Общая лекция Диф. зачёт.

Физическая кинетика 2013

Л.П. Т.Х "Ф-кая кинетика"

Кл. и кв. ф-кая кинетика.

© б. числа ч-ц $N\gg 1$.

Осн. понятия. t и простр. масштабы.

© N ч-ц $6N$-степеней свободы в конфигурац. пр-ве.

т.е. dim конфигурац. (фаз. е) пр-ва $= 6N$. для © N ч-ц

$\forall$ т-а ~~сист~~ в фаз. пр-ве -микросостояние опист фазовую кривую.

Плотность вер-ти для N ч-ц $D(p,q)$

Кол-во ч-ц в $dpdq$

$$dP(q,p,t) = D(p,q)dpdq$$

$$\int dP(p,q,t) = \int D(p,q)dpdq$$

У-е Лиувилля: $\boxed{\frac{\partial D}{\partial t} + \underbrace{\frac{P}{m}}_{=\dot q}\frac{\partial D}{\partial q} + F\frac{\partial D}{\partial p} = 0}$ | Ц из Теорем. Лиувилля о сохр-и объёма фаз-го пр-ва

D - может изменяться в результате движ-я ч-ц в фаз. пр-ве.

$F(q,t)$ - объёмная сила

У-е Лиувилля определ. вер-ть того, что ч-цы ©-ы нах. в $dpdq$

$\frac{P}{M}$ для i-й ч-цы $\frac{P_i}{m_i} = \vec v_i$, $\{x_i\} = (x,y,z)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_i \left(v_{ix}\frac{\partial D}{\partial x_k} + F_k\frac{\partial D}{\partial p_k}\right) = 0}$$

$$dt = \frac{dx_1}{v_{x_1}} = \frac{dy_1}{v_{y_1}} = \ldots = \frac{dz_N}{v_{z_N}} = \frac{dP_{1x}}{F_{1x}} = \ldots$$

~~Х~~ Это и так ~~___~~ понятно.

Но если, что у вас доминка:

$$\cancel{X_0}\frac{\partial U}{\partial t} + X_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots = 0$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots$$

Для © многих ч-ц $A(t, A_0)$ - случайная вел-на, - реализация случайного процесса.

A_0 - распредел-е случайных вел-н

$\langle A(t, A_0)\rangle = m(t) = \cancel{A_0}$ - мат. ожид-е

уср-е по всем ~~сост~~ кол-вам состояний

A_i - i-е случайное состояние

n - кол-во состояний, $i = \overline{1,n}$

$\langle A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{n}$, A_0 - f-я распредел-я для нач-х данных

уср-е по всем $\{A_{0i}\}$

$\langle A(t) A(t_1)\rangle = m_1(t) m(t_1) + \underline{K_2(t, t_1)}$ корелляция - определяет согласованное (связанное состояние 2-х прем-х)

$\langle (A(t) - \langle A(t)\rangle)(A(t_1) - \langle A(t_1)\rangle)\rangle = m_2(t, t_1) - m_1(t) m_1(t_1) = K_2(t, t_1)$

Когда $A(t_1)$ не зав от $A(t_1)$, $K_2 = 0$

Стационарные процессы инвариантны отн-о нач-х усл-й, т.е. все моменты ф-и распредел-я (случ-й вел-ны) инвариантны отн-о замены $\forall t, t_0$; $t \to t + t_0$

$\langle A(t)\rangle = m_1(t)$ - момент 1-порядка

$\langle A(t, t_1)\rangle = m_2(t, t_1)$ - момент 2-порядка

Когда $m_1(t) = m_1(t_1)$, т.е. все моменты t-м равноправны

$\Rightarrow K_2(t, t_1) \neq 0$ при $m_2(t, t_1) = m_2(t - t_1)$

$K_2(t, t_1) = m_2(t - t_1) - m_1^2(t)$

$m_3(t, t_1, t_2) = m_3(t - t_1, t - t_2)$

$K_2(t, t_1)$ - опис-т ~~ход~~ процессы

$K_2(t - t_1)$ наз корреляц-й f-ей ~~наз~~ обладает свойством $\exists$ на конечных масштабах.

$K_2(t - t_1) = 0$ для конечных времён, $t - t_1 = \tau$ эти времена наз. временем τ корреляции.

$\tau_c = \frac{1}{K_2(0)} \int_0^\infty dt |K_2(\tau)|$

для Ⓒ ч-ц. τ_c - t-м корреляции, t-м за кот-е одна ч-ца нах. в поле влияния других.

Расст-е этого взм-я конечно $r_0 \sim 10^{-8}$ см

Масштабы кин. ф-ки

$\tau_c = \frac{r_0}{v_T}$, $v_T \sim 5\cdot10^4 \frac{см}{сес}$

$\tau_0 \sim \frac{10^{-8}}{5\cdot10^4} \sim 10^{-12} sec$

Неравновесные процессы релаксации происх-т лишь при столкн-ях.

Характерные времена столкновительных процессов.

$r \sim 10^{-8} sec$, $\tau_c \sim 10^{-12} sec$

$l \sim \frac{1}{n_0 r_0^2}$, $n_0 = 3\cdot10^{19}\, см^{-3}$ число Лошмидта, атм. конц-я воздуха при 1атм.

длина своб. пробега

$l \sim \frac{1}{n_0 r_0^2} \sim \frac{1}{3\cdot10^{19}\cdot10^{-16}} \sim 10^{-4}\, см \gg r_0$

$\tau = \frac{l}{v_T} \sim \frac{10^{-4}}{5\cdot10^4} = \frac{1}{5}\cdot10^{-8} \sim 10^{-8} sec$

$\tau_{рел} \sim 10^{-8} sec \gg \tau_c$

$n r_0^3$ - безразмерная вел-на

$r_{cp} \sim \frac{1}{n^{1/3}}$, $r_{cp}^3 \sim \frac{1}{n}$

$r_{cp} \sim \frac{1}{(3\cdot10^{19})^{1/3}} = \frac{1}{(30\cdot10^{18})^{1/3}} \approx \frac{1}{3\cdot10^6} \sim 0{,}3\cdot10^{-6}\, см$, $r_0 \ll r_{cp} \ll l$ ($30 \approx 27$)

$\varepsilon = n r_0^3 = \frac{r_0^3}{r_{cp}^3} = 3\cdot10^{19}\cdot10^{-24} \sim \underline{3\cdot10^{-5}}$ кол-во ч-ц в сфере с r_0, параметр газовости

$\frac{\tau_c}{\tau_{рел}} = \frac{r_0}{v_T}\frac{v_T}{l} \sim \frac{r_0}{\frac{1}{n r_0^2}} = n r_0^3 = \varepsilon$, $\boxed{\frac{\tau_c}{\tau_{рел}} = n r_0^3 = \varepsilon \sim 3\cdot10^{-5}}$ параметр газовости

$\frac{v_T}{r_0} \tau_{рел}$ за одного соударения

$m_1(\varepsilon t)$, $m_1(t - t_1, \varepsilon t)$ За τ_c релакс. процесс не [illegible]

для стац. процесса   эволюционные процессы $\tau_{рел} \sim \frac{\tau_c}{\varepsilon}$

Концепция сокр. опис-я неравновесных С-м по Боголюбову.

3 этапа разв-я $\forall$ С N ч-ц:

1) Динамический его $\Delta t \le \tau_0 = \tau_c \sim 10^{-8} - 10^{-9}\, sec$

Нужно опис-е $\forall$ ч-ц N ч-ц: у-е дв-я N ч, либо у-е Лиувилля.

2) Происходит столкн-я, кинетическая стадия

Полагаем: после столкн-я ч-цы теряют нач. данные, свою индивидуальность

Теперь вероятностное опис-е i-й ч-цы не отл. от ^вер. опис-я др.

