми не зможемо розв'язати це рівняння і не зможемо побудувати фазовий портрет релаксаційних коливань, бо в рівнянні (7.8) немає малого параметра. Але насправді, використовуючи метод заміни змінної це рівняння можна звести до такого, в якому буде малий параметр. Вводимо новий час τ : $t = \varepsilon \tau$; $\varepsilon d\tau = dt$; тоді рівняння (7.8) перепишеться так:

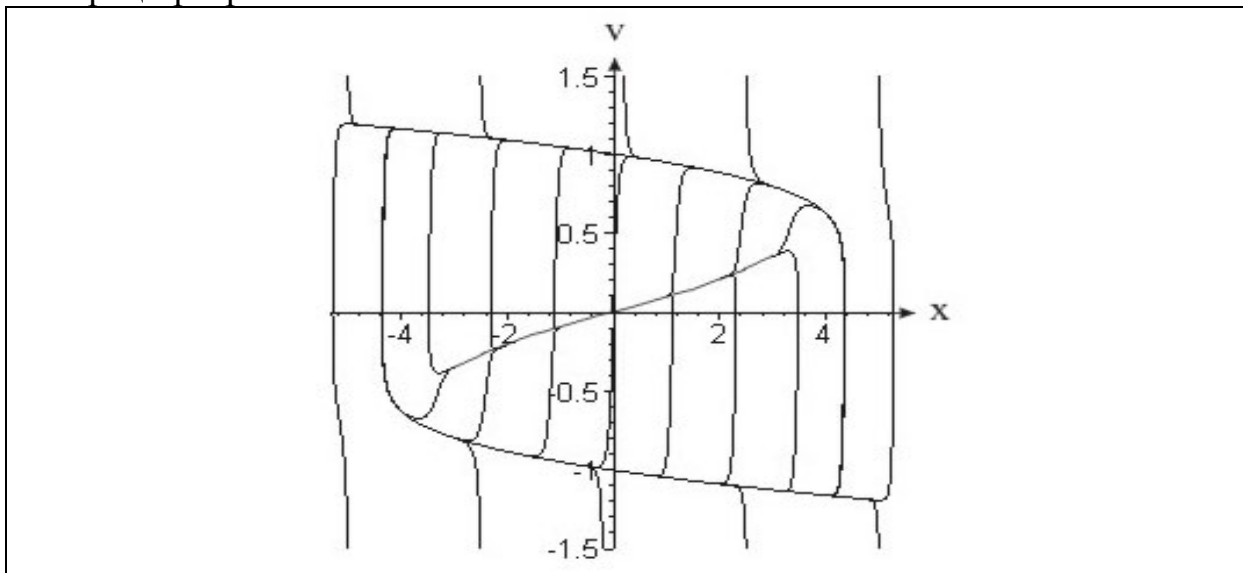
$$\frac{d^2 z}{d\varepsilon^2 \tau} + z = \varepsilon \left[1 - \left(\frac{dz}{\varepsilon d\tau} \right)^2 \right] \frac{dz}{\varepsilon d\tau} \quad (7.9)$$

Тепер введемо нову змінну: $x = z / \varepsilon$ і перепишемо рівняння (7.9) в такий спосіб:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \varepsilon \left[1 - \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{dx}{d\tau} \quad (7.10)$$

Тепер в ньому можна ввести вже і малий параметр: $\alpha = \varepsilon^{-2} \ll 1$.

Цікавий вигляд має фазовий портрет розривних коливань. Оскільки рівняння (7.10) описує сильно загасаючі коливання, то для них на фазовій площині має бути особлива точка ($x=y=0$) типу – вузол. Але на відміну від випадків, що розглянуто в попередньому розділі, зараз це особлива точка типу нестійкий вузол. Це означає, що коливання, які існують в автоколивальних системах даного типу на флуктуаційному рівні, швидко збільшують свою амплітуду та виходять на граничний цикл в режимі генерації розривних коливань.



Мал. 7.6. Фазовий портрет розривних коливань, які описуються рівнянням (7.8). По осі ординат відкладено фазову швидкість: $V = dx/dt$.

Оскільки точний аналітичний розв'язок для фазових траєкторій знайти важко, тому наведемо спочатку фазовий портрет, що здобуто в наслідок числових розрахунків для рівняння (7.8), де параметр нелінійності $\varepsilon = 10$. А потім порівняємо його з результатами спрощеного аналітичного дослідження рівняння (7.8).

Для спрощеного аналізу перепишемо рівняння (7.10) у вигляді системи двох рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= y; \\ \alpha dy/d\tau &= (1 - y^2)y - x. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Проаналізуємо систему рівнянь (7.11). Для $\alpha = 0$ маємо фазову траєкторію: $y^3 - y + x = 0$, яка нагадує перевернуту латинську літеру S . Як відомо хід фазових траєкторій у верхній напівплощині має відбуватися праворуч, а в нижній – ліворуч тому на даному фазовому портреті є дві спеціальні точки, в якій (в рамках нашого спрощеного розгляду проблеми) виникає ситуація, коли ілюструюча точка не може продовжувати рух по S -подібній фазовій траєкторії. Щоб визначити куди перейде коливальна система в точках після того, як опиниться в цих точках, подивимося на рівняння фазових траєкторій для $\alpha \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - y^2)y - x}{\alpha y}; \quad \text{значить,} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{1,2}} \rightarrow_{\alpha \rightarrow 0} \infty. \quad (7.12)$$

Таким чином, через спеціальні точки проходять особливі інтегральні траєкторії, вони є майже прямими $x_{1,2} = \text{const}$. Це ділянки так званого швидкого руху, вони є дуже швидкоплинними. Вони можуть реалізуватися тільки на початковій стадії розвитку релаксаційних коливань і не можуть реалізується в режимі генерації стаціонарних релаксаційних коливань. Незалежно від початкових умов, коливальна система обов'язково виходить на граничний цикл, параметри якого задаються ланкою зворотного зв'язку та потужністю внутрішнього джерела енергії. Граничний цикл складається з двох ділянок „повільного руху” та „швидкого руху”, які з'єднуються в вищезазначених спеціальних точках. На прикладі електричного контуру ділянкам першого типу відповідає зарядка конденсатора, а ділянкам „швидкого руху” - розрядка конденсатора.

8. ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ДЛЯ ОПИСУ ЕВОЛЮЦІЇ БІОСИСТЕМ

В демографії розгляд еволюційних рівнянь започаткували ідеї Мальтуса про зростання населення на планеті у геометричній прогресії. В моделі з невичерпними ресурсами приріст населення визначається різницею коефіцієнтів народжуваності та смертності. Якщо вважати їх сталими, то швидкість приросту буде пропорційною до наявної кількості людей на Землі. Тоді можна динаміку зміни народонаселення описати лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = kN = N(r_{HAP} - r_{CM}) \quad (8.1)$$

Розв'язком рівняння (8.1) є експоненціальна функція:

$$N(t) = N(0)\exp(kt) \quad (8.2)$$

Для окремих країн $k < 0$, а в цілому населення Землі зростає. Формула (8.2) можна переписати в інший спосіб:

$$N(t) = N_0 2^{t/T}, \quad (8.3)$$

де параметр T – це є час подвоєння кількості населення. Зараз $T \approx 36$ років, $N_0 \approx 6$ млрд. Також можна знайти час, коли на 1 м^2 буде 1 людина (беремо до уваги тільки суходіл, без моря) $\tau_1 = 400$ років, або, коли біомаса людей буде дорівнювати масі Землі це приблизно $6 \times 10^{24} \text{ кг}$, тоді знайдемо: $\tau_2 = 1400$ р. Такі результати свідчать про недосконалість моделі, не придатність її використання для прогнозів на дуже віддалений час, бо прогнозовані цифри не було досягнуто. З іншого боку хотілося звернути увагу на те, що рівняння (8.3) є аналогічним до закону радіоактивного розпаду при заміні в ньому знака при параметрі T , що зайвий раз свідчить про універсальність методів теорії коливань та можливість використання їх в різних областях знань.

Деякі дослідники, однак, говорять про те, що на теперішній час для певних країн модель Мальтуса дає надто повільно зростаючий результат. В своїх дослідженнях вони вважають, що коефіцієнт k не є сталим (і це справді підтверджує демографія). Було запропоновано ввести нелінійну заміну, вважаючи, що швидкість приросту пропорційна числу зустрічей між особами протилежної статі за одиницю часу. Якщо для простоти вважати кількість жінок та чоловіків однаковою, тоді замість рівняння (8.1) маємо:

$$dN / dt = \alpha N^2 / 4; \quad (8.4)$$

Розв'язок рівняння (8.4) можна записати в наступний спосіб:

$$N(t) = \frac{N(0)}{1 - t/t_k}. \quad (8.5)$$

Тут використано позначку: $t_k = 4/[\alpha N(t=0)]$, фізичний сенс якої полягає у визначенні певного “критичного” моменту часу.

Вираз (8.5) описує випадок нелінійної нестійкості у режимі із загостренням: видно, що величина параметру $N(t)$ прямує до нескінченості при наближенні до критичного часу: $N(t \rightarrow t_k) \rightarrow \infty$. Маючи статистичні дані про населення Землі за два роки рознесені між собою на 100 років можна обчислити момент загострення демографічної проблеми Землі $t_k \approx 2025$ рік.

Крім цього випадку рівняння (8.4) може також описувати динаміку розмноження якихось біологічних об'єктів у сприятливих умовах. Тоді розв'язок (8.5) описує випадок вибухової нестійкості, аналог якої існує в коливальних системах, що складаються з трьох нелінійно взаємодіючих осциляторів, один з яких характеризується станом з "від'ємною енергією". В такому особливому стані амплітуда осцилятора зростає при зменшенні його енергії.

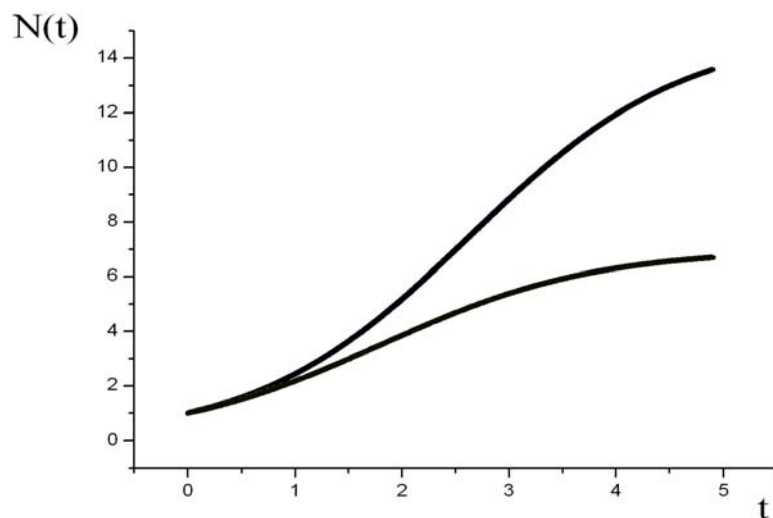
Удосконалюючи модель народонаселення, слід врахувати обмеженість ресурсів Землі. За цих умов в рівняння (8.1) можна ввести додатковий нелінійний доданок, який би описував той факт, що через перенаселення загострюються проблеми життєвих ресурсів, здоров'я населення, й таке інше. Тому замінімо коефіцієнт смертності в такий спосіб: $r_{CM} = \lambda N$, а коефіцієнт народжуваності $r_{HAP} = \mu$ залишимо незмінним і здобудемо наступне рівняння з (8.1):

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - \lambda N^2. \quad (8.6)$$

З його аналізу одразу можна побачити, що воно має стаціонарний розв'язок $N_\infty = \mu/\lambda$. Для довільного часу t маємо наступний розв'язок:

$$N(t) = \frac{N_\infty}{1 + \left(\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right) \exp(-\mu t)}, \quad (8.7)$$

де N_0 - початкова кількість досліджуваних біологічних об'єктів.



Мал. 8.1. Дві логістичні криві, що побудовано для випадку $\mu = 1$.

Нижня крива відповідає значенню $N_\infty = 7$, а верхня - $N_\infty = 15$.

Залежність (8.7) називається логістичною кривою. На Мал. 8.1 зображено розв'язок рівняння (8.7) для різних значень N_∞ . Перехід від однієї логістичної кривої до іншої означає, що в біологічній системі внаслідок покращення умов існування певного біологічного виду (перехід до більшого значення N_∞) відбувається спочатку досить стрімке зростання кількості біологічних об'єктів за одиницю часу, а надалі ця кількість асимптотично прямує до нового стаціонарного значення $N(t)$, дорівнює новому, більшому значенню N_∞ .

Логістичні криві також непогано відображають якісну динаміку зміни кількості народонаселення в певній країні. Революційні стрибки, наприклад, у розвитку продуктивності виробництва, чи покращенні охорони здоров'я населення змінюють параметри λ та μ . Це призводить до перескоку з однієї логістичною кривої $N(t)$ на іншу, вищу логістичну криву.

Важливий крок у використанні еволюційних рівнянь у біології у кінці 20-х років ХХ сторіччя зробив Вольтерра. Він досліджував біосистеми, що складаються з двох типів біологічних об'єктів, один з яких виступав у ролі "хижаків" тобто підтримував своє існування за рахунок поїдання інших біологічних об'єктів цієї системи. Розглянемо динаміку зміни популяції у біосистемі, що складається з двох таких об'єктів, наприклад, лисиць та кролів. Тоді для кролів процес розмноження описується рівнянням

$$dN_1/dt = r_1 N_1 - r_2 N_1 N_2 \quad (8.8)$$

тут доданок $+r_1 N_1$ описує народження кролів, а доданок $-r_2 N_1 N_2$ описує знищення кролів під час їхніх зустрічей з лисицями (їх кількість описується параметром N_2). Для лисиць вважаємо, що вони вимирають за Мальтусом, а поповнюють свою кількість внаслідок зустрічей з кролями.

$$dN_2/dt = -k_3 N_2 + k_4 N_1 N_2 \quad (8.9)$$

Систему (8.8) – (8.9) називають рівняннями Лотка – Вольтерра. Її можна переписати в безрозмірних координатах в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \lambda X - XY \\ \dot{Y} &= XY - \mu Y \end{aligned} \quad (8.10)$$

де нові безрозмірні коефіцієнти λ та μ мають аналогічний фізичний зміст, як і коефіцієнти r_j та k_j в рівняннях (8.8) та (8.9), тобто це нові безрозмірні коефіцієнти народжуваності кролів та вимирання лисиць, відповідно. Система (8.10) має дуже простий, стаціонарний розв'язок: $X=\mu$, $Y=\lambda$.

Розглянемо випадок малих відхилень безрозмірних величин кількості кролів та лисиць від стаціонару: $X=\mu+x(t)$; $Y=\lambda+y(t)$, тобто мають місце нерівності: $x(t) \ll \mu$ та $y(t) \ll \lambda$. Тоді, підставляючи ці вирази для X та Y

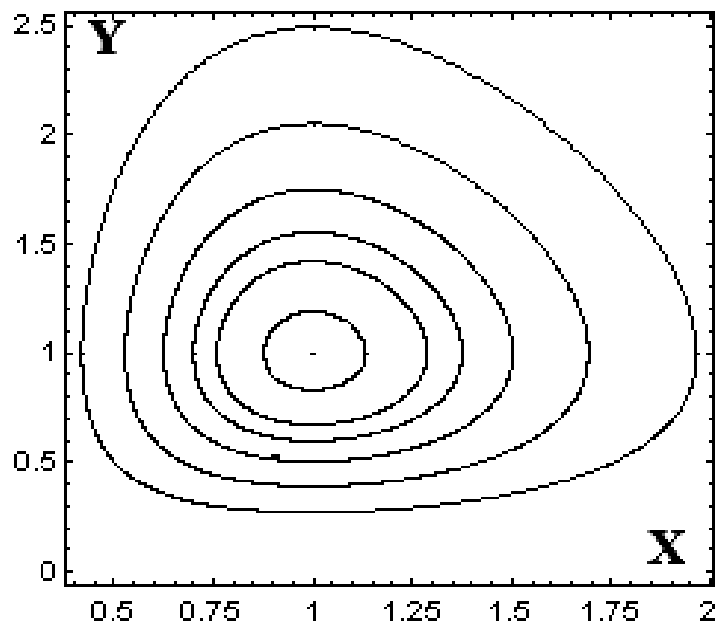
до системи рівнянь (8.10) та виконуючи процедуру лінеаризації, тобто нехтуючи малими доданками, порядок величин яких є більшим за перший, отримаємо наближену систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda(\mu + x) - (\mu + x)(\lambda + y) \approx -\mu y \\ \dot{y} &\approx +\lambda x. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Беручи похідну за часом від першого рівняння системи (8.11) та підставляючи до неї друге рівняння, можна здобути диференціальне рівняння другого порядку для малого параметру $x(t)$. Його розв'язок описується гармонічними функціями, при цьому це твердження є справедливим і для другого рівняння. Запишемо ці розв'язки:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\sqrt{\mu\lambda} t + \delta), \\ y &= A \sqrt{\lambda/\mu} \sin(\sqrt{\mu\lambda} t + \delta) \end{aligned} \quad (8.12)$$

де A та δ - це константи інтегрування, які визначаються початковими умовами. Якщо намалювати фазовий портрет такої коливальної системи, то фазові траєкторії будуть мати форму еліпсів:



Мал. 8.2. Фазовий портрет системи рівнянь (8.11), побудований у випадку $\lambda = 1$, $\mu = 1$.

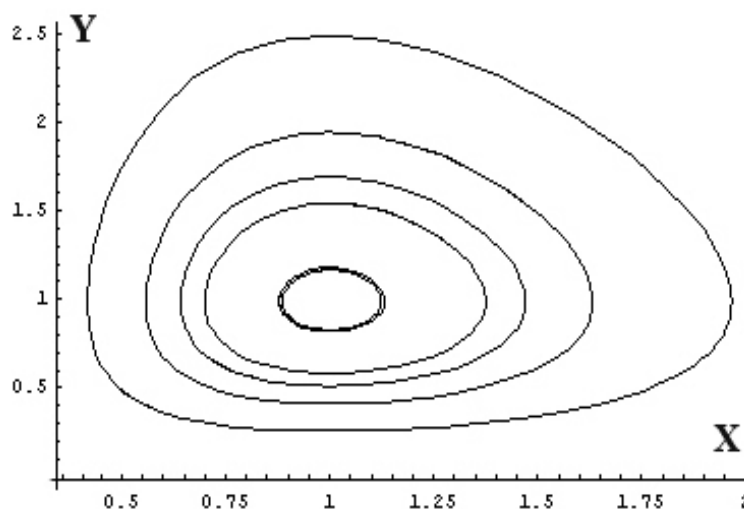
$$\frac{x^2}{\mu} + \frac{y^2}{\lambda} = A^2 \quad (8.13)$$

Коливальний режим цієї біосистеми характеризується частотою коливань ($\omega = \sqrt{\mu\lambda}$), періодична зміна чисельності популяції хижак – жертва відбувається навколо стаціонарного значення: $(\mu; \lambda)$.

Випадок довільних за абсолютною величиною відхилень параметрів біосистем x та y відносно стаціонарних значень можна розрахувати на

комп'ютері. При цьому: якщо $\lambda \cong \mu \cong 1$; тоді $x, y \propto \mu, \lambda$. Зрозуміло, що ці фазові портрети матимуть особливі точки типу центр, цьому стійкому стану рівноваги відповідають значення $X(0)$ та $Y(0)$. Наведемо результати числового дослідження системи рівнянь Лотка – Вольтера (8.10) у випадку $X(0) = Y(0) = 1$.

Як видно з фазових портретів (див. Мал. 8.2 та Мал. 8.3), фазові траєкторії вже не є еліпсами, вони швидше схожі на трикутники із згладженими кутами. Система рівнянь (8.10) має інтеграл: $X + Y\mu\ln\lambda\ln Y = \text{const}$. Це спрощує числову побудову фазових траєкторій у випадку довільної зміни параметрів біосистем відносно їх рівноважних значень.



Мал. 8.3. Фазовий портрет системи рівнянь (8.11), побудований у випадку $\lambda = 1$, $\mu = 2$.

Таким чином, ми продемонстрували дієвість методів теорії коливань не тільки в традиційних галузях фізики, але також і в біології.

9. НАБЛИЖЕНІ АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ КОЛИВАНЬ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Нелінійні коливання осциляторів реалізуються у випадках, коли сила, в наслідок дії якої відбуваються коливання, є нелінійною функцією узагальненої координати (x) та/або узагальненої швидкості (dx/dt). Таким чином, рівняння нелінійного осцилятора має вигляд:

$$d^2x/dt^2 = f_{nl}(x, dx/dt). \quad (9.1)$$

Оскільки це диференціальне рівняння другого порядку, то для здобуття його певного розв'язку, до нього слід додати дві початкові умови: $x(t=0) = x_0$, $dx/dt|_{t=0} = V_0$. Тоді, звичайно, інтегрування рівняння (9.1) за умов $f_{nl} = f_{nl}(x)$ (це означає відсутність дисипативних сил) формально можна вважати завершеним, якщо записати:

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} f_{nl} = 0; \quad (9.2)$$

а потім проінтегрувати і отримати:

$$\frac{1}{2} \int d(dx/dt)^2 - \int f_{nl}(x) dx = E = const; \quad (9.3)$$

де $U_{nl}(x) = - \int_{x_0}^x f_{nl}(x_1) dx_1$. Звідси можна знайти інтегральний вираз для часу:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx_1}{\sqrt{2[E - U_{nl}(x_1)]}} = t. \quad (9.4)$$

Але розв'язати рівняння (9.4) у такий спосіб, щоб отримати у явному вигляді залежність $x(t)$, вдається дуже рідко. Тому частіше усього до рівняння нелінійного осцилятора застосовують різні наближені методи його аналізу – методи теорії послідовних наближень та методи усереднення. Спільною рисою цих методів є представлення розв'язків та нелінійних функцій $f(x)$, що входять до рівнянь нелінійного осцилятора, у вигляді рядів за ступенями одного або кількох малих параметрів, які вибирають, виходячи з певних математичних міркувань. При цьому виконується послідовне нехтування найменшими членами ряду. Знайдений розв'язок підставляють у початкове, вихідне рівняння, для знаходження розв'язку у наступному наближенні. Такий алгоритм дозволяє шукати майже періодичні розв'язки у формі, яка є близькою до синусоїдальної.

Не дивлячись на уявну простоту ідеології методів послідовних наближень, процес побудови таких розв'язків рівнянь нелінійних осциляторів, які б були однаково придатними як для великих, так і для малих значень змінної часу, часто ускладнюється. Це ускладнення обумовлено тим, що в якомусь наступному, за нульовим, наближенні серед членів ряду, який описує коливання нелінійного осцилятора, з'являються так звані секулярні доданки (від англійського слова secular – вікових). Їх

ознакою є те, що величина поправки, яка знаходиться у припущенні про її малість порівняно з основним доданком ряду, який моделює розв'язок, несподівано виявляється такою, що при $t \rightarrow \infty$ необмежено зростає. Тим самим порушується основна математична вимога до пошуку форми наближеного розв'язку, а саме: розв'язок, який записується у вигляді ряду, не повинен розходитися. Підтвердимо серйозність небезпеки появи секулярних доданків в розв'язках рівнянь нелінійних осциляторів на прикладі використання самого простого з методів послідовних наближень – методу розкладання в ряд за малим параметром.

9.1. Метод розкладання у ряд за малим параметром.

На прикладі рівняння Дюффінга покажемо, як використовується цей найпростіший метод з великої кількості різних наближених аналітичних методів розв'язання нелінійних рівнянь. Саме простота і є основною перевагою цього методу, і саме вона є джерелом його недоліків, основним з яких є проблема сходимості рядів, що описують коливання нелінійних осциляторів. Часто при застосуванні цього методу в здобутому ряді виникають секулярні доданки, що призводить до обмеження часового проміжку, в якому використання цього наближеного розв'язку є справедливим.

Але розглянемо процедуру застосування методу розкладання в ряд за малим параметром послідовно. Припустимо, що зміна певного параметру нелінійного осцилятора, нехай для прикладу це буде електричний струм, в часі описується рівнянням Дюффінга в розмірних змінних:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad (9.5)$$

де t - час, вимірюється в секундах, ω^2 - коефіцієнт при лінійному доданку в ряді, що моделює ефективну силу, дія якої призводить до осциляцій, вимірюється у с^{-2} , α - коефіцієнт при кубічному доданку цього ряду, вимірюється у нашому випадку в $1/(\text{с}^2 \text{ A}^2)$.

Першою дією, яку слід провести, є операція безрозмірювання рівняння. Це дає можливість визначити характерні масштаби залежних та незалежних змінних, ввести в розгляд малий параметр задачі. Без цієї операції неможливо, наприклад, проводити числові розрахунки. Вводимо безрозмірні змінні: $\hat{x} = x / X$; $\hat{t} = t / T$; у цих змінних рівняння Дюффінга має такий вигляд:

$$\frac{d^2 \hat{x}}{d\hat{t}^2} + \omega^2 T^2 \hat{x} + \alpha T^2 X^2 \hat{x}^3 = 0. \quad (9.6)$$

Виберемо T так, щоб $\omega^2 T^2 = 1$, нехай $\varepsilon = \alpha T^2 X^2 = \alpha X^2 \omega^{-2}$. Значок „капелюшок” над змінними заради простоти запису надалі не будемо використовувати. Тоді з (9.6) маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (9.7)$$

Параметр ε - це безрозмірна величина, що характеризує ступінь нелінійності даної коливальної системи, нехай $\varepsilon \ll 1$. Тоді припустимо, що зміна x за характерний проміжок часу T , що обумовлена нелінійністю системи, є малою. У такому випадку рівняння (9.7) є прикладом рівняння, що описує коливання консервативної систему, яка за формою коливань є близькою до коливань лінійної системи.

На другому кроці аналізу рівняння (9.5) слід визначитися з формою, у якій буде шукатися його розв'язок. Згідно обраного методу слід шукати розв'язок у вигляді ряду за малим параметром ε :

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Третім моментом, на який слід звернути увагу, є потреба визначитися з початковими умовами. Припустимо, що початкові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_0(t=0) &= \frac{x_0}{X}, & \frac{dx_0(t=0)}{dt} &= \frac{v_0}{(X/T)}; \\ x_i(t=0) &= \frac{dx_i(t=0)}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Тут $i > 1$. Важливою обставиною при цьому є те, що розв'язки, які буде здобуто у першому, другому і так далі наближеннях, повинні задовольняти тривіальним початковим умовам. Це дуже істотно.

Запишемо рівняння (9.7) у нульовому наближенні та його розв'язок, який є вже добре відомим:

$$d^2x_0/dt^2 + x_0 = 0, \quad x_0 = A_0 \cos(t + \beta_0), \quad (9.9)$$

тут A_0, β_0 – визначаються з початкових умов (4). У першому наближенні рівняння (9.7) набуває вигляду:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 + x_0^3 = 0, \quad (9.10)$$

а після підстановки до (9.10) розв'язку, здобутого у нульовому наближенні, можна записати:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = -A_0^3 \cos^3(t + \beta_0). \quad (9.11)$$

Звідси за допомогою тригонометричних перетворень можна рівняння (9.11) представити у наступному вигляді:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{3}{4}A_0^3 \cos(t + \beta_0) - \frac{A_0^3}{4} \cos(3t + 3\beta_0). \quad (9.12)$$

З теорії звичайних диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв'язок такого типу диференціальних рівнянь складається з розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Внеском розв'язку однорідного рівняння (9.12) при виконанні початкових

умов (9.8) є просто нуль (тривіальний розв'язок). А частинний розв'язок неоднорідного рівняння складає вже нетривіальний внесок до загального розв'язку, запишемо його у наступній формі:

$$x_{\text{нас}} = -\frac{3}{8} A_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32} A_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (9.13)$$

Таким чином, загальний розв'язок з точністю до $O(\varepsilon^2)$ можна записати в такий спосіб:

$$x(t) = A_0 \cos(t + \beta_0) - \frac{3}{8} A_0^3 \varepsilon t \sin(t + \beta_0) + \frac{\varepsilon}{32} A_0^3 \cos(3t + \beta_0) + O(\varepsilon^2). \quad (9.14)$$

Аналізуючи вираз (9.14), видно, що перша поправка $\varepsilon x_1(t)$ є малою величиною порівняно з величиною тієї складової ряду, що здобута у нульовому наближенні, за умов справедливості нерівності $\varepsilon t < 1$. Але вже коли $\varepsilon t \approx 1$, то вона за величиною стає такою, як і величину головного доданку, здобутого у нульовому наближенні. Таким чином, для великих t , коли має місце нерівність $\varepsilon t \gg 1$, “перша поправка” є значно більшою за головний член ряду. Тому представлення розв'язку у вигляді такого простого ряду є справедливим тільки у перші моменти часу, коли $t < 1/\varepsilon$.

Існує багато інших аналітичних методів теорії послідовних наближень, що дозволяють отримати розв'язок у вигляді ряду, що рівномірно сходиться, а тому є придатним при описанні нелінійних коливань також і при $t \rightarrow \infty$.

9.2. Метод Пуанкаре.

Для запобігання появи секулярних доданків у ряду, що відповідає наближеному розв'язку рівняння нелінійного осцилятора, часто використовують метод Пуанкаре. Ідея цього методу полягає у тому, що після обезрозмірювання до нелінійного диференціального рівняння застосовують ще одну процедуру: вводять нову змінну часу: $\tau = \Omega(\varepsilon) t$, яка дозволяє отримати поправки до розв'язку у вигляді субгармонічних складових. При цьому вважаємо, що розв'язки неоднорідних рівнянь, які виникають у першому, другому та наступному наближеннях, мають дві складові: тривіальний розв'язок для однорідного рівняння та частинний розв'язок для неоднорідного рівняння.

Розглянемо застосування методу Пуанкаре на прикладі рівняння Дюффінга (9.7) з малим параметром. Після введення нової змінної часу для рівняння Дюффінга зміниться в наступний спосіб:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} \Omega^2(\varepsilon) + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (9.16)$$

Розв'язок рівняння $x(\tau)$ та коефіцієнти $\Omega(\varepsilon)$ шукаємо у вигляді рядів за ступеням ε .

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots, \\ \Omega(\varepsilon) &= 1 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (9.17)$$

При цьому числа Ω_j визначаються у процесі побудови розв'язку $x(\tau)$. Підставимо (9.17) у початкове рівняння (9.16) та прирівняємо до нуля коефіцієнти при ε^0 та ε^1 . Тоді можна здобути відповідно у нульовому та першому наближеннях два рівняння.