Кинетическая часть - ② : $\tau_0 \ll t \leq \tau_{столкн} \sim \tau_{рел}$, ~~$\tau_0 \ll \tau_p$~~
t_m столкн-я

$\tau_0 \ll R_{рел} \ll l$

Одночастичная f-я распредел-я $f(\vec{p}, \vec{r}, t)$ $\tau_0 \ll T \ll \tau_{рел}$

За t формируется равновесное состояние, описываемое распредел-ем Максвелла f_m

Для прослеживания мелких деталей в эвол. мы должны ~~...~~ работать на расст-ях больше расст-я взаим-я ч-ц и меньше характерных масштабов релаксации l, дл. своб пробега

$$r_0 \ll R_{рел} \ll l$$

$$\tau_0 \ll T \ll \tau_{рел}$$

смотрим процесс после столкн-й и до релаксации ② как целого.

$$f_m = \frac{n(\vec{R},t)}{(\pi \upsilon_T^2(\vec{R},t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{\upsilon}-\vec{u}(\vec{R},t))^2}{2\upsilon_T^2(\vec{R},t)}\right), \quad f_m(\vec{\upsilon},\vec{R},t)$$

$\vec{R}$ - макро-коорд.

3) Гидродинамическая стадия

Исслед-е эвол. f-и распредел-я, но теперь макро параметры ρ, T, P и др. опосредовано

+Климонтович "~~Неравн~~ Стат. ф-ка" 3 стадии.

Ахменко по

Румер, Рывкин

Спец. курс

Многочастичная ф-я распредел-я цепочка Боголюбова

ББГКИ

Боголюбов, Бор, Грин, Кирквуд, Ивон.

И снова у-е Лиувилля опис-т динамическую стадию

Для ансамбля ч-ц, у-е Лиувилля учит нач. параметры ч-ц.

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \{H, D\} = 0, \quad H\text{-}Гн.$$

Кол-во ч-ц : $N_\phi = nV_\phi = nl_\phi^3$

$\tau_\phi = \frac{\tau}{N} = \frac{\tau}{nl_\phi^3}$ - t за кот-е происх-т одно соудар-е в V_ϕ.

$\tau_\phi = \frac{\tau}{nl_\phi^3}$, при этом $\tau_\phi = \frac{l_\phi}{v_T}$

$\frac{l}{v_T n l_\phi^3} = \frac{l_\phi}{v_T} \to l_\phi^4 = \frac{l}{n}, \; l_\phi = \left(\frac{l}{n}\right)^{\frac{1}{4}} = l\left(\frac{1}{l^3 n}\right)^{1/4} = l\left(\frac{(nr_0^2)^3}{n}\right)^{1/4} = l(n^2 r_0^6)^{1/4} =$

$l(\varepsilon^2)^{1/4} = l\sqrt{\varepsilon}$ / $\varepsilon = nr_0^3$ - параметр газовости

$\varepsilon = \frac{\tau_0}{\tau_{релакс\,(рел.)}}$

$nl_\phi^3 = n\cdot l^3 \cdot \varepsilon^{3/2} = n\cdot\frac{1}{n^3 r^6}\varepsilon^{3/2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \gg 1$

$l_\phi - ?$ $\tau_\phi - ?$

?

$\tau_\phi \sim \frac{l_\phi}{v_T} = \frac{l\sqrt{\varepsilon}}{v_T} = \tau\sqrt{\varepsilon} \ll \tau$

$\tau = \frac{l}{v_T}, \; l = \frac{1}{nr_0^3}$

$\underset{\text{Динамическая}}{\tau_0 \sim \tau_c} \ll \underset{\text{кинетическая}}{\tau_\phi \lesssim t \le \tau = \frac{l}{v_T} = \tau_{рел}}$ см. Климантович

Общие лекции физ. kinetics

§ Кинетическое у-е Больцмана 19.02.13

Ф-я распредел-я

Ранее $\int D(p,q,t)\prod_{i=s}^{N} dp_i\, dq_i = V^{s-1}F_{s-1}(p,q,t)$

Число ч-ц dN со значениями $p \in [p, p+dp]$ и $q \in [q, q+dq]$

$dN = f(p,q,t)\prod_{i=1}^{N} dp_i\, dq_i$ $f(q,p,t)$-одночастичная ф-я распределения

$N = \int f(p,q,t)\prod_{i=1}^{N} dp_i\, dq_i$

Из $N = \int \underbrace{n(p,q,t)}_{\text{конц-я}}\prod_{i=1}^{N} dq_i \Rightarrow n(p,q,t) = \int f(p,q,t)\prod_{i=1}^{N} dp_i$

A-нек. ф-кая вел-на

$\langle A(p,q,t)\rangle = \frac{1}{n(p,q,t)}\int f(p,q,t)\,A(p,q,t)\prod_{i=1}^{N} dp_i$

$\frac{q}{n}$ - плотность потока

$\langle n(p,q,t)A\rangle = \int f A \prod_{i=1}^{N} dp_i$ $\vec{v}\cdot f = (\vec{v}\cdot\vec{n})f = q$ поток ч-ц

$\underset{\text{опр. потока}}{(\vec{v}\cdot\vec{n})A} \Rightarrow Q = \frac{1}{n}\int(\vec{v}\cdot\vec{n})A f(p,q,t)\prod_{i=1}^{N}\vec{p}_i$, где $n = n(q,t)$

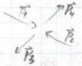
наз. средним потоком потока $(\vec{v}\cdot\vec{n})A$, вел-ны A

$\langle nQ\rangle$ - ср. ток ч-ц через $S_?$ $\langle Q\rangle$ - ср. плотность потока:

$\langle nQ\rangle = \int f(p,q,t)(\vec{v}\cdot\vec{n})A\prod_{i=1}^{N} p_i$

Какие столкн-е процессы происх-т в @ М-ч-ц.

Нах. ф-я распредел-я $f(p,q,t)$



$p_1 \in dp$ => при столкн-и ч-ца может либо выйти из dp (её $p=p_1$ до столкн-я) либо войти в dp (её $p=p_1$ после столкн-я)

?? В результате столкн-я $A+a \to A+a$; $P\ P_1 \quad P_1\ P$ абс. упр.

$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{dt} f\,dp\,dq = (b-a)\,dp\,dq$, измен-е кол-ва ч-ц в $dp\,dq$ с tm

? $\frac{df}{dt} = b-a$

$P \equiv \{p_i\}$ обоб-и

$q \equiv \{q_i\}$ - обоб. к-рдин-ты

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\underbrace{\dot p_i}_{F_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\underbrace{\dot q_i}_{v_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i\frac{\partial f}{\partial q_i} + \underbrace{F_i\frac{\partial f}{\partial p_i}}_{\text{Действие внешних сил}} - \underbrace{I_{ст}}_{\text{наз. и-л. столкновений}}$$

Уг $\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x}$, $dt = \frac{dx}{v_x}$, $x = X + v_x t$, $X = x - v_x t$

=> $f(v_x, x, t_0) \to f(X, v_x, t_0) = f(x - v_x t, v_x, t_0)$

$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec v\frac{\partial f}{\partial \vec r} + \vec F\frac{\partial f}{\partial \vec p} = I_{ст}$ Первоначальная форма ур-я Больцмана

---

① Не знаем $I_{ст}$, - найдём его, от чего он зав.

∀ ч-ц dN ч-ц с $\vec p = \vec p$, испытывает столкн-я с ч-цами с $\vec p = \vec p_1$, и находящихся вдоль линии центров на расст-и $\le v_{отн}\tau$

⊙ × ⊙ линия центров

В цил-ре с образующей $v_{отн}\tau$ и основанием $d\sigma = \sigma\, d\Omega$

$d\sigma\, v_{отн}\tau\, f(\vec p_1, \vec r, t)\, d\vec p_1\, d\vec r = dN_1$

$\frac{dN_1}{\tau}$ - число ч-ц, кот-е могут столкнуться с нашей за ед. tm.

В $dp\,dr$ нах $dN = f(\vec p, \vec r, t)\, d\vec p\, d\vec r$ ч-ц, кот-е могут столкн с dN_1 за ед. tm.