В нульовому наближенні отримуємо добре відоме рівняння консервативного лінійного осцилятора: $d^2 x_0 / d\tau^2 + x_0 = 0$. А в першому наближенні здобуваємо неоднорідне рівняння:

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = -x_0^3 - 2\Omega_1 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2}; \quad (9.18)$$

Розв'язок рівняння консервативного лінійного осцилятора є добре відомим. Представимо його у вигляді: $x_0 = A_0 \cos(\tau + \beta_0)$ та підставимо його до рівняння (9.18). Тоді замість (9.18) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 &= (2\Omega_1 A_0 - 0,75 A_0^3) + x_1 = (2\Omega_1 A_0 - 0,75 A_0^3) \cos(\tau + \beta_0) - \\ &- \frac{A_0^3}{4} \cos(3\tau + 3\beta_0). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Розв'язок, що задовольняє однорідне рівняння (9.19), як вже зазначено вище має бути тривіальним. А частинний розв'язок рівняння (9.19) такий:

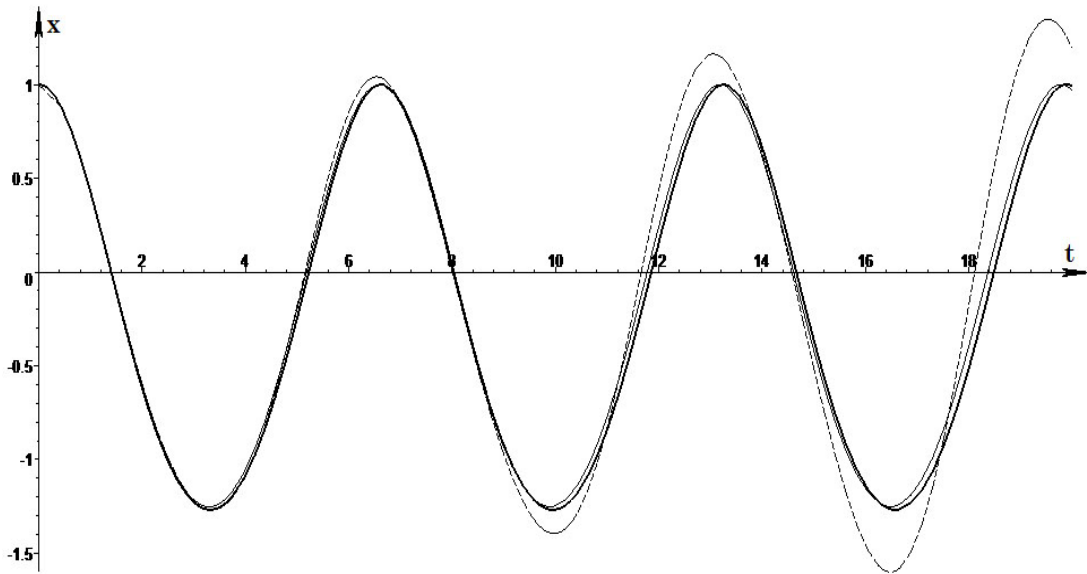
$$x_1 = (\Omega_1 A_0 - 0.375 A_0^3) \tau \sin(\tau + \beta_0) + \frac{A_0^3}{32} \cos(3\tau + 3\beta_0). \quad (9.20)$$

З аналізу виразу (9.20) видно, що в структурі розв'язку на етапі знаходження першої поправки з'явився секулярний доданок, пропорційний $\tau \sin(\tau + \beta_0)$. Для того, щоб ліквідувати його, слід покласти коефіцієнт при ньому рівним нулеві: $0 = (\Omega_1 A_0 - 0.375 A_0^3)$. Звідси однозначно здобуваємо вираз для першого коефіцієнта в ряді для $\Omega(\varepsilon)$, він має наступне значення: $\Omega_1 = 3A_0^2 / 8$. За цих умов секулярний член в (9.20) зникне, а наближений розв'язок рівняння Дюффінга з точністю до $O(\varepsilon^2)$ тепер має рівномірний вигляд:

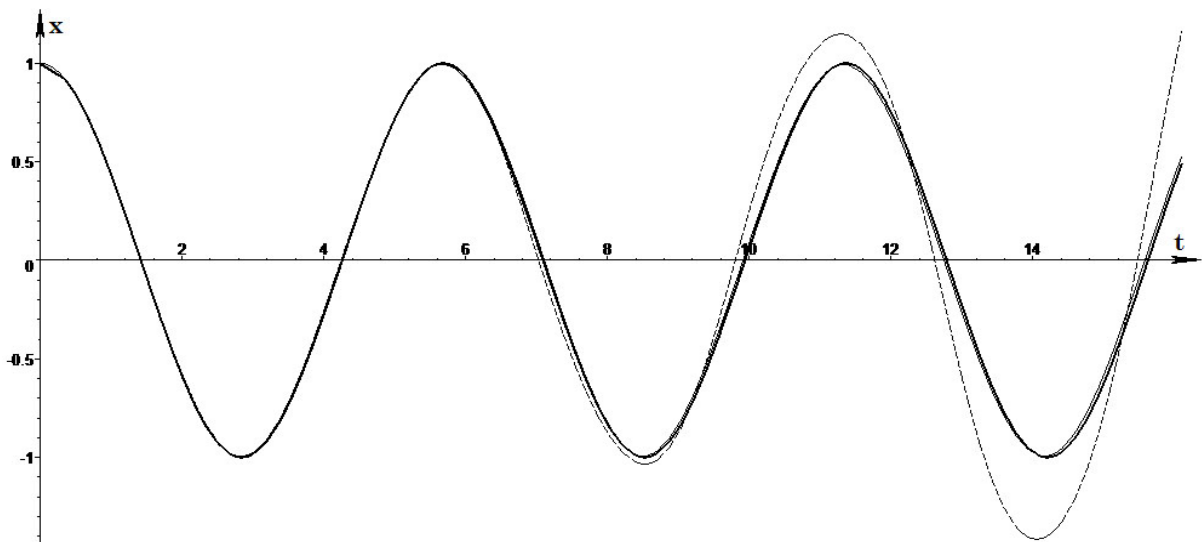
$$x = A_0 \cos \left[\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon A_0^2 \right) t + \beta_0 \right] + \frac{\varepsilon}{32} A_0^3 \cos \left[3 \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon A_0^2 \right) t + 3\beta_0 \right] + O(\varepsilon^2). \quad (9.21)$$

Якщо продовжити перетворення зазначеного типу далі, то можна буде знайти значення наступних коефіцієнтів Ω_j та побудувати ряд для $x(t)$ далі, в наступних наближеннях, виключаючи послідовно секулярні члени $\propto \varepsilon^i$ з розв'язків для $x_i(t)$.

Проілюструємо, як співвідносяться розв'язки рівнянь коливання нелінійних осциляторів, що здобуті різними методами.



Мал. 9.1. Розв'язки рівняння $d^2x/dt^2 + x + \varepsilon x^2 = 0$, яке описує коливання нелінійного консервативного осцилятора, у випадках застосування методу розкладання в ряд за малим параметром (пунктирна лінія), методу Пуанкаре (тонка лінія), здобутих з точністю $O(\varepsilon^3)$ та числового комп'ютерного розрахунку (суцільна жирна лінія), $\varepsilon = 0.3$.



Мал. 9.2. Розв'язки рівняння $d^2x/dt^2 + x + \varepsilon x^3 = 0$, яке описує коливання нелінійного консервативного осцилятора, у випадках застосування методу розкладання в ряд за малим параметром (пунктирна лінія), здобутого з точністю $O(\varepsilon^3)$, методу Пуанкаре (тонка лінія), здобутого у першому наближенні, та числового комп'ютерного розрахунку (суцільна жирна лінія), $\varepsilon = 0.3$.

З аналізу кривих, наведених на Мал. 9.1 та Мал. 9.2, видно, що результат, здобутий методом розкладання у ряд за малим параметром, дуже швидко починає відрізнятися від точного (комп'ютерного) розв'язку. Метод Пуанкаре дає гарні результати по абсолютній величині $x(t)$, але з часом починає накопичуватись похибка в визначенні фази коливань (бо ми цю лінію обчислювали у першому наближенні).

9.3. Метод перенормування.

Цей метод використовує ідею методу Пуанкаре про перетворення типу: $\tau = \Omega(\varepsilon)t$, де $\Omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\Omega_1 + \varepsilon^2\Omega_2 + \dots$ для модернізації метода розкладання у ряди за малим параметром задачі. Але вищезазначена процедура застосовується вже на останній фазі побудови наближеного розв'язку. Проілюструємо цей метод знову на прикладі рівняння Дюффінга. Нехай ми здобули в першому наближенні секулярний розв'язок:

$$x \approx A_0 \cos(t + \beta_0) - \frac{3}{8} A_0^3 \varepsilon t \sin(t + \beta_0) + \frac{\varepsilon}{32} A_0^3 \cos(3(t + \beta_0)). \quad (9.22)$$

Сюди слід підставити час, як нову змінну: $t = \tau / \Omega(\varepsilon) \approx \tau(1 - \varepsilon\Omega_1 + \dots)$. При цьому в другому та третьому доданках достатньо скористатися виразом $t \approx \tau$, оскільки вони вже є поправками першого порядку, а ось в першому доданку необхідно $\cos(t + \beta_0)$ розкласти в ряд з точністю до доданків, пропорційних до $O(\varepsilon^2)$. Тоді вибір $\Omega_1 = 3A_0^2/8$ знову дозволяє нам спекатися секулярності в здобутому розв'язку та записати розв'язок у вигляді ряду (9.21), що рівномірно сходиться.

Проаналізувавши здобуті результати, можна дійти висновку про переваги та недоліки методів Пуанкаре та перенормування. Перевагою цих методів, порівняно з методом розкладання в ряд за малим параметром, є відсутність секулярних доданків, тобто вони придатні для опису нелінійних коливань на великому проміжку часу. Недоліком цих двох методів є обмеженість сфери їх використання - вони придатні тільки для пошуків квазіперіодичних розв'язків.

9.4. Метод багатьох масштабів

Представлення розв'язку рівняння нелінійного осцилятора у вигляді ряду, що рівномірно сходиться, вказує на те, що розв'язок $x(t)$ є фактично функцією не часу (аргументу t) а наступних комбінацій, до яких окрім часу входить ще й малий параметр ε тобто: $t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots$. Це означає, що $x(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots)$, тобто існує певна ієрархія часу, і розв'язок диференціального рівняння нелінійного осцилятора можна шукати у вигляді:

$$x(t, \varepsilon) = x(T_0, T_1, T_2, \dots). \quad (9.23)$$

Як і при використанні попередніх методів пошуку наближених розв'язків у вигляді рядів за малим параметром, будемо використовувати ту саме додаткову початкову умову про те, що розв'язок, який задовольняє однорідному рівнянню, що здобувається в першому, другому та наступних наближеннях, має бути тривіальним.

Беручи до уваги ту обставину, що метод багатьох масштабів спирається на уявлення про x , як про функцію відповідної ієрархії часових змінних $T_0, T_1, T_2, \dots$ при дослідженні ним рівнянь нелінійних осциляторів слід використати правило диференціювання складної функції. Запишемо оператори першої та другої похідної, з точністю до доданків третього ступеня малості $O(\varepsilon^3)$:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3), \quad (9.24)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + O(\varepsilon^3).$$

Оскільки цей метод, як і методи усереднення можна використовувати для дослідження нелінійних коливань, які проходять стадію еволюції, то продемонструємо спочатку можливість використання цього методу на прикладі пошуку наближеного розв'язку для консервативного лінійного автономного осцилятора. При цьому обмежимося розв'язком, здобутим у першому наближенні. Диференціальне рівняння для цього осцилятора має вигляд:

$$d^2x/dt^2 + x = -2\varepsilon dx/dt. \quad \varepsilon \ll 1. \quad (9.25)$$

Використовуючи вирази для операторів похідних за часом у формі (9.24), можна рівняння для цього осцилятора записати у наступній формі:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \right] (x_0 + \varepsilon x_1) + x_0 + \varepsilon x_1 = -2\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \right] (x_0 + \varepsilon x_1). \quad (9.26)$$

Звідси маємо два рівняння у нульовому та першому наближеннях. Для рівняння, здобутого у нульовому наближенні: $\partial^2 x_0 / \partial T_0^2 + x_0 = 0$, маємо розв'язок у вигляді:

$$x_0 = A(T_1, T_2) \exp(iT_0) + \text{к.с.} \quad (9.27)$$

А у першому наближенні з рівняння (9.26) можна здобути таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_0}. \quad (9.28)$$

Рівняння (9.28) з урахуванням розв'язку рівняння, здобутого у нульовому наближенні має вигляд:

$$\partial^2 x_1 / \partial T_0^2 + x_1 = -2i \left(\frac{\partial A}{\partial T_1} + A \right) \exp(iT_0) + \text{к.с.} \quad (9.29)$$

Щоб при розв'язанні цього рівняння не виникало секулярних доданків, треба, щоб коефіцієнти при $\exp(iT_0)$ та комплексно спряженій величині $\propto \exp(-iT_0)$ незалежно один від одного обернулися у нуль. Тому маємо рівняння для коефіцієнту A : $\partial A / \partial T_1 + A = 0$, воно дає такий розв'язок:

$$A = B(T_2) \exp(-T_1). \quad (9.29)$$

Величина $B(T_2)$ в ньому визначається з такої умови, щоб у рівнянні, здобутому у другому наближенні, також не було джерел секулярностей. Запишемо це рівняння:

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_1}. \quad (9.30)$$

Загальний розв'язок однорідного (9.30) (знову, за умов виконання початкових умов для рівнянь, здобутих у наступних, за нульовим, наближеннях) має тривіальний вигляд. Тоді з рівняння (9.30) можна здобути наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = - \left(2i \frac{\partial A}{\partial T_2} + \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) \exp(iT_0) + \text{к.с.} \quad (9.31)$$

З аналізу рівняння (9.31) видно, що для того щоб в його розв'язках не виникало секулярних доданків, слід в правій частині покласти рівними нулеві коефіцієнти при $\exp(iT_0)$ та комплексно спряженій величині $\propto \exp(-iT_0)$. За цих умов маємо наступне рівняння для A :

$$2i \frac{\partial A}{\partial T_2} + \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} = 0. \quad (9.32)$$

Користуючись вже здобутим попередньо для коефіцієнта A розв'язком у формі (9.29), знаходимо рівняння для коефіцієнта B :

$$2i \partial B / \partial T_2 = B. \quad (9.33)$$

Звідси для його розв'язку отримуємо простий вираз: $B = C \exp(iT_2 / 2)$. Це дозволяє здобути вираз для A в термінах нової змінної C . Підстановка виразу для параметра B в (9.29) дозволяє отримати такий вираз: $A = C \exp(-T_1 + iT_2 / 2)$. Тепер можна переписати розв'язок, здобутий у нульовому наближенні, користуючись ієрархією часів в такий спосіб: $x_0 = C \exp(-T_1) \cos(T_0 - T_2 / 2 + \beta)$. Або повертаючись знову до початкової змінної часу t , маємо розв'язок, здобутий з точністю до $O(\varepsilon^2)$:

$$x = C \exp(-\varepsilon t) \cos(t - \varepsilon^2 t / 2 + \beta) + O(\varepsilon^2). \quad (9.34)$$

Якщо порівняти вираз (9.34) з точним розв'язком рівняння лінійного осцилятора (9.25): $x = A \exp(-\varepsilon t) \cos(t \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} + \beta)$, то можна зробити висновок, що метод багатьох масштабів справді досить точно дає опис

перехідного процесу. А також з точністю до $O(\varepsilon^2)$ ми отримали вираз для частоти загасаючих коливань.

Проаналізуємо тепер методом багатьох масштабів рівняння нелінійного дисипативного осцилятора:

$$d^2x/dt^2 + x = -\varepsilon(dx/dt)^2. \quad (9.35)$$

Знайдемо його розв'язок з точністю до $O(\varepsilon^2)$. Підставивши оператори похідних за часом у вигляді (9.24), для цього випадку маємо таке наближене рівняння:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x}{\partial T_0 \partial T_1} + x + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \right) (x_0 + \varepsilon x_1) \right]^2 = 0. \quad (9.36)$$

Розв'язок рівняння (9.36) шукаємо у вигляді: $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2)$. Підставляємо запропонований розв'язок до (25) і в нульовому наближенні здобуваємо диференціальне рівняння для лінійного автономного консервативного осцилятора. Запишемо його розв'язок у вигляді:

$$x_0 = A(T_1, T_2) \cos[T_0 + \beta(T_1, T_2)]. \quad (9.37)$$

Тоді в першому наближенні з (9.36) маємо таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + x_1 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial T_0} \right)^2 = 0. \quad (9.38)$$

Обчисливши відповідні похідні від виразу (9.37) для x_0 , що входять до другого та четвертого доданків (9.38), знайдемо в першому наближенні таке рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 + A_0^2 \sin^2(T_0 + \beta_0) - \\ & 2 \left[\frac{\partial A_0}{\partial T_1} \sin(T_0 + \beta_0) + A_0 \cos(T_0 + \beta_0) \frac{\partial \beta_0}{\partial T_1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (9.39)$$

Аналіз рівняння (9.39) свідчить, що в ньому є два резонансних доданки, які пропорційні $\sin(T_0 + \beta_0)$ та $\cos(T_0 + \beta_0)$. Таким чином, вони є джерелом секулярності. Щоб не допустити виникнення секулярних розв'язків, слід прирівняти до нуля коефіцієнти при цих гармонічних функціях в рівнянні (9.39). Тоді маємо систему двох рівнянь:

$$\partial A_0 / \partial T_1 = 0, \quad \partial \beta_0 / \partial T_1 = 0. \quad (9.40)$$

Значить, ані A_0 , ані β_0 не є функціями часу T_1 , а можуть бути певними функціями більш повільного часу, починаючи з T_2 : $A_0 = A_0(T_2)$, $\beta_0 = \beta_0(T_2)$. Це дозволяє спростити вираз для рівняння (9.39), залишивши в ньому тільки перші три доданки. Оскільки воно має форму неоднорідного рівняння другого порядку, то його розв'язок складатиметься з розв'язку

однорідного рівняння (він є тривіальним, про що ми вже не раз наголошували вище) та частинного розв'язку:

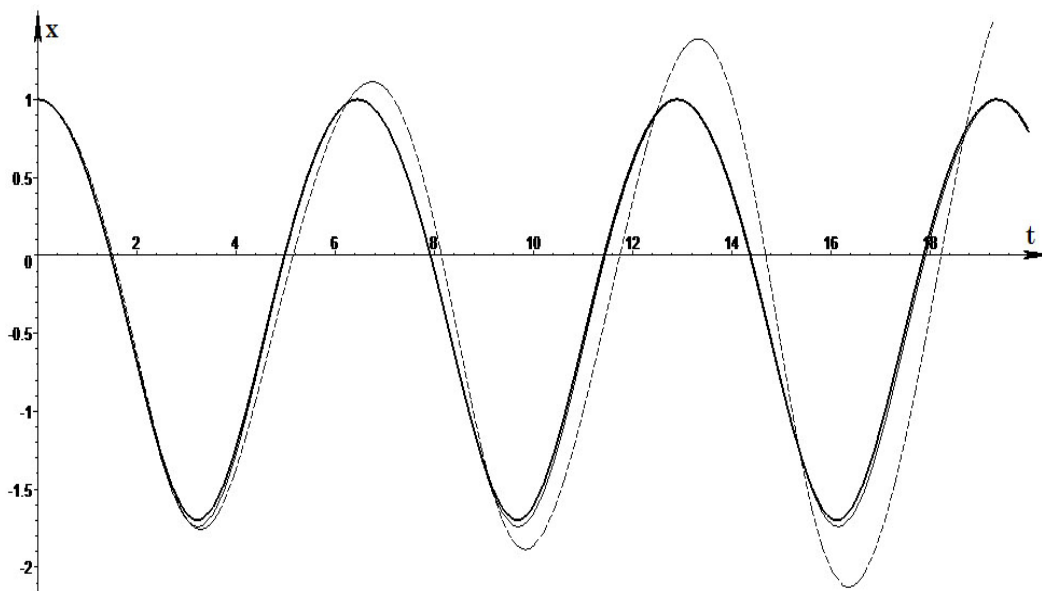
$$x_1 = -\frac{A_0^2}{2} - \frac{A_0^2}{6} \cos(2T_0 + 2\beta_0). \quad (9.41)$$

Тепер можна записати наближений розв'язок рівняння нелінійного неконсервативного осцилятора (9.35) з точністю до доданків, пропорційних $O(\varepsilon^2)$, у наступному вигляді:

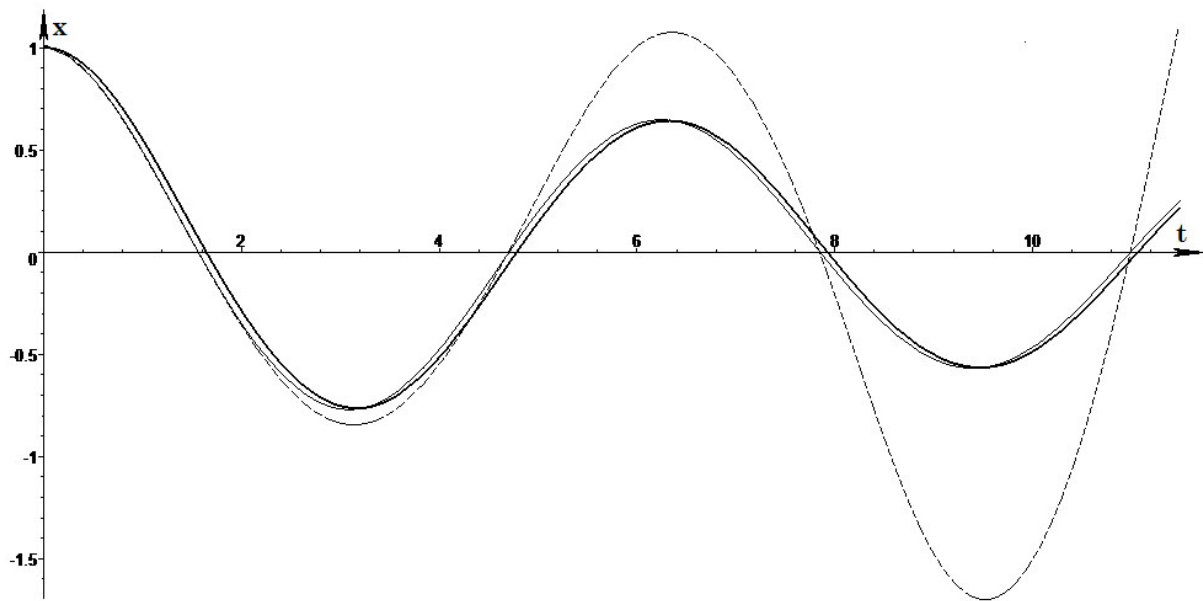
$$x \approx A_0(T_2) \cos(T_0 + \beta_0(T_2)) - 0.5 \varepsilon A_0^2(T_2) [1 + \cos(2T_0 + 2\beta_0(T_2))] / 3. \quad (9.42)$$

Таким чином, серед розглянутих методів пошуку наближеного розв'язку рівнянь, що описують коливання нелінійних осциляторів, метод багатьох масштабів є найбільш досконалим, він не тільки дозволяє здобути наближений розв'язок у вигляді ряду, який рівномірно сходиться, але й є придатним для опису перехідних коливальних процесів.

Проілюструємо, як відрізняються результати, здобуті методом багатьох масштабів, від точних числових розв'язків, здобутих комп'ютером. З аналізу Мал. 9.3 та Мал.9.4 можна зробити висновок про те, що метод багатьох масштабів, навіть у першому наближенні, здатен давати результат, який з непоганою точністю співпадає з точним (комп'ютерним) результатом у випадку дослідження коливань неконсервативного осцилятора. У другому наближенні метод багатьох масштабів досить точно



Мал. 9.3. Розв'язки рівняння $d^2x/dt^2 + x + \varepsilon(dx/dt)^2 = 0$, яке описує коливання нелінійного неконсервативного осцилятора, у випадках застосування методу розкладання в ряд за малим параметром (пунктирна лінія), методу багатьох масштабів (тонка лінія), здобутих з точністю $O(\varepsilon^3)$ та числового комп'ютерного розрахунку (суцільна жирна лінія), $\varepsilon = 0.3$.



Мал. 9.4. Розв'язки рівняння $d^2x/dt^2 + x + \varepsilon(dx/dt)^3 = 0$, яке описує коливання нелінійного консервативного осцилятора, у випадках застосування методу розкладання в ряд за малим параметром (пунктирна лінія), здобутого з точністю $O(\varepsilon^3)$, методу багатьох масштабів (тонка лінія), здобутого у лінійному наближенні та числового комп'ютерного розрахунку (суцільна жирна лінія), $\varepsilon = 0.3$.

визначає фазу коливань, а похибка поступово накопичується у визначенні абсолютної величини $x(t)$. А метод розкладання в ряд за малим параметром не дозволяє ні визначити фазу, ні абсолютну величину $x(t)$ з достатньою точністю. Більше того, наявність секулярних доданків у розв'язку, здобутого цим методом для опису осциляцій нелінійних неконсервативних коливальних систем, призводить до того, що навіть в загальних рисах він не описує реальний характер зміни $x(t)$.

10. КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ ТРЬОХ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Розглянемо групу осциляторів, які зв'язано між собою нелінійною взаємодією. За умов відсутності нелінійності у такій системі осциляторів відбувається просто суперпозиція коливань на власних частотах. У власних (нормальних) координатах рух таких осциляторів описують системою рівнянь:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \omega_i^2 x_i = 0, \quad (10.1)$$

де $i=1, 2, \dots, n$. Розглянемо випадок взаємодії трьох зв'язаних осциляторів, оскільки це є однією з основних задач теорії нелінійних коливань.

Нелінійність в цьому випадку призводить до виникнення зв'язку між осциляторами. Обмежимося випадком слабкого зв'язку та введемо до розгляду малий параметр $\varepsilon \ll 1$. Система рівнянь (10.1) в цьому випадку змінюється на наступну:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \omega_i^2 x_i = \varepsilon f_i(x_1, x_2, x_3). \quad (10.2)$$

Функцію f_i , що описує взаємодію між осциляторами, розкладемо в ряд, який починається з константи, яку без обмеження на придатність подальшого розгляду можна прирівняти до нуля (оскільки це призводить тільки до заміни змінної x_i на іншу). Далі в цьому ряді маємо врахувати лінійні доданки, але вони призведуть тільки до перенормування власних частот системи трьох осциляторів. Тому врахуємо квадратичний доданок $f_i \approx \sum_{k,l} \alpha_{i,k,l} x_k x_l$, який і дає нетривіальний ефект у системі трьох взаємодіючих осциляторів.

Завдяки нелінійності у системі трьох взаємодіючих осциляторів стає можливим збудження комбінаційних частот, а саме: сумарної $\omega_k = \omega_n + \omega_m$, та диференціальної $\omega_k = \omega_n - \omega_m$. Амплітуди збуджень на комбінаційних частотах будуть особливо великі, якщо вони співпадають з однією з власних (нормальних) частот системи: наприклад, $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$.

Розв'язки системи рівнянь (10.2), як й у випадку параметричних коливань, шукаємо у вигляді ряду:

$$x_k(t) = (A)_k(\varepsilon t) e^{i\omega_k t} + A_k^*(\varepsilon t) e^{-i\omega_k t} + \varepsilon x_k^{(1)}(t); \quad k=1, 2, 3. \quad (10.3)$$

У першому наближенні за параметром $\varepsilon \ll 1$ отримаємо рівняння для першої поправки $x_k^{(1)}$. Воно має такий вигляд:

$$\frac{d^2 x_k^{(1)}}{dt^2} + \omega_k^2 x_k^{(1)} = 2i\omega_k \left(-\frac{dA_k}{\varepsilon dt} e^{i\omega_k t} + \frac{dA_k^*}{\varepsilon dt} e^{-i\omega_k t} \right) + \quad (10.4)$$

$$+ \sum_{m,n=1}^3 \alpha_{k,m,n} (A_m e^{i\omega t} + A_m^* e^{-i\omega t}) (A_n e^{i\omega t} + A_n^* e^{-i\omega t}).$$

Рівняння для амплітуд A_j знову вибираємо в такий спосіб, щоб у ньому не було резонансних доданків у правій частині. Розглянемо випадок $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, тоді для амплітуд A_j тоді маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} i dA_1 / dt &= \varepsilon \sigma_1 A_2 A_3; \\ i dA_2 / dt &= \varepsilon \sigma_2 A_1 A_3^*; \\ i dA_3 / dt &= \varepsilon \sigma_3 A_1 A_2^*; \end{aligned} \quad (10.5)$$

Тут слід звернути увагу на те, що усі інші доданки у правій частині рівняння (10.4) звертаються в нуль при виконанні операції обчислення середнього, бо вони мають осцилюючі в часі множники. Рівняння для A_j^* можна отримати, виконавши операцію комплексного спряження. Тепер зробимо наступні заміни, увівши до розгляду, відповідно, нову амплітуду коливань, нову силу взаємодії між осциляторами та новий час: $a_i = A_i / \sqrt{\sigma_i}$; $\sigma = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}$; $T = \varepsilon t$. Тоді для $N_i = |a_i|^2$ (N_i – характеризує інтенсивність коливань i -ого осцилятора) маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dT} &= i\sigma (a_2 a_3 a_1^* - a_1 a_2^* a_3^*); \\ \frac{dN_2}{dT} &= -i\sigma (a_1 a_3^* a_2^* - a_1^* a_2 a_3); \\ \frac{dN_3}{dT} &= -i\sigma (a_1 a_2^* a_3^* - a_1^* a_2 a_3); \end{aligned} \quad (10.6)$$

З системи (10.6) досить просто отримати інтеграли руху системи трьох зв'язаних осциляторів. Запишемо їх в наступний спосіб:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} [N_1(T) + N_2(T)] &= 0; \quad N_1 + N_2 = \text{const}_1 \\ \frac{d[N_1 + N_3]}{dT} &= 0; \quad N_1(T) + N_3(T) = \text{const}_2 \\ \frac{d(N_2 - N_3)}{dT} &= 0; \quad N_2(T) - N_3(T) = \text{const}_3 \end{aligned} \quad (10.7)$$

Систему рівняння (10.7) називають співвідношенням Менлі – Роу. Користуючись співвідношенням Менлі – Роу, можна зробити певні висновки про взаємодію трьох зв'язаних осциляторів, трьох мод.

Нехай енергія другої моди ($\omega_2 = \omega_1 - \omega_3 < \omega_1$) є найбільшою при цьому, тобто $N_2(0) \gg N_1(0); N_3(0)$. Тоді з рівняння (10.3) маємо: $N_1(0) + N_2(0) = N_1(T) + N_2(T)$, $N_1(0) + N_3(0) = N_1(T) + N_3(T)$. Звідси видно, що

інтенсивність моди N_1 на сумарній частоті може вирости тільки на малу величину не більше, ніж $N_3(0)$.

10.1. Режим розпадної нестійкості

Розпадною нестійкістю називають процес зростання низькочастотних мод N_2 та N_3 за рахунок енергії, яку спочатку зосереджено у високочастотній моді N_1 , в наслідок резонансної взаємодії трьох мод: $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$.

Для визначення інкременту розпадної нестійкості, або, інакше говорячи, швидкості перекачування енергії по спектру у бік низькочастотних мод, використаємо систему рівнянь для da_j/dT . Для цього від рівняння для обезрозміреної амплітуди коливань першого осцилятора візьмемо другу похідну за часом T , а рівняння для зміни в часі амплітуди другого та третього осциляторів домножимо, відповідно, на амплітуди третього та другого осциляторів. Підстановка двох останніх виразів до першого рівняння дозволить отримати диференціальне рівняння другого порядку, яке описує зміну амплітуди першого осцилятора в часі:

$$\frac{d^2 a_1}{dT^2} = \sigma^2 a_1 (|a_2|^2 + |a_3|^2). \quad (10.8)$$

Якщо подібним чином виконати перетворення для рівнянь, що описують зміну в часі амплітуд другого та третього осциляторів, то отримаємо на додаток до рівняння (10.8) відповідні диференціальні рівняння другого порядку для амплітуд: a_2 та a_3 :

$$\frac{d^2 a_2}{dT^2} = \sigma^2 a_2 (|a_1|^2 - |a_3|^2); \quad \frac{d^2 a_3}{dT^2} = \sigma^2 a_3 (|a_1|^2 - |a_2|^2); \quad (10.9)$$

З аналізу системи рівнянь (10.8) та (10.9) видно, що коли $N_1(0) \gg N_2(0), N_3(0)$, тоді на початковому стані розвитку розпадної нестійкості мода з амплітудою a_1 змінюється слабо (приблизно гармонічно). А ось моди з амплітудами a_2 та a_3 зростають за експоненціальним законом. При цьому слід, звичайно, пам'ятати, величини амплітуд: a_2 та a_3 обмежено співвідношенням Менлі – Роу (10.7).

У наближенні фіксованого поля, коли $a_1(T) \approx a_1(0)$, наприклад для зміни в часі амплітуди другого осцилятора можна записати: $a_2(T) \approx a_2(0) \exp(\sigma |a_1| T) \leq a_1(0)$. Далі з часом, зростання амплітуди a_2 призведе до того, що наближення фіксованого поля вже почне порушуватися. Амплітуда моди a_1 почне зменшуватися і процес стане періодичним. Цей процес відбувається за умов закону збереження енергії. Отримаємо цей закон з системи рівнянь (10.6). Для цього помножимо dN_i/dT на ω_i , а потім знайдемо суму: $\sum_i \omega_i dN_i / dT$.

Тоді отримаємо наступне диференціальне рівняння:

$$d(\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3) / dT = i(a_1 a_2^* a_3^* - a_1^* a_2 a_3) \sigma (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \quad (10.10)$$

Коли виконується умова розпадної нестійкості: $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, тоді з рівняння (10.10) маємо: $d(\sum_i \omega_i N_i) / dT = 0$. Цікаво, що коли початкову енергію зосереджено у низькочастотній моді, наприклад N_2 , тоді перекачка енергії у N_1 та N_3 є слабкою і цей процес не має вигляду нестійкості. За цих умов наближення фіксованого поля $a_2(T) \approx a_2(0)$ не порушується для великих проміжків часу, а для осциляторів з амплітудами: a_1 та a_3 маємо «майже гармонічні» рівняння:

$$\frac{d^2 a_1}{dT^2} \approx \sigma^2 a_1 |a_2|^2; \quad \frac{d^2 a_3}{dT^2} = -\sigma^2 a_3 |a_2|^2. \quad (10.11)$$

У кінці аналізу випадку розпадної нестійкості системи трьох нелінійно зв'язаних осциляторів зазначимо, що система рівнянь (10.6) точно інтегрується у еліптичних функціях Якобі.

10.2. Режим вибухової нестійкості

Режим вибухової нестійкості може реалізуватися в системі трьох осциляторів (мод), які нелінійно взаємодіють між собою. Вибуховою цю нестійкість називають через те, що вона дуже стрімко. Ця нестійкість реалізується у випадку, коли амплітуди усіх трьох мод зростають до нескінченно великих значень за скінченний проміжок часу, пропорційно: $a_1 \sim (\tau_0 - T)^{-1}$. Цей режим можна реалізувати у випадку, коли $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 < 0$. Тоді замість системи рівнянь (10.6), вводячи нову позначку $\sigma = \sqrt{|\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3|}$, маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_1}{dT^2} &= \sigma^2 a_1 (|a_2|^2 + |a_3|^2), \\ \frac{d^2 a_2}{dT^2} &= \sigma^2 a_2 (|a_1|^2 + |a_3|^2), \\ \frac{d^2 a_3}{dT^2} &= \sigma^2 a_3 (|a_1|^2 + |a_2|^2). \end{aligned} \quad (10.12)$$

З системи (10.12) видно, що всі три моди є нестійкими, бо другі похідні від їх амплітуд за часом є додатними. На перший погляд це виглядає дуже дивно: як це може бути, що амплітуди усіх трьох мод зростають? Звідки ж вони усі беруть енергію? А чи виконується в цьому випадку закон збереження енергії взагалі?

Спробуємо отримати закон збереження енергії з рівняння (10.12), узявши до уваги те, що у даному випадку $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 < 0$. Тоді закон збереження енергії має вигляд:

$$\frac{d}{dt}(-\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3) = \sigma(a_1 a_2^* a_3^* - a_1^* a_2 a_3)(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \quad (10.13)$$

За умов генерації в системі сумарної частоти (коли виконано резонансну умову $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$), з рівняння (10.13) легко здобути підтвердження виконання закону збереження енергії:

$$\frac{d}{dt}(\omega_2 N_2 + \omega_3 N_3 - \omega_1 N_1) = 0. \quad (10.14)$$

Добуток $\omega_i N_i$ є пропорційним енергії i -ого осцилятора системи, тому рівняння (10.14) означає, що у випадку $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 < 0$ один з осциляторів (або одна мода, у нашому випадку це перша високочастотна мода) характеризується від'ємною енергією. Саме ця мода віддає свою енергію іншим двом модам, що характеризуються додатнім значенням енергії. Тому повна енергія $E \equiv \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3 - \omega_1 N_1$ зберігається, а амплітуди A_i коливань усіх осциляторів системи та, відповідно, інтенсивності цих коливань необмежено (у застосованому в цьому розділі наближенні) зростають. Вибухова нестійкість можлива тільки у системі трьох взаємодіючих мод, одна з яких є модою з від'ємною енергією. Нагадаємо, що режим вибухової нестійкості реалізується також в задачах про еволюцію біосистем.

Оскільки в курсах загальної фізики студенти мають справу з хвилями, які характеризуються додатною енергією, то звернемо на питання від'ємності енергії ще трохи уваги. Прикладами хвиль з від'ємною енергією є, наприклад: повільна мода у системі потік рідини з звуковими збуреннями, повільна мода у системі плазма – пучок заряджених частинок. Від'ємність енергії цих мод просто означає, що зазначені коливальні системи характеризуються більшими значеннями енергії у відсутності цих збурень, ніж у їх присутності. Тому, такі моди зручно називати модами від'ємної енергії.

11. РЕЗОНАНСНЕ ПОГЛИНАННЯ КОЛИВАНЬ

Розглянемо резонансне поглинання енергії вимушених коливань, які отримують її від зовнішнього джерела, в особливих резонансних областях плазми. Дослідження виконаємо для частинного випадку: поглинання вимушених коливань в області локального касп - резонансу в неоднорідній плазмі. Для спрощення викладок обмежимося граничним випадком режиму сильних зіткнень ($\omega\tau \ll 1$, ω - частота коливань, τ^{-1} - частота зіткнень між частинками плазми). Вивчимо питання про нагрівання шару плазми великого тиску ($\beta \gg 1$, β - відношення газодинамічного тиску до магнітного).

Розглянемо випадок, коли на верхній та нижній поверхнях $x = \pm a$ неоднорідного вузького ($k_z a \ll 1$, k_z - компонента хвильового вектору, $\vec{k}_z \parallel \vec{z}$) шару плазми, який займає область $|x| \leq a$ та знаходиться у магнітному полі $\vec{B}_0(x)$ (нехай напрямок зовнішнього магнітного поля є паралельним до межі плазми $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$), заряджені частинки отримують збурення швидкостей у вигляді монохроматичної хвилі ($\vec{v} \propto \exp[i(k_z z - \omega t)]$). У цьому випадку в плазмі створюються пульсації швидкості $\vec{V}$, густини $n_e \sim$, і температури $T_e \sim$ частинок плазми та магнітного поля $\vec{B} \sim$, які пропорційні $\exp[i(k_z z - \omega t)]$. Якщо фазова швидкість збурень ω/k_z є значно меншою за швидкість звуку v_s , тоді збудження власних акустичних коливань не буде. При наявності у цьому шарі резонансної точки:

$x \approx x_0$	(11.1)
-----------------	--------

де в точці резонансу виконуються умови:

$$\frac{\omega}{k_z} \approx v_c(x_0) \approx v_A(x_0), \quad v_c = \frac{v_a v_s}{\sqrt{v_A^2 + v_s^2}} \approx v_A(x), \quad \beta = \frac{v_s^2}{v_A^2} \gg 1.$$

Тут використано також позначки: v_c - касп-швидкість v_A - альфвенівська швидкість. Тоді поблизу цієї точки касп-резонансу збуджуються повільні магнітозвукові хвилі, швидко зростають амплітуди коливань частинок плазми, що призводить до сильного поглинання енергії вимушених коливань за рахунок різноманітних дисипативних ефектів.

Розглянемо наближення дво-рідинної магнітної гідродинаміки для опису повністю іонізованої та сильно замагніченої плазми ($\omega_A \tau_i \gg 1$, $1/\tau_i$ - частота зіткнень між іонами). При лінеаризації зазначених рівнянь

та рівнянь Максвелла для збурених компонентів Фур'є – образів швидкості частинок плазми $\vec{v}(k_z)$ можна отримати наступні рівняння :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon(x, k_z, \omega) \frac{\partial v_x(k_z)}{\partial x} \right] - \frac{\varepsilon(x, k_z, \omega)}{v_A^2} v_x(k_z) &= 0, \\ \frac{\partial v_x(k_z)}{\partial x} &\approx -ik_z v_z(k_z), \\ \varepsilon(x, k_z, \omega) &= \rho_0 v_A^2 \left[\frac{\omega^2}{k_z^2 v_c^2} - 1 + i\xi \right], \end{aligned} \quad (11.2)$$

де ξ - безрозмірна константа, що пов'язана з дисипативними ефектами: в'язкістю іонів, теплопровідністю електронів і іонів уздовж $\vec{z}$, теплообміном між електронами та іонами, $\xi \ll 1$, $\rho_0 = m_i n_i$ - густина маси іонів.

Треба відзначити, що компонента v_y буде описувати альфвенівську хвилю. В резонансній області $x \approx x_0$ ($\omega = k_z v_A(x_0)$) альфвенівську швидкість можна розкласти у ряд за $(x - x_0)$:

$$v_A(x) \approx \frac{\omega}{k_z} \left(1 - \frac{x - x_0}{2a_A} \right), \quad \frac{1}{a_A} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\omega^2}{k_z^2 v_A^2} - 1 \right)_{x=x_0} \quad (11.3)$$

У випадку, коли джерело збудження шару плазми є достатньо довгим вздовж її поверхні, збурення на межі можна представити у вигляді монохроматичної хвилі

$$v_x = v_x(\pm a) \exp[i(k_z z - \omega t)], \quad (11.4)$$

Тоді компоненти швидкості у резонансній області дорівнюють

$$v_x = c_1 G(x) + c_2; \quad v_z = \frac{i}{k_z} c_1 \frac{1}{\varepsilon(x, k_z, \omega)}, \quad (11.5)$$

$$c_1 = \frac{v_x(a) - v_x(-a)}{G(a) - G(-a)}, \quad c_2 = \frac{v(-a)G(a) - v_x(a)G(-a)}{G(a) - G(-a)} \quad (11.6)$$

$$G(x) = \int_0^x \frac{dx}{\varepsilon(x, k_z, \omega)}. \quad (11.7)$$

Поглинання енергії вимушених коливань за одиницю часу на одиниці довжини плазмового шару за рахунок дисипативних ефектів визначається співвідношенням:

$$W = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|^2 \rho_0 \frac{v_A^2}{\omega} \xi dx. \quad (11.8)$$

Для компонентів швидкості в резонансній області за порядком величини маємо:

$$v_x \sim v_x(a) \ln \xi, \quad v_z \sim \frac{v_x(a)}{\xi}, \quad (11.9)$$

$v_x(a)$ - значення амплітуди швидкості на межі шару плазми. При цьому внесок до величини потужності поглинання на одиницю довжини шару дає резонансна область шириною $\Delta x \sim a_A \xi$. Величина потужності, яка поглинається, дорівнює

$$W = \frac{\pi}{2} \frac{|c_1|^2 |a_A|}{\rho_0 v_A^2 \omega} \sim \omega \rho_0 v_x^2(a) \cdot a. \quad (11.10)$$

Треба відзначити, що потужність W не залежить від дисипативних коефіцієнтів. Цей факт пов'язано з тим, що втрати W є пропорційними величині дисипативного коефіцієнту ξ , квадрату амплітуди похідної $(\partial v / \partial x)$ в резонансній точці та ширині резонансної області. У зв'язку з тим, що $(\partial v / \partial x) \propto 1/\xi$, а $\Delta x \propto \xi$, то W не залежить від ξ . Цей ефект є характерним для плазмових резонансів. При $a \sim a_A$ з виразу (11.10) за порядком величини отримуємо вираз для швидкості нагрівання плазми:

$$\frac{dT}{dt} \sim \omega m_i v_x^2(a) \quad (k_z a < 1) \quad (11.11)$$

Розглянуту задачу і отримані результати можна використовувати у дослідженнях сонячної та лабораторної плазми. Особливо це стосується пояснення перегрітих (з підвищеною температурою) локальних областей в атмосфері Сонця.

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ХВИЛЬ

Хвильовий рух є одним з найширших наукових понять. Поширення хвиль на воді, поширення світла і звуку відомі кожному з повсякденного досвіду. «Разом з тим не існує єдиного строгого визначення хвиль. Можна дати багато різних визначень для окремих випадків, але щоб охопити весь діапазон хвильових процесів, слід переважно керуватися інтуїтивним уявленням про хвилю як про будь-який помітний сигнал, що передається від однієї частини середовища до іншої з певною визначеною швидкістю. Такий сигнал може бути збуренням будь-якого типу, наприклад, максимумом якої-небудь величини чи різкою її зміною за умови, що це збурення є чітко виділеним і що в будь-який заданий момент часу можна визначити його місцезнаходження. Цей сигнал може спотворюватися, змінювати свою величину і швидкість, але при цьому повинний залишатися помітним». (Дж. Уїзем «Лінійні і нелінійні хвилі»).

Хвилею можна назвати всяке просторове чергування горбів та западин будь-якої фізичної величини (густини речовини, напруженості електричного поля, температури і т.д.), яке змінюється з часом. Хвилею часто називають усяке явище, при якому в просторі відбувається поширення короткочасного електричного або механічного імпульсу. Тому мабуть краще запитувати не про те, що таке хвилі, а що можна сказати про хвилі. Тоді під хвилями ми будемо розуміти деякий стан чи деякий процес, що можуть бути описані математично в загальному виді, застосовному до різних фізичних систем.

Найважливіші властивості хвиль будемо розглядати на найпростіших прикладах. Одне з них полягає в тому, що хвилі несуть енергію від однієї точки до іншої. Електромагнітні хвилі тепла і світла, що приходять на Землю від Сонця, мають потужність приблизно 1 кВт/м^2 . Сонячні батареї з ККД~10% трансформують сонячну енергію в електричну і живлять супутники зв'язку та інші космічні апарати. Морські хвилі при штормі б'ються об берег з величезною силою. У цих і багатьох інших прикладах хвилі переносять енергію, хоча величина її в усіх наведених прикладах є різною.

Подібно до тіл, що рухаються, хвилі мають імпульс. При поглинанні та відбитті хвиль тілом вони штовхають його. Існують проекти, що показують можливість руху космічних апаратів шляхом використання тиску світла зірок на величезні вітрила цих “зоряних кораблів”. Таким чином, енергія, імпульс, і швидкість є найважливішими характеристиками хвиль.

Однак є ще одна дивна властивість, що виявляється в багатьох видів хвиль – це лінійність. Лінійними називаються хвилі, що не впливають на поширення інших хвиль, бо для них є справедливим принцип суперпозиції. Цей принцип полягає в тім, що хвиля з амплітудою $2S_0$ – це те ж саме, що

дві лінійні хвилі з амплітудою S_0 кожна, що існують у той же час і в тім же місці. Швидкість лінійної хвилі не залежить від амплітуди. Зрозуміло, що абсолютно лінійних хвиль мало. Однак існує багато хвиль, які є настільки близькими до лінійних при звичайних значеннях їх інтенсивності, що можна одержати практично точний результат, оперуючи з цими хвилями так, начебто вони є лінійними.

Далі ми будемо мати справу в основному з лінійними хвилями. Буде показано, зокрема, що вони мають дві швидкості: фазову та групову швидкості, що поняття імпульсу хвилі є не таким вже й простим. З'ясується, що поняття енергії, імпульсу і швидкості легко визначити лише в простому окремому випадку синусоїдальної хвилі.

12. СИНУСОЇДАЛЬНІ ХВИЛІ

Коли хочеш у чомусь розібратися, завжди краще починати з найпростіших прикладів. Тому розглянемо хвилі, що особливо простим чином змінюються в часі і просторі при своєму русі в певному середовищі вздовж якогось заданого напрямку. Такими є синусоїдальні хвилі.

Синусоїдальні хвилі можна передавати, приймати та посилювати. Але на відміну від реальних сигналів синусоїдальна хвиля нескінченно повторюється в одній і тій же незмінній формі. Синусоїдальна хвиля в термінах загальної теорії зв'язку не несе ніякої інформації. Вона цікава тим, що зберігає свій особливий вигляд при проходженні через будь-яке лінійне середовище. Однак синусоїдальні хвилі мають ще одну дуже важливу властивість. Будь-який електричний сигнал може бути представлений комбінацією синусоїдальних хвиль у вигляді інтеграла Фур'є.

Якщо прикладений до лінійної електричної мережі вхідний сигнал являє собою комбінацію синусоїдальних сигналів різних частот, то і вихідний сигнал, що виходить з цієї мережі, також буде комбінацією синусоїдальних сигналів тих же частот. Вивчення поведінки повного сигналу з часом можна звести до розв'язання задачі для кожного окремого синусоїдального компонента цього сигналу.

Основною характеристикою цих хвиль є напруженість S в теперішній час, в даному місці. Ця величина може бути напруженістю електричного чи магнітного поля, електричною напругою чи струмом, або тиском чи швидкістю осциляцій частинок середовища в звуковій хвилі. Отже розглянемо хвилю

$$S = S_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad (12.1)$$

Тут S_0 – амплітуда хвилі, t – час, z – координата в напрямку поширення, ω – кругова частота, k – хвильове число, φ – початкова фаза. Кут $\theta = \omega t - kz$ називають фазою, він визначає значення напруженості в циклі: між гребенем хвилі, де S максимальна, і западиною, де S мінімальна.

Якщо яка-небудь скалярна фізична величина залежить від часу t і просторової координати z в такий спосіб:

$$S = f(t, z) \quad (12.2)$$

тоді ця формула позначає, що величина S у кожен момент часу має однакове значення в певній площині $z = z_0$ і різні значення в точках різних площин $z = z_j$, де $j = 1, 2, 3, \dots$. З часом значення S на кожній з цих площин змінюється. Така хвиля називається плоскою.

Термін *плоскі* хвилі в дійсності має два значення. У широкому і точному змісті це будь-які хвилі, фаза яких незмінна в площині, яка є перпендикулярною до напрямку їхнього поширення. Вони називаються плоскими хвилями, навіть якщо напруженість хвилі змінюється в цій

площині. Але ми будемо називати плоскими хвилі такі, що поширюються у визначеному напрямку, якщо їхня напруженість і фаза постійні в будь-якій площині, яка є перпендикулярною до напрямку поширення. Це можуть бути плоско поляризовані чи поляризовані по колу електромагнітні хвилі. Але це можуть бути і звукові хвилі в повітрі, що не мають поляризації.

Ставлячись педантично до питання визначення плоских хвиль, слід визнати, що плоских електромагнітних та плоских звукових хвиль в природі не існує, але в багатьох випадках хвилі можна вважати приблизно плоскими. Удалині від джерела звуку чи від радіопередавача фаза хвилі практично постійна на поверхні сфери. Тому хвилі, з якими ми найчастіше зустрічаємося в природі - це сферичні хвилі. Однак, далеко від центра сфери, в якому знаходиться джерело хвилі, будь-яка обмежена ділянка сферичної поверхні виглядає майже плоскою, і вдалині від джерела сферичні хвилі поведуться в багатьох відносинах так, ніби вони є плоскими хвилями. При видаленні від джерела хвиль зменшення напруженості хвилі не відчутно в межах багатьох довжин хвиль.

Розглянемо окремий випадок плоскої хвилі, коли аргументи t і z входять до виразу (12.2) у вигляді лінійної комбінації $\omega t - kz$

$$S = f(\omega t - kz) \quad (12.3)$$

де ω і k – позитивні константи, а f – довільна однозначна функція. Це лінійна хвиля, що біжить, вона характеризується наступними властивостями.

Розглянемо осцилограми величини S у площинах $z = 0$ і $z = z_1$

$$S(t, 0) = f(\omega t) \quad (12.4)$$

$$S_1(t, z_1) = f(\omega t - kz_1) = f\left[\omega\left(t - \frac{z_1}{v}\right)\right] \quad (12.5)$$

Порівняння цих виразів свідчить, що осцилограма зміни S у точках площини $z = z_1$ абсолютно точно відтворює осцилограму зміни S у точках площини $z = 0$, але з запізненням на час z_1 / v . Аналіз графіка залежності S від відстані z при фіксованому значенні часу t дає такі результати:

$$S(0, z) = f(-kz) \quad (12.6)$$

$$S(t_1, z) = f(\omega t_1 - kz) = f[-k(z - vt_1)] \quad (12.7)$$

Видно, що моментальний знімок у момент $t = t_1$ відрізняється від знімка в момент $t = 0$ зсувом праворуч на відстань vt_1 . Отже, хвиля пересувається, не змінюючи своєї форми, у бік зростаючих значень z , причому швидкість її поширення дорівнює v . Це поняття швидкості поширення застосовано тільки до частинного випадку, що відповідає рівнянню (12.3). Для цього розв'язку плоскої хвилі, що біжить, поверхні рівної фази ($\theta = \text{Const}$) є взаємно паралельними площинами.

Просторовий градієнт функції θ дорівнює хвильовому вектору $\vec{k}$, напрямком якого є нормальним до площин рівної фази, а величина k

дорівнює середньому числу гребенів на 2π одиниць відстані в цьому напрямку. Аналогічно похідна фази за часом є кругова частота ω чи середнє число гребенів на 2π одиниць часу.

Кожна конкретна поверхня постійної фази рухається з швидкістю ω/k в напрямку вектора $\vec{k}$. Точка постійної фази рухається в хвилі таким чином, що

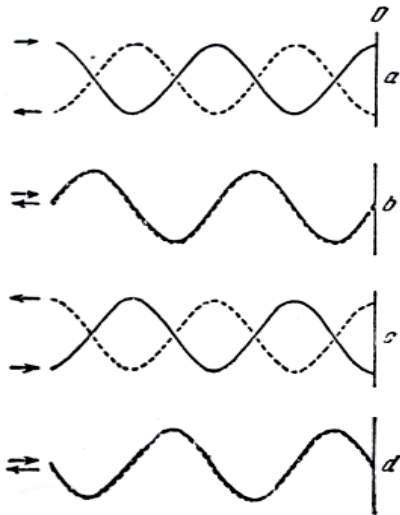
$$\frac{d}{dt}(\omega t - kz) = 0, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \equiv v_{\Phi} \quad (12.8)$$

Величина v_{Φ} називається фазовою швидкістю. Якщо частка $\omega/k > 0$, то хвиля рухається праворуч, тобто зі збільшенням t значення z зростає таким чином, що величина $\omega t - kz$ залишається постійною. При $\omega/k < 0$ хвиля рухається ліворуч. У системі координат, що рухається зі швидкістю v_{Φ} , ми будемо бачити синусоїдальну хвилю, яка нібито застигла. А у лабораторній системі - побачимо коливання синусоїдальної форми, що пропливають повз нас праворуч.

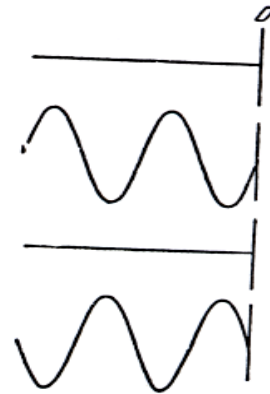
Довжина хвиль (λ) – це просторовий період хвилі, тобто відстань, яка визначається так: для будь-якого значення координати z при зсуві гребенів на відстань, що дорівнює довжині хвилі, фаза має змінитися на 2π , тобто $k\lambda = 2\pi$.

Частота хвилі (f) – це число гребенів, що проходять через дану точку у просторі за одиницю часу. Час $T = 1/f$ називають періодом хвилі.

На відміну від хвиль, що біжать, існує й інший дуже важливий тип хвиль - *стоячі* хвилі. Нехай хвиля, що йде ліворуч відбивається від деякої поверхні O . Відбиття може відбуватися по-різному. Іноді при відбитті хвиля залишається незмінною, тобто гребінь лишається гребенем, а западина - западиною, змінюється тільки напрямок поширення на зворотний. Іноді ж при відбитті хвиля нібито перевертається: гребінь при відбитті стає западиною і, навпаки. На Мал. 12.1. (діаграма *b*) хвиля, що поширюється праворуч, показана такою, що просунулася на чверть довжини хвилі, в порівнянні з хвилею на діаграмі *a*. Діаграми *c* і *d* показують відбиття при подальшому просуванні падаючої хвилі на чверть і ще на чверть довжини хвилі. Мал. 12.1. містить ті ж чотири діаграми, але тут знайдено суму зсувів падаючої і відбитої хвиль у кожній точці.

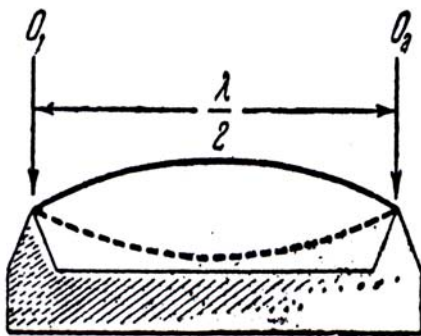


Мал. 12.1.



Мал. 12.2.

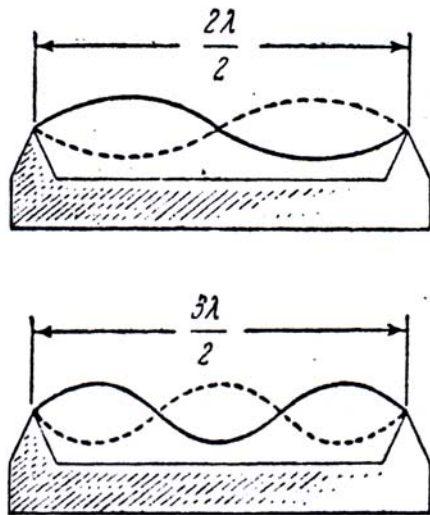
Як бачимо, результуюча картина хвиль не рухається ні ліворуч, ні праворуч, тобто в результаті суперпозиції падаючої та відбитої хвиль одержано стоячу хвилю. Безпосередньо біля відбивача і на відстанях у півхвилі, у три півхвилі ліворуч від нього повний зсув завжди дорівнює нулю. Ці точки називаються *вузлами стоячої хвилі*. В інших точках зсув періодично наростає і спадає з часом, частота коливань зсуву в кожній з цих точок та сама, вона дорівнює частоті хвилі. Ті точки, у яких амплітуда є максимальною, називаються *пучностями стоячої хвилі*.



Мал. 12.3.

Нехай ми маємо два відбивачі, які встановлено паралельно один до одного на відстані половини довжини хвилі (Мал.12.3). Суцільна крива відповідає максимальним значенням зсувів стоячої хвилі вгору, а пунктирна лінія відповідає максимальним зсувам униз. Між цими лініями відбуваються послідовні коливання так, що зсув у кожній точці проходить згодом періодично через усі проміжні положення. стоячої хвилі.

А оскільки довжина хвилі зв'язана з частотою, то це означає, що при фіксованій відстані між відбивачами можуть існувати стоячі хвилі тільки певних, визначених частот і відповідних цим частотам форм. Якщо швидкість не залежить від частоти і якщо вважати форму хвилі (Мал.12.3) відповідною основній частоті f_1 , то форми зображеної на Мал.12.4 відповідають частотам $2f_1$ і $3f_1$, тобто другій і третій гармонікам основної частоти.



Мал.12.4.

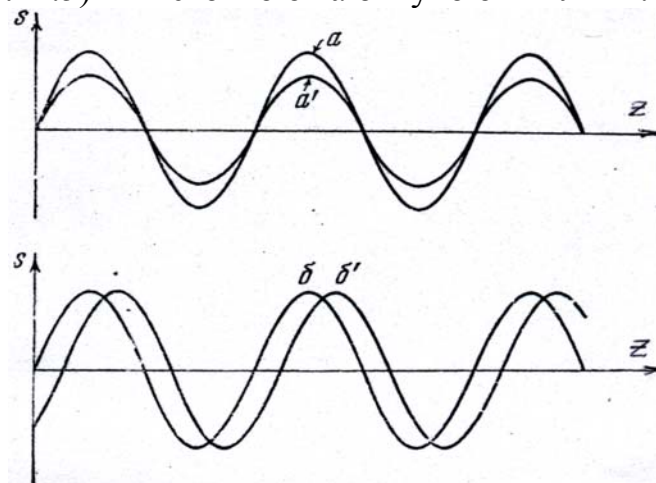
У будь-якій обмеженій хвильовдній системі можуть виникати стоячі хвилі. У подібних системах підтримуються стоячі хвилі тільки певних, визначених частот. Ці частоти і зв'язані з ними форми коливань називаються *нормальними модами* чи *власними функціями*, а відповідні їм частоти називаються *власними частотами системи*.

Розглянемо плоскі стоячі хвилі, у яких амплітуда залежить від однієї координати z :

$$S = S_0(z) \cos(\omega t - \varphi)$$

У випадку, коли $S_0(z) = A \cos(kz - \psi)$, де A , k , z - постійні величини, стояча хвиля називається *синусоїдальною стоячою хвилею*. Моментальний знімок стоячої хвилі не відрізняється від моментального знімка

хвилі, що біжить. Але послідовність двох моментальних знімків, що відносяться до близьких моментів часу, легко дозволяють знайти відмінність (Мал.12.5) між стоячою та біжучою хвилями.



Мал. 12.5. Послідовні моментальні знімки:

a , a' – стояча, b , b' – синусоїдальна хвиля, що біжить.

Доведемо, що суперпозиція двох плоских синусоїдальних хвиль, що біжать назустріч одна одній з однаковими амплітудами, частотами і довжинами, існує у вигляді стоячої плоскої синусоїдальної хвилі.

Нехай для першої хвилі, що біжить праворуч, та для другої хвилі, що біжить ліворуч, маємо вирази для напруженостей:

$$S_1 = A \cos(kz - \omega t - \alpha_1); S_2 = A \cos(kz + \omega t - \alpha_2)$$

Тоді для суперпозиції цих хвиль можна записати:

$$S = S_1 + S_2 = 2A \cos\left(kz - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \quad (12.9)$$

Це рівняння стоячої хвилі. Амплітуда її в точках пучності вдвічі більше амплітуди кожної з хвиль, що біжать назустріч одна одній. Довжина і частота стоячої хвилі дорівнюють відповідно довжині і частоті хвиль, що біжать. Якщо амплітуди хвиль S_1 і S_2 не дорівнюють одна одній ($A_2 = A$, $A_1 = A + a$), то S є суперпозиція стоячої хвилі (12.9) і хвилі, що біжить $a \cos(kz - \omega t - \alpha_1)$.

Величина $(a/A)^2$ називається *коефіцієнтом біжучості*.

Нехай тепер відбивачі (верхній знімок на Мал.12.4) мають отвори, так що при кожному відбитті частина хвилі просочується через них. Щоб амплітуда стоячої хвилі в порожнині не загасала, будемо заповнювати порожнину хвилею, яка приходить з лівого боку. Якщо отвори у відбивачах дуже малі, така система буде пропускати ліворуч від входу в правому напрямку хвилі тільки тих частот, що дуже точно відповідають частоті стоячої хвилі при даній відстані між відбивачами, тому що тільки на цій частоті можливе збудження інтенсивних стоячих хвиль в такт з відбиттям.

Якщо отвори такі великі, що хвиля практично не відбивається, маємо практично безперервне, суцільне середовище для передачі хвиль між входом і виходом. Така система називається фільтром електромагнітних хвиль. У нашому прикладі малі отвори дають вузько смуговий фільтр, а великі отвори – широко смуговий фільтр.

Вище ми говорили про форму і характер руху хвилі, розглядаючи її напруженість. Але є інша важлива характеристика хвилі - це її потужність. При збудженні радіохвилі необхідно безупинно підводити стільки енергії, скільки хвиля її виносить. Хвилям у море дає енергію вітер, до гучномовця, щоб він звучав, необхідно підводити електричну енергію. Потужність хвилі пропорційна квадрату її напруженості. Миттєве значення потужності $P \sim S^2$. Нехай коефіцієнт пропорційності дорівнює 2 (це завжди можна зробити вибором одиниць виміру S). Тоді

$$P_{\text{мгн}} = 2S^2 = 2S_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi) = S_0^2 [1 + \cos 2(\omega t - kz + \varphi)]$$

Звідси видно, що середня потужність $P_{\text{ср}} = S_0^2$, а її миттєве значення осцилює щодо середнього значення з подвійною частотою хвилі.

Будь-яку величину, що змінюється за синусоїдальним законом, можна записати у вигляді

$$S = S_0 e^{i(\omega t - kz + \varphi)}.$$

Реальна частина S дорівнює:

$$\text{Re } S = S_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

Звичайно інформацію про фазу φ включають до S_0 , вважаючи величину S_0 комплексною

$$S = S_0 e^{i\varphi} e^{i(\omega t - kz)} = S_{0k} e^{i(\omega t - kz)}$$

де S_{0k} - комплексна амплітуда.

Якщо напруженість хвилі представлена в комплексній формі, то середня потужність визначається добутком $P = SS^*$, де S^* - комплексно спряжена величина.

13. ЛІНІЙНІ ДИСПЕРСНІ ХВИЛІ

Кілька характерних рис поширення хвиль у дисперсних середовищах можна простежити вже в лінійному наближенні. Лінійна дисперсна хвильова система – це будь-яка система, що має рішення виду

$$S = S_0 \cos(kz - \omega t), \quad (13.1)$$

де частота ω є відомою реальною функцією хвильового числа k , причому функція $\omega(k)$ визначається вибором системи. Фазова швидкість у даному випадку дорівнює $\omega(k)/k$. Хвилі називають *дисперсними*, якщо ця фазова швидкість не є сталою величиною, а залежить від k . Якщо $\omega \neq c_0 k$, де c_0 – певна незмінна величина, то моди з різними k будуть поширюватися з різними швидкостями і хвиля буде розповзатися. Зручно трохи змінити це визначення і говорити, що хвиля, яка описується (13.1) є дисперсною, якщо $\omega'(k)$ не є постійна, тобто $\omega''(k) \neq 0$.

Розв'язок (13.1) визначає тип осцилюючих розв'язків, що описують хвильові пакети, тобто суперпозицію плоских монохроматичних хвиль, що мають близькі значення хвильових чисел k і, отже, близькі значення частот $\omega(k)$. Такі розв'язки здобуваються при інтегруванні різних рівнянь у частинних похідних і навіть деяких інтегральних рівнянь. Зрозуміло, що задача характеризується дисперсійним співвідношенням

$$\omega = W(k), \quad (13.2)$$

що зв'язує частоту і хвильове число.

Розв'язки лінійних задач, які є більш загальними, чим (1.2) отримуються у вигляді суперпозиції вищенаведених рішень і мають вигляд інтегралів Фур'є

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \cos(kz - W(k)t) dk \quad (13.3)$$

Вираз (13.3) є розв'язком для довільної функції $F(k)$, що за допомогою зворотного перетворення Фур'є вибирається так, щоб виконувалися крайові чи початкові умови. Розв'язки типу (13.3) є суперпозицією окремих хвиль з різними хвильовими числами, кожна з яких поширюється зі своєю фазовою швидкістю. З плином часу ці різні складові моди розповзаються, у результаті чого, наприклад, одиночний горб перетворюється в довгий осцилюючий хвильовий пакет - цуг хвиль. Цей процес вивчається за допомогою різних асимптотичних представлень інтеграла (13.3) у вигляді рядів. При такому підході, як буде показано далі, основним поняттям є групова швидкість $d\omega/dk$. Цуг хвиль, що описується за допомогою (13.3), не має постійної довжини хвилі, для нього існує цілий інтервал хвильових чисел k . Виявляється, що збурення з різними хвильовими числами поширюються по цьому цугу хвиль із груповою швидкістю. Принагідно зазначимо, що енергія хвиль також поширюється з груповою швидкістю.

Випадку бездисперсної моди відповідає співвідношення $W(k) \sim k$, для таких хвиль значення їх фазової та групової швидкостей збігаються. Але в даному підрозділі ми не будемо цікавитися цим окремим випадком.