∀ ч-ца из dN может равновероятно столкнуться со всеми из dN_1

всего столкн-й $dN \cdot dN_1 = f(\vec p, \vec r, t)\, f(\vec p_1, \vec r, t)\,\sigma v_{отн}\, d\Omega\, d\vec p_1\, d\vec p\, d\vec r$

Общее число столкн-й, кот-е испытывают ч-цы с $\vec p$ и-ем по кр-ву для всех $\vec p_1$:

$\int d\Omega \int d\vec p_1\, \sigma v_{отн} f(\vec p_1, \vec r, t) f(\vec p, \vec r, t)\, d\vec r\, d\vec p = d\vec r\, d\vec p \int d\vec p_1 \int d\Omega\, \sigma v_{отн} f(t, \vec r, \vec p) f(t, \vec r, \vec p_1)$

Для 1-го слагаемого учтём: $\tilde{U}(\vec r_1, t) = n\int d\vec p_3\, d\vec r_3\, \Phi_{13} F_1(3)$

$\hookrightarrow n\int d\vec p_3\, d\vec r_3 \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \vec r_1}\frac{\partial F_3}{\partial \vec p_1} = \frac{\partial F_2(1,2)}{\partial \vec p_1}\frac{\partial \tilde U(\vec r_1, t)}{\partial \vec r_1} + \underbrace{n\int d\vec p_3\, d\vec r_3 \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \vec r_1}\frac{\partial g_2(1,3)}{\partial \vec p_1}}_{I_{\text{ст}}} \cdot F_1(2)$

Тогда $\frac{\partial F_2}{\partial t} + \vec v_i \frac{\partial F_2}{\partial \vec r_i} + \ldots - \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial U_0}{\partial \vec r_i}\frac{\partial F_2}{\partial \vec p_i} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \vec r_1}\frac{\partial F_2}{\partial \vec p_1} - \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial \vec r_2}\frac{\partial F_2}{\partial \vec p_2} = F_1(2)\, I_{\text{ст}}(F_1(1)) + F_1(1)\, I_{\text{ст}}(F_1(2)) =$

||Вместо $I_{\text{ст}}$ ~~пишем~~ левую часть у-я Больцмана $\cancel{\ }$ и $U = U_0 + \tilde U$ ||
соотв.

$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec v_1 \frac{\partial}{\partial \vec r_1} - \frac{\partial}{\partial \vec r_1}\frac{\partial}{\partial \vec p_1} + \vec v_2 \frac{\partial}{\partial \vec r_2} - \frac{\partial U}{\partial \vec r_2}\frac{\partial}{\partial \vec p_2} - \frac{\partial U}{\partial \vec r_1}\frac{\partial}{\partial \vec p_1}\right) F_1(1) F_1(2)$

$\hookrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial t} + \vec v_1 \frac{\partial F_2}{\partial \vec r_1} + \vec v_2 \frac{\partial F_2}{\partial \vec r_2} - \frac{\partial U}{\partial \vec r_1}\frac{\partial F_2}{\partial \vec p_1} - \frac{\partial U}{\partial \vec r_2}\frac{\partial F_2}{\partial \vec p_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \vec r_1}\frac{\partial F_2}{\partial \vec p_1} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \vec r_2}\frac{\partial F_2}{\partial \vec p_2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec v_1\frac{\partial}{\partial \vec r_1} + \vec v_2 \frac{\partial}{\partial \vec r_2} - \frac{\partial U}{\partial \vec r_1}\frac{\partial}{\partial \vec p_1} - \frac{\partial U}{\partial \vec r_2}\frac{\partial}{\partial \vec p_2}\right) F_1(1) F_1(2)$

$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec v_1 \frac{\partial F_1}{\partial \vec r_1} - \frac{\partial U_0}{\partial \vec r_1}\frac{\partial F_1}{\partial \vec p_1} = n\int d\vec r_2 \int d\vec p_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \vec r_1}\frac{\partial F_2}{\partial \vec p_1}$

ce

Двухчастичная f-я распред-я оказалась зависящей от одночастичной.

В прибл-и парных столк-й оборвали цепочку Боголюбова ($g_3 = 0$)
И для у. двухчастичной и одночастичной f-и распред-я.

Общие лекции phys kinetics (kin phys) 26.02.13

На ~~общ~~ лекции 26.02.13:

$\boxed{a = \int d\vec p_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{\text{отн}}\, f(\vec p, \vec r, t) f(\vec p_1, \vec r, t), \quad v_{\text{отн}} = |\vec v_1 - \vec v|}$

Кол-во парных соударений, кот. испытывает ч-ца в 6N-пр-ве ... пр-ве:

$d\Gamma d\Gamma' = d\Omega\, d\vec p_2\, d\vec r_2\, d\vec p_3\, \sigma\, v_{\text{отн}}$?? $v'_{\text{отн}} = |\vec v_3 - \vec v_2|$
эл-т 6N-мерного пр-ва

$dN_2\, dN_3 = f(\vec p_2, \vec r, t)\, d\vec r_2\, d\vec p_2\, f(\vec p_3, \vec r, t)\, \sigma\, v'_{\text{отн}}\, d\Omega\, d\vec p_3$

Кол-во только парных (абс. упр.) столкн-й

$\vec p$ - соудар. с $\vec p_1$ $\Rightarrow$ образуются $\vec p_2, \vec p_3$
вдоль линии центров, лобовое столкн-е

$\vec p_1 + \vec p = \vec p_2 + \vec p_3$

$\vec p_1^{\,2} + \vec p^{\,2} = \vec p_2^{\,2} + \vec p_3^{\,2}$, т.к. ч-цы одинаковы $m = m_1 = m_2 = m_3$

Пусть $\vec{p}_2 = \vec{p} + \Delta\vec{p}$, $\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1$

Тогда $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{p} + \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p} \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}$

Пусть $\Delta\vec{p} \parallel \Delta\vec{p}_1 \parallel \vec{n}$, $\vec{n}$ - орт линии центров, Пусть $\Delta\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{n}$

$$\vec{p}_2^2 + \vec{p}_3^2 = \vec{p}_1^2 + \vec{p}^2 + 2\Delta\vec{p}_1\cdot\vec{p} + 2\Delta\vec{p}\cdot\vec{p}_1 + 2\Delta\vec{p}^2 \Rightarrow 2\Delta\vec{p}(\vec{p}_1 - \vec{p}) + 2\Delta\vec{p}^2 = 0$$

$\Delta\vec{p}(\vec{p}_1 - \vec{p} + \Delta\vec{p}) = 0$, $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_1$, $\Delta p = (\vec{p} - \vec{p}_1)\vec{n}$

$\Delta\vec{p} = ((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n})\vec{n}$, $\Delta p = -\Delta\vec{p}_1$

$\Rightarrow \vec{p}_2 = \vec{p} + \Delta\vec{p} = \vec{p} + \Delta\vec{p} = \vec{p} + ((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n})\vec{n}$

$p_3 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1 - \Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - ((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n})\vec{n}$

$$\vec{v}'_{отн} = (\vec{p}_3 - \vec{p}_2)\frac{1}{m} = \left((\vec{p}_1 - \vec{p}) - 2((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n})\vec{n}\right)\frac{1}{m} = \vec{v}_{отн} - 2(\vec{v}_{отн}\vec{n})\vec{n}$$

$\Rightarrow \vec{n}\vec{v}'_{отн} = \vec{n}\vec{v}_{отн} - 2(\vec{v}_{отн}\vec{n}) = -\vec{v}_{отн}\vec{n}$

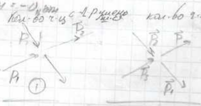
$\Rightarrow \vec{v}'_{отн} = \vec{v}'_{\perp отн} + \vec{v}'_{\parallel отн}$ $\quad \perp, \parallel$ - по отн-ю к $\vec{n}$

$\vec{v}'_{\perp отн} \times \vec{n} = \vec{v}_{отн} \times \vec{n} \Rightarrow v'_{\perp отн} = v_{\perp отн}$

$\vec{v}'_{\parallel отн} \cdot \vec{n} = -\vec{v}_{отн} \cdot \vec{n} \Rightarrow v'_{\parallel отн} = -v_{\parallel отн}$

Меняем индексы $\vec{p} \to \vec{p}_2$, $\vec{p}_1 \to \vec{p}_3$
$\vec{p}_2 \to \vec{p}$, $\vec{p}_3 \to \vec{p}_1$

Кол-во ч-ц с 1 p уменьш. кол-во ч-ц с 1 p увел



т.е.
Переход 1 -> 2 :

чем отл. эти диагр.?
какое принципиальное разл-е в изобр. ими. упр. процессах?