Отже, тепер ми можемо дати більш чітке визначення дисперсних систем, як таких, що мають розв'язки типу: $S(z, t) = S_0 e^{ikz - i\omega(k)t}$, де $\omega = W(k)$, які задовольняють умові

$$W''(k) \neq 0. \quad (13.4)$$

Рівняння з реальними коефіцієнтами призводять до реальних дисперсійних співвідношень лише тоді, коли вони містять або парні, або непарні похідні. Кожне диференціювання вносить множник у вигляді уявної одиниці, так що в парних похідних з'являються реальні коефіцієнти, а в непарних - чисто уявні. Вони не повинні змішуватися, якщо ми хочемо, щоб остаточний вираз був реальним.

Так, наприклад, рівняння теплопровідності $\partial S / \partial t = \partial^2 S / \partial z^2$ має розв'язок у вигляді (13.4) з $\omega = -ik^2$, але ці розв'язки не описують поширення хвиль.

Рівняння Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2},$$

містить у собі парну і непарну похідні, призводить до реального дисперсійного співвідношення

$$\hbar\omega = \hbar^2 k^2 / 2m,$$

але включає в собі комплексний коефіцієнт.

Відповідність між рівнянням і дисперсійним співвідношенням встановлюється досить просто. Лінійне рівняння з постійними коефіцієнтами запишемо у вигляді: $P(\partial / \partial t, \partial / \partial z)S = 0$. При підстановці в нього елементарного розв'язку кожне диференціювання $\partial / \partial t$ призведе до появи множника: $i\omega$, а диференціювання $\partial / \partial z$ до появи множника: ik . Тому дисперсійне співвідношення має вигляд $P(-i\omega, ik) = 0$ і ми знаходимо прямий зв'язок між рівнянням і дисперсійним співвідношенням.

Загальний розв'язок основних рівнянь в одновірному випадку має вигляд (13.3). Функція $F(k)$ - Фур'є - компонента початкового збурення - підбирається таким чином, щоб задовольнити заданим початковим чи крайовим умовам. Хоча інтеграли Фур'є дають точні розв'язки, їхнє поводження яснішає, а основні властивості дисперсних хвиль стає зрозумілішим, якщо розглянути асимптоту (13.3) при великих z та t , точніше при $t \rightarrow \infty$, але z/t є фіксованим. Запишемо для $S(z, t)$ інтегральний вираз:

$$S(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-i\alpha t} dk, \quad \alpha(k) = W(k) - kz/t \quad (13.5)$$

де Тут z/t фіксований параметр і α залежить тільки від k . Інтеграл (13.5)

досліджується методом стаціонарної фази, що стверджує: для великих t основний внесок в інтеграл дає околиця стаціонарних точок $k = k_0$, таких що:

$$\alpha'(k) = W'(k) - \frac{z}{t} = 0 \quad (13.6)$$

В інших точках відбуваються швидкі осциляції підінтегрального виразу і сумарний внесок виявляється малим.

Знайдемо перший член асимптотичного розкладання функцій $F(k)$ та $\alpha(k)$ у ряди Тейлора в околиці $k = k_0$. Основний внесок дадуть члени, для яких: $F(k) \approx F(k_0)$ та $\alpha(k) = \alpha(k_0) + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \alpha''(k_0)$ за умови, що $\alpha''(k_0) \neq 0$. У такому наближенні основний внесок дорівнює:

$$F(k_0) \exp\{-i\alpha(k_0)t\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{2}(k - k_0)^2 \alpha''(k_0)t\right\} dk.$$

Інтеграл, що залишився, зводиться до реального інтегралу помилок: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta z^2} dz = (\pi / \beta)^{1/2}$, при цьому поворотом контуру інтегрування на $\pm \pi / 4$ знак обирається таким саме, як знак $\alpha''(k_0)$. Перевизначивши $k_0 = k$, одержимо остаточний вираз:

$$S(z, t) = F(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}} \exp\left\{-i\alpha(k)t - \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha''\right\} \quad (13.7)$$

де k - додатний корінь рівняння

$$W'(k) = z/t \quad (13.8)$$

Якщо (13.8) має кілька додатних коренів, то в (13.7) треба написати суму по цих k .

Відкладемо обговорення фізичного змісту (13.7) до наступного підрозділу. Зараз тільки скажемо, що при тих значеннях z , для яких рівняння (13.8) має реальні корені $k(z, t)$, збурення являє собою хвильовий пакет з змінним хвильовим числом $k(z, t)$ та частотою $\omega(z, t)$, які зв'язані дисперсійним співвідношенням, і амплітудою, яка пропорційна до $F(k) \sqrt{2\pi / (t|W''(k)|)}$.

Розглянемо деякі приклади дисперсних хвиль. Цілий ряд найбільш цікавих хвильових рухів зв'язаний із хвилями на воді. Це, мабуть, найрізноманітніша й цікавіша область з усіх, які зв'язані із хвильовим рухом. Вона включає широкий клас природних явищ в океанах та річках, існування яких є стимулом для розвитку теорії дисперсних хвиль. Всі основні ідеї теорії нелінійних дисперсних хвиль виникли при вивченні хвиль на воді.

Уже Ньютонові було добре відомо, що «швидкість хвиль пропорційна кореню квадратному з їх довжини». Хвилі на глибокій воді,

коли незбурена глибина h є набагато більшою за довжину хвилі λ , поширюються зі швидкістю. $V = \sqrt{g\lambda/(2\pi)} = \sqrt{g/k}$. У протилежному граничному випадку $h \ll \lambda$ швидкість хвилі залежить лише від глибини $V = \sqrt{gh}$.

З точністю до числових множників ці формули можна одержати з простих фізичних міркувань та представлень розмірності фізичних величин. Швидкість V може залежати від прискорення вільного падіння g , довжини хвилі λ , глибини h , щільності рідини ρ і від амплітуди хвилі. Через те, що розмірність маси міститься тільки в ρ , відразу зрозуміло, що швидкість не залежить від щільності (повертаюча сила, що діє на часточку води, є пропорційною до її маси. У рівнянні руху ця маса скорочується як і у випадку маятника). У лінійних задачах швидкість хвилі не залежить від її амплітуди. Отже, $V = dg^a \lambda^b h^c$ і, порівнюючи розмірності лівої і правої частин, знаходимо, що: $V = d\sqrt{g\lambda}(h/\lambda)^c$. На жаль, тут показник ступеня c і число d не визначаються з теорії розмірностей. Однак відомо, що при поширенні коливань у руху беруть участь лише ті шари води, що розташовані на глибині меншої довжини хвилі. Це означає, що на глибокій воді ($h \gg \lambda$) величина h не грає ніякої ролі, тобто $c = 0$. У протилежному граничному випадку швидкість не повинна залежати від довжини хвилі, тому що розміри траєкторій часток води, що здійснюють коливання, не можуть перевищувати величини h . Звідси можна зробити висновок, що на мілкій воді $c = 0.5$.

В рамках точної теорії можна одержати формулу, яка є придатною для будь-якого співвідношення h і λ . З неї випливає, що при зростанні довжини хвилі швидкість спочатку зростає, але при $\lambda > 2\pi h$ це зростання уповільнюється і швидкість наближається до максимального, критичного значення $\sqrt{gh}$.

Діапазон швидкостей хвиль на воді надзвичайно великий. Океанські хвилі з довжиною хвилі значно більшою за 5 км рухаються зі швидкістю приблизно 800 км/год., у кюветі при $h = 0,5$ см $v \approx 20$ см/сек. Легко створити умови, щоб можна було користуватися глибоководною формулою для швидкостей. Однак при використанні цієї формули необхідно взяти до уваги, що при малих довжинах хвиль (менше 5 см) починають відігравати роль сили поверхневого натягу, які ми дотепер не враховували.

Якщо знехтувати силою тяжіння, повертаюча сила визначається тільки поверхневим натягом, тобто енергією T , яку потрібно витратити для збільшення площі поверхні на одиницю. Для чистої води $T \approx 0,072$ Дж/м². Крім величини T , швидкість хвилі може залежати від щільності ρ і довжини хвилі λ . Амплітуду будемо вважати настільки малою, а глибину настільки великою, що залежністю швидкості від цих величин можна

знехтувати. З міркувань розмірності одержуємо $V^2 = 2\pi T / \rho \lambda$. Тут коефіцієнт 2π узятий з точної теорії Кельвіна. Ці хвилі називаються капілярними. Вони біжать швидше при меншій довжині хвилі. Наявність поверхневого натягу призводить до того, що на глибокій воді хвилі не можуть поширюватися з дуже малою швидкістю, тобто існує нижня межа швидкості.

Якщо на часточку води діють одночасно дві повертаючи сили: сила тяжіння та сила поверхневого натягу, тоді швидкість хвилі визначається наступною формулою:

$$v^2 = g\lambda / 2\pi + 2\pi T / (\rho \lambda), \quad (13.9)$$

а частота
$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3 \quad (13.10)$$

Фазова і групова швидкості виражаються такими формулами:

$$V_{ph} = (g/k + Tk/\rho)^{1/2} \quad (13.11)$$

$$V_{gr} = \frac{1}{2} V_{ph} \frac{1 + 3Tk^2/(g\rho)}{1 + Tk^2/(g\rho)}$$

З аналізу цих формул видно, що фазова швидкість хвиль є мінімальною при $k = k_m = \sqrt{\rho g / T}$; $\lambda_m = 2\pi / k_m = 1,73$ см; при цьому відповідні значення фазової та групової швидкостей збігаються і дорівнюють: $V_m = 23,2$ см.

В області $\lambda > \lambda_m$, яка називається гравітаційною гілкою хвиль на воді $V_{gr} < V_{ph}$, тоді як в області $\lambda < \lambda_m$, яку називають капілярною гілкою, навпаки: $V_{gr} > V_{ph}$. Для будь-якого значення фазових швидкостей, що є більшими за V_m існують обидві припустимі довжини хвилі, тобто дві моди. Мінімум групової швидкості досягається при $\lambda = 2,54 \lambda_m = 4,39$ см і складає $V_{gr} = 0,77 V_m = 17,9$ см/с.

Хвилі від джерела, розміри якого є дуже малими порівняно з довжиною хвилі, поширюються ізотропно і різні значення хвильового числа, збуджені в початковий момент, поширюються з відповідними груповими швидкостями. У кожен момент часу t кожне конкретне значення k буде знаходитися на відстані $r = V_{gr} t$. Отже, $k(r, t)$ задовольняє співвідношенню:

$$V_{gr} = r / t \quad (13.12)$$

Тому для гравітаційних хвиль на глибокій воді маємо наступні співвідношення:

$$k = qt^2 / (4r^2), \quad \omega = qt / 2r \quad (13.13)$$

Це аналог одномірної задачі, що буде розглянуто докладно в підрозділі 3.

Зазначена формула для частоти порівнювалася з даними спостереження за хвилями, які викликано штормами в океані. Виявилось, що на відстанях приблизно 2000 миль частота цієї хвилі лінійно залежить

від часу, а тому коефіцієнт пропорційності дозволяє з великою точністю визначити відстань до шторму.

Скористаємося наведеними формулами для опису характерних кілець, що розходяться від каменю, кинутого у воду. Для них задовольняється рівність (13.12), де групова швидкість визначається за формулою (13.11). Оскільки V_{gr} має мінімальне значення приблизно 18 см/с, тому існує коло спокійної води з радіусом $(18t)$ см. Поза цим колом для кожного r/t допускаються два значення k : одне на гравітаційної гілки, інше на капілярної, так що виникають два взаємодіючих хвильові пакети.

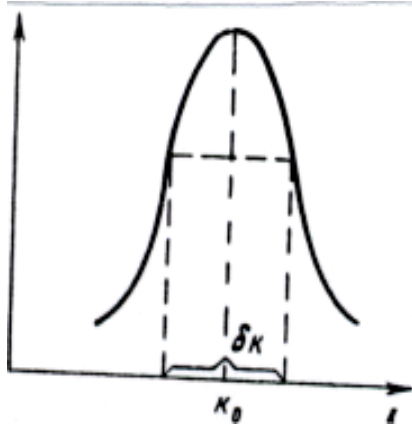
14. ГРУПОВА ШВИДКІСТЬ

Монохроматичні хвилі є, зрозуміло, ідеалізацією, яка ніколи не реалізується на практиці абсолютно точно. З теореми Фур'є випливає, що будь-яку хвилю $S(z,t)$ можна розглядати як суперпозицію монохроматичних хвиль різних частот. Якщо Фур'є – амплітуди помітно відрізняються лише усередині вузького діапазону частот поблизу середньої частоти, то хвилю можна вважати майже *монохроматичною*.

У цьому випадку ми говоримо про хвильову групу чи хвильовий пакет. Хвильовим пакетом називають суперпозицію плоских монохроматичних хвиль, що мають близькі значення хвильових векторів $\vec{k}$, а, отже, і близькі значення частот $W(\vec{k})$. Поле такого пакета може бути представлено у вигляді

$$\vec{E} = \int \vec{A}_{\vec{k}} e^{-iW(\vec{k})t + i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

де $\vec{A}_{\vec{k}}$ має максимум біля $\vec{k} = \vec{k}_0$ (Мал. 14.1)



Мал. 14.1

Такі пакети, наприклад, поперечних хвиль легко реалізуються експериментально. Для ілюстрації деяких основних властивостей хвильових пакетів розглянемо амплітудно-модульований сигнал, що утворюється шляхом зміни амплітуди високочастотної несучої хвилі відповідно до сигналу, що містить тільки низькі частоти. При амплітудній модуляції утвориться комбінація з двох заданих коливань. Для реалізації режиму модуляції потрібні нелінійні пристрої.

Характерним прикладом, що дозволяє зрозуміти принцип здійснення модуляції, може служити протікання анодного струму в пентоді, що є функцією двох напруг на мережах $i = f(u_1 u_2)$. Розкладемо цю функцію в ряд Тейлора:

$$i = i_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_{11} u_1^2 + 2\beta_{12} u_1 u_2 + \beta_{22} u_2^2 + \dots, \quad (14.1)$$

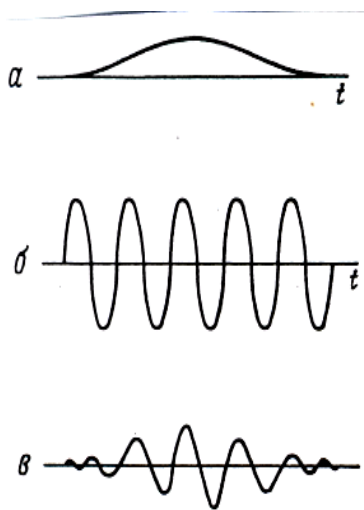
де i_0 , α , β - константи. Нехай $u_1 = A_1 \cos \omega t$, $u_2 = A_2 \cos \omega_0 t$. Тоді вираз для струму можна переписати в такий спосіб:

$$i = i_0 + \alpha_1 A_1 \cos \omega t + \alpha_2 A_2 \cos \omega_0 t + \beta_{11} A_1^2 \cos^2 \omega t + \\ + 2\beta_{12} A_1 A_2 \cos \omega t \cos \omega_0 t + \beta_{22} \cos^2 \omega_0 t + \dots$$

Член $2\beta_{12} A_1 A_2 \cos \omega t \cos \omega_0 t$ саме і є необхідне модульоване коливання. Воно може бути виділене з анодного струму за допомогою резонансного контуру, який має не дуже високу добротність та є налаштованим на частоту ω_0 .

Розглянемо амплітудну модуляцію високочастотної несучої хвилі з частотою ω_0 (Мал. 14.2.б) за допомогою низькочастотного імпульсу (Мал. 14.2.а), що плавно змінюється з часом. Тоді в результаті взаємодії цих сигналів здобудемо амплітудно промодульований сигнал (Мал. 14.2.в), його вигляд можна отримати множенням у кожній крапці верхньої кривої (а) на другу – (б). Виконаємо зазначене перемножування для одного низькочастотного компонента з круговою частотою ω :

$$Q = (\cos \omega t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [\cos(\omega_0 + \omega)t + \cos(\omega_0 - \omega)t] \quad (14.2)$$



Мал. 14.2.

а - низькочастотний сигнал, що модулює; б- високочастотна несуча хвиля; в- амплітудно - модульований сигнал.

При передачі двох складових із круговими частотами $\omega_0 + \omega$ і $\omega_0 - \omega$ за допомогою дисперсної моди швидкості їх поширення будуть дещо розрізними. Нехай k_0 – значення хвильового числа для складової з частотою ω_0 , V_{gr} – нахил дотичної до кривої $\omega = W(k)$ в точці $\omega = \omega_0$. Тоді для вищезазначених складових можна приблизно записати вирази для хвильових чисел:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 + \omega / V_{gr} \\ k_2 &= k_0 - \omega / V_{gr} \end{aligned} \quad (14.3)$$

Після того як ці дві складові пройдуть відстань z їхній добуток Q_z , що при $z = 0$ мав вигляд (14.2), тепер буде мати інший вигляд:

$$Q_z = \cos(\omega_0 t - k_0 z) \cdot \cos \omega(t - z/V_{gr}). \quad (14.4)$$

З формули (14.4) можна побачити, що несуча хвиля високої частоти ω_0 рухається з фазовою швидкістю ω_0 / k_0 . Модулююча функція $\cos \omega t$ (ω - низька частота) рухається з іншою швидкістю, яку ми будемо називати груповою швидкістю. Це та швидкість, з якою переміщується в напрямку z функція зміни амплітуди несучої хвилі. Функція зміни амплітуди несучої хвилі може мати форму імпульсу (Мал. 14.2.а). У цьому випадку імпульс (Мал. 14.2.в) буде переміщуватися в напрямку z з груповою швидкістю. Оскільки енергія буде міститися тільки в межах імпульсу, то групова швидкість є швидкістю переміщення енергії в напрямку z .

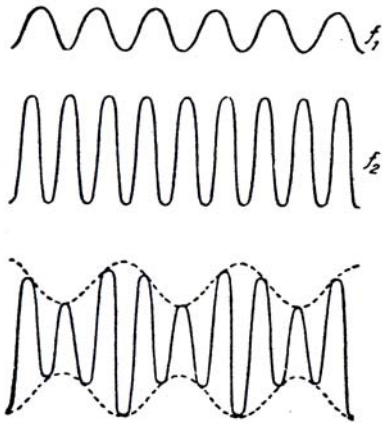
Якщо величина V_{gr} позитивна (нахил дотичної до дисперсійної кривої є позитивним), тоді енергія хвилі переноситься праворуч, а якщо величина V_{gr} є негативною, то енергія переноситься ліворуч. Групова швидкість може бути як менше так і більше за фазову швидкість. Іноді

групову швидкість пояснюють на прикладі поширення “биттів” двох синусоїдальних хвиль з однаковими амплітудами і злегка різними частотами і хвильовими числами. Запишемо ці хвилі у вигляді:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \cos[(k + \Delta k)z - (\omega + \Delta\omega)t] \\ S_2 &= S_0 \cos[(k - \Delta k)z - (\omega - \Delta\omega)t] \end{aligned} \quad (14.5)$$

Частоти хвиль відрізняються на величину $2\Delta\omega$. Через те, що кожна з них повинна мати в середовищі визначену фазову швидкість ω/k у хвильових числах виникає різниця $2\Delta k$. Тоді сума цих хвиль може бути записана у вигляді:

$$S_1 + S_2 = 2S_0 \cos(kz - \omega t) \cos(\Delta kz - \Delta\omega t) \quad (14.6)$$



Мал. 14.3.

Це синусоїдально модульована хвиля, амплітуда якої не є постійною, а змінюється в часі і просторі від нуля до значення $2S_0$ (Мал. 4.3). Вона викликає добре відоме явище - биття. Сусідні максимуми функції, що описує амплітуду, знаходяться на відстанях: $\Delta t = 2\pi / \Delta\omega$ (при фіксованому z) та $\Delta z = 2\pi / \Delta k$ (при фіксованому часі t). При цьому огинаюча хвилі дається виразом $\cos(\Delta kz - \Delta\omega t)$ і є носієм інформації. Вона поширюється з швидкістю $\Delta\omega / \Delta k$. Перейшовши до граничного випадку $\Delta\omega \rightarrow 0$, визначимо групову швидкість у такий спосіб:

$$V_{gr} = d\omega / dk = dW(k) / dk = W'(k) \quad (14.7)$$

Перейдемо тепер до докладного обговорення асимптотичних формул (13.7) та (13.8)

$$S(z, t) = F(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}} \exp\left\{ikz - iW(k)t - \frac{i\pi}{4} \text{Sgn}W''(k)\right\}.$$

$$W'(k) = z/t, \quad k > 0, \quad z/t > 0$$

У кожній точці (z, t) співвідношення (13.8) дають певне значення $k(z, t)$, а дисперсійне співвідношення $\omega = W(k)$ дозволяє знайти частоту $\omega(z, t)$ у цій точці. Введемо в наш розгляд фазу хвилі $\theta(z, t)$ в наступний спосіб: $\theta(z, t) = zk(z, t) - t\omega(z, t)$ і перепишемо формулу (13.7) у вигляді:

$$S(z, t) = \text{Re}\{S_0(z, t)e^{i\theta(z, t)}\} \quad (14.8)$$

де комплексна амплітуда S_0 дорівнює:

$$S_0(z, t) = F(k) \sqrt{2\pi / [t|W''(k)|]} \exp[-\frac{i\pi}{4} \text{Sgn} W''(k)] \quad (14.9)$$

Вираз (14.8) має форму елементарного розв'язку, де величини S_0, k, ω є змінними. Цей розв'язок описує осцилюючий хвильовий пакет з фазою θ , що представляє зміни між локальними максимумами і мінімумами. Такий пакет є неоднорідним, відстань і час між двома наступними максимумами так само змінна, як і амплітуда.

Узагальнимо на цей неоднорідний випадок поняття хвильового числа і частоти, визначивши їх як $\partial\theta/\partial z$ та $-\partial\theta/\partial t$. Нехай $\theta(z, t) = kz - W(k)t$, тоді:

$$\begin{aligned} \partial\theta/\partial z &= k + z\partial k/\partial z - tW'(k)\partial k/\partial z = k + \{z - W'(k)t\}\partial k/\partial z \\ \partial\theta/\partial t &= -W(k) + \{z - W'(k)t\}\partial k/\partial t \end{aligned} \quad (14.10)$$

Члени, що містять $\partial k/\partial z$ та $\partial k/\partial t$ виключаються умовою стаціонарності (13.8) і залишається:

$$\partial\theta/\partial z = k(z, t), \quad \partial\theta/\partial t = -W(k) = -\omega(z, t) \quad (14.11)$$

Таким чином, визначення локального хвильового числа, що було введено як спеціальне значення хвильового числа в інтегралі Фур'є, узгоджується з визначенням локального хвильового числа $\partial\theta/\partial z$ в осцилюючому неоднорідному хвильовому пакеті. Це також вірно і для локальної частоти $\omega(z, t)$. Більш того, локальне хвильове число і локальна частота задовольняють дисперсійному співвідношенню навіть у неоднорідному хвильовому пакеті. Така узгодженість двох визначень пояснюється слабкою неоднорідністю процесу. Це означає, що відносна зміна k на одній довжині хвилі чи за один період є малими, і в цьому сенсі k є функцією, яка повільно змінюється, те ж вірно для частоти й амплітуди.

Співвідношення (13.8) визначає k як функцію z і t , але корисно розглянути зворотну функцію і з'ясувати, де можна знайти конкретне значення k_0 . Відповідь є очевидною: у точках, де $z = W'(k_0)t$. Таким чином, спостерігає, що рухається зі швидкістю $W'(k_0)$, увесь час буде бачити хвилі з хвильовим числом k_0 і частотою $W(k_0)$. Це поняття швидкості групи хвиль з хвильовим числом, яке змінюється, є дуже важливим. Кожне хвильове число поширюється зі своєю груповою швидкістю, кожне конкретне хвильове число k_0 за час t зміщається на відстань $W'(k_0)t$. Поширення кожного фіксованого значення фази θ_0 описується рівнянням: $\theta(z, t) = \theta_0$, яке можна переписати в такий спосіб:

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \quad (14.12)$$

Звідси можна знайти:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial\theta/\partial t}{\partial\theta/\partial z} = +\frac{\omega}{k} \quad (14.13)$$

Таким чином, фазова швидкість V_{ph} як і раніше дорівнює ω/k , хоча поняття величин ω і k були розширені. Величина фазової швидкості не збігається з груповою швидкістю. Спостерігач, розташований на якому-небудь гребені хвилі, рухається з локальною швидкістю, але бачить локальне хвильове число і частоту, які змінюються. Тобто гребені вихідної форми ідуть від нього усе далі і далі. Спостерігач, що рухається з груповою швидкістю, бачить ті самі локальні хвильове число і частоту, але гребені проходять повз нього один за одним.

Для демонстрації цієї важливої відмінності фазової і групової швидкості розглянемо рівняння коливань балки, яке має вигляд: $\partial^2 S / \partial t^2 + \gamma^2 \partial^4 S / \partial z^4 = 0$ та відповідне дисперсійне співвідношення $W(k) = \gamma k^2$. Рівняння (13.8) надає можливість записати: $W'(k) = 2\gamma k = z/t$, звідки: $k = z/2\gamma t$, $\omega = z^2/(4\gamma t^2)$, $\theta = z^2/4\gamma t$. Груповим лініям з постійними k і ω відповідають прямі: $z/2\gamma t = \text{Const}$, а фазовим лініям з постійною θ - параболи: $z^2/4\gamma t = \text{Const}$. У даному прикладі групова швидкість $2\gamma k$ більше фазової швидкості γk .

Для хвиль на глибокій воді дисперсійне співвідношення має вид $W = \sqrt{gk}$. Тому рівняння $W'(k) = z/t$ призводить до формул: $k = gt^2/4z^2$, $\omega = gt/2z$, $\theta = -gt^2/4z$. Групова швидкість $0.5\sqrt{g/k}$ менша за фазову: $\sqrt{g/k}$.

В усіх випадках для однорідних середовищ групові лінії є прямими на відміну від фазових ліній; кожне хвильове число поширюється з постійною швидкістю, кожна фаза чи прискорюється, чи уповільнюється, проходячи через різні хвильові числа.

Поняття групової швидкості настільки важливо для розуміння хвильового руху, що воно не повинно бути кінцевим результатом перетворення Фур'є і методу стаціонарної фази. Спробуємо обійтися без перетворення Фур'є і розглянути групову швидкість як швидкість поширення хвильового числа і частоти. Виключимо з рівностей (14.10) функцію θ й одержимо рівняння:

$$\partial k / \partial t + \partial \omega / \partial z = 0, \quad (14.14)$$

у якому k є щільністю хвиль, а ω - потік хвиль. Саме рівняння описує закон збереження хвиль. Підставляючи в нього дисперсійне співвідношення, одержуємо,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + W'(k) \frac{\partial k}{\partial z} = 0 \quad (14.15)$$

Отже, групова швидкість $W'(k)$ є швидкістю поширення збурення

хвильового числа.

Друга важлива роль групової швидкості з'являється при вивченні амплітуди $S_0(z, t)$ (див. формулу (14.9)). Зручніше розглядати $|S_0|^2$, оскільки дана величина подібна енергії. Інтеграл від $|S_0|^2$ по відтинку $z_2 > z_1 > 0$ згідно до (14.9) дорівнює:

$$Q(t) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{S_0(k) S_0^*(k)}{t |W''(k)|} dz.$$

У цьому інтегралі k як функція z і t визначається рівністю (13.8). Оскільки k входить у підінтегральний вираз, а z не входить, то можна провести заміну: $z = W'(k)t$. При $W''(k) > 0$ маємо:

$$Q(t) = \int_{k_1}^{k_2} S_0(k) S_0^*(k) dk, \quad (14.16)$$

де k_1 і k_2 визначається рівняннями:

$$z_1 = W'(k_1)t, \quad z_2 = W'(k_2)t. \quad (14.17)$$

Нехай k_1 і k_2 фіксовані, а t змінюється, тоді інтеграл $Q(t)$ залишається постійним. Згідно (14.17) точки z_1 і z_2 рухаються з відповідними груповими швидкостями. У цьому сенсі $|S_0|^2$ поширюється з груповою швидкістю.

Спробуємо знайти безпосередній підхід до опису поведінки амплітуди хвилі і її зв'язків із груповою швидкістю. Розглянемо одномірну задачу для однорідного середовища на прикладі рівняння Клейна - Гордона, що є найпростішим, тому що не містить похідних високого порядку

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{zz} + \beta^2 \varphi = 0 \quad (14.18)$$

постійних коефіцієнтів α і β має вигляд:

$$(14.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \varphi_z^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \varphi^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} (-\alpha^2 \varphi_t \varphi_z) = 0$$

Розглянемо хвильовий пакет, що повільно змінюється з часом, для якого: $\varphi = a \cos(\theta + \eta)$, $a = |A|$, $\eta = \arg A$. Обчислимо для нього щільність і потік енергії. Член типу $\varphi_t^2 / 2$ дає внесок:

$$\frac{1}{2} \omega^2 a^2 \sin^2(\theta + \eta),$$

а також члени, що містять a_t і η_t . Оскільки a і η є функціями, що повільно змінюються, то цими останніми членами в першому наближенні можна знехтувати. Аналогічно знаходимо внески інших членів, після чого

одержуємо наближене значення для щільності енергії

$$\frac{1}{2}(\omega^2 + \alpha^2 k^2) a^2 \sin^2(\theta + \eta) + \frac{1}{2} \beta^2 a^2 \cos^2(\theta + \eta) \quad (14.20)$$

і потоку енергії

$$\alpha^2 k \omega a^2 \sin^2(\theta + \eta) \quad (14.21)$$

Оскільки нас цікавлять зміни величин ω, k, a , а не деталі осциляцій, то давайте розглянемо середні значення виразів (14.20) і (14.21). Отже, для середніх значень щільності і потоку енергії маємо наступні формули:

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(\omega^2 + \alpha^2 k^2 + \beta^2) a^2 \quad (14.22)$$

$$F = \frac{1}{2} \alpha^2 k \omega a^2 \quad (14.23)$$

В нашій задачі дисперсійне співвідношення має вигляд

$$\omega = \sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}, \quad (14.24)$$

Тому

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}(\alpha^2 k^2 + \beta^2) a^2 \\ F &= \frac{1}{2} \alpha^2 k \sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2} a^2 \end{aligned} \quad (14.25)$$

Значить, групова швидкість виражається формулою

$$V_{gr} = \frac{\alpha^2 k}{\sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}} \quad (14.26)$$

і ми одержуємо важливий результат

$$F = V_{gr} \varepsilon, \quad (14.27)$$

який носить загальний характер.

Введемо закон збереження усередненої енергії

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(V_{gr} \varepsilon) = 0, \quad (14.28)$$

який є виразом диференціальної форми наступного твердження: повна енергія між двома будь-якими груповими лініями залишається постійною. Дійсно, якщо розглянути енергію

$$E(t) = \int_{z_1(t)}^{z_2(t)} \varepsilon dz \quad (14.29)$$

в інтервалі між точками z_1 і z_2 , що рухаються з груповими швидкостями $V_{gr}(k_1)$ і $V_{gr}(k_2)$ відповідно, тоді

$$\frac{dE}{dt} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dz + v_{gp}(k_2) \varepsilon_2 - v_{gp}(k_1) \varepsilon_1 \quad (14.30)$$

Зважаючи на (14.28) ця величина дорівнює нулю. А рівняння (14.28) є просто граничним співвідношенням (14.30) при $z_2 - z_1 \rightarrow 0$. Щільність енергії ε пропорційна a^2 : $\varepsilon = f(k)a^2$ і якщо цей вираз підставити до (14.28), тоді результат можна записати у вигляді

$$f(k) \left\{ \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_{gp} a^2) \right\} + f'(k) a^2 \left\{ \frac{\partial k}{\partial t} + v_{gp} \frac{\partial k}{\partial z} \right\} = 0 \quad (14.31)$$

Використовуючи (14.15), одержуємо

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_{gp} a^2) = 0 \quad (14.32)$$

Останнє рівняння показує, що квадрат амплітуди хвилі поширюється з груповою швидкістю.

Реальне використання поняття про групову швидкість може викликати труднощі. Про складність цього поняття дуже чітко сказав Л. І. Мандельштам: “Швидкість поняття, що виникло при описанні руху частинки. Воно має сенс при тій умові, що існує можливість ототожнення частинки, тобто в будь-якій точці простору ми можемо стверджувати, що це та ж сама частинка. При поширенні хвилі ми маємо справу не з переміщенням частинки, а стану. Щоб говорити про швидкість, потрібно мати можливість і засоби для ототожнення стану. У лінійному середовищі без дисперсії всяке збурення поширюється без зміни форми, тому можливість ототожнення тут очевидна. Але в середовищі з дисперсією збурення в процесі поширення деформується і тут вже не можна без подальшого обговорення сказати, чому дорівнює швидкість. Наприклад, для руху хмари немає однозначного поняття швидкості. Це може бути і швидкість краю хмари. Приблизно таким чином можна обговорити питання про швидкість збурення.