$\vec{p} = \vec{p}_2 + ((\vec{p}_3 - \vec{p}_2)\vec{n})\vec{n}$

$\vec{p}_1 = \vec{p}_3 - ((\vec{p}_3 - \vec{p}_2)\vec{n})\vec{n}$

$\vec{p} = \vec{p}_\perp + \vec{p}_\parallel$

$\vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp = \vec{p}_{2\parallel} + \vec{p}_{2\perp} + \vec{p}_{3\parallel} - \vec{p}_{2\parallel} = \vec{p}_{2\perp} + \vec{p}_{3\parallel}$

$\vec{p}_{1\parallel} + \vec{p}_{1\perp} = \vec{p}_{3\perp} + \vec{p}_{3\parallel} - \vec{p}_{3\parallel} + \vec{p}_{2\parallel} = \vec{p}_{3\perp} + \vec{p}_{2\parallel}$

$p_\perp = p_{2\perp}$
$p_\parallel = p_{3\parallel}$
$p_{1\parallel} = p_{2\parallel}$
$p_{1\perp} = p_{3\perp}$

$$\Rightarrow v_{отн} = \frac{|\vec{p}_1 - \vec{p}|}{m} = \frac{|\vec{p}_{1\parallel} + \vec{p}_{1\perp} - \vec{p}_\parallel - \vec{p}_\perp|}{m} = \frac{|\vec{p}_{3\perp} + \vec{p}_{2\parallel} - \vec{p}_{2\perp} - \vec{p}_{3\parallel}|}{m} = \frac{|(\vec{p}_{3\perp} - \vec{p}_{2\perp}) - (\vec{p}_{3\parallel} - \vec{p}_{2\parallel})|}{m} =$$

$v'_{отн} = v_{отн}$

$$d\vec{p}_2\, d\vec{p}_3 = \left|\frac{\partial(p_{2\parallel}, p_{2\perp}, p_{3\perp}, p_{3\parallel})}{\partial(p_\perp, p_\parallel, p_{1\perp}, p_{1\parallel})}\right| d\vec{p}\, d\vec{p}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\vec{p}\, d\vec{p}_1 = |-1|\, d\vec{p}\, d\vec{p}_1$$

Т.о. $d\vec{p}_2\, d\vec{p}_3 = d\vec{p}\, d\vec{p}_1$

...

$\vec{r}$-шарик dN_2 с $\vec{p}_2$ и $\vec{r}$-шарик dN_3 с $\vec{p}_3$ время

$$\rightarrow \int\limits_{(\vec{p}_3)} dN_2 dN_3 = d\Gamma_1 \int\limits_{(\vec{p}_3)} d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 \, d\Omega \, \sigma \, |\vec{v}_{отн}| f(\vec{p}_2) f(\vec{p}_3) =$$

$$= d\Gamma_1 \int\limits_{(\vec{p}_3)} d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 \, d\Omega \, \sigma \, |\vec{v}_{отн}| f(\vec{p}_2) f(\vec{p}_3)$$

$$b = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega \, |\vec{v}_{отн}| f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2)$$

SS. $$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega \, \sigma \, |\vec{v}_{отн}| \{ f(\vec{p}_1') f(\vec{p}_2') - f(\vec{p}) f(\vec{p}_1) \} = I_{ст}$$

$\boxed{\text{У-е Больцмана}}$

Оценка $I_{ст}$: $I_{ст} \sim -f(\vec{p}) v_T \cdot n \cdot \sigma = -f v_T \frac{1}{\frac{1}{n\sigma}} = -f\frac{v_T}{l} = -\frac{f}{\tau}$

Спец. курс

Продолжение парных столкн.

По своему составу F_2 содержит 2 вр. масштаба: τ_0 — вр. вз-я (быстрое вр.)

$\tau_{столк}$ — вр. м/у процесса вз-я при столкн. (медленное вр.)

$\tau_0 = \frac{r_0}{v_T} \sim 10^{-11} \div 10^{-12}$ sec

r_0 — расст-е между центрами ч-ц

$$\frac{\partial g}{\partial t} \approx \frac{g}{\tau_0}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} \approx -\frac{F_1}{\tau_{столкн}} \qquad |\nabla F_1| \sim \frac{F_1}{l}$$

$$F_2\Big|_{\substack{t \gg \tau_0 \\ \tau_{рел}}} = F_1(1)F_1(2) + \underbrace{g_2(1,2)}_{\text{при } t \gg \tau_0 \to 0} \approx F_1(1)F_1(2)$$

двухчастичного вз-я

Обозн.: $\tau_0 T = t_1$, $\tau_{столк} T = t_2$, T - нек. безразмерн. параметр (обезразмерили вр. перем-е)

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{1}{\tau_0}\frac{\partial}{\partial T}; \quad \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{1}{\tau_{столк}}\frac{\partial}{\partial T}$$

В у-и для F_2 $\frac{\partial F_2}{\partial t}$ можно пренебречь

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial t_2}{\partial t} \approx \frac{F_2}{\tau_0} + \frac{F_2}{\tau_{столк}} \approx \frac{F_2}{\tau_0}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} \approx \frac{F_1}{\tau_{столк}} \approx \frac{\tau_0}{\tau_{ст}}\frac{F_1}{\tau_0} = \frac{\frac{r_0}{v_T}}{\frac{l}{v_T}}\frac{F_1}{\tau_0} = \frac{r_0}{l}\frac{F_1}{\tau_0} = \left\| l = \frac{1}{n r_0^2} \right\| = r_0^3 n \frac{F_1}{\tau_0} = \varepsilon\frac{F_1}{\tau_0} \ll 1, \quad l = l_{free}$$

$$\vec{v}_1 \frac{\partial F_2}{\partial \vec{r}_1} \sim \frac{v_T}{r_0} F_2 \approx \frac{F_2}{\tau_0}$$

Будем считать, что на $r \sim l_{free}$ F_0 - совершает раб. сравнимую с тепловой Э-ей

$$\vec{v}_1 \frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} \sim \frac{v_T}{l} F_1 \approx \frac{F}{\tau_{столк}} = n r_0^3 \frac{F_1}{\tau_0} = \varepsilon\frac{F_1}{\tau_0}; \quad \text{″} \quad \frac{mv_T^2}{2}$$

$$\left| -\frac{\partial U_0}{\partial \vec{r}} \right|_{=F_0(r)} \cdot l \sim T \cdot k_B \rightarrow F_0 \sim \frac{k_B T}{l}, \quad \left| \vec{F}_0 \frac{\partial F_2}{\partial \vec{p}} \right| \sim \frac{k_B T}{l}\frac{F_2}{m v_T} \sim \frac{v_T}{l} F_2 = \frac{F_2}{\tau_{ст}} \ll \frac{F_2}{\tau_0}$$

В резул. опр. ... Т.е. вообще всей правой ч. пренебре. в у-и для

$\hookrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec v_1\frac{\partial}{\partial \vec r_1}+\vec v_2\frac{\partial}{\partial \vec r_2}-\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial \vec r_1}\frac{\partial}{\partial \vec p_1}-\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \vec r_2}\frac{\partial}{\partial \vec p_2}\right)F_2=0$

Чтоб решить это у-е, необх-о задать нач. усл-я. В t_0 - нач:

$F_2(r_{10},p_{10},r_{20},p_{20},t_0)=F_1(\vec r_{10},\vec p_{10},t_0)F_1(\vec r_{20},\vec p_{20},t_0)+g_2(\vec r_{10},\vec p_{10},\vec r_{20},\vec p_{20},t_0)$

6.03.13

Общая лекция

Продолж-е у-е Больцмана

стр 666, 667 Левич т.2 "Курс т. ф-ки" - у-е Больцмана

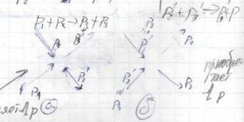
т.к. ∀ релакс-е процессы

У-е Больцмана ∀ f - равновесного состояния ?

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+\vec v\frac{\partial f}{\partial \vec r}+\vec F\frac{\partial f}{\partial \vec p}=\int d\vec p_1\int d\Omega\,\sigma v_{отн}\left(f(\underset{p_3}{X})f(\underset{p_2}{X})-f(\underset{p_1}{X})f(\underset{p}{X})\right)}$$

$\parallel I_{ст}$

$I_{ст}\sim -f\sigma v_т n=-\frac{f}{\frac{1}{\sigma v_{отн}n}}=-\frac{f}{\frac{l}{v_т}}=-\frac{f}{\tau}$



$f(X_i)=f(\vec p_i,\vec r,t)$

? ~~$P_3=P_1,\ P_2'=P_1,\ P_3'=P_2$~~

Это неоднор-е, нелин-е ($\mathcal{H}$ f.), нелокальное $p=p(p_2)$? у-е

Процесс релаксации протекает многостадийно,

? при разл. t_{in} же $h\nu$ разл. ф-ку

Н. Больцмана (формулировка Н. в конце)

что это?

$J(\vec r,t)=\int I_{ст}(\vec p)\,\varphi(\vec p,\vec r,t)\,d\vec p=$

$=\int d\vec p\,d\vec p_1\int d\Omega\,\sigma v_{отн}\{f(\vec p_3)f(\vec p_2)-f(\vec p_1)f(\vec p)\}\varphi(\vec p)$

? симм-ю вар-я в {..}

1) ⇒ Заменим: $\vec p_3\to\vec p_1$, $\vec p_2\to\vec p_3$; $\vec p_1\to\vec p$, $\vec p\to\vec p_2$ ⇒ {...} - сохр-т вид

② $\vec{p} \to \vec{p}_2$ $\vec{p}_1 \to \vec{p}_3$ $\mathcal{I}$ измен знак
$\vec{p}_2 \to \vec{p}_4$ $\vec{p}_3 \to \vec{p}_1$

③

Эти свойства симм-и позволяют записать $\mathcal{I}[\vec{p},t]$ в симметризованном виде

$$\mathcal{I}(\vec{r},t) = \left(\frac{1}{4}\right)\int d\vec{p}\, d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{отн} \underbrace{\{f(\vec{p}_3)f(\vec{p}_2) - f(\vec{p}_1)f(\vec{p})\}}_{\{f\dots\}} \underbrace{(\varphi(\vec{p}) + \varphi(\vec{p}_1) - \varphi(\vec{p}_2) - \varphi(\vec{p}_3))}_{? \text{ что это}}$$

Это и есть И. Больцмана

$\varphi(\vec{p}) + \varphi(\vec{p}_1) - \varphi(\vec{p}_2) - \varphi(\vec{p}_3) = 0$ когда

если з-н сохр-я:

1) $\vec{p} + \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$

2) $\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} = \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3}$ абс. упр. столкн-я

Для абс. упр. столкн-й (m.ж. ©)

$m + m_1 = m_2 + m_3$ ~~масс~~ нет истоков и стоков массы

Итого

$(\varphi(\vec{p}) + \varphi(\vec{p}_1) - \varphi(\vec{p}_2) - \varphi(\vec{p}_3)) = 0$

1) При $\varphi(\vec{p}) = \vec{p}$, $\varphi(\vec{p}_1) = \vec{p}_1$, $\varphi(\vec{p}_2) = \vec{p}_2$, $\varphi(\vec{p}_3) = \vec{p}_3$

2) При $\varphi(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$, $\varphi(\vec{p}_1) = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1}$, $\varphi(\vec{p}_2) = \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2}$, $\varphi(\vec{p}_3) = \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3}$

φ возьмём: $\varphi(\vec{p}) = -\ln f(\vec{p})$

$\Rightarrow (\varphi\dots) = \ln \frac{f(\vec{p})f(\vec{p}_1)}{f(\vec{p}_2)f(\vec{p}_3)}$

if $\{f\dots\} > 0 \Rightarrow \ln \frac{\dots}{\dots} < 0$

if $\{f\dots\} < 0 \Rightarrow \ln \frac{\dots}{\dots} > 0$

$\Rightarrow$ В конечном итоге $\mathcal{I}(\vec{r},t) < 0$

Следствием этого явл. H-т. Больцмана:

При эвол. © N-ч-ц энтропия S of © растёт.

Плотность $\tilde{S}$ идеал. газа в равновесном состоянии (см. статфиз)

? $\tilde{S}(\vec{r},t) \overset{?}{=} \int f(1-\ln f)\, d\vec{p}$, $f = f(\vec{p},\vec{r},t)$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t}(1-\ln f) + -\frac{\partial f}{\partial t}\right) d\vec{p} = -\int \frac{\partial f}{\partial t} \ln f\, d\vec{p}$$

$$-\int \frac{\partial f}{\partial x} \ln f \, d\vec{p} = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(f(1-\ln f)\right) d\vec{p}$$

Запомните это детки!

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + I_{ст}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = -\int \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \ln f \, d\vec{p} = \int \left[\left(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right) f\right] \cdot \ln f d\vec{p} - \int d\vec{p}\, I_{ст} \cdot \ln f =$$

$$= \int \left(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)\left(f(1-\ln f)\right) d\vec{p} - \int d\vec{p}\, I_{ст} \ln f$$

~~fak~~ энтропия: $S = \int_0^\infty \tilde{S}\, d\vec{r} \quad \tilde{S} = \tilde{S}(\vec{r}, t)$

Тогда $\frac{\partial S}{\partial t} = \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} d\vec{r} \Rightarrow$ в для ур-я S $\int d\vec{r}$ ур-е внутр-е.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \int \left(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right) f(1-\ln f)\, d\vec{p}\, d\vec{r} - \int d\vec{r} d\vec{p}\, I_{ст} \ln f$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\dots)\, d\vec{r} = 0 \quad \text{т.к.} \quad f(\vec{r})\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \vec{p}}(\dots)\, d\vec{r} = 0, \quad \text{т.к.} \quad f(\vec{p})\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -\int d\vec{r} d\vec{p}\, \underbrace{I_{ст}}_{<0} \ln f > 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} > 0$$

S растёт только за счёт тостолкн-й.

Равновесное реш-е ур-я Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{отн}\left(f(\vec{p}')f(\vec{p}_1') - f(\vec{p}_1)f(\vec{p})\right)$$

Равновесное и стац состояние для этого ур-я совпадают

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0$$

Динам. равновесие в бездиссипативной среде:

кл-я (динамика) могут $\neq$ вечно

Ур-и столкн-й — сильная диссипация $\Rightarrow$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ - 0. стаци-ть, на б. $t_m (>> \tau_{рел})$, f - измн слабо

Полагаем f - однородное |?

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0$$

Полагаем внешн силы $\vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow I_{ст} = 0$$

$$I_{ст} = 0 \Rightarrow f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2) = f(\vec{p}) f(\vec{p}_1)$$

т.к. $f > 0$ можем $\ln f$

$$\ln f(\vec{p}_3) + \ln f(\vec{p}_2) - \ln f(\vec{p}) - \ln f(\vec{p}_1) = 0$$

$$\ln f(\vec{p}_3) + \ln f(\vec{p}_3) = \ln f(\vec{p}) + \ln f(\vec{p}_1)$$

~~ln~~ Смысл этого: (Ф-ция)

$$\ln f(\vec{p}) = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{p} + \gamma p^2$$

$$f(\vec{p}) = e^{\alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{p} + \gamma p^2} = a e^{b(\vec{p} - \vec{p}_0)^2}$$

Осталось провести соответствие левой и правой частей

Вер-ть ($|\vec{p}| \to +\infty$) должна $\to 0$ (Из эксп.)