Те, що було знайдено нами, стосується швидкості поширення змінної амплітуди і ця швидкість (групова) має сенс тільки за умови незмінності групи під час її переміщенні. У дисперсному середовищі такої незмінності немає, але при повільній зміні амплітуди, тобто малій її зміні на довжині хвилі і досить слабкій зміні ходу дисперсійної кривої, деформація групи хвиль також відбувається повільно. Тоді для не занадто великих відстаней термін групової швидкості приблизно описує поширення групи. У всякому разі завжди, коли є дисперсія, поняття швидкості втрачає однозначність. Можна по-різному визначити швидкість і одне з визначень це *групова швидкість*.”

15. ПОЛЯРИЗАЦІЯ ХВИЛЬ

Дотепер ми розглядали скалярні хвилі. Припустимо тепер, що деяка векторна величина $\vec{S}$ (швидкість, напруженість електричного чи магнітного поля і т.д.) є функцією координат і часу. Обмежимося випадком плоскої хвилі, що не деформується

$$\vec{S} = \vec{S}(\omega t - kz)$$

Якщо вектор $\vec{S}$ перпендикулярний напрямку поширення, тобто до осі z , хвиля називається *поперечною*, якщо вектор $\vec{S}$ є паралельним до k , тоді хвиля називається *поздовжньою*. У загальному випадку вектор $\vec{S}$ має і поздовжню і поперечну складові. Випадок подовжньої хвилі практично не відрізняється від випадку скалярної хвилі. У випадку електромагнітної хвилі терміни поздовжній і поперечний відносяться до напрямку $\vec{k}$ щодо електричного поля хвилі $\vec{E}$. Якщо осцилююче магнітне поле хвилі $\vec{B}$ дорівнює нулю, то така хвиля є електростатичною, у протилежному випадку вона є електромагнітною. Походження цих термінів зв'язано з рівнянням Максвела

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}},$$

яке запишемо у вигляді

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$$

Якщо хвиля поздовжня, тоді $\vec{k} \times \vec{E} = 0$; а тому подовжня хвиля є також електростатичною. У поперечній хвилі $\vec{B} \neq 0$ і, отже, поперечна хвиля являє собою електромагнітну хвилю.

Частинним випадком поперечної хвилі є той випадок, коли $\vec{S}$ має у всіх точках простору однаковий та незмінний в часі напрямок, але може мати різний знак. Розташуємо вісь u по цьому напрямку. Зміна в часі і просторі вектора $\vec{S}$ може бути описано завданням, як скалярна функція t і z , тобто $S = S_y$.

Але цей випадок докорінно відрізняється від скалярної хвилі і від поздовжньої векторної хвилі. Тут різні напрямки, перпендикулярні до напрямку поширення, є нерівноправні між собою.

Розглянемо більш загальний випадок поперечної хвилі, коли не тільки величина, але і напрямок вектора $\vec{S}$ залежить від t і z . Назвемо *синусоїдальною поперечною хвилею* таку, у якій проекції S_x і S_y вектора $\vec{S}$ на два взаємно перпендикулярні напрямки, перпендикулярні напрямку поширення z , та виражаються формулами

$$S_y = S_1 \cos(\omega t - kz - \alpha) \quad (15.1)$$

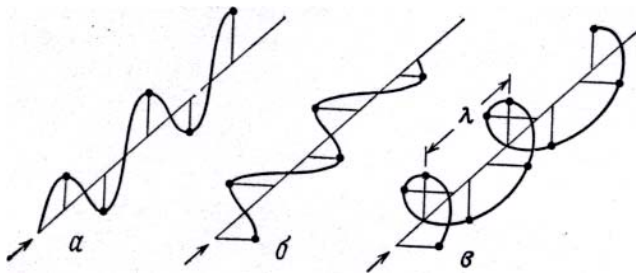
$$S_x = S_2 \cos(\omega t - kz - \beta),$$

де $S_1, S_2, \omega, k, \alpha, \beta$ - постійні.

Ці проекції утворюють синусоїдальні скалярні хвилі, що поширюються з однаковою швидкістю. Рівняння (15.1) можна розглядати як рівняння деякої траєкторії, написаної в параметричній формі. Шляхом елементарних обчислень можна знайти співвідношення, що зв'язує S_x і S_y . Воно має вигляд:

$$\frac{S_y^2}{S_1^2} + \frac{S_x^2}{S_2^2} - 2 \frac{S_y S_x}{S_1 S_2} \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta) \quad (15.2)$$

Отже, при додаванні двох взаємно перпендикулярних векторів, що виконують синхронні гармонійні коливання, виходить вектор, кінець якого рухається по еліпсу. Значить, синусоїдальна поперечна хвиля є еліптично поляризованою. Зокрема, якщо $\alpha - \beta = \pm \frac{\pi}{2}$, то головні осі еліпсів збігаються з осями координат; якщо, крім того, $S_1 = S_2$, еліпси перетворюються в кола. У цьому випадку говорять, що хвиля поляризована по колу. Іншим дуже важливим випадком є: $\alpha - \beta = 0$, чи $\alpha - \beta = \pm \pi$, або коли $S_1 = 0$, чи $S_2 = 0$. У цьому випадку еліпс вироджується в пряму лінію і хвиля називається *лінійно поляризованою*. Як приклад розглянемо коливання струни в двох взаємно перпендикулярних площинах.



Мал. 15.1.

На Мал. 15.1. показані різні види поляризації синусоїдальних хвиль, що біжать по натягнутій струні. а - це хвиля, що поляризована у вертикальній площині (струна рухається нагору і вниз), б - хвиля з тією же амплітудою, але поляризована в горизонтальній площині (струна руха-

ється праворуч та вліворуч). Горизонтально поляризована хвиля випереджає вертикально поляризовану на чверть довжини хвилі. Коли напруженість горизонтально поляризованої хвилі дорівнює її амплітудному значенню, напруженість вертикально поляризованої хвилі дорівнює нулю і сягне свого максимального значення після того, як хвиля просунеться ще на чверть довжини хвилі.

Малі коливання в натягнутій струні є лінійними, так що дві хвилі можуть поширюватися, не справляючи впливу одна на іншу. На Мал. 15.1 (в) показано, як коливається струна, коли в ній присутні обидві хвилі (а) і (б). Напруженість хвилі, тобто зсув струни, у цьому випадку описує

спіраль. Струна усюди знаходиться на однаковій відстані від осі і робить один виток на одній довжині хвилі λ . У лінійно поляризованих хвилях (а) і (б) напруженість хвилі змінюється в часі; напруженість хвилі (в) постійна по величині і лише повертається по колу з часом. Хвиля (в) поляризована по колу.

Якщо спостерігати за точкою перетину цієї хвилі з площиною перпендикулярної напрямку її поширення, то ми побачимо, що ця точка описує коло за стрілкою годинника, тобто в правогвинтовім напрямку. Сама спіраль, що утворена струною, має вигляд лівої різьби.

Якби хвиля (б) запізнювалася на чверть довжини хвилі щодо хвилі (а), то точка перетину сумарної хвилі з тією же площиною переміщувалася б по колу проти стрілки годинника, а сама спіраль мала би форму правої різьби.

Хвилі з круговою поляризацією можуть мати або праву, або ліву поляризацію, причому її напрямок вибирається умовно.

Опишемо хвилі, представлені на Мал.15.1. Якщо вісь y орієнтовано вгору, а вісь z - праворуч, тоді для двох складових хвиль маємо

$$y = S_0 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right) \quad (15.3)$$

$$x = S_0 \cos(\omega t - kz) \quad (15.4)$$

Для сумарної хвилі радіус r , виміряний на осі z , дорівнює

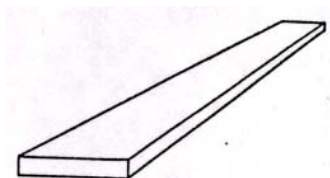
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = S_0 \quad (15.5)$$

Раніше ми дійшли висновку, що потужність хвилі має деяке середнє значення і частину, що коливається з подвійною частотою. З (15.5) випливає, що потужність хвилі з круговою поляризацією постійна в часі. Її середня потужність дорівнює миттєвої потужності, тому що напруженість хвилі не змінюється ні в часі, ні в просторі.

У багатьох середовищах хвилі поширюються однаково при будь-якій їхній поляризації. Але це стосується не всіх середовищ. Є магнітні середовища, у яких електромагнітні хвилі поширюються з малими втратами. Якщо в такій речовині мається магнітне поле, орієнтоване за напрямком поширення хвилі, то швидкість поширення неоднакова для хвиль з лівою і правою круговою поляризацією. При деяких магнітних полях для хвиль з різним напрямком кругової поляризації неоднакові втрати, так що середовище може бути прозорим для однієї кругової поляризації та непрозорим для іншої.

За таких умов поглинання хвилі залежить від того, у який бік змінюється в часі кут θ , що визначає миттєвий напрямок напруженості хвилі. Цей кут змінюється в той саме бік у випадку праворуч поляризованої хвилі, а у випадку ліворуч поляризованої хвилі – в протилежному напрямку. Тому середовище може бути прозорим для ліворуч поляризованої хвилі, що поширюється в одному напрямку, і

непрозора для тієї ж хвилі, що поширюється в протилежному напрямку. Це дозволяє створювати розв'язуючі пристрої, що пропускають електромагнітні хвилі від входу до виходу, але поглинають хвилю, яку подають в протилежному напрямку, до виходу.



Мал. 15.2.

Властивості деяких середовищ неоднакові в різних напрямках. Такі середовища називають *середовищами з подвійною променезаломлюваністю*. У них фазова швидкість хвиль, поляризованих у взаємно перпендикулярних площинах, неоднакова. Подвійну променезаломлюваність має довгий пружний брус (Мал. 15.2). Він являє собою середовище з

дисперсією. При даній частоті фазова швидкість залежить від маси на одиниці його довжини та від твердості бруса $v_{\phi} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$. Брус, показаний

на Мал. 15.2, є явно жорсткішим при згинанні в горизонтальній площині, ніж у вертикальній. У такому брусі при даній частоті горизонтально поляризована хвиля поширюється швидше (з фазовою швидкістю $v_{\phi.б.}$), чим вертикально поляризована хвиля (швидкість $v_{\phi.м.}$). Ми бачили, що хвилю, поляризовану по колу, можна розглядати як таку, що складається з двох плоскополяризованих хвиль. Точно так само хвилю з напруженістю S_{θ} (Мал.15.3), поляризовану в площині, яка є проміжною між площинами великої і малої фазової швидкості, можна розглядати як суму двох складових: вертикально поляризованої хвилі з напруженістю S_{θ_y} і горизонтально поляризованої хвилі з напруженістю S_{θ_x} . У середовищі з подвійною променезаломлюваністю при поширенні цих двох складових їхня відносна фаза змінюється. Це призводить до найцікавіших наслідків.

Нехай ми посилаємо плоскополяризованою хвилю, що лежить у середній площині між вертикаллю і горизонталлю, тобто в площині, що утворює кут 45° з вертикальною площиною малої і горизонтальною площиною великої фазової швидкості. При цьому швидка і повільна складові мають однакову напруженість. Пройшовши деяку відстань l , горизонтальна складова випередить на чверть довжини хвилі вертикальну складову. Але це саме відповідає ситуації на Мал.15.1. У цьому місці вихідна плоскополяризована хвиля перетвориться в хвилю з правою поляризацією.

Отже, якщо зрушити на пів хвилі одну зі складових хвиль, то напрямок кругової поляризації зміниться на зворотне. Отже, на довжині $2l$ від того місця, де складові, утворять хвилю з правою поляризацією, вони будуть вже утворювати хвилю з лівою поляризацією. Послідовність поляризацій буде така:

Відстань

O

l

$2l$

$3l$

і т.д.

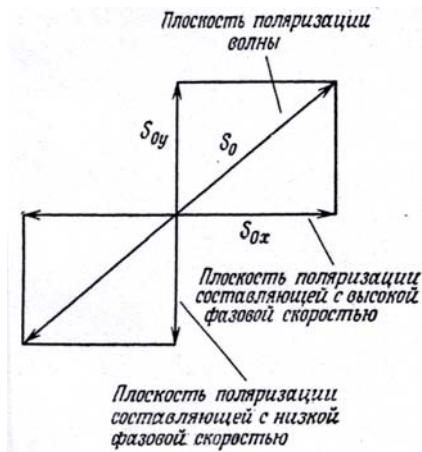
Поляризація

лінійна, 45° до осі x

права

лінійна, 135° до осі x

ліва



Мал.15.3.

хвилеводі з невеликою еліптичністю фазова швидкість для електромагнітних хвиль, електричний вектор яких спрямований по великій осі, більша, ніж для хвиль, електричний вектор яких спрямований за малою віссю.

Отже, середовище з подвійною променезаломлюваністю можна одержати шляхом невеликого сплющування круглого хвилеводу.

У середовищі з подвійною променезаломлюваністю можливим є взаємне обернення хвилі з лінійною поляризацією в хвилю з поляризацією по колу, а праворуч поляризовану хвилю - у ліворуч поляризовану, та назад. Це знаходить широке застосування в оптиці і техніці СВЧ.

До середовищ з подвійною променезаломлюваністю відносяться деякі природні матеріали, наприклад, кристали ісландського шпату. Але таке середовище можна виготовити і штучно. Наприклад, у

16. СКАЛЯРНЕ ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ

Розглянемо довільну функцію

$$f(at - bz) \quad (16.1)$$

Продиференціювавши її двічі за часом та координатою t та z , переконуємося, що вона задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \text{ де } v = \frac{a}{b} \quad (16.2)$$

Цьому ж рівнянню задовольняє довільна функція

$$f(at + bz) \quad (16.3)$$

Функції (16.1) і (16.3) при додатних a і b описують плоскі хвилі, що поширюються без деформацій праворуч чи ліворуч зі швидкістю v .

Диференціальне рівняння в частинних похідних (16.2), що грає у фізиці дуже важливу роль, називається *хвильовим* рівнянням. Воно не має розв'язків, відмінних від тих, котрі представляються функціями (16.1) і (16.3) чи їх суперпозицією $f_1(at - bz) + f_2(at + bz)$. Усякий раз, коли яка-небудь фізична величина S задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \quad (16.4)$$

можна сказати, що процес зміни цієї величини носить характер плоскої хвилі, що поширюється в той чи інший бік зі швидкістю v , чи є суперпозицією таких хвиль. Це рівняння можна застосувати до ідеальних плоских електромагнітних хвиль, плоских звукових хвиль, або хвиль у натягнутих струнах.

Вигляд функцій f_1 і f_2 визначається характером руху джерел хвиль, а також явищами, що відбуваються на межі середовища, в якому ці хвилі поширюються. Нехай джерелом хвиль є площина $z = 0$, причому на цій площині величина S коливається за законом $S_0 \cos \omega t$. У цьому випадку від площини $z = 0$ поширюються праворуч та ліворуч хвилі: $S = S_0 \cos(\omega t \mp kz)$, $k = \omega/v$. З лінійності хвильового рівняння випливає, що якщо йому задовольняють функції $S_1, S_2, S_3, \dots$ кожна окремо, тоді йому задовольняє також функція $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$.

Цьому рівнянню задовольняють біжучі синусоїдальні хвилі: $S_1 = S_0 \cos(\omega t - kz)$, $S_2 = S_0 \cos(\omega t + kz)$ та стоячі хвилі: $S = 2S_0 \cos kz \cos \omega t$, які є суперпозицією синусоїдальних хвиль, що біжать назустріч одна одній, а також усяка функція, що має вигляд:

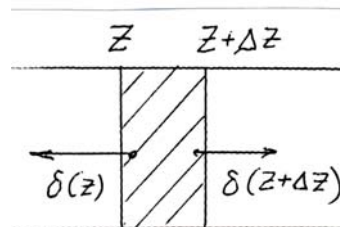
$$S = S_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) + S_2 \cos \omega_2 \left(t - \frac{z}{v} \right) + S_3 \cos \omega_3 \left(t - \frac{z}{v} \right) + \dots;$$

яка описує несинусоїдальну хвилю, що поширюється без деформацій у бік зростаючих z .

Одержимо хвильове рівняння для випадку поширення звукової хвилі в стрижні. Для цього напишемо рівняння руху ділянки стрижня, укладеного між двома площинами z і $z + \Delta z$.

$$\rho_0 S_0 \Delta z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S_0 \delta(z + \Delta z) - S_0 \delta(z) \quad (16.5)$$

$\rho_0 S_0 \Delta z$ - маса ділянки стрижня, ρ_0 , S_0 - відповідно, щільність та площа перетину за умов відсутності деформації, ξ - зсув центра мас розглянутої частини стрижня. Праворуч у рівнянні (16.5) маємо результуючу зовнішніх сил, що діють на стрижень. Розділивши (16.5) на $S_0 \Delta z$ і виконавши граничне перетворення $\Delta z \rightarrow 0$, одержимо рівняння



Мал.16.1. Ілюстрація здобуття рівняння руху частини стрижня.

$$\rho_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\partial \delta}{\partial z} \quad (16.6)$$

де δ - механічна напруга, тобто сила, прикладена до ділянки стрижня, поділена на його поперечний переріз, який був у стрижня до деформації.

При невеликих пружних деформаціях стрижня можливі два випадки. У першому випадку кожна з частин, на які ми розділили стрижень, тягне іншу. В другому кожна з цих частин давить на іншу. Умовимося вважати напругу $\delta(z)$ позитивною, якщо сила, що діє на частину стрижня, розташовану ліворуч від площини z з боку частини стрижня, розташованого праворуч від площини z , спрямована праворуч. Величина $p = -\delta$ називається тиском у розглянутій площині. Напруга за законом Гука, який описує випадок пружної деформації, є пропорційною до поздовжньої деформації в даній точці:

$$\delta = E \varepsilon \quad (16.7)$$

де $\varepsilon = \partial \xi / \partial z$, $E - \text{Const}$, що називається модулем пружності, або модулем Юнга. Підставляючи (16.7) до (16.6), одержимо

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (16.8)$$

Це хвильове рівняння, яке вказує, що зсув поширюється вздовж стрижня у вигляді хвиль

$$\xi = f(z \mp C_s t) \quad (16.9)$$

Швидкість їхнього поширення (швидкість звуку в стрижні)

$$C_s = \sqrt{E / \rho} = u \quad (16.10)$$

Ця швидкість тим більше, чим жорсткішим та легшим є матеріал. Формула (16.10) є однією з основних формул акустики.

Вираз для швидкості $v = \partial \xi / \partial t$, з яким рухаються окремі площини $z = \text{Const}$, деформації і напруги стрижня в цій площині мають вигляд:

$$v = \mp C_S f'(z \mp C_S t) \quad (16.10 \text{ а})$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial z} = f'(z \mp C_S t) \quad (16.10 \text{ б})$$

$$\delta = E f'(z \mp C_S t) \quad (16.10 \text{ в})$$

Таким чином, зсув ξ , швидкість v , деформація ε і напруга δ поширюються у вигляді зв'язаних між собою хвиль, що не деформуються, що мають ту саму швидкість і однаковий напрямок поширення. Порівнюючи (16.10 а) і (16.10 б) і беручи до уваги (16.10), бачимо, що

$$v = \frac{p}{R}, \text{ де } R = \frac{E}{u} = \sqrt{E\rho} = \rho u \quad (16.10 \text{ г})$$

є величина, що не залежить від виду функції f й обумовлена тільки властивостями матеріалу. Вона називається *питомим акустичним опором матеріалу*.

Аналіз пружних хвиль у рідинах і газах призводить до хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = C_S^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}, \quad (16.11)$$

де $C_S = \sqrt{f'(\rho_0)}$.

Тиск p є функцією щільності даної маси газу (чи рідини) і температури. Температура у свою чергу змінюється при стисканні і розрідженні. Оскільки теплопровідність рідин і газів є дуже малою, то можна вважати, що при поширенні звуку стискання і розрідження кожної частини чи газу рідини відбуваються *адіабатично*, тобто без помітного теплообміну із сусідніми частинами. У цьому випадку тиск є однозначною функцією щільності

$$p = f(\rho) \quad (16.12)$$

Записавши тиск і щільність у вигляді рівноважних та збурених значень

$$p = p_0 + \Delta p, \rho = \rho_0 + \Delta \rho, \quad (16.13)$$

підставимо їх до формули (16.6), врахувавши, що $\partial p_0 / \partial z = 0$:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \delta}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(\Delta p) \quad (16.14)$$

Тепер знайдемо зв'язок між Δp і деформацією $\varepsilon = \partial \xi / \partial z$, знайшовши вираз для Δp як функції $\Delta \rho$, а потім $\Delta \rho$, як функції ε . Підставляючи (16.13) у (16.12), одержимо: $p_0 + \Delta p = f(\rho_0 + \Delta \rho)$. Розкладемо $f(\rho_0 + \Delta \rho)$ в ряд:

$$p_0 + \Delta p = f(\rho_0) + f'(\rho_0)\Delta \rho + \frac{1}{2}f''(\rho_0)(\Delta \rho)^2 + \dots$$

Оскільки $p_0 = f(\rho_0)$, то для збуреного значення тиску маємо:

$$\Delta p = f'(\rho_0) \Delta \rho \quad (16.15)$$

При цьому ми врахували члени, що відповідають малій деформації та знехтували нелінійними членами $(\Delta \rho)^2, (\Delta \rho)^3$ і т.д. Саме це свідчить про те, що ми обмежуємо себе розглядом лінійних хвиль. Об'єм V_0 у результаті деформації змінюється таким чином:

$$V = V_0(1 + \varepsilon), \quad (16.16)$$

що пояснюється тим, що поперечний розмір пружного стрижня не змінюється, а довжина змінюється на $\Delta z = \Delta z_0(1 + \varepsilon)$.

Добуток щільності на об'єм, тобто маса розглянутої частини стрижня, не змінюється, тобто має місце рівняння: $\rho V = \rho_0 V_0$. Підставляючи (16.13) у (16.16), одержимо: $(\rho_0 + \Delta \rho)(1 + \varepsilon) = \rho_0$, звідки можна здобути вираз для деформації:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \rho}{\rho_0 + \Delta \rho} = -\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right)^{-1} = -\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + \dots\right)$$

Знехтувавши вищими ступенями малої величини $\Delta \rho / \rho_0$, одержуємо $\Delta \rho = -\rho_0 \varepsilon$ та вираз для збуреного значення тиску:

$$\Delta p = -\rho_0 f'(\rho_0) \varepsilon = -\rho_0 f'(\rho_0) \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (16.17)$$

Підставляючи (16.17) у (16.14), одержуємо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = C_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (16.11)$$

Отже, малі деформації поширюються у вигляді плоских хвиль, що не деформуються, швидкість поширення є тим більшою, чим сильніше в даному середовищі зростає тиск при адіабатичному зростанні щільності. Вона дорівнює кореню квадратному з похідної тиску по щільності, узятій при значенні останньої за умов відсутності хвильового збурення. Для ідеального газу

$$f'(\rho_0) = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad \text{і} \quad C_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (16.18)$$

де γ - відношення теплоємностей газу при постійному тиску і постійному об'ємі. Для повітря $\gamma = 1,4$ при кімнатній температурі (20°) і формула (16.18) дає значення швидкості звуку 340 м/сек.

Хвильове рівняння для сферичних хвиль має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rS) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(rS)}{\partial t^2} = 0. \quad (16.19)$$

Це рівняння збігається з (16.4), якщо в останньому замінити z на r , і S на rS , де r - відстань від деякої точки. Отже, рішення рівняння (16.19) можна відразу записати у вигляді: $S = (S_1(r - vt) + S_2(r + vt))/r$, де S_1 і S_2 як і раніше довільні функції. У правій частині перший член представляє сферичну хвилю, що розповсюджується з початку координат, другий – сферичну хвилю, що сходиться до початку координат, причому швидкість поширення обох хвиль дорівнює v .

Сферичні синусоїдальні хвилі

$$S = \frac{S_0}{r} \cos(\omega t - kr) \quad (16.20)$$

мають поверхню рівної амплітуди і рівної фази, це сфери з радіусом $r = \text{Const}$.

При дуже великих r хвиля поводить себе на обмежених ділянках майже так само, як плоска хвиля, для якої $S = S_0 \cos(\omega t - kz)$. Тут z змінюється в тому ж напрямку, що і r , а амплітуда S_0 задається співвідношенням $S_0 = \frac{S_0}{r}$.

17. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА І ХВИЛІ

Теорія Максвелла затверджує, що між основними величинами, що характеризують електромагнітне поле в довільному середовищі чи вакуумі, існують прості й універсальні зв'язки, що виражаються написаними нижче чотирма рівняннями.

$$\oint D_n dS = 4\pi \int \rho dv \quad (17.1)$$

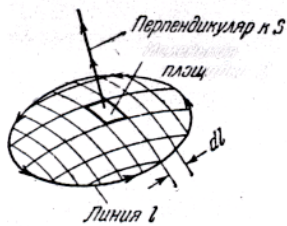
$$\oint B_n dS = 0 \quad (17.2)$$

$$\oint E_l dl = -\frac{1}{c} \int \dot{B}_n dS \quad (17.3)$$

$$\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c} \int \left(J_n + \frac{\dot{D}_n}{4\pi} \right) dS \quad (17.4)$$

О. Хевісайд у праці, присвяченій електриці і магнетизму, виклав рівняння Максвелла в простій формі і застосував їх до пояснення властивостей плоских електромагнітних хвиль. Ми будемо розглядати електромагнітні хвилі в такий саме спосіб.

Розглянемо поверхню, що показано на Мал.17.1. Насправді її форма



може бути довільною. Розділимо цю поверхню на маленькі частки і площу однієї з них позначимо через S . Далі проведемо перпендикуляр до обраної площі і задамо напрямок на лінії перпендикуляра за допомогою подвійної стрілки. Потік крізь цю маленьку площу можна одержати, помноживши S на компонент напруженості поля, що є паралельним лінії перпендикуляра. Цей потік може бути позитивним або негативним в залежності від того, орієнтований компонент поля уздовж чи проти напрямку перпендикуляра до S .

Мал. 17.1.

Також можна знайти і повний потік крізь усю поверхню, обмежену лінією l . На лінії l , що проходить вздовж межі нашої поверхні, маються стрілки, що показують напрямок цієї лінії. Крім того, там же вказано невеликий відтинку dl цієї лінії. Припустимо тепер, що ми взяли компонент магнітного поля H_l , що паралельний до відтинку dl та має той саме напрямок. Помножимо H_l на dl , проробимо тими ж саме з всіма іншими малими відтинками, які у цілому складають периметр поверхні - усю лінію l . Сума всіх добутків, що вийшли, і буде тим, що маєтсья на увазі під криволінійним $\oint H_l dl$ інтегралом рівняння (17.4). Символ $\dot{D}_n$ означає швидкість, з яким електричний потік $N = \epsilon E_n S = D_n S$ змінюється в часі. Величина $\int J_n dS$ означає повний електричний струм, створюваний

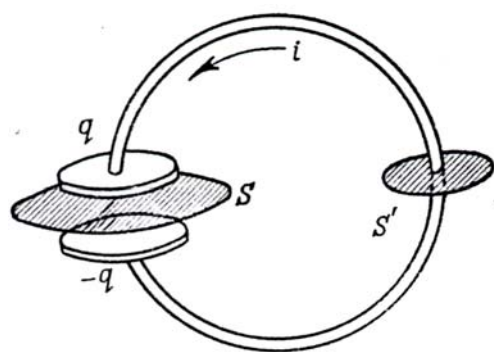
рухом заряджених частинок крізь усю поверхню, обмежений лінією l , тобто струм, що тече крізь усю площу убік подвійної стрілки.

Максвел установив, що зміна електричного потоку діє точно так само як і рух електричних зарядів, збуджуючи магнітне поле. Отже,

$\int \frac{\dot{D}_n}{4\pi} dS$ вважається частиною повного електричного струму, називається

ця частина *струмом зсуву*. Частина струму, що є результатом руху зарядів, називається *конвекційним струмом* чи *струмом провідності*.

Користаючись терміном “струм зсуву”, ми можемо сказати: через дану поверхню тече струм зсуву, коли змінюється потік електричної індукції, що пронизує цю поверхню.



Мал.17.2. Через поверхню S тече “струм зсуву”, через поверхню S' тече струм провідності, що дорівнює струму зсуву.

Наприклад, через поверхню S (Мал. 17.2), проведену між обкладками конденсатора, тече синусоїдальний струм зсуву, синфазний зі струмом провідності в дроті, що замикає конденсатор. Дійсно $\vec{D}$ пропорційно заряду обкладок q , а значить, $\dot{\vec{D}}$ є пропорційним до $\dot{q} = i$, тобто струму в дроті. Якщо поверхня S охоплює всі силові лінії електричного поля конденсатора, струм зсуву через неї дорівнює струму провідності i . У цьому випадку на підставі рівняння (17.1)

$$\int D_n dS = 4\pi q, \quad \text{звідкіля струм зсуву:}$$

$$\int \dot{D}_n dS = 4\pi \dot{q} = 4\pi i.$$

Можна сказати, що конвекційний струм у проводі замикається струмом зсуву через конденсатор. Отже, рівняння (17.4) говорить, що криволінійний інтеграл магнітного поля по замкненій кривій дорівнює повному струму крізь область, обмежену цієї кривої. Воно описує порушення магнітного поля рухом зарядів і струмом зсуву, або, що є тим саме, зміною електричного поля.

Рівняння Максвела (17.3) описує збудження електричного поля зміною магнітного поля. Воно говорить, що криволінійний інтеграл електричного поля по замкненій кривій дорівнює узятій із зворотним знаком швидкості зміни магнітного потоку $\Phi = \mu H_n S$ крізь область, обмежену кривої. Величину $\frac{d\Phi}{dt}$ можна назвати магнітним струмом зсуву.

Оскільки вільних магнітних зарядів (монополів) не існує, то магнітний конвекційний струм дорівнює нулю. Для пояснення рівняння (17.3) згадаємо, що робота, виконана при переміщенні заряду, дорівнює

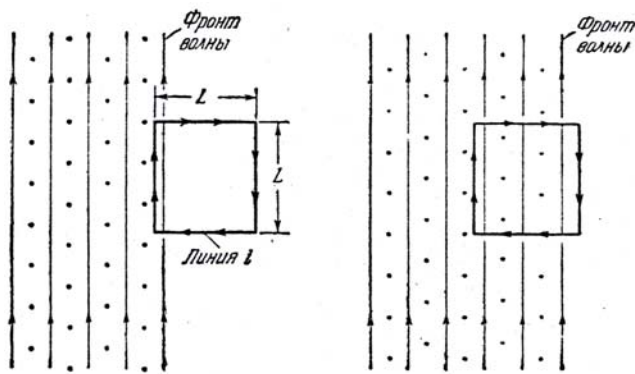
$eE \cdot l$. Але якщо ми будемо рухати заряд досить швидко, щоб поле не встигло помітно змінитися за час переміщення електрона, то виконана нами робота саме і буде дорівнює величині заряду, помноженої на криволінійний інтеграл електричного поля, тобто помноженої на ліву частину рівняння Максвелла (17.3). Магнітні поля самі по собі не можуть виконувати роботу над електричними зарядами, але змінні магнітні поля створюють електричні поля, які виконують роботу над електричними зарядами, що рухаються. Саме цей феномен і лежить в основі дії бетатрона. Рівняння (17.3) виражає закон індукції Фарадея.

Нехай тепер поверхня, зображена на мал.6.1, роздулася подібно повітряній кулі в сферу, а лінія l стала обмежувати отвір у цій сфері. Будемо тепер периметр l отвору укорочувати і зрештою зробимо $l = 0$. Криволінійний інтеграл буде зменшуватися і ми одержимо нарешті: $\oint E_l dl = 0$, $\oint H_l dl = 0$.

Таким чином, ми здобули замкнену поверхню, в об'ємі якої укладена частина простору. Що говорять рівняння Максвелла про таку замкнену поверхню? Друге рівняння говорить про те, що повний струм, що тече усередину чи зсередини будь-якого об'єму через замкнену поверхню, завжди дорівнює нулю.

Припустимо, що спочатку немає ні струму, ні електричного поля, ні електричного потоку. Потім в об'єм крізь обмежуючу його поверхню починає текти конвекційний струм. Якщо заряди позитивні, то вони утворюють негативний конвекційний струм, тому що напрямок їхнього руху є зворотним до напрямку нормалі до поверхні, яка орієнтована назовні. Величина негативного конвекційного струму є швидкістю проникнення електричних зарядів крізь поверхню в обмежений нею об'єм, іншими словами, це швидкість зміни заряду в об'ємі. Величина $\oint \dot{D}_n dS / 4\pi$ є швидкістю зміни електричного потоку крізь ту ж поверхню. Оскільки, відповідно до рівняння Максвелла, ці дві швидкості дорівнюють одна одній, то в процесі нагромадження в об'ємі повного заряду q на поверхні буде встановлюватися повний електричний потік з об'єму, який завжди задовольняє рівності (17.1), що є виразом теореми Остроградського - Гауса. А рівняння Максвелла (17.2) виражає факт відсутності монополів: потік магнітної індукції через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю.