$\Rightarrow$ Вер-ть ($\vec{p} \to +\infty$) экспоненциально затухает.

Моменты ф-и распредел-я: мат ожид-е, дисперсия, — эти две вел-ны для гауссова распредел-я.

Т, ρ - плотность, m - среднемассовая скорость

(См. теор вер. 3.2)

Получим эти макро вел-ны из $e^{\alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{p} + \gamma p^2}$

На след. занятии восстановим все числовые параметры

К 15 августа зак-м такими темпами.

Получим: реш-е ур. Больцмана: $f = f_M$ - распредел-е Максвелла.

$$= n\int d\vec{p}_2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \rho\, d\rho\, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \left(F_1(\vec{p}_3, t) F(\vec{p}_{4}, t) - F_1(\vec{p}_{1}, t) F_1(\vec{p}_2, t) \right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{= \int \sigma d\Omega}$$

Игра идёт по $\vec{p}_1$; $\vec{p}_2$ - берётся любое, мы по нему и-ем.

Разл-е f и F:

$$\underbrace{\frac{1}{V}\int F_1 d\vec{p}\, d\vec{r} = 1}_{F \text{ нормирована на объём}} \qquad \underbrace{\frac{1}{N}\int f_1 d\vec{p}\, d\vec{r} = 1}_{f \text{ - нормирована на число ч-ц}}$$

$$\frac{1}{V}\int F_1 d\vec{p}\, d\vec{r} = \frac{1}{N}\int f_1 d\vec{p}\, d\vec{r} \quad \text{// Приравняли единицы}$$

$$\frac{N}{V}\int F_1 d\vec{p}\, d\vec{r} = \int f_1 d\vec{p}\, d\vec{r}$$

$$n F_1 = f_1$$

На след. занятии начнём броуновское движение

Квасников "Неравновесная ТД и кинетика" Учебник — Лит-ра по броун. движ-ю.

19.03.13 - открытая лекция, вопр. не задавать

11.03.13 Общая лекция

$$I_{ст} = n \int d\vec{p}_1 \int d\Omega_1\, v_{отн}\, \sigma \left(f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2) - f(\vec{p}_1) f(\vec{p}) \right)$$

~~Пояуч~~ ~~При~~ При $f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2) = f(\vec{p}_1) f(\vec{p})$

$$\ln f(\vec{p}_3) + \ln f(\vec{p}_2) = \ln f(\vec{p}_1) + \ln f(\vec{p})$$

$$\ln f(\vec{p}) = \alpha + \vec{\beta}\vec{p} + \gamma p^2, \quad f(\vec{p}) = a e^{b(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}$$

α, β, γ - и-е хар-ки всей плазмы (макро)

$$\int f(\vec{p}) d\vec{p} = n, \quad \frac{1}{n}\int f(\vec{p}) \frac{\vec{p}}{\cancel{m}}\, d\vec{p} = \vec{p} = m\vec{v}_0$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n}\int f(\vec{p}) A\, d\vec{p}$$

Таблица. Запомните детки, она нам понадобится:

Исходим из того, что

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx$ if $f(x)$ - чётная

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$, $\int_0^{+\infty} f(x)dx \underset{\text{в.т.}}{\neq} 0$ if $f(x)$ - нечётная

Тогда:

А) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2k}dx = (-1)^k \frac{d^k}{d\alpha^k}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \frac{(-1)^k}{2}\sqrt{\pi}\frac{d^k}{d\alpha^k}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(-1)^k\frac{1}{2^k}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}+k}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^k}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{1}{2}+k}}$$

Б) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x dx = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2\alpha}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^n dx = \cancel{(-1)^k}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2k} x\, dx = (-1)^k\frac{d^k}{d\alpha^k}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x dx = (-1)^k\frac{d^k}{d\alpha^k}\frac{(-1)}{2\alpha} = (-1)^k\frac{(-1)}{2}(-1)^k k!\frac{1}{\alpha^{k+1}}$$

$n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2k+1}dx = -\frac{k!}{2}\frac{1}{\alpha^{k+1}}$$

Заучите:

А. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x^2dx = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x^4dx = \frac{3}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2}}$

Б. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x dx = -\frac{1}{2\alpha}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x^3dx = -\frac{1}{2\alpha^2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x^5dx = -\frac{1}{\alpha^3}$

Имеем функцию распределения

$$f(\vec{p}) = e^{\alpha + \vec{\beta}\vec{p} + \gamma p^2} = a e^{-b(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}$$

Найдём a, b.

Для этого найдём $\langle U \rangle$, $\langle K \rangle = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle$, $P = \frac{\langle F \rangle}{S}$

Выразим a, b через эти средние.

т.е. use $f(\vec{p}) = a e^{-b(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}$, $\vec{p} = m\vec{v}$

1) $\int f dp = n, \quad f = a\exp(-b(\vec p-\vec p_0)^2)$

$$\Rightarrow \int f(\vec p)d^3p = a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b(p_x-p_{0x})}dp_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}dp_y \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}dp_z \ldots = a\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{bp_i^2}dp_i\right)^3 = a\frac{\pi^{3/2}}{b^{3/2}}$$

$$\Rightarrow a = n\left(\frac{b}{\pi}\right)^{3/2}$$

2) $$\langle \vec v\rangle = \frac{1}{n}\int d\vec p\,\frac{\vec p}{m}e^{-b(\vec p-\vec p_0)^2} = \left\|\underset{\text{переход в СО, где } \vec p_0=0}{\vec p-\vec p_0=\vec p}\right\| = \frac{1}{n}\frac{a}{m}\int d\vec p\,(\vec p+\vec p_0)e^{-bp^2} =$$

$$= \frac{a}{mn}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\vec p\,\vec p\,e^{-bp^2}}_{=0} + \frac{a}{mn}\vec p_0\int d\vec p\,e^{-bp^2} = \frac{a}{mn}\vec p_0\left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2}$$

Учитывая $a\int d\vec p\,e^{-bp^2} = n$

$$\Rightarrow \langle\vec v\rangle = \frac{a}{mn}\vec p_0 n$$

$$\vec p_0 = m\langle\vec v\rangle$$

3) $$\varepsilon = \frac{a}{n}\int d\vec p\,\frac{p^2}{2m}e^{-bp^2} = \|d\vec p = 4\pi p^2dp\| = \frac{2\pi}{mn}a\int_0^{+\infty}dp\,p^2p^2e^{-bp^2} =$$

$$= \left\|bp^2 = x^2,\ p = \frac{1}{\sqrt b}x\right\| = \frac{2\pi}{mn}a\frac{1}{b^{5/2}}\int_0^{+\infty}dx\,x^4e^{-x^2} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{nb^{3/2}}{\pi}\right)\frac{\pi^{3/2}}{b^{5/2}}\frac{1}{mn} = \frac{3}{4}\frac{1}{bm}$$

$$b = \frac{3}{4}\frac{1}{\varepsilon m}, \Rightarrow a = n\left(\frac{3}{4\pi\varepsilon m}\right)^{3/2}$$

4) Давление на единичную пов-ть

$\Delta p_x = 2p_x$ упр. взаим-е со стенкой

$dN = v_x\cdot 1\cdot f(\vec p)d\vec p$

$$P = \int d\vec p\,2p_x\frac{p_x}{m}f(\vec p) = \frac{2a}{m}\int_0^{+\infty}dp_x\,p_x^2e^{-bp_x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dp_y\,e^{-bp_y^2}\int dp_z\,e^{-bp_z^2} =$$

$$= \frac{2a}{m}\frac{\pi}{b}\int_0^{+\infty}dp\,p_x^2e^{-bp_x^2} = \|bp_x^2 = x^2\| =$$

$$= \frac{2a\pi}{mb}\frac{1}{b^{3/2}}\int_0^{+\infty}dx\,x^2e^{-x^2} = \frac{2}{m}\frac{nb^{3/2}}{\pi^{3/2}}\frac{\pi}{b^{5/2}}\frac{\sqrt\pi}{4} =$$

$$= \frac{n}{2bm} = nk_БT$$

Учтя $b = \frac{3}{4}\frac{1}{m\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3}{4}k_БT$

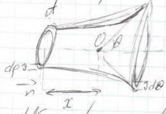
Нап $a, b, \vec{p}_0$ и $f = a e^{-b(\vec{p}-\vec{p}_0)}$

$$f(\vec{p}) = \frac{n}{(2\pi m k_Б T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2mk_Б T}\right)$$ Максвелловское распредел-е

Сечение рассеяния

Продолжение общей лекции 11.03.13

diff. сеч-е рас-е $d\sigma = \frac{dN}{n}$.