Розглянемо тепер одну просту комбінацію електричних і магнітних полів – плоскі електромагнітні хвилі. Мал.17.3 зображує частину такої хвилі. Передня частина – фронт хвилі - лежить у площині, яка є перпендикулярною до напрямку її поширення. За фронтом існує однорідне магнітне поле H , спрямоване вгору, в площині малюнка і однорідне електричне поле напруженості E , яке є перпендикулярним до площини малюнка, його вектор іде від нас. Нехай хвиля поширюється в повітрі або у вакуумі, де немає електричних зарядів і викликаних їхнім рухом конвекці-



Мал.17.3.

сягнув правої сторони квадрата. У кожному з цих станів відсутня компонента магнітного поля уздовж верхньої і нижньої сторін квадрата, до того ж поле ще не досягло його правого боку. Таким чином, маємо:

$\oint H_l dl = HL$. Хвиля перетинає квадрат за час $t = \frac{L}{v}$. На початку цього інтервалу часу електричний потік крізь квадрат дорівнює нулю; наприкінці інтервалу електричний потік дорівнює: $N = \epsilon EL^2$. А швидкість зміни потоку $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{N}{t} = \epsilon ELv$.

Відповідно до рівняння Максвела (17.4) можна записати: $H = \epsilon Ev$. Розглянемо тепер співвідношення для квадрата, що є паралельним до електричного поля і нормальний до магнітного поля. Рівняння (17.3) дає наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}\oint E_l dl &= EL \\ \Phi &= -\mu HL^2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\mu HLv, \\ E &= \mu Hv.\end{aligned}$$

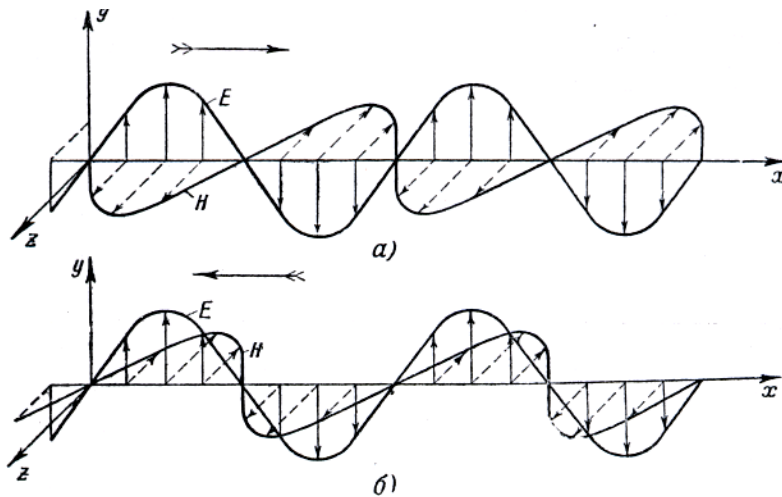
З двох рівнянь Максвела ми одержали

$$E = \mu Hv, \quad H = \epsilon Ev \quad \text{та} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

Якщо в останнє співвідношення підставити числові значення ϵ та μ , ($\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-14} \frac{\kappa}{\text{в} \cdot \text{м}^2}$, $\mu = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{вебер}}{\text{а} \cdot \text{м}}$), тоді можна обчислити швидкість електромагнітної хвилі $v = 3 \cdot 10^8$ м/сек. Саме ця величина дорівнює і швидкості світла. Коли Максвел вперше одержав рівняння електромагнітних хвиль, те саме цей факт навів його на думку, що світло є електромагнітною хвилею.

Отримані вище співвідношення для E і H ми можемо розділити одне на інше й одержати $E/H = \sqrt{\mu/\epsilon} = 377$. Це співвідношення є справедливим для всіх плоских електромагнітних хвиль незалежно від того, яку форму вони мають: короткого імпульсу, чи синусоїди в напрямку їхнього поширення.

У хвилі, що синусоїдально змінюється в часі, електричне і магнітне поля перпендикулярні одне до одного та до напрямку їх поширення, як це має місце в описаній вище хвилі. Коли хвиля проходить через яку-небудь точку простору, то в ній напруженість електричних і магнітних полів то зростає, то спадає (мал.6.4). При цьому максимуми магнітного електричного полів спостерігаються в цій точці одночасно.



Мал.17.4.

Синусоїдальна y -хвиля, що поширюється: а- ліворуч праворуч,
б – праворуч ліворуч.

Плоска електромагнітна хвиля є суперпозицією двох не зв'язаних між собою полів:

- 1) поля, у якому вектори $\vec{E}$ і $\vec{D}$ колінеарні осі y , а вектори $\vec{H}$ і $\vec{B}$ - осі z (y - поле)
- 2) поля, у якому вектори $\vec{E}$ і $\vec{D}$ рівнобіжні осі z , а вектори $\vec{H}$ і $\vec{B}$ - осі y (z - поле) (Мал.17.5).

На підставі рівнянь Максвелла y - поле описується рівняннями

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (17.5)$$

а z - поле –

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (17.6)$$

Розглянемо окремо ці поля. У кожному з них $\vec{E}$ і $\vec{H}$ зв'язані між собою, обоє є електромагнітними полями.

Розглянемо спочатку y - поле. Зі співвідношень (17.5) легко одержати

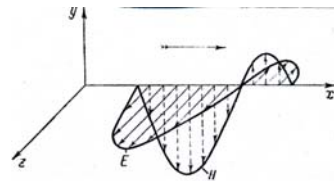
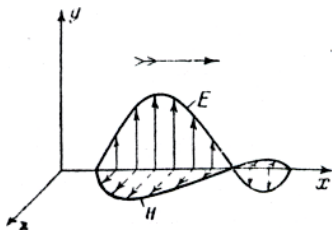
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (17.7)$$

Це – хвильове рівняння, у якому роль швидкості поширення грає величина $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Отже, електричний компонент y - хвилі поширюється у вигляді хвилі, що не деформується, зі швидкістю v .

Точно також одержимо хвильове рівняння для магнітного компонента y - хвилі

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad (17.7 \text{ а})$$

Магнітний компонент y - хвилі також поширюється у виді хвилі, що не деформується, з тією же самою швидкістю, що й електричний компонент.



Моментальний знімок y -хвилі,
що поширюється праворуч

Моментальний знімок z -хвилі, що
поширюється
праворуч.

Мал.17.5.

Розв'язком хвильового рівняння (17.7) буде

$$E_y = f(x \mp vt), \quad (17.8)$$

а хвильового рівняння (17.8 а)

$$H_z = g(x \mp vt) \quad (17.8 \text{ а})$$

Тоді можна знайти такі похідні величини: $\frac{\partial E_y}{\partial x} = f'(x \mp vt),$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \mp v g'(x \mp vt).$$

Підставляючи ці вирази до (17.5), одержимо: $g'(x \mp vt) = \pm \frac{c}{\mu v} f'(x \mp vt).$

Якщо цей вираз проінтегрувати, то одержуємо:

$g(x \mp vt) = \pm \frac{c}{\mu v} f(x \mp vt) + H_0$, де $H_0 = \text{Const}$. Таким чином, на підставі

(17.8) і (17.8a) маємо: $H_z = \pm \frac{c}{\mu v} E_y + H_0$. Оскільки, статичне поле нас не цікавить ($H_0 = 0$), то остаточно одержуємо

$$H_z = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y \quad (17.9)$$

Верхній знак відповідає хвилі, що поширюється праворуч. Отже, ми показали, що в кожній точці простору, у кожен момент часу магнітний компонент пропорційний електричному компоненту.

За аналогією для z - хвилі одержуємо

$$H_y = \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_z \quad (17.10)$$

Як у y - хвилі, так і в z - хвилі вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ перпендикулярні один одному і перпендикулярні напрямку поширення. Поширення відбувається в той бік, куди спрямований векторний добуток $\vec{E} \times \vec{H}$. У випадку вакууму ($\mu = 1$, $\epsilon = 1$) швидкість поширення $v = c$ і $H_z = \pm E_y$, $H_y = \mp E_z$.

При зробленому виборі одиниць абсолютні напруженості електричних і магнітних полів рівні один одному. У випадку діелектриків

$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, тому що μ в них мало відрізняється від одиниці.

18. ЗВ'ЯЗАНІ МОДИ

Якщо при вивченні хвилі ми зосередимо увагу на самому середовищі, де відбуваються хвильові процеси, то нам доведеться мати справу з дуже складними взаємодіями. Однак багато чого можна довідатися про хвилі, розглядаючи їх як певний, визначений тип (або *моду*) збурення середовища, у якому рухаються хвилі.

Наприклад, у випадку хвиль, що біжать по натягнутій струні, можна вважати поперечні синусоїдальні хвилі у вертикальній площині однією модою, а хвилі в горизонтальній площині – іншою модою.

Пряму і зворотну хвилі можна вважати різними модами, хоча відрізняються вони тільки напрямком руху. Синусоїдальні однакові хвилі з різними частотами будемо вважати однією модою, якщо при невеликій зміні частоти слабо змінюються форма хвилі і її швидкість. Отже, будемо використовувати термін *мода* для хвиль, що поширюються з постійною швидкістю в середовищах, що не змінюються з відстанню.

Рівняння поширення моди хвилі запишемо у вигляді

$$\frac{dS}{dz} = -ikS \quad (18.1)$$

Воно означає, що швидкість зміни напруженості хвилі S з відстанню пропорційна самій S з коефіцієнтом пропорційності k , який є сталою величиною.

Коли дві моди зв'язані, вони взаємодіють і зміну напруженості однієї з них приводить до зміни напруженості іншої. Нехай S_1 і S_2 - напруженості двох зв'язаних мод.

$$\frac{dS_1}{dz} = -ik_1 S_1 - iMS_2 \quad (18.2)$$

$$\frac{dS_2}{dz} = -ik_2 S_2 - iMS_1 \quad (18.3)$$

де k_1 і k_2 - константи поширення двох мод за умов відсутності взаємодії, а M - коефіцієнт зв'язку.

Унаслідок того, що коефіцієнти k_1, k_2, M - дійсні величини, рівняння (18.2) і (18.3) консервативні, тобто повна енергія не змінюється при переході від z до $z + dz$.

Розв'язок цих рівнянь має вигляд

$$S_1 = S_{10} e^{-ikz} \quad (18.4)$$

$$S_2 = S_{20} e^{-ikz} \quad (18.5)$$

Продиференціювавши обидві частини рівностей, одержимо

$$\frac{dS_1}{dz} = -ikS_1, \quad \frac{dS_2}{dz} = -ikS_2 \quad (18.6)$$

Тоді

$$(k - k_1)S_1 = MS_2 \quad (18.7)$$

$$(k - k_2)S_2 = MS_1 \quad (18.8)$$

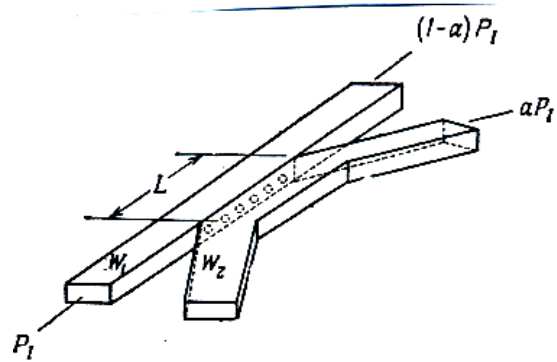
З системи рівнянь (18.7) та (18.8) легко здобути квадратне рівняння для хвильового числа:

$k^2 - (k_1 + k_2)k + (k_1k_2 - M^2) = 0$. Розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:

$$k = \frac{k_1 + k_2 \pm \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4M^2}}{2} \quad (18.9)$$

Якщо немає зв'язку між модами ($M = 0$), тоді (18.9) дає два значення величини k , а саме: $k = k_1$; $k = k_2$. При $M \neq 0$ одержимо теж два значення k , але вони не дорівнюють k_1 і k_2 . Застосуємо наші рівняння до випадку двох однакових зв'язаних хвильоводів у спрямованому відгалужувачі (Мал.7.1)

Два однакових хвильоводи W_1 і W_2 мають загальну стінку довжиною L . У цій стінці пророблені отвори, так що хвиля одного хвильоводу взаємодіє з хвилею іншого хвильоводу. В результаті певна частка потужності P_1 передається до хвильоводу W_2 .



Мал. 18.1.

Частка a потужності, переданої з одного хвильоводу до іншого, залежить від довжини

шляху зв'язку та розміру отворів. При деякій величині зв'язку вся потужність може перейти з одного хвильоводу до іншого.

Фазові постійні обох хвильоводів однакові:

$$k_1 = k_2 = k_0 \quad (18.10)$$

З формули (18.9) у цьому випадку можна одержати дві фазові постійні: $k_m = k_0 + M$ та $k_\delta = k_0 - M$. Як впливає з (18.7)

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{k - k_0}{M} \quad (18.11)$$

Тоді для хвиль з фазові постійними k_m і k_δ відносини амплітуд $\frac{S_{2m}}{S_{1m}}$ і

$\frac{S_{2\delta}}{S_{1\delta}}$ даються виразами

$$\frac{S_{2m}}{S_{1m}} = 1 \quad \frac{S_{2\delta}}{S_{1\delta}} = -1 \quad (18.12)$$

За умов відсутності зв'язку ми маємо дві моди. Одна поширюється в хвилеводі W_1 з амплітудою S_1 і фазовою постійною k_0 , а інша поширюється в хвилеводі W_2 з амплітудою S_2 і фазовою постійною k_0 .

При наявності зв'язку в нас теж дві моди. Але кожна з них являє собою хвилю в обох хвилеводах. Одна мода, повільна хвиля, має фазову постійну k_m ; для такої моди напруженість хвилі однакова в обох хвилеводах. Інша мода, швидка хвиля, має фазову постійну k_δ ; для такої моди напруженості в обох хвилеводах однакові, але протилежні за знаком.

Припустимо, що при $z=0$ дві хвилі в хвилеводі W_1 мають однакову напруженість $S_0/2$. Тоді на підставі (18.12) можна сказати, що в хвилеводі W_2 напруженості хвиль однакові, але протилежні за знаком. У хвилеводі W_1 повна напруженість двох хвиль буде дорівнювати:

$$S_{1п} = \frac{S_0}{2} \left(e^{-i(k_0+M)z} + e^{-i(k_0-M)z} \right) \quad (18.13)$$

Відповідно в хвилеводі W_2 повна потужність $S_{2п}$ буде дорівнювати:

$$S_{2п} = \frac{S_0}{2} \left(e^{-i(k_0+M)z} - e^{-i(k_0-M)z} \right) \quad (18.14)$$

Ми бачимо, що при $z=0$ повна напруженість у W_1 дорівнює S_0 , а в хвилеводі W_2 дорівнює нулю. Подивимось, як змінюється напруженість з відстанню. Перепишемо (18.13) і (18.14) у вигляді

$$S_{1п} = S_0 e^{-ik_0 z} \cos Mz \quad (18.15)$$

$$S_{2п} = -i S_0 e^{-ik_0 z} \sin Mz \quad (18.16)$$

Зі збільшенням z повна напруженість хвилі в W_1 поступово зменшується, а напруженість у W_2 поступово наростає. При $Mz = \pi/2$ напруженість хвилі в хвилеводі W_1 дорівнює нулю, а в хвилеводі W_2 вона дорівнює iS_0 , тобто по абсолютній величині така ж як у хвилеводі W_1 при $z=0$. При $Mz = \pi/2$ вся потужність переходить із хвилеводу W_1 до хвилеводу W_2 . У випадку, якщо фазові постійні в зв'язаних хвилеводах не однакові, тоді повний перехід потужності з одного хвилеводу в інший виявляється неможливим. Зв'язані моди використовуються в багатьох інших приладах, наприклад, у підсилювальних лампах хвилі, що біжить.

19. ВІДБИТТЯ ТА ЗАЛОМЛЕННЯ ХВИЛЬ

Розглянемо поведження поздовжньої хвилі на межі двох середовищ (рідини і металу, рідини і газу і т.д.). Нехай межею цих середовищ є площина $z = 0$ (мал.8.1) і з лівого боку на межу приходить пружна хвиля.

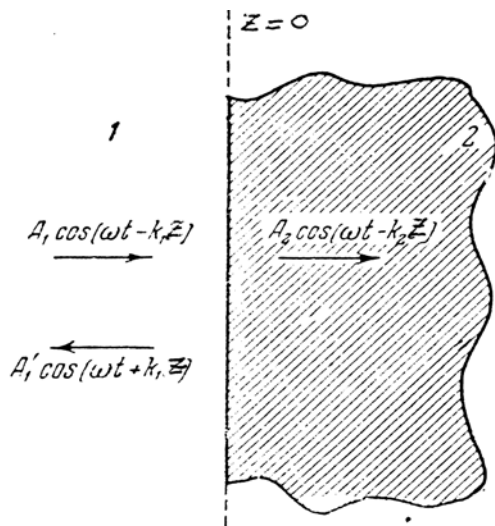
$$S_1 = S_{01} \cos(\omega t - k_1 z), \quad (19.1)$$

де $k_1 = \omega/u_1$ (u_1 - швидкість поширення хвилі в середовищі, що знаходиться ліворуч від площини розподілу). Крайові умови задачі можна записати в наступному вигляді:

$$S_1(o, t) = S_2(o, t) \quad (19.2)$$

$$\delta_1(o, t) = \delta_2(o, t) \quad (19.3)$$

Перша умова – неперервність та суцільність речовини (частинки середовища



Мал. 19.1.

коливаються, не відриваючись від межі середовища та не переходять у її внутрішню область). Друга умова - рівність дії і протидії (δ - напруженість).

Припустимо, що хвиля проникає в друге середовище

$$S_2 = S_{02} \cos(\omega t - k_2 z), \quad (19.4)$$

де $k_2 = \omega/u_2$, а в першому присутня тільки падаюча хвиля S_1 . Тоді, використовуючи крайові умови, одержимо

$$S_{01} = S_{02}, \quad S_{01} = \gamma S_{02},$$

де $\gamma = R_2 / R_1$ є відношенням питомих акустичних опорів другого і першого

середовищ. Справді $\delta = Rv$, де $v = \frac{\partial S}{\partial t}$ - швидкість, з якою рухаються окремі площини $z = \text{Const}$ (не плутати з швидкістю поширення пружної хвилі u)

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -S_{01} \omega \sin(\omega t - k_1 z)$$

$$\delta_1(o, t) = -R_1 S_{01} \omega \sin \omega t$$

$$\delta_2(o, t) = -R_2 S_{02} \omega \sin \omega t$$

Ці рівняння мають спільний розв'язок, якщо $\gamma = 1$ або $E_1 \rho_1 = E_2 \rho_2$, де $E_{1,2}$ - модулі пружності, а $\rho_{1,2}$ - щільність двох середовищ.

Однак крайові умови виконуються при кожному γ , якщо прийняти,

що в першому середовищі, крім падаючої хвилі S_I додається (при наявності другого середовища) відбита хвиля

$$S'_{0I} \cos(\omega t + k_I z)$$

Отже, при наявності другого середовища

$$S_I = S_{0I} \cos(\omega t - k_I z) + S'_{0I} \cos(\omega t + k_I z) \quad (19.5)$$

З крайових умов одержуємо

$$S_{0I} + S'_{0I} = S_{02} \quad (19.6)$$

$$S_{0I} - S'_{0I} = \gamma S_{02},$$

звідкіля

$$S'_{0I} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} S_{0I}, \quad S_{02} = \frac{2}{1+\gamma} S_{0I} \quad (19.7)$$

З рівнянь (19.7) випливає, що при заданій амплітуді падаючої хвилі можна однозначно визначити амплітуди відбитої та заломленої хвиль. Довжини хвиль в обох середовищах пропорційні швидкостям поширення, тому що частоти всіх трьох хвиль однакові.

Визначимо коефіцієнти відбиття та проникнення хвиль в наступний спосіб:

$$R_0 = \frac{\bar{q}'_1}{\bar{q}_1}, \quad T_0 = \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1}, \quad (19.8)$$

де $\bar{q}_1, \bar{q}'_1, \bar{q}_2$ - середні значення густини потоків енергії за період, у падаючій, відбитій та заломленій хвилях. Запишемо вираз для середнього

значення густини потоку: $\bar{q} = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt = \frac{1}{2} E k \omega S_0^2 = \frac{1}{2} R \omega^2 S_0^2$.

Тоді коефіцієнт відбиття хвилі буде мати вигляд:

$$R_0 = \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2, \quad (19.9)$$

а коефіцієнт проникнення –

$$T_0 = \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} \quad (19.10)$$

При $\gamma = 0$ і $\gamma = \infty$ вся енергія повертається в перше середовище. При $\gamma = 1$ вся енергія переходить у друге середовище.

Як впливає з формул (19.7), у площині розподілу середовищ зсуви в падаючій і заломленій хвилях синфазні, а зсуви в падаючій і відбитій хвилях синфазні, якщо $\gamma < 1$, та протифазні, якщо $\gamma > 1$.

Відбиття пружних хвиль від межі двох середовищ лежить в основі гідролокації. Нехай джерело ультразвуку, що встановлено в дні човна,

випромінює імпульсно - модульовані ультразвукові хвилі. Приймач уловлює хвилі, що відбиваються від поверхні зануреного підводного човна. На межі вода - сталь створюється сильне відбиття: $\gamma=27$, $R_0=0,86$. Вимірюючи час, протягом якого ультразвуковий імпульс пробігає від джерела до поверхні, що відбиває, і назад, та, знаючи швидкість ультразвуку, легко визначити відстань до підводного човна.

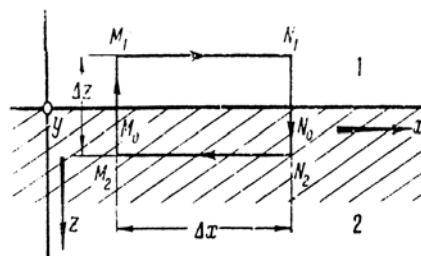
Розглянемо тепер явища, що відбуваються, коли електромагнітна хвиля зустрічає при своєму поширенні межу двох однорідних діелектриків. Як і у випадку пружних хвиль, на межі розподілу двох середовищ повинні виконуватися вище зазначені крайові умови, що виводяться з рівнянь Максвелла. Нехай межа між діелектриками (Мал.8.2.) знаходиться у площині $z = 0$. Застосуємо рівняння (17.3) до прямокутника, що лежить у площині $y = 0$. Тоді

$$\oint E_l dl = E_{1x} \Delta x - E_{2x} \Delta x$$

$$\int \dot{B}_n dS = \dot{B}'_y \Delta x \Delta z,$$

де $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ - значення вектора $\vec{E}$ відповідно на прямих $M_1 N_1$ і $M_2 N_2$, $\dot{B}'_y$ - значення вектора $\vec{B}$ у середині прямокутника. Отже,

$$E_{1x} - E_{2x} = -\frac{I}{c} \dot{B}'_y \Delta z$$



Мал. 19.2.

При граничному переході $\Delta z \rightarrow 0$ одержимо

$$E_x^{(1)} = E_x^{(2)}, \quad (19.11)$$

де $\vec{E}^{(1)}$ та $\vec{E}^{(2)}$ - значення вектора $\vec{E}$ безпосередньо по обох межах даних діелектриків. Аналогічно одержимо

$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)}, \quad H_x^{(1)} = H_x^{(2)}, \quad H_y^{(1)} = H_y^{(2)} \quad (19.12)$$

Це є крайові умови, що означають, що компоненти $\vec{E}$ і $\vec{H}$, які лежать у площини, що утворює межу двох діелектриків, змінюються безупинно при переході цієї межі.

Нехай з першого середовища на межу розподілу $z = 0$ падає лінійно-поляризована хвиля, що поширюється паралельно осі z (Мал. 19.3.). Направимо вісь x паралельно вектору $\vec{E}$ в падаючій хвилі. Тоді її компоненти запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} E_l &= E_{lx} = S_{0l} \cos(\omega t - k_l z) \\ H_l &= H_{ly} = \sqrt{\epsilon_l} S_{0l} \cos(\omega t - k_l z) \end{aligned} \quad (19.13)$$

Крайові умови вимагають наявності трьох хвиль. Електричне і магнітне поля відбитої хвилі описуються рівняннями

$$\begin{aligned} E'_1 &= E'_{1x} S'_{01} \cos(\omega t + k_1 z) \\ H'_1 &= H'_{1y} = -n_1 S'_{01} \cos(\omega t + k_1 z) \end{aligned} \quad (19.14)$$

Рівняння для заломленої у друге середовище хвилі мають вигляд

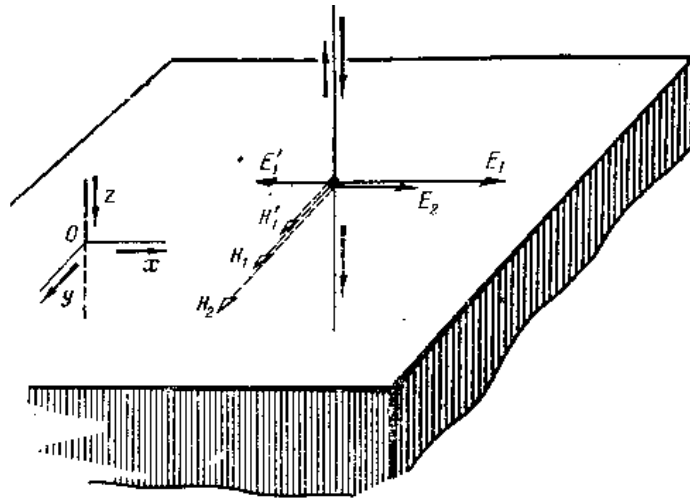
$$\begin{aligned} E_2 &= E_{2x} = S_{02} \cos(\omega t - k_2 z), \\ H_2 &= H_{2y} = S_{02} n_2 \cos(\omega t - k_2 z), \end{aligned} \quad (19.15)$$

де $k_1 = \frac{\omega}{u_1}$, $k_2 = \frac{\omega}{u_2}$, $u_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}}$, $u_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$.

Величини n_1 та n_2 називаються *показниками заломлення* відповідних середовищ.

Оскільки електричне і магнітне поля в першому середовищі дорівнюють $E_1 + E'_1$ та $H_1 + H'_1$, то для відбитої та заломленої хвиль одержуємо

$$S'_{01} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} S_{01}, \quad S_{02} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} S_{01} \quad (19.16)$$



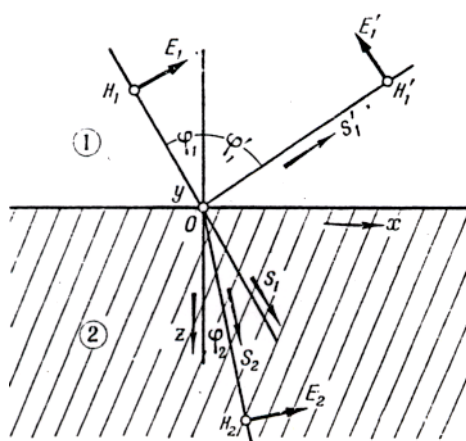
Мал.19.3.

Введемо як і в випадку акустики, коефіцієнти відбиття та заломлення, які дорівнюють, відповідно, відношенню середнього за період потоку енергії у відбитій та заломленій хвилях до середнього потоку енергії в падаючій хвилях, одержимо

$$R_0 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad T_0 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (19.17)$$

Ці формули показують, що відбиття є тим сильнішим, чим більшим (при тому самому $n_1 + n_2$) є абсолютна величина різниці показників заломлення

обох середовищ. Нехай тепер на межу $z=0$ падає плоска хвиля паралельно осі S_1 , що утворює кут φ_1 з віссю z . Нехай заломлена і відбита хвилі поширюються у напрямку осей S_2 і S'_1 (Мал.19.4.), що утворюють з віссю z кути φ_2 (кут заломлення) і φ'_1 (кут відбиття). Нехай вектор $\vec{E}$ у падаючій хвилі лежить у площині падіння, а, отже, вектор $\vec{H}$ є до неї перпендикулярним. Осі S'_1 і S_2 , а також електричні поля $\vec{E}'_1$ й $\vec{E}_2$ у відбитій і заломленій хвилях лежать у площині падіння, яку ми будемо вважати за площину $y=0$. Тоді всі три хвилі описуються рівняннями



Мал. 19.4.

Звідси випливає закон відбиття

$$\varphi_1 = \varphi'_1 \quad (19.19)$$

і закон заломлення

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (19.20)$$

який вказує, що заломлена хвиля поширюється у напрямку, відмінному від напрямку поширення падаючої хвилі (явище заломлення), причому відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є для даних двох середовищ сталою величиною. Вона дорівнює відношенню фазових швидкостей у першому і другому середовищі і зворотному відношенню показників заломлення цих середовищ. Співвідношення (19.20) разом із твердженням, що нормаль до заломленої хвилі лежить у площині падіння складає закон заломлення, або закон Снелліуса.

Якщо $n_2 > n_1$, оптична щільність у другого середовища більша, ніж у першого середовища. У цьому випадку маємо $\sin \varphi_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi_1 < \sin \varphi_1$, так що для кожного кута падіння існує реальний кут заломлення φ_2 . Однак, якщо друге середовище оптично менш щільне ($n_1 > n_2$, тоді

реальне значення φ_2 ми одержимо лише для таких кутів падіння φ_1 , для яких $\sin\varphi_1 \leq \frac{n_2}{n_1}$. Для великих значень φ_1 має місце повне внутрішнє відбиття (див. далі).

Важливо знати не тільки напрямок, але й інтенсивність відбитої і заломленої хвиль, яку можна обчислити, якщо відомі n_1 та n_2 , кут падіння, інтенсивність і поляризація падаючої монохроматичної хвилі. Цю хвилю завжди можна представити як суперпозицію хвилі, у якій $\vec{E}$ коливається в площині падіння, і хвилі, у якій $\vec{E}$ коливається перпендикулярно площини падіння. Оскільки один з компонентів може бути відсутнім, то досить розглянути окремо хвилі обох зазначених типів. Не наводячи обчислення, одержуємо в першому випадку

$$\begin{aligned} S'_{01} &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} S_{01} \\ S_{02} &= \frac{2\sin\varphi_2 \cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} S_{01} \end{aligned} \quad (19.21)$$

і в другому

$$\begin{aligned} S'_{01} &= \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} S_{01} \\ S_{02} &= \frac{2\sin\varphi_2 \cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} S_{01} \end{aligned} \quad (19.22)$$

Формули (19.21) та (19.22) називаються формулами Френеля. Одним з чудових наслідків цих рівнянь є те, що, якщо вектор $\vec{E}$ лежить у площині падіння, то існує такий кут падіння, при якому немає відбитої хвилі.

Підберемо кут падіння φ_1 так, щоб напрямок, по якому повинна піти відбита хвиля, був перпендикулярним до напрямку заломленої хвилі, тобто

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (19.23)$$

Тоді, як випливає з (19.21) $S'_{01} = 0$, кут падіння, при якому виконується умова (19.23), називається кутом Брюстера (Мал. 19.5).

Якщо вектор $\vec{E}$ є перпендикулярним до площини падіння, відбита хвиля відсутня, якщо немає розходження між показниками переломлення двох середовищ, тобто $\varphi_1 = \varphi_2$.

Дотепер ми виключали з розгляду випадок, коли закон заломлення не дає реального значення для кута заломлення. Цей випадок реалізується при переході з оптично більш щільного середовища в менш щільну, коли

$$n_1 > n_2 \quad (19.24)$$

20. ЕНЕРГІЯ ТА ІМПУЛЬС ХВИЛЬ

Силовий вплив хвиль на матеріальні тіла пов'язано з енергією і потужністю хвиль. Почнемо вивчення цього зв'язку з випадку стрижня, що рухається, чи потоку рідини в трубі. Якщо стрижень чи потік рідини з погонною масою m рухається паралельно своїй осі зі швидкістю v_{gp} , тоді погонна кінетична енергія E дорівнює

$$E = mv_{gp}^2 / 2 \quad (20.1)$$

Потужність P і погонний імпульс p дорівнюють відповідно:

$$P = mv_{gp}^3 / 2 \quad (20.2)$$

$$p = mv_{gp} \quad (20.3)$$

Якщо рідина зупиняється наприкінці труби, то сила, що діє на торець, буде дорівнює погонному імпульсу, помноженому на v_{gp} . Величина $b = pv_{gp}$ називається *потоким імпульсу*.

$$b = mv_{gp}^2 \quad (20.4)$$

Добуток сили за час (нехай це одиничний проміжок часу) дорівнює повному імпульсу, переданому рідиною за цей час, тобто pv_{gp} . З перерахованих вище співвідношень одержуємо

$$p = \frac{2}{v_{gp}} E \quad (20.5)$$

$$b = \frac{2}{v_{gp}} P \quad (20.6)$$

Отже, у розібраному прикладі погонний імпульс p дорівнює енергії, яку помножено на $2/v_{gp}$, а потік імпульсу дорівнює потужності P , що помножена на $2/v_{gp}$.