Изначально прицельной параметр $\rho \in [\rho, \rho + d\rho]$

$A\theta = x \propto$ если

dN - кол-во рассеявшихся в $d\Omega$ ч-ц.

~~$R\sin\varphi d\varphi$~~ $R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = dS$ - пл-дь на кот-ю попали dN на расст-и R от расс. центра O

$$\frac{dS}{R^2} = d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$d\sigma = \sigma R^2 d\Omega$$

При симм-и от-о полярного угла φ

$$d\sigma = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

H-Th Больцмана

$$\int d\vec{p}\, \varphi(\vec{p}) \left| \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{F}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I_{ст} \right.$$

"Расскажу позже" Михайленко

$\varphi(\vec{p})$ - нек. сохр. вел-на

т.к. $\int d\vec{p}\, \varphi(\vec{p}) I_{ст} = 0$?

$$\Rightarrow \int d\vec{p}\, \varphi(\vec{p}) \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{F}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \right) = 0$$

12.03.13. Общая лекция

З-ны сохр-я

И. Больцмана: $\int I_{ст}\, \varphi(\vec{p},\vec{r}) d\vec{p} = 0$. $\varphi(\vec{p},\vec{r})$ - нек. сохр. вел-на

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + F\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \right) \varphi(\vec{p},\vec{r}) d\vec{p} = 0$$

? Но физ. смысл имеют только соотн-я

$$\int d\vec{p}\, A(\vec{p},\vec{r},t) f(\vec{p}) = n\langle A \rangle, \quad n = n(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \varphi(\vec{p},\vec{r}) f d\vec{p} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \int d\vec{p} (\varphi f \vec{v} - \int d\vec{p} f \frac{\partial \varphi \vec{v}}{\partial \vec{r}}) +$$

$\vec{v} + \vec{v}(\vec{r})$

$+ \int d\vec{p} \frac{d}{d\vec{p}}(\varphi f \vec{F}) - \int d\vec{p} f \frac{\partial}{\partial \vec{p}}(\varphi(\vec{p}) \vec{F}) = 0$

т.к. $f(\vec{p})\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

Имеем: $\frac{\partial}{\partial t}\langle \varphi(\vec{p}, \vec{r})\rangle + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\langle \varphi \vec{v}\rangle - n\langle \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\varphi \vec{v})\rangle - n\langle \frac{\partial \varphi(\vec{p},\vec{r})}{\partial \vec{P}} \vec{F}\rangle = 0$

$\vec{p} = m\vec{v}$ можем $n\langle \ldots \rangle$

Наз. з-ном сохр-я.

φ - сохр.

① $\varphi = m$

② $\varphi = mv_j$

① $\varphi = m$

Вводим среднемассовую плотность

$$\rho(\vec{r}, t) = mn(\vec{r}, t)$$

Ср. скорость

$$u(\vec{r}, t) = \langle \vec{v} \rangle$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i} \rho u_i = 0$

У-е непрер-ти

$F \neq F(\vec{p})$, для силы Лор $F_{Li} = \varepsilon_{ijk} \frac{e}{c} v_j B_k$

$\Rightarrow$ в $\forall$ случае $\frac{\partial F_{Li}}{\partial v_i} = 0$ | а сила $F_{тр} \propto \vec{v}$

$\Rightarrow$ 4-е слагаемое $= 0$

$m \neq m(\vec{r})$, $\vec{v} \neq \vec{v}(\vec{r}) \Rightarrow$ 3-слагаемое $= 0$

② $\varphi = mv_j$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \rho v_j \rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \rho v_i v_j \rangle - \frac{\rho}{m}\langle F_i \underbrace{\frac{\partial v_j}{\partial v_i}}_{\delta_{ij}} \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \rho v_j \rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \rho v_i v_j \rangle = \frac{1}{m}\rho F_j$$

$$\langle v_i v_j \rangle = \langle (v_i - u_i(\vec{r}, t))(v_j - u_j(\vec{r}, t))\rangle + \underbrace{\langle v_i \rangle}_{u_i} u_j + \underbrace{\langle v_j \rangle}_{u_j} u_i - u_i u_j =$$

$$= \langle (v_i - u_i(\vec{r}, t))(v_j - u_j(\vec{r}, t))\rangle + u_i u_j$$

$Ц$ $P_{ij} = \rho \langle (v_i - u_i(\vec r, t))(v_j - u_j(\vec r, t)) \rangle$

Наз. тензор давления

Имеем $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i} = \frac{\rho}{m} F_j$

$$u_j\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho u_i)\right) + \rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial r_i} = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i} + \frac{F_j}{m}\rho$$

1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec u) = 0$ — Ур-е непр-ти

2) $\rho\left(\frac{\partial \vec u}{\partial t} + \vec u \frac{\partial}{\partial \vec r}\vec u\right) = \frac{\rho}{m}\vec F - \frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}$ — Ур-е Навье-Стокса

9 ③ $\varphi = \frac{m^2}{2}|\vec v - \vec u(\vec r, t)|^2$

$Ц$ $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle n m^2 |\vec v - \vec u|^2\rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \frac{n m^2}{2} v_i |\vec v - \vec u|^2\rangle -$

$- \langle \frac{n v_i m^2}{2}\frac{\partial}{\partial r_i}|\vec v - \vec u|^2\rangle - n\langle \frac{m^2}{2} F_i \frac{\partial}{\partial p_i}|\vec v - \vec u|^2\rangle = 0$

$\langle \frac{\partial}{\partial v_i}|\vec v - \vec u|^2\rangle = \langle 2|\vec v - \vec u|\rangle = 0$

Введём определение

Температура $\Theta = k_B T = \frac{1}{3} m \langle |\vec v - \vec u|^2\rangle$

Тогда Def $\vec Q = \frac{\rho}{2}\langle(\vec v - \vec u)|\vec v - \vec u|^2\rangle$ плотность потока тепл

② $\Rightarrow \frac{1}{2} m\rho \langle v_i |\vec v - \vec u|^2\rangle = \frac{1}{2} m\rho \langle (v_i - u_i)|\vec v - \vec u|^2\rangle + \frac{1}{2} m\rho u_i \langle|\vec v - \vec u|^2\rangle$

$= m Q_i + \frac{3}{2}\rho u_i \Theta$

③ $= \langle \frac{1}{2}\rho m v_i \frac{\partial}{\partial r_i}|\vec v - \vec u|^2\rangle = \frac{1}{2} m\rho\langle v_i \cdot 2(v_j - u_j)\left(-\frac{du_j}{dr_i}\right)\rangle =$

$= -m\rho\frac{du_j}{dr_i}\langle (v_i - u_i)(v_j - u_j)\rangle - m\rho\frac{du_j}{dr_i} u_i \underbrace{\langle (v_j - u_j)\rangle}_{=0} =$

$= -P_{ij}\frac{m}{2}\underbrace{\left(\frac{du_i}{dr_j} + \frac{du_j}{dr_i}\right)}_{= \Lambda_{ij}} = + P_{ij}\Lambda_{ij}$

Тензор
Деформ-и $\Lambda_{ij} = +\frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$

Окончательно
$$①+②-③=0$$
$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta) + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial r_i}(\rho u_i\theta) + \frac{\partial}{\partial r_i}(mQ_i) + P_{ij}\Lambda_{ij} = 0$$
$$\frac{3}{2}\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial r_i}\rho u_i\right) + \frac{3}{2}\rho\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + u_i\frac{\partial\theta}{\partial r_i}\right) + m\frac{\partial Q_i}{\partial r_i} + P_{ij}\Lambda_{ij} = 0$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial\theta}{\partial \vec{r}} + \frac{2m}{3\rho}\frac{\partial Q_i}{\partial r_i} = -\frac{2}{3}\frac{\overleftrightarrow{P}\overleftrightarrow{\Lambda}}{\rho}$$

Распредел-е Максвела f - конечный этап кинетической стадии.