Через імпульс і потік імпульсу ми можемо виразити сили, що викликають зміни величин енергії і потужності. Перейдемо тепер до хвиль. Потужність хвилі дорівнює погонній енергії, помноженої на групову швидкість

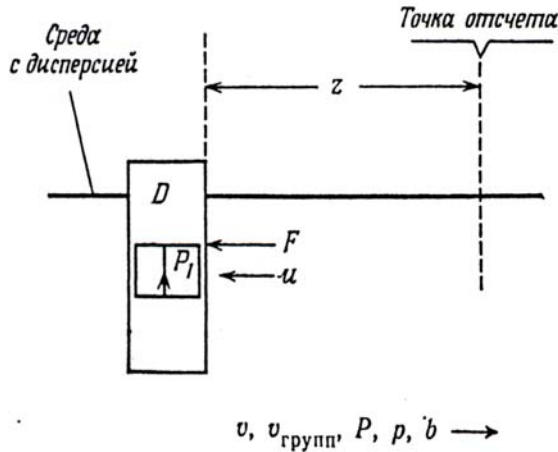
$$P = E \cdot v_{gp} \quad (20.7)$$

Це зв'язано з тим, що хвильовий пакет, утворений із хвиль вузького інтервалу частот, переміщається з груповою швидкістю. Аналогічно, якщо p - погонний імпульс, то потік імпульсу

$$b = pv_{gp} \quad (20.8)$$

Припустимо, що ми збуджуємо хвилі в дисперсному середовищі деяким предметом D , що рухається ліворуч зі швидкістю u (мал.9.1).

Оскільки середовище є дисперсним, то групова і фазова швидкості є різними на різних частотах. Щоб предмет рухався, необхідно штовхати його ліворуч із силою F . У результаті до хвилі підводиться потужність Fu . Крім того, на предметі розташуємо додаткове джерело коливань, що передає хвилі потужність P_l . Ця потужність може бути механічною чи



Мал. 20.1.

електричною. Вважаємо, що ліворуч від D хвилі немає, а праворуч є синусоїдальна хвиля, що біжить праворуч.

Застосуємо закон збереження енергії. Енергія, накопичена між D і деякою фіксованою точкою відліку на відстані z праворуч від D , дорівнює

$$Ez = Pz / v_{gp} \quad (20.9)$$

Швидкість зміни цієї енергії:

$$\frac{P}{v_{gp}} \frac{dz}{dt} = \frac{Pu}{v_{gp}} \quad (20.10)$$

дорівнює різниці потужності, що розвивається джерелом D , і потужності P , що іде праворуч, минаючи точку відліку

$$Pu / v_{gp} = Fu + P_l - P. \quad (20.11)$$

Швидкість зміни імпульсу в часі $p \frac{dz}{dt} = pu = \frac{bu}{v_{gp}}$ дорівнює швидкості, з

яким сила створює імпульс, тобто величині $-F$, якщо з неї відняти імпульс, що іде за точку відліку, тобто b .

$$b \left(\frac{u}{v_{gp}} + 1 \right) = -F \quad (20.12)$$

За аналогією з формулою (20.6) для механічного тіла, яке рухається прямолінійно, припустимо, що і для хвилі величина потоку імпульсу b дорівнює потужності, помноженої на деяку константу A , тобто:

$$b = AP. \quad (20.13)$$

З формул (20.11) – (20.13) випливає, що

$$P \left(\frac{u}{v_{gp}} + 1 \right) \cdot (1 + Au) = P_l \quad (20.14)$$

Константу A знайдемо з наступних міркувань. Щоб синусоїдальна хвиля здавалася нерухомою щодо апарата D , апарат повинен рухатися з фазовою швидкістю хвилі, тобто

$$v_{\phi} = -u \quad (20.15)$$

У цьому випадку хвилю можна збуджувати за допомогою постійної сили і немає необхідності у виконанні роботи джерелом, що знаходиться на апараті. Частота, що спостерігається з D , дорівнює нулю і потужність P_l дорівнює нулю. Єдина потужність, що передається хвилі, дорівнює Fu . За умови (20.15) співвідношення (20.14) приймає вигляд:

$$P \left(\frac{u}{v_{sp}} + 1 \right) (1 - Av_{\phi}) = 0 \quad (20.16)$$

і константа A дорівнює $\frac{I}{v_{\phi}}$. Тоді потік імпульсу:

$$b = \frac{P}{v_{\phi}}, \quad (20.17)$$

$$p = \frac{E}{v_{\phi}} \quad (20.18)$$

Якщо ми маємо справу із сигналом у вигляді обмеженого імпульсу хвилі, що складається із синусоїдальних хвиль вузького інтервалу частот, то рівність (20.18) є співвідношенням між повним імпульсом p і повною енергією E . Здобувши співвідношення між імпульсом і енергією хвильового пакета, можна ввести до розгляду величину N - число хвиль у пакеті, за допомогою якої енергія та імпульс пакета виражаються дуже просто

$$E = \omega N \quad p = kN$$

Відповідно спрощується і зв'язок між енергією хвилі в рухомій та нерухомій системах відліку. Енергія хвилі міняється точно так само, як частота внаслідок Допплерівського зсуву. Число хвиль і імпульс при переході з однієї системи відліку в іншу зберігаються.

Звернемо ще раз увагу на те, що частка енергії хвилі до її імпульсу дорівнює фазовій швидкості. Чим меншою є фазова швидкість, тим більше “важким” є хвильовий пакет, тобто тим більше його імпульс при одній і тій же енергії. “Швидкі” хвилі є і найбільш “легкими”.

У випадку електромагнітних хвиль у вільному просторі чи в ідеально провідних хвильоводах постійного перетину потік імпульсу й імпульс, що визначаються формулами (20.17) і (20.18), це фактичні потік імпульсу й імпульс хвилі. Для електромагнітних хвиль щільність імпульсу визначається вектором Пойтинга, що дорівнює потужності електромагнітної хвилі, що перетинає одиничну площадку, яку поділено на квадрат швидкості світла c^2 . У випадку орієнтованих електромагнітних хвиль це означає, що погонний p імпульс дорівнює P потужності, діленої на c^2

$$p = P / c^2 \quad (20.19)$$

Потік імпульсу b дорівнює:

$$b = P v_{ep} / c^2 \quad (20.20)$$

Для хвиль в ідеальному хвилеводі дисперсійне співвідношення має вигляд

$$k = \frac{l}{c} (\omega^2 - \omega_{kp}^2)^{1/2} \quad (20.21)$$

ω_{kp} - критична частота, тобто хвиля не може поширюватися при $\omega < \omega_{kp}$.

Групова і фазова швидкості дорівнюють:

$$v_{ep} = \frac{d\omega}{dk} = c \left[1 - \left(\frac{\omega_{kp}}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (20.22)$$

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{\omega_{kp}}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (20.23)$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{v_{ep}}{c^2} = \frac{l}{v_{\phi}} \quad (20.24)$$

Таким чином, ми довели, що для хвилеводу зі співвідношення (20.20) одержуємо: $b = \frac{P}{v_{\phi}}$, тобто формулу (20.17).

Оскільки на збудження хвилі потрібно витратити енергію, то можна вважати, що енергія хвильового пакета завжди позитивна. Це дійсно справедливо для рівноважних середовищ. У нерівноважному середовищі енергія пакета може бути негативною. Найпростіший приклад хвилі з негативною енергією виникає при дослідженні хвиль у середовищах, що рухаються. Нехай плоска хвиля поширюється уздовж осі z з хвильовим вектором k і частотою ω . Енергія такої хвилі $E = \omega N$. Нехай середовище починає рухатися зі швидкістю u проти напрямку руху хвилі, тобто ліворуч. При цьому відбудеться Допплерівський зсув частоти

$$\omega_0 = \omega - ku \quad (20.25)$$

і природно зменшиться енергія

$$E_0 = (\omega - ku) N. \quad (20.26)$$

При досягненні швидкості u , що дорівнює фазовій швидкості хвилі $\frac{\omega}{k}$, хвиля в нерухомій системі відліку зупиниться і її частота і, отже, енергія звернуться в нуль.

Якщо $u > v_\phi$, енергія хвилі змінить знак і стане від'ємною. При такому русі середовища хвиля зноситься середовищем і поширюється ліворуч, хоча стосовно середовища вона поширюється праворуч. Енергія такої хвилі негативна, тобто для її збудження потрібно не передавати енергію середовищу, а віднімати енергію від середовища. Іншими словами, негативною ми будемо називати енергію хвилі в середовищі, що рухається, якщо середовище при наявності хвилі має меншу енергію, чим у її відсутність.

Хвилі в аксіально симетричній системі відрізняються від хвиль у довгій прямолінійній системі. Це все одно, якби ми в прямолінійній системі змушували хвилю мати на одному кінці системи точно такі ж амплітуду і фазу, як і на іншому. Хвиля в замкненій системі не може підсилюватися чи слабшати з відстанню уздовж системи. Але вона може зростати чи зменшуватися з часом.

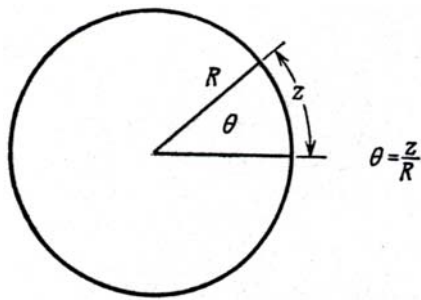
У замкненій системі положення задається кутом θ (мал.9.2). Через радіус R і відстань z уздовж системи цей кут визначається в такий спосіб:

$$\theta = z / R \quad (20.27)$$

Напруженість хвилі записується у вигляді

$$S = S_0 \cos(\omega t - n\theta + \varphi), \quad (9.28)$$

де n - величина, аналогічна фазової постійний k .



$$n\theta = kz, \quad n = \frac{kzR}{z} = kR = \frac{\omega}{v_\phi} R. \quad (20.29)$$

Щоб хвиля замикалася на себе, необхідно, щоб n було цілим позитивним чи негативним

Мал. 20.2.

числом. Це означає, що можливими є тільки деякі частоти, для яких добуток kR є цілим числом.

Якщо погонний імпульс системи E/v_ϕ і система вигнута в коло радіуса R , то повний момент імпульсу Q буде дорівнювати:

$$Q = \frac{2\pi RE}{v_\phi} R = 2\pi RE \frac{R}{v_\phi} \quad (20.30)$$

Множник перед часткою є повна енергія хвилі W . Частку $\frac{R}{v_\phi}$ можна виразити через ω за формулою (20.29). У результаті одержуємо

$$Q = \frac{Wn}{\omega} \quad (20.31)$$

Ми говорили, що переміщення середовища не впливає на погонний імпульс. Отже, якщо ω - частота, а W - повна енергія за умов відсутності обертання, тоді Q - момент імпульсу при наявності будь-якого обертання.

Для даної хвилі довжина хвилі λ не залежить від швидкості

обертання середовища u , але її частота щодо нерухомого спостерігача виявляється залежною; вона дорівнює $u + v_\phi$ чи $u - v_\phi$, тобто фазовій швидкості, яку поділено на довжину хвилі. Якщо ω_0 - кругова частота хвилі щодо середовища і якщо ω_f та ω_s - кругові частоти швидкої і повільної хвиль, то

$$\omega_f = \omega_0 \left(1 + \frac{u}{v_\phi} \right) \quad (20.32)$$

$$\omega_s = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{v_\phi} \right) \quad (20.33)$$

Виразимо u/v_ϕ через кутові швидкості. Нехай $\Omega = \frac{u}{R}$, $\Omega_\phi = \frac{v_\phi}{R}$, тоді:

$$\omega_f = \omega_0 \left(1 + \frac{\Omega}{\Omega_\phi} \right) \quad (20.34)$$

$$\omega_s = \omega_0 \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_\phi} \right) \quad (20.35)$$

Тепер припустимо, що в деякій нерухомій аксіально симетричній системі в протилежних напрямках поширюються дві хвилі з однаковими частотами ω_0 і повними енергіями E_0 . Що буде, якщо змусити систему обертатися навколо її осі зі швидкістю Ω ? При збільшенні Ω одна з частот зростає, а інша зменшується. Енергії змінюються пропорційно частотам. Коли Ω стає більше Ω_ϕ , тоді частота та енергія однієї з хвиль стають негативними. Негативну частоту можна розуміти як зміну знака кутової швидкості хвилі щодо нерухомого спостерігача. З фізичної точки зору правильно сказати, що кутова швидкість хвилі змінює знак, коли $\Omega > \Omega_\phi$.

Адже якщо енергія хвилі негативна, то це значить, що якщо деякий нерухомий пристрій відбирає енергію у хвилі, тоді напруженість хвилі збільшується.

Швидкість обертання Землі на екваторі більше швидкості звукових хвиль у повітрі чи швидкості хвиль в океанах. Нам дуже пощастило, що такі хвилі не можуть передавати помітну кількість енергії якому-небудь тілу, нерухомому щодо поверхні Землі. Передача енергії гравітаційними хвилями є нехтовно малою. Передача енергії від верхніх шарів атмосфери до сонячного вітру також дуже мала. Якби звукові хвилі чи хвилі океану, що поширюються навколо Землі по екватору в напрямку протилежному її руху, могли віддавати енергію чому-небудь ще, крім Землі.

21. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ

Якщо промінь світла від одного джерела розділити на два пучки, а потім накласти їхній один на одного, то інтенсивність в області суперпозиції пучків буде змінюватися від точки до точки, періодично досягаючи максимуму, що перевищує суму інтенсивностей пучків, і мінімуму, величина якого може бути рівним навіть нулю. Це явище називається *інтерференцією*. При суперпозиції пучків строго монохроматичного світла інтерференція виникає завжди. Світло від реальних фізичних джерел ніколи не буває строго монохроматичним, бо його амплітуда і фаза безупинно (бодай трішки) але змінюються. Якщо два світлових пучки походять від одного джерела, то виникаючі в них флуктуації є скорельованими, і про такі пучки говорять, що вони цілком чи частково когерентні. Інтерференційні явища, що послужили доказом хвильової природи світла, мають важливі практичні застосування, наприклад, у спектроскопії і метрології. Ми торкнемося в цьому підрозділі ідеалізованого випадку інтерференції світлових пучків від строго монохроматичних джерел.

Інтенсивність світла I будемо визначати як усереднене за часом кількість енергії, що перетинає одиницю площі, перпендикулярної до напрямку потоку енергії, за одиницю часу. Для плоскої хвилі

$$I = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \langle \vec{H}^2 \rangle \quad (21.1)$$

Оскільки ми будемо порівнювати інтенсивності в одному і тому самому середовищі, то можна вважати величину $\langle \vec{E}^2 \rangle$ мірою інтенсивності. Нехай ми маємо справу з монохроматичним полем, тому представимо електричний вектор $\vec{E}$ у вигляді

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = [\vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t} + \vec{A}^*(\vec{r})e^{i\omega t}]/2 \quad (21.2)$$

Тут $\vec{A}$ - комплексний вектор з Декартовими компонентами:

$$\begin{aligned} A_x &= a_1(\vec{r})e^{ig_1(\vec{r})} & A_y &= a_2(\vec{r})e^{ig_2(\vec{r})} \\ A_z &= a_3(\vec{r})e^{ig_3(\vec{r})}, \end{aligned} \quad (21.3)$$

де a_i і g_i ($i = 1, 2, 3$) – реальні функції. Для однорідної плоскої хвилі амплітуди a_i постійні, тоді як фази g_i мають вигляд: $g_i(\vec{r}) = \vec{k}\vec{r} - \delta_i$, де $\vec{k}$ - хвильовий вектор, а δ_i - фазові константи, які визначають стан поляризації.

З (21.2) маємо

$$\vec{E}^2 = (\vec{A}^2 e^{-2i\omega t} + \vec{A}^{*2} e^{2i\omega t} + 2\vec{A}\vec{A}^*)/4 \quad (21.4)$$

Звідси, виконуючи усереднення за часом в інтервалі великому в порівнянні

з періодом, знаходимо:

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{A} \vec{A}^* = \frac{1}{2} (|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2) = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad (21.5)$$

Нехай у деякій точці P відбувається суперпозиція двох монохроматичних хвиль $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$. Результуюче поле в цій точці буде

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (21.6)$$

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \quad (21.7)$$

Повна інтенсивність у точці p

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \quad (21.8)$$

$$\text{де } I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle, \quad I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle - \text{інтенсивність кожної з хвиль,} \quad (21.9)$$

$$\text{а } I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle - \text{інтерференційний член.} \quad (21.10)$$

Нехай $\vec{A}$ і $\vec{B}$ - комплексні амплітуди хвиль

$$A_x = a_1 e^{ig_1} \dots \quad B_x = b_1 e^{ih_1} \quad (21.11)$$

Реальні фази g_i й h_i обох хвиль будуть різними, тому що хвилі приходять до точки P різними шляхами, але, якщо між відповідними компонентами виникла та сама різниця фаз δ , тоді:

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2 = g_3 - h_3 = \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta D, \quad (21.12)$$

де ΔD - оптична різниця ходу двох хвиль від загального джерела до P , а λ_0 - довжина хвилі у вакуумі. Виражаючи $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ через $\vec{A}$ і $\vec{B}$, знайдемо

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \frac{I}{4} (\vec{A} \cdot \vec{B} e^{-2i\omega t} + \vec{A}^* \cdot \vec{B}^* e^{2i\omega t} + \vec{A} \cdot \vec{B}^* + \vec{A}^* \cdot \vec{B}), \quad (21.13)$$

і, отже,

$$I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{I}{2} (\vec{A} \vec{B}^* + \vec{A}^* \vec{B}) = a_1 b_1 \cos(g_1 - h_1) + \quad (21.14)$$

$$+ a_2 b_2 \cos(g_2 - h_2) + a_3 b_3 \cos(g_3 - h_3) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cos \delta$$

Цей вираз показує залежність інтерференційного члена від амплітуд компонентів і різниці фаз обох хвиль.

Розглянемо розподіл інтенсивності в результаті суперпозиції двох хвиль, що поширюються в напрямку осі z ; нехай вони лінійно поляризовані і вектор $\vec{E}$ спрямовано уздовж осі x . Тоді $a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0$ і ми знаходимо

$$I_1 = a_1^2 / 2, \quad I_2 = b_1^2 / 2, \quad I_{12} = a_1 b_1 \cos \delta = 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (21.15)$$

Тоді повна інтенсивність згідно (21.8) дорівнює

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (21.16)$$

Для максимумів інтенсивності має місце вираз:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (21.16a)$$

вони з'являються при $|\delta| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, а для мінімумів має місце інший вираз:

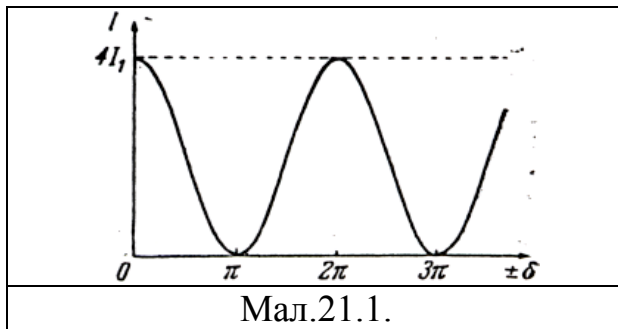
$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (21.16b)$$

що реалізується при $|\delta| = \pi, 3\pi, \dots$. У випадку, якщо інтенсивності двох хвиль однакові, то співвідношення (21.16) переходить у

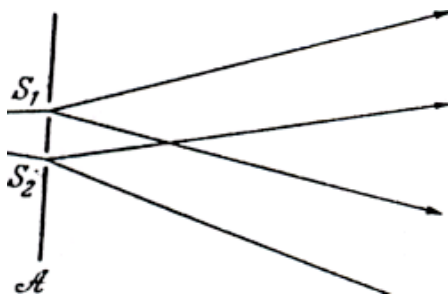
$$I = 2I_1(1 + \cos\delta) = 4I_1 \cos^2(\delta/2) \quad (21.17)$$

і інтенсивність змінюється від $I_{\min} = 0$ до $I_{\max} = 4I_1$ (мал.10.1).

Перший експеримент, що демонструє інтерференцію світла, був здійснений Юнгом. Світло від точкового джерела S падало на два невеликих отвори S_1 й S_2 у

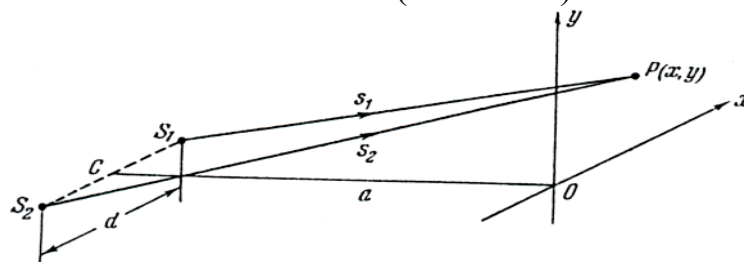


екрані A , які були розташовані поруч і знаходилися на рівних відстанях від джерела S (Мал.21.2.). Ці отвори діють як вторинні монохроматичні, точкові та синфазні джерела, світлові пучки від них перекриваються за екраном, де і спостерігається інтерференція.



Мал.21.2.
Дослід Юнга

Нехай інтерференційна картина спостерігається в площині $хоу$, нормальної до перпендикуляра CO , проведеного до середини відтинка, що з'єднує точки S_1 і S_2 . Вісь x оберемо паралельною до $S_1 S_2$ (Мал.21.3.). Нехай d - відстань між отворами, a - відстань між відтинком $S_1 S_2$ і площиною спостереження (Мал.21.3.).



Мал.21.3

Для точки $P(x, y)$, що лежить у площині спостереження, маємо:

$$S_1 = S_1 P = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}, \quad S_2 = S_2 P = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2},$$

значить, $S_2^2 - S_1^2 = 2xd$. Різниця геометричних шляхів світла при цьому становить:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{2xd}{S_2 + S_1}$$

Оскільки довжина хвиль видимого світла є малою, то інтерференційна картина буде спостерігатися, якщо $d \ll a$. Тоді за умови, що величини x та y теж малі у порівнянні з a , знаходимо: $S_1 + S_2 \sim 2a$, $\Delta S = xd/a$. Оптична різниця ходу в однорідному середовищі від S_1 і S_2 до P дорівнює

$$\Delta D = n\Delta S = nxd/a \quad (21.18)$$

а відповідна різниця фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{nxd}{a} \quad (21.19)$$

Через малість кута $S_1 P S_2$ можна вважати, що хвилі від S_1 і S_2 рухаються до P по тому самому напрямку, їх інтенсивність можна розрахувати за формулою (21.16); максимумами інтенсивності будуть спостерігатися при

$$x = \frac{m\lambda_0}{nd}, \quad |m| = 0, 1, 2 \quad (21.20)$$

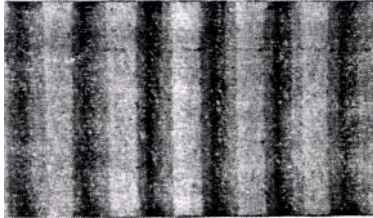
а мінімуми при

$$x = \frac{m\lambda_0}{nd}, \quad |m| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (21.21)$$

Таким чином, інтерференційна картина в безпосередній близькості від O складається зі світлих і темних смуг (мал.10.4). Вони знаходяться на рівних відстанях один від одного і спрямовані під прямим кутом до лінії $S_1 S_2$, що з'єднує обидва джерела. Відстань між сусідніми яскравими смугами дорівнює $a\lambda_0/nd$. У будь-якій точці інтерференційної картини число m , яке обумовлено співвідношенням називається порядком інтерференції в цій точці. Отже, світлим смугам відповідають цілі порядки.

$$m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{\Delta D}{\lambda_0}, \quad (21.22)$$

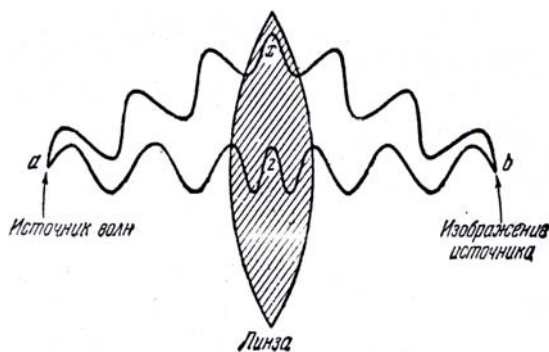
Використовуючи явище інтерференції, можна пояснити, як радіохвилі довжиною в кілька сантиметрів чи навіть коротше можуть сфокусуватися за допомогою лінз не гірше променів світла. Такий матеріал, як скло, є прозорим для електромагнітних хвиль. Але в склі електромагнітні хвилі рухаються повільніше, ніж у повітрі. Тому довжина хвилі, дорівнює швидкості,



Мал.21.4.

що поділена на частоту, у склі оптичної лінзи коротше, ніж у повітрі, навколо лінзи. Рис.10.5 ілюструє фокусуючу дію лінзи, що збирає в точці b хвилі, які виходять із точки a . Ліворуч від лінзи хвилі поширюються прямолінійно від джерела a .

Ми можемо визначити і те, як вони повинні йти до фокуса праворуч від лінзи, щоб при цьому гребені хвиль сумувалися із гребенями, а западини - із западинами. Хвилі повинні поширюватися так, як показано на малюнку, тобто на вигнутому шляху хвилі $a - x - b$, який є довшим за прямий $a - z - b$, повинно вкладатися точно таке ж число хвиль, що і на прямому шляху. Більш короткий, прямий шлях, хвилі проходять велику товщу скла, а в склі хвиля коротша, ніж у повітрі. Тому різні (по довжині



Мал. 21.5.

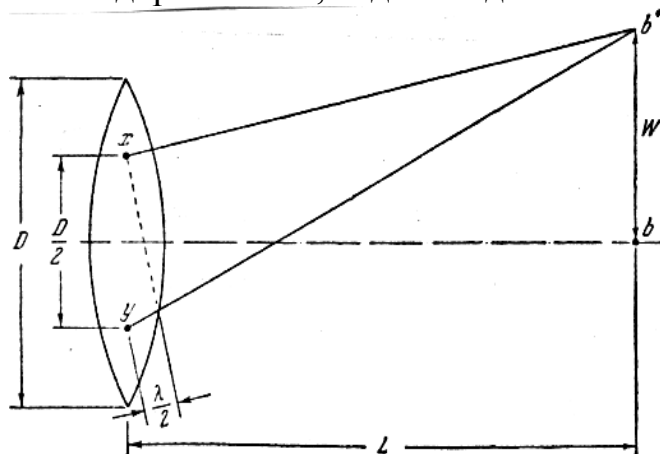
шляху через лінзу) промені світла містять у собі однакове число хвиль. Лінза фокусує у точці b усі хвилі, що виходять із точки a , тому що вона має форму, що зрівнює всі шляхи хвиль від a до b ; число хвиль, що укладаються на будь-якому шляху через лінзу від a до b , виявляється однаковим. Зовсім ясно, що хвилі фокусуються не точно в точці b , а в деякій області навколо її. Оцінимо можливу різкість зобра-

ження. На Мал. 21.6. показано лінзу величиною D , що фокусує хвилі в точці b на відстані L від лінзи. Лінза розділена на дві половини; відстань між центрами x та y обох половин дорівнює $D/2$. Перемістимося нагору на відстань W від точки b до точки b' . Відстань W так обрана, що крапка b' відстоїть від центра в нижньої половини лінзи на півхвилі далі, ніж від центра x верхньої половини лінзи. Коли в цю точку приходять гребені хвиль від нижньої половини лінзи, від верхньої половини приходять западини, і навпаки. У точці b' хвилі будуть відсутні.

Легко догадатися, що якщо величина L багато більша за W чи λ , то з великою імовірністю можна записати, що:

$$W / L = \lambda / D \quad (21.23)$$

Хвилі дійсно будуть не тільки в точці b , але і над нею і під нею. Однак на відстані, що приблизно дорівнює W , над b і під b хвиль не буде зовсім.



Мал. 21.6.

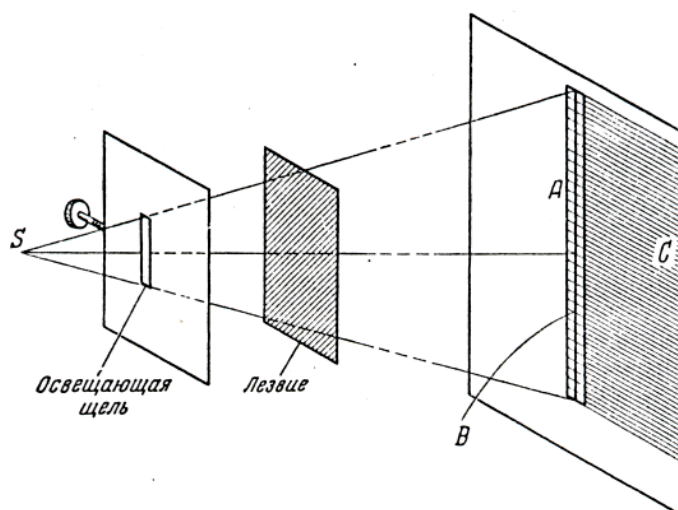
Фактично основна частина хвиль припадає на область $b \pm W/2$. Установлене вище співвідношення є винятково важливим як для радіо, так і для оптики. Можна показати, що воно може бути застосовано не тільки до фокусуючих лінз, але і до фокусуючих увігнутих дзеркал. Зокрема, якщо розмір антени радіолокатора дорівнює D і ця антена посилає пучок радіохвиль з довжиною хвилі λ , то товщина пучка W визначається співвідношенням (21.23). При ширині антени 3м і довжині хвилі $\lambda=10$ см на відстані 1000м ширина променя радіолокатора буде $W=33,3$ м. При $\lambda=1$ см - $W=3,33$ м. Це показує, як важливо для підвищення точності у визначенні напрямку на літак використовувати в локаторах короткі хвилі і великі антени.

22. ДИФРАКЦІЯ

Відомо, що непрозорі предмети, освітлювані джерелом світла, що має малу кутову довжину, відкидають тіні. Виникає питання, чи є межа між світлом і тінню абсолютно різкою, як цей має бути за законами простої геометричної моделі поширення енергії.

Досвід показує, що завжди існує перехідна область, де світло поступово переходить у тінь. Ця область називається півтіню. Її існування в рамках геометричної оптики пояснюють тим, що джерело не є точковим: півтінь - це та частина екрана, що висвітлюється не всіма точками джерела. Але тоді, залишаючись у межах геометричної оптики, варто очікувати, що при достатнім зменшенні розмірів джерела область півтіні стане якою завгодно вузькою і ми побачимо абсолютно різкий стрибок експериментальних результатів від області світла до області тіні.

Проведемо наступний експеримент. Будемо поступово звужувати щілину, через яку монохроматичне джерело висвітлює металеве лезо, край якого є паралельним щілини, і будемо спостерігати тінь леза на екрані, який розташовано на великій відстані від леза (Мал. 22.1.)



Мал. 22.1.

Спочатку область півтіні буде звужуватися, і перехід від світла до тіні буде ставати більш різким, як цього вимагають уявлення, здобуті з законів геометричної оптики. Але, коли ширина щілини досягне значення 1мм (при відстані 2м між лезом і екраном), подальше її звуження не призводить до збільшення різкості межі світла і тіні на екрані. Виникає зовсім інше явище: починають усе більш чітко вимальовуватися світлі та темні вертикальні смуги в тій області, де відповідно до геометричної оптики повинна бути рівномірна освітленість, і виникає дуже плавне

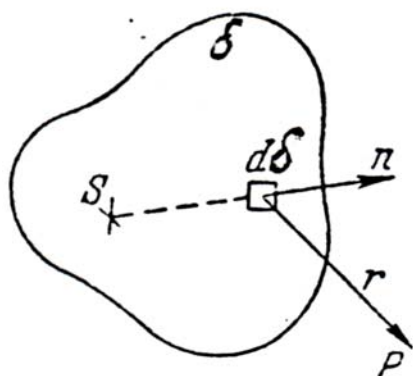
спадання величини освітленості при поглибленні в область, де повинно бути абсолютно темно.

Отже, у випадку дуже вузького джерела реальна картина переходу від світла до тіні зовсім не та, котра мала б реалізуватися за законами геометричної оптики. Подібно звуку і радіохвилям, світло обгинає перешкоди. Геометрична оптика точно описує те, що робиться в областях A і C (Мал. 22.1.), але не те, що робиться в перехідній області B . Тут спостерігаються оптичні *дифракційні явища*, чи *дифракція світла*.

Теорія дифракції займається головним чином вивченням розподілу поля в цих особливих областях і природно, що ці області, де утвориться оптичне зображення (область фокуса), становлять великий практичний інтерес. Техніка створення мікроскопів одержала наукову основу і була доведена до високого рівня досконалості лише після того, як була побудована теорія, що описує утворення оптичного зображення як один з випадків дифракції. Тут термін *дифракція* вживається в сенсі відхилення експериментальних даних від тих, що мали б бути отримані на основі застосування закону прямолінійного поширення світла. Аналогічно можна говорити про дифракцію водяних хвиль, звуку, радіохвиль.

У поняття дифракції можна вкласти більш широкий зміст: це сукупність явищ, що відбуваються при поширенні хвиль у неоднорідних середовищах. Це може бути прозоре середовище, що містить в собі непрозорі перешкоди, чи прозоре середовище, показник переломлення якого є різним у різних місцях.