τ_0 - Δt столкн-я
τ_{free} - Δt между двумя парными столкн-ями
t - t_m наблюдения $\to$ за кт-е форм. максвел
T - релаксация макро ©
r_0 - Δr взиод-я
l_{free} - free пробега
r - характерный масштаб неоднор-ти
l - мин. размеры обл-ти, на кт-й $\to$ за t форм максвел
L - мин размеры макро ©

$\tau_0 < \tau_{free} < t \sim \tau \ll T$
$r_0 < l_{free} < r \sim l \ll L$

№ 3-стадия неравновесной гидродинамики
На осн-е II-х у-й ①, ②, ③ - гидродинамики
Переходим к безразмерным

$t = Tt'$ Климонтович
$\vec{r} = L\vec{r}'$

$$II\quad \frac{1}{T}\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{1}{L}\frac{L}{T}\vec{v}'\frac{\partial f}{\partial \vec{r}'} + \frac{T}{L}\frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}'} \dots = -\frac{f}{\tau}$$

19.03.13 Общая лекция

1) локальный максвел получен на масштабах $t\sim\tau$, $r\sim l$

$$f(\vec v,\vec r,t)=\frac{n(\vec r,t)}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\vec v-\vec u)^2}{2v_T^2}\right)\qquad \tau_0<\tau<T,\quad r_0<l<L$$

зав-ть от $\vec r$ - локальность

kin стадия развития рас фун-ии локального максвела

макро процессы еще не выделились ~~на общем фоне процесс столкн-ба~~ после того, как столкн-я закончились (скорость ~~...~~ ч-цы фикс.)

2) Как выглядит у-е Больцмана на масштабах T, L.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\Phi I_{ст}\quad\Big\|\quad \text{т.к.}\int\varphi(p)\frac{\partial f}{\partial t}dp=\int I_{ст}\varphi(p)dp=0$$

в kin. стадии $\frac{\partial f}{\partial t}=0$

Имеем у-я непрер-ти (з-ны сохр-я) на $t\sim\tau$, $r\sim l$ - такие, чтоб флуктуации ρ, u, T были малыми, и чтоб эти вел-ны не были макро параметрами т.е. зав-т от $\vec r, t$.

① $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec u=0$

② $\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)=-\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}+\frac{F_j}{m}$

③ $\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial r_i}\right)+\frac{2}{3}m\frac{\partial Q_i}{\partial r_i}=-\frac{2}{3}P_{ij}\Lambda_{ij}$

$$P_{ij}=\rho\langle(v_i-u_i)(v_j-u_j)\rangle$$
$$Q_i=\frac{\rho}{2}\langle(v_i-u_i)|\vec v-\vec u|\rangle$$
$$\Lambda_{ij}=\frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j}+\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

Неравновесная гидродинамика "идёт" после kin стадии.

Ч её с помощью у-й (1-3) гидродинамики

Имеем $\frac{df}{dt}=I_{ст}\sim\frac{f}{\tau}$ Масштаб гидродинам стадии; где f на этих масштабах однор. $V_T\sim\frac{L}{T}$

Обезразмерим перем-е: $t=T\hat t$, $\vec r=L\hat r$, $v=V_T\hat v$, $F=m\frac{dv}{dt}=m\frac{V_T}{T}\frac{d\hat v}{d\hat t}$

T - период колеб-я звуковой волны

L - длина звук. волны

~~V_T - скорость распростр-я фронта звук. волны~~ тепловая скорость, скорость распостр-я звук. волны - скорость распостр-я фронта (теплового, звукового, ударного, ...)

$$\vec F\cdot\frac{T}{mV_T}=\hat F\qquad \vec F=\frac{mV_T}{T}\hat F$$

Тогда
$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial\hat t}\frac{\partial\hat t}{\partial t}=\frac{1}{T}\frac{\partial f}{\partial\hat t}$$

$$\vec v\frac{\partial f}{\partial\vec r}=v_T\hat v\frac{\partial f}{\partial\hat r}\frac{\partial\hat r}{\partial r}=\frac{v_T}{L}\hat v\frac{\partial f}{\partial\hat r}=\frac{1}{T}\hat v\frac{\partial f}{\partial\hat r},\qquad \vec F\frac{\partial f}{\partial\vec p}=\frac{mv_T}{T}\hat F\frac{\partial f}{mv_T\partial\hat v}=\frac{\hat F}{T}\frac{\partial f}{\partial\hat v}$$

У.Б. $\frac{1}{T}\left(\frac{\partial f}{\partial\hat t}+\hat v\frac{\partial f}{\partial\hat r}+\hat F\frac{\partial f}{\partial\hat v}\right)=-\frac{f}{\tau}$

$$T\frac{f}{\tau}=\frac{T\cdot v_T}{\tau\cdot v_T}f=\frac{L}{l}f,\quad v_T\text{ - тепловая},\quad K=\frac{\tau}{T}=\frac{\tau\cdot v_T}{T\cdot\frac{v_T}{V_T}V_T}=\frac{l}{L\cdot\frac{v_T}{V_T}}\ll\frac{l}{L}$$

$$\boxed{K=\frac{l}{L}\text{ - число Кнудсена}}\qquad v_T\approx V_T$$

Для размерных перем-х $\frac{df}{dt} = \frac{1}{k} I_{ст}$

написали, посмотрев у-е в безразмерных перем-х

Потом оно вылезет...

Для безразмерных получим

$$\frac{df}{d\hat{t}} = -\frac{1}{k} f, \quad K = \frac{\ell}{L}$$

Из того, что

$$\frac{1}{T}\frac{df}{d\hat{t}} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, v_{отн}\, \sigma \left(f(3)f(2) - f(1)f(p)\right)$$

~~обезразмерим правую часть~~

$\int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, v_{отн}\, \sigma \left(f(3)f(2) - f(1)f(p)\right)$ // $\sigma_0 = \sigma_0 \hat{\sigma}$, проин-ли по $\int d\vec{p}_1$

$$\sim n \, v_T \sigma_0 \int d\Omega\, v_{отн} \hat{\sigma} \left(f(3)f(2) - f(1)f(p)\right) \sim \frac{1}{\tau} \hat{I}_{ст}$$

Метод Чепмена-Энского: $f = f_M + K f_M + K^2 f_M + \dots$, $K \ll 1$

1) "Стат. Ф-ка" Керзон, Хуанг / Крезон Хуанг | Метод Чепмена-Энского

2) Климантович

Чтоб на кин стадии: $K = \frac{\ell}{L} \ll 1 \Rightarrow \frac{\tau}{T} \ll 1$, ~~в 0-при~~ решить у-е Больцмана

в 0-прибл-и по K $\frac{df}{dt} = 0$, $I_{ст} = 0 \to f = f_M$ - реш-е этого у-я

~~решить у-е~~ На стадии $t \sim T$, $r \sim L$

$\frac{df}{dt} = -\frac{f - f_0}{\tau}$ — $f_0 \equiv f_M$ - максвел; то, что характеризовало $I_{ст}$ - откл-е от максвел ($\frac{df_0}{dt} = 0$) распредел-я

Обозн. $f - f_0 = g$ при этом $\frac{g}{f_0} = K$, $f_0 = \frac{g}{K}$; что такое g?

Хотим показать, что использование разл-я $f = f_0 + g$ не упрощает задачи реш-я у-я Больцмана

$$\frac{df}{dt} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma v_{отн} \left(f_0(3) f_0(2) - f_0(1) f_0(p) + g