Проблеми, що виникають при вивченні дифракційних явищ, відносяться до найбільш важких в оптиці і їхній рідко вдається довести до точного розв'язку. У більшості ж випадків, що становлять практичний інтерес, через математичні труднощі дослідники змушені використовувати наближені методи. І тут надзвичайно могутнім знаряддям, що дозволяє вирішити більшість питань, що зустрічаються в експериментальній оптиці, є принцип Гюйгенса - Френеля. Основна ідея цього принципу полягає в наступному. Уявимо собі деяку довільну замкнену поверхню δ , що охоплює джерело хвиль (Мал.22.2.), яку назовемо



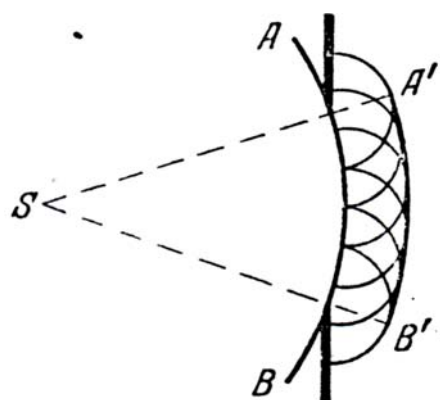
Мал. 22.2.

допоміжною поверхнею. Коливання, що створюється реальним джерелом S у довільній точці P , може бути представлено, як суперпозиція коливань, що створювали б у цій точці уявлені джерела, які безупинно розподілені по поверхні δ ; при цьому величини, що характеризують фіктивні джерела (амплітуда, фаза, діаграма спрямованості), що знаходяться на деякому елементі $d\delta$ поверхні δ , залежать певним чином від відповідних величин, характеризу-

ють реальне коливання, створюване джерелом S у точках цього ж елемента $d\delta$.

Реальне джерело S називають *первинним джерелом*, а випромінювану ним хвилю - *первинною хвилею*. Фіктивні джерела називають *вторинними джерелами*, а хвилі, що вони “випромінюють” - *вторинними хвилями*. Можна сказати, що принцип Гюйгенса - Френеля дозволяє представити первинну хвилю поза δ як суперпозицію вторинних хвиль, випромінюваних точками поверхні δ . Френель в основу своєї теорії дифракції поклав ідею Гюйгенса про вторинні хвилі, але істотно її переробив, додавши в неї положення, які були відсутні в Гюйгенса, наприклад, представлення про те, що суперпозиція хвиль у залежності від їхніх фазових співвідношень призводить до їхнього посилення чи послаблення. Цей факт здобуває вирішальне значення для розуміння явищ дифракції, зокрема, утворення тіні чи оптичного зображення.

Отже, відповідно до теорії Гюйгенса кожену точку хвильового фронту можна вважати центром вторинного збурення, що викликає появу елементарних сферичних хвиль, а хвильовий фронт у кожний більш пізній момент часу - вважати огинаючою цих хвиль (Мал. 22.3.).



Мал.22.3.

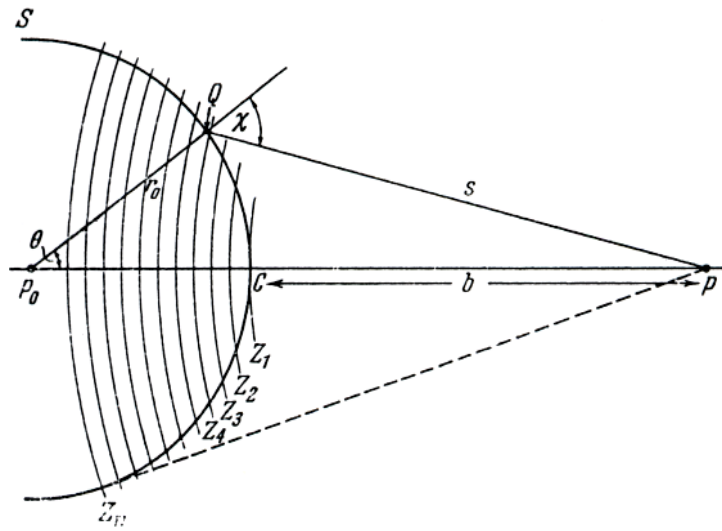
Френель зміг пояснити явище дифракції, доповнивши теорію Гюйгенса твердженням, що вторинні хвилі взаємодіють між собою. Перш ніж застосувати принцип Гюйгенса-Френеля до вивчення дифракційних ефектів, подивимось, чи правильно він описує поширення світла у вакуумі.

Нехай S (Мал.22.4.) – миттєве положення сферичного монохроматичного хвильового фронту з радіусом r_0 , що поширюється від точкового джерела P_0 .

Визначимо світлове збурення в точці P . Збурення в точці Q хвильового фронту можна представити з точністю до періодичного в часі множника $\exp(-i\omega t)$ у вигляді Ae^{ikr_0}/r_0 , де A - амплітуда на відстані одиниці довжини від джерела. Відповідно принципу Гюйгенса – Френеля кожен елемент хвильового фронту розглядається, як *центр вторинних збурень*, що поширюються в вигляді елементарних сферичних хвиль; внесок у збурення $dU(P)$, зроблений елементом dS , що знаходиться в точці Q , буде мати вигляд:

$$dU(P) = K(\chi) \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{e^{iks}}{s} dS,$$

де $s = QP$, $K(\chi)$ - коефіцієнт нахилу, що описує зміну амплітуди вторинних хвиль у залежності від напрямку, χ - кут дифракції. Виходячи з



Мал. 22.4.

положень теорії Френеля, припустимо, що K максимально в первісному напрямку поширення світла, тобто при $\chi = 0$, його величина швидко зменшується зі збільшенням χ і дорівнює нулю при $\chi = \pi/2$, коли QP стає дотичної до хвильового фронту. Повне збурення в точці P дорівнює

$$U(P) = \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \iint_S \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) dS \quad (22.1)$$

Для обчислення цього інтеграла використовують зони Френеля. Побудуємо навколо точки P сфери з радіусами b , $b + \lambda/2$, $b + 2\lambda/2$, $b + 3\lambda/2$... $b + j\lambda/2$, де $b = CP$, а C - точка перетинання P_0P з хвильовим фронтом S (Мал.22.4.). Сфери поділяють S на цілий ряд зон.

Нехай величини r_0 і b є великими в порівнянні з довжиною хвилі, тоді можна припустити, що в будь-якій зоні величина $K = \text{Const}$. З Мал.22.4. видно, що $s^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\theta$. Отже, $s ds = r_0(r_0 + b)\sin\theta d\theta$, тому і виходить, що:

$$dS = r_0^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{r_0}{r_0 + b} s ds d\varphi, \quad (22.2)$$

де φ - азимутальний кут. Отже, внесок зони j в $U(P)$ дорівнює

$$U_j(P) = 2i\lambda(-1)^{j+1} K_j \frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} \quad (22.3)$$

Звідси видно, що внески наступних зон мають різні знаки. Результуючий ефект у точці P виходить шляхом підсумовування внесків усіх зон, тобто

$$U(P) = 2i\lambda \frac{Ae^{[ik(r_0+b)]}}{r_0 + b} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} K_j \quad (22.4)$$

Наближене обчислення цього ряду дає наступний результат: $\Sigma = K_1/2 + K_n/2$, якщо n є непарним, і $\Sigma = K_1/2 - K_n/2$, якщо n є парним.

Тоді

$$U(P) = i\lambda(K_1 \pm K_n) \frac{Ae^{[ik(r_0+b)]}}{r_0 + b} \quad (22.5)$$

Якщо скористатися з (22.3), то можна це рівняння переписати в такій спосіб:

$$U(P) = \frac{I}{2} [U_1(P) + U_n(P)] \quad (22.6)$$

Для останньої зони Z_n , яку видно з P , QP стає дотичної до хвильового фронту і, як говорилося вище, величина $K_n = 0$. Тоді

$$U(P) = i\lambda K_1 \frac{Ae^{[ik(r_0+b)]}}{r_0 + b} = \frac{I}{2} U_1(P), \quad (22.7)$$

тобто повне збурення в P дорівнює половині збурення, обумовленого дією першої зони. Формула (22.7) добре узгоджується з виразом, що описує дію сферичної хвилі, якщо $i\lambda K_1 = I$, тобто за умови:

$$K_1 = -i/\lambda = \exp(-i\pi/2)/\lambda \quad (22.8)$$

Множник $\exp(-i\pi/2)$ можна пояснити, якщо припустити, що вторинні хвилі відстають по фазі, на чверть періоду від первинної хвилі. Присутність другого множника стає зрозумілим, якщо припустити, що амплітуди вторинних і первинних хвиль відносяться як $I:\lambda$. Таким чином, при цих припущеннях щодо амплітуди і фази вторинних хвиль принцип Гюйгенса - Френеля правильно описує поширення сферичних хвиль у вільному просторі.

Давайте тепер закриємо кілька зон плоским екраном, перпендикулярним P_0P із круглим отвором, центр якого знаходиться на цій лінії, і розглянемо дію зон, що залишилися, у P точці. Сумарне збурення в P обумовлено тільки хвилями від незакритих зон. Якщо екран залишає відкритою тільки половину першої зони, то з (22.3), вважаючи, що $j = 1$, та помножуючи на $1/2$, одержуємо

$$U(P) = i\lambda K_1 \frac{Ae^{[ik(r_0+b)]}}{r_0 + b} = A \frac{e^{[ik(r_0+b)]}}{r_0 + b} \quad (22.9)$$

Отже, збурення у P виявляється таким же, як і під час відсутності екрана. Якщо закриті всі зони, крім першої, то з (22.3) знаходимо:

$$U(P) = 2i\lambda K_1 \frac{Ae^{[ik(r_0+b)]}}{r_0 + b} = 2A \frac{e^{[ik(r_0+b)]}}{r_0 + b}, \quad (22.10)$$

і інтенсивність $I(P) = |U(P)|^2$ буде у чотири рази більшою, ніж під час відсутності екрана. При подальшому збільшенні отвору інтенсивність зменшується, тому що перші два члени в (22.4) мають різні знаки. Більш того, K_1 і K_2 майже однакові, і, якщо отвір приблизний дорівнює двом першим зонам, то в точці P буде майже повна темрява.

Тому при зміні розмірів отвору спостерігається періодична зміна інтенсивності в точці P . Той саме результат можна одержати, якщо розміри отвору і джерела не змінюються, а точка спостереження пересувається уздовж осі. У цьому випадку при наближенні точки P до екрана збільшується число зон, що відкриваються. Всі описані вище результати підтверджуються експериментом.

Одне з передбачень теорії Френеля зробило сильне враження на його сучасників і фактично поклало кінець суперечки між прихильниками корпускулярної та хвильової теоріями світла. Мова йде про явище, що спостерігається при закритті першої зони маленьким круглим диском, розташованим під прямим кутом до прямої P_0P . Тоді сума ряду (22.4) дорівнює $K_2/2$. Оскільки K_2 не набагато відрізняється від $K_1 = 1/(i\lambda)$ і, отже, у геометричній тіні диска інтенсивність світла буде такою ж як і під час відсутності диска. Араго показав, що в центрі тіні маленького диска знаходиться світла пляма, чим і було підтверджено дивне пророкування Френеля.

23. ВИПРОМІНЮВАННЯ

Випромінюванням називається процес збудження хвиль, причому цей процес звичайно пов'язується з дією джерел, які коливаються. Прикладами можуть слугувати: вібруючий дифузор гучномовця, що випромінює звукові хвилі; або електричний струм, величина якого коливається, у передавальних антенах, що призводить до випромінювання електромагнітних хвиль, або електричний диполь, який обертається, що призводить до випромінювання хвиль, які поляризовано по колу.

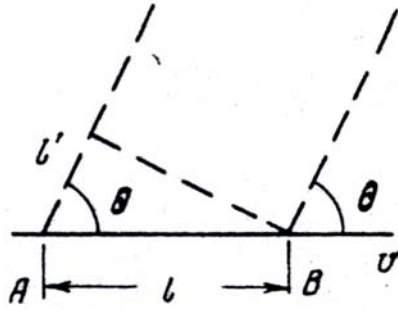
Випромінювання завжди зв'язане з рухом, але не обов'язково із змінним рухом. Якщо електрон рухається у вакуумі прямолінійно і рівномірно, то, як відомо, він не випромінює. Якщо ж він рухається в середовищі, то можливим стає випромінювання Вавілова - Черенкова. Приведемо прості міркування, що стосуються механізму черенковського випромінювання. Розглянемо заряд, що рівномірно рухається, швидкість якого дорівнює $\vec{v}$ (Мал.23.1.). Візьмемо дві точки його траєкторії A і B . У момент перебування в цих точках (як і будь-яких інших точках траєкторії) заряд створює навколо себе електромагнітне поле. Усяке поле можна розкласти в ряд за плоскими хвилями. Розглянемо хвилі, що поширюються з точок A і B під кутом θ до траєкторії заряду. Поля, створювані зарядом у різних точках траєкторії, інтерферують між собою. Якщо швидкість заряду є меншою за фазову швидкість хвиль, тоді в результаті такої інтерференції поля вдалині від траєкторії заряду гасять один одного і залишається лише поле, що переміщується разом із зарядом. Однак, якщо швидкість заряду перевершує фазову швидкість хвиль, тоді взаємного гасіння полів на далеких відстанях не відбувається. При цьому різниця фаз хвиль, що виходять із точок A і B , може дорівнювати нулю. За час t заряд пройде відстань $l = vt$, а хвиля $l' = v_{\phi}t$. З Мал. 23.1. видно, що хвиля, яка вийшла з B буде в одній фазі з хвилею, що вийшла з A , якщо $l' = l \cos \theta$, перепишемо це в інший спосіб:

$$\omega/k = v_{\phi} = v \cos \theta \quad (23.1)$$

Це і є умова черенковського випромінювання. Оскільки точка B була обрана довільно, то будь-яка точка траєкторії створює хвилі, що знаходяться у фазі з хвилями, випущеними іншими точками траєкторії. Іншими словами, частинка безупинно випромінює хвилі.

Умову черенковського випромінювання можна одержати з законів збереження енергії й імпульсу при випромінюванні хвиль частинками. Нехай до випромінювання частинка мала імпульс $\vec{P}$ і енергію $\varepsilon_{\vec{P}}$. Імпульс і енергія випромінюваної хвилі дорівнює $\hbar \vec{k}$ та $\hbar \omega$, відповідно. Після випромінювання енергія й імпульс частинки стали іншими: $\varepsilon_{\vec{P}'}$ і $\vec{P}'$.

Запишемо зв'язок між величинами імпульсу та енергії до та після випромінювання:



Мал.12.1.

$$\vec{P}' = \vec{P} + \hbar \vec{k} \quad (23.2)$$

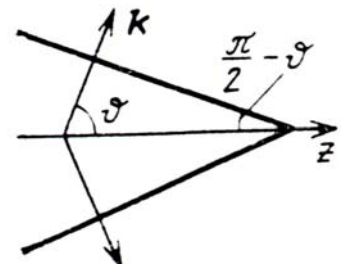
$$\varepsilon_{\vec{P}+\hbar\vec{k}} = \varepsilon_{\vec{P}'} = \varepsilon_{\vec{P}} + \hbar\omega \quad (23.3)$$

Оскільки імпульс, який забирає з собою хвиля $\hbar \vec{k}$ є малим у порівнянні з імпульсом частки $\vec{P}$, то можна записати:

$$\varepsilon_{\vec{P}+\hbar\vec{k}} = \varepsilon_{\vec{P}} + \hbar \vec{k} \partial \varepsilon_{\vec{P}} / \partial \vec{P} = \varepsilon_{\vec{P}} + \hbar(\vec{k} \vec{v}).$$

Звідси $(\vec{k} \vec{v}) = \omega$, що збігається з (23.1). Таким чином, якщо показник заломлення середови-

ща не залежить від частоти, тоді випромінена електроном хвиля укладається усередині конуса, вершина якого збігається з миттєвим положенням електрона, а утворюючі створюють кут $\pi/2 - \vartheta$ з від'ємною віссю Z ; хвильовий вектор $\vec{k}$ зі складовими k_z та k_r є перпендикулярним до утворюючих конуса (Мал.23.2.). Такий же конус виходить при рівномірному русі тіл у газі з надзвуковою швидкістю (він називається конусом Маха). Якщо човен рівномірно рухається по поверхні води зі швидкістю, що перевищує швидкість хвиль на воді, тоді утвориться аналогічна хвиля, що розходить від носа човна.



Мал.23.2.

Крім черенковського, при русі електрона в середовищі має місце *перехідне випромінювання*. Джерелом перехідного випромінювання є частинка, яка рівномірно рухається. При цьому швидкість її руху може бути і менше фазової швидкості світла в середовищі, через яку частинка проходить. Для перехідного випромінювання істотним є зміна оптичних властивостей середовища уздовж траєкторії частинки. Найпростіший приклад перехідного випромінювання був уперше розглянутий В. Л. Гінзбургом і І. М. Франком. Вони розглянули заряджену частинку, що рівномірно рухається, та перетинає по нормалі плоску межу двох діелектричних середовищ з постійними $\varepsilon_1(\omega)$ і $\varepsilon_2(\omega)$. Було визначено поле і втрати енергії заряду на перехідне випромінювання назад (у те середовище, де заряд рухався спочатку). Надалі Г.М. Гарибян обчислив втрати енергії на перехідне випромінювання вперед і показав, що вони лінійно зростають з енергією. Нехай електрон рухається рівномірно і прямолінійно у вільному просторі повз певне ідеально провідне тіло, що у даному випадку відіграє роль оптичної неоднорідності. Поле частинки можна представити у вигляді суперпозиції плоских хвиль різних частот. При цьому усі хвилі

експоненціально загасають при віддаленні від траєкторії частинки. Наявність оптичної неоднорідності призводить до розсіювання парціальних хвиль. Тепер уже повне поле визначається сумою власного поля частинки і розсіяного електромагнітного поля. Якщо власне поле розкладається в ряд за загасаючими гармоніками, то розсіяне поле може складатися і з незагасаючих хвиль, що відповідає дифракційному випромінюванню.

Можна дати й інше пояснення природи дифракційного випромінювання. При русі заряду повз ідеально провідне тіло на поверхні його індукуються змінні струми, що і є джерелом дифракційного випромінювання. Перехідне і дифракційне випромінювання виникає при рівномірному русі електрона; їх варто відрізнити від гальмівного випромінювання, що виникає при гальмуванні чи прискоренні електрона. Гальмівне випромінювання легко розрахувати, виходячи з рівняння руху електрона з урахуванням його дії на самого себе при нерелятивістських швидкостях $v \ll c$. Воно має вигляд

$$m\dot{v}_\alpha = F_\alpha + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}_\alpha, \quad (23.4)$$

де F_α - сила, що діє з боку всіх інших електронів і всіх макроскопічних струмів і зарядів на даний електрон; другий доданок є сила, з яким електрон діє на себе; вона називається *радіаційною* силою чи силою *радіаційного гальмування* (оскільки при своєму русі електрон випромінює, то з'являється сила, що його гальмує, компенсуючи випромінену енергію).

Отже, ми розглядали збурення, що поширюються, які називаються хвилями. Такі хвилі ідуть від джерела, яке їх створює. Однак має бути якийсь зв'язок між хвилями і такими збуреннями, що не ідуть від свого джерела. Розглянемо стоячу хвилю в натягнутій струні, закріпленій кінець якої знаходиться в точці $z = 0$. У якості напруженості хвилі виберемо швидкість переміщення ділянок струни нагору і вниз при поширенні хвилі та зміну кута нахилу струни, що поперемінно то збільшується, то зменшується в процесі поширення хвилі. Зрозуміло, що на закріпленому кінці повна швидкість струни дорівнює нулю. Це означає, що швидкість хвилі, яка переміщується праворуч, дорівнює за абсолютною величиною та має протилежний знак відносно швидкості хвилі, що рухається ліворуч. Дана вимога буде виконуватися, якщо повна швидкість, що ми позначимо через V , виражається в такий спосіб:

$$V = V_0 \{ \exp[i\omega t - kz] - \exp[i\omega t + kz] \} / 2i = -V_0 e^{i\omega t} \sin(kz) \quad (23.5)$$

Якщо в точці $z = 0$ швидкості хвиль, що рухаються в протилежних напрямках, дорівнюють одна одній за модулем та протилежні за знаком, то кути нахилу просто однакові. Повний кут нахилу S ми можемо представити у вигляді:

$$S = S_0 \{ \exp[i\omega t - kz] - \exp[i\omega t + kz] \} / 2 = S_0 e^{i\omega t} \cos(kz). \quad (23.6)$$

Ці формули показують, що дві однакові хвилі, які поширюються у взаємно протилежних напрямках, утворюють стоячу хвилю. У будь-якій точці z швидкість і кут нахилу змінюються синусоїдально в часі. Їх амплітуди також змінюється синусоїдально по довжині. Там, де амплітуда кута є максимальною, швидкість V дорівнює нулю.

Такого роду співвідношення характерні для будь-яких стоячих хвиль. В електромагнітній хвилі, наприклад, електричне поле максимальне там, де магнітне поле дорівнює нулю, а магнітне поле максимальне там, де електричне дорівнює нулю. Коли частота стоячої хвилі прямує до нуля, ми приходимо до постійних кута нахилу та швидкості чи до постійного електричного і магнітного полів. Цим постійним величинам можна поставити у відповідність дві хвилі нульової частоти, що поширюються в протилежних напрямках.

Що дає таке тлумачення постійних значень фізичних величин на підставі представлення про стоячі хвилі? Воно може бути використане при розв'язанні задач про збудження збурень, що змінюються в часі, але поширюються разом із джерелом, яке рухається. При вкрай малих швидкостях руху такі збурення не дуже схожі на хвилі. При збільшенні швидкості джерела, що рухається, збурення середовища стає усе більш схожим на хвилю, що біжить у напрямку руху джерела. Наприклад, поля, що оточують електрон, при його русі зі швидкістю, близької до швидкості світла, дуже подібні до дуже коротких електромагнітних хвиль. Якби джерело змогло досягти швидкості хвилі, то воно створив би справжню хвилю, що біжить уперед.

Коли рухоме джерело досягає швидкості, яка дорівнює швидкості поширення хвиль, енергія виробленого ним збурення стає дуже великою. Щоб надати джерелу швидкість, яка дорівнює хвильовій швидкості, потрібна нескінченна за величиною енергія. Це дійсно так у відношенні до заряджених частинок, що рухаються у вакуумі. Але при русі заряджених частинок у речовині можна перевищити хвильову швидкість, витративши скінченну величину енергії. Збурення, що несуть із собою рухомі тіла, є якимось проміжним явищем між постійним тиском, швидкістю чи полем та справжньою хвилею. Збурення може впливати на саме джерело, що враховується введенням ефективної маси, наприклад, електромагнітної маси заряду, що рухається у вакуумі. Такого роду самовплив стає дуже сильним, коли швидкість руху об'єкта наближається до швидкості хвиль.

Збурення, що несуть із собою тіла, що рухаються, можуть впливати і на інші тіла. Цим пояснюється взаємне притягіння двох тіл, що рухаються пліч-о-пліч у рідині, а також взаємне магнітне притягіння електронів, які рухаються паралельно, що в точності починає дорівнювати електростатичному відштовхуванню електронів при швидкості, рівній

швидкості світла. У квантовій механіці дія збурень, що переносяться з джерелами, враховуються шляхом уведення віртуальних фотонів, якщо збурення електромагнітні, і віртуальних фононів, якщо збурення пружні. Тому збурення, що супроводжують джерело, яке рухається з постійною швидкістю, можна назвати *віртуальною хвилею*.

24. ЗВУКОВІ ХВИЛІ ВІД'ЄМНОЇ ЕНЕРГІЇ У ПОТОЦІ РІДИНИ

Мабуть, найбільш відомим процесом поширення коливань є звук. Розглянемо звукові хвилі у потоці рідини. Рівняння, що описують у одновимірному випадку поведінку потоку рідини, мають вигляд системи, що складається з рівняння динаміки руху елементарного об'єму рідини (аналог другого закону Ньютона), рівняння неперервності (аналог закону збереження маси) та рівняння стану, що зв'язує тиск середовища та його густину. Одновимірний опис – це, звичайно, спрощення, однак і в цьому наближенні зберігаються риси фізичних явищ, які ми маємо намір вивчити. Запишемо цю систему в такий спосіб:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (24.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \rho) = 0, \quad (24.2)$$

$$P = P(\rho), \quad (24.3)$$

де ρ , u , P – відповідно масова густина, швидкість та тиск рідини.

Для розв'язання рівняння скористаємося методом лінеаризації: покладемо $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $P = P_0 + P_1$, $u = u_0 + u_1$, де усі величини з індексом “1” є малими збуреннями, і залишимо в рівняннях (24.1) – (24.3) лише складові, які лінійні відносно цих обурень. Ця процедура і називається лінеаризацією системи рівнянь.

Розкладемо тиск в ряд за відхиленням густини від її рівноважного значення:

$$P(\rho) = P(\rho_0) + \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \dots, \quad (24.4)$$

Тоді внаслідок слабкого стискання рідини в (24.4) можна залишити лише перші два члени ряду. Позначимо похідну від тиску за густиною:

$$C_0^2 = dp(\rho_0) / d\rho, \quad (24.5)$$

де C_0 - має розмірність швидкості та в нашому випадку визначає швидкість звуку. Використовуючи розклад (24.4) та уявлення (24.5) з лінеаризованих рівнянь (24.1) – (24.3), отримуємо хвильове рівняння:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi = C_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (24.6)$$

де φ - є потенціал швидкості, $U = \partial \varphi / \partial x$. Таким чином, ми вважаємо течію безвихровою. Це сильне припущення. Але у випадку розповсюдження звукових хвиль малої амплітуди воно є цілком виправданим. Розв'язок (24.6) має вигляд:

$$U = Af[x - (C_0 + u_0)t] + Bq[x + (C_0 - u_0)t], \quad (24.7)$$

де A та B - сталі; f та q - функції, які визначаються з крайових та початкових умов. Збурення у потоці рухаються відносно лабораторної системи відліку (тобто тієї системи, де знаходиться нерухомий спостерігач) зі швидкостями $u_0 + C_0$ та $u_0 - C_0$. При $u_0 < C_0$ швидкості руху фази поля збурень спрямовано у різні боки відносно нерухомого спостерігача. Якщо ж $u_0 > C_0$, тоді напрями цих швидкостей збурень однакові.

Щоб підрахувати густину енергії потоку, що промодульований звуковим збуренням, декілька припущень. Будемо вважати, амплітуда звукової хвилі змінюється за законом:

$$A_0 \exp(\gamma t) \cos(\omega' t \pm kx), \quad (24.8)$$

де $\omega' = \omega - ku_0$ - частота хвилі у системі спокою пучка, k - хвильове число, ω - частота у лабораторній системі відліку. З рівняння (24.6) легко одержати зв'язок між ними:

$$(\omega - ku_0)^2 = C_0^2 k^2. \quad (24.9)$$

Вираз (24.9) являє собою дисперсійне рівняння звукових хвиль малої сталої амплітуди ($\gamma = 0$). Величина γ визначає інкремент (зростання) ($\gamma > 0$) або декремент (згасання) ($\gamma < 0$) коливань. Будемо вважати γ дуже малою величиною, багато меншою, ніж ω та ω' . Інкремент γ нам знадобиться тільки для того, щоб "включити" хвилю, яка була нескінченно малої амплітуди при $t \rightarrow -\infty$. Для певного невеликого об'єму рідини можливо записати рівняння руху:

$$\frac{du}{dt} = F, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad (24.10)$$

де

$$F = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = \bar{F} e^{\gamma t} \cos(\omega' t \pm kx). \quad (24.11)$$

Будемо вважати, що всі збурення можливо розкласти в ряд за ступенями $\bar{F}$, вважаючи амплітуду хвилі досить малою

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots \quad (24.12))$$

У першому наближенні ($x_0 = 0$)

$$u_1 = \frac{\bar{F}}{2} e^{\gamma t} \left[\frac{\exp(i\omega' t)}{\gamma + i\omega'} + \frac{\exp(-i\omega' t)}{\gamma - i\omega'} \right], \quad (24.13)$$

$$x_1 = \frac{\bar{F}}{2} e^{\eta} \left[\frac{\exp(i\omega' t)}{(\gamma + i\omega')^2} + \frac{\exp(-i\omega' t)}{(\gamma - i\omega')^2} \right]. \quad (24.14)$$

Нам знадобиться також значення поправки до швидкості в другому наближенні. Тому з рівняння (24.10), підставляючи значення x_1 , запишемо ($x_0 = 0$)

$$\frac{du_2}{dt} = \bar{F} e^{\eta} \cos(\omega' t \pm kx_1) - \bar{F} e^{\eta} \cos \omega' t, \quad (24.15)$$

Звідки можливо визначити неосцилюючу частину u_2 :

$$\bar{u}_2 = \mp k \frac{\bar{F}^2 e^{2\eta}}{(\gamma^2 + \omega'^2)} \frac{\omega'}{2}. \quad (24.16)$$

Густина кінетичної енергії потоку, який промодульовано звуковою хвилею, дорівнює:

$$E_{кин} = \rho_0 \frac{u_0^2}{2} + \rho_0 |u_1|^2 + \rho_0 u_0 \bar{u}_2. \quad (24.17)$$

Густину потенціальної енергії знайдемо у такий спосіб. Визначимо потенціальну енергію рідини як роботу, яку виконали над нею зовнішні сили за рахунок надмірного тиску при стисканні від незбуреної густини ρ_0 до густини ρ . При стисканні елементу рідини з фіксованою масою збільшується її внутрішня енергія (за рахунок роботи) так, що його об'єм V змінюється на величину dV , яка має від'ємний знак. Тоді повна робота, яка виконана над цим елементом за рахунок надмірного тиску (P') з боку сусідніх елементів, дорівнює $P'(-dV)$. Об'єм одиниці маси є $1/\rho$, і, таким чином, зміна енергії одиниці маси за рахунок роботи при стисканні дорівнює:

$$dA_m = P' \left(-d \frac{1}{\rho} \right) = P' \rho^{-2} d\rho. \quad (24.18)$$

де $P' = P - P_0$. Це ми знайшли зміну потенціальної енергії одиниці маси. Щоб знайти зміну потенціальної енергії одиниці об'єму рідини. Треба помножити величину dA_m на значення густини ρ :

$$dA = \rho(P - P_0)(-d\rho^{-1}) \sim (P - P_0)\rho^{-1} d\rho. \quad (24.19)$$

Повна густина потенціальної енергії рідини

$$U = \int_{\rho_0}^{\rho} (\rho - \rho_0) C_0^2 \frac{d\rho}{\rho_0} \cong \frac{C_0^2 (\rho - \rho_0)^2}{2\rho_0}, \quad (24.20)$$

є величиною другого порядку малості за амплітудою збурень. Використовуючи співвідношення:

$$|u_1| \cong \frac{kc_0^2 \rho_0^{-1}}{(\omega - ku_0)} |\rho_1|, \quad (\rho_1 = \rho - \rho_0), \quad (24.21)$$

що виходить з лінеаризованого рівняння (24.1), одержимо, що повна густина енергії потоку, який промодульовано звуковою хвилею, дорівнює:

$$W_{k0} + W = E_{кин} + V / u = W_{k0} + W' + u_0 P', \quad (24.21)$$

де $W_{k0} = \rho_0 \frac{u_0^2}{2}$ - густина кінетичної енергії незбуреного потоку,

$$W' = \rho_0 \frac{|u_1|^2}{2} + \frac{C_0^2}{2} \frac{|\rho_1|^2}{\rho_0} = \frac{|\rho_1|^2 c_0^2}{2\rho_0} \quad (24.22)$$

- густина енергії звукової хвилі в системі спокою потоку,

$$P' = \pm \frac{|\rho_1|^2 c_0}{2\rho_0} \quad (24.23)$$

- густина імпульсу звукової хвилі в системі спокою потоку. Вираз для густини енергії хвилі у потоці, що рухається, має вигляд:

$$W = W' \left(1 \pm \frac{u_0}{c_0} \right), \quad (24.24)$$

тут верхній знак відповідає швидкій хвилі, фазова швидкість якої перевищує швидкість потоку, а нижній – повільній хвилі, що віддалена від потоку. Таким чином, при $u_0 > C_0$ повільна хвиля, тобто та звукова хвиля, чия фазова швидкість є меншою за швидкість потоку, може бути визначена як хвиля від'ємної енергії. Іншими словами, енергія потоку речовини, який промодульовано звуковою хвилею, є меншою, порівняно з величиною енергії незбуреного потоку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Г.С. Горелик. Колебания и волны. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы. – 1959.
2. С.П. Стрелков. Введение в теорию колебаний. М.: Наука. - 1964.
3. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. – 1977.
4. М. Борн, Э.Вольф. Основы оптики. М.: Наука. – 1970.
5. Дж. Пирс. Электроны, волны и сообщения. М.: Из-во физико-математической литературы. – 1961.
6. Б.Б. Кадомцев. Коллективные явления в плазме. М.: Из-во физико-математической литературы. – 1961.
7. Дж. Пирс. Почти все о волнах. М.: Мир. – 1976.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. М.: Наука. – 1988.
9. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. М.: Физматгиз. – 1959.
10. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. – 1974.
11. Н.Н. Моисеев. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука. – 1969.
12. А. Найфэ. Методы возмущений. М.: Мир. – 1976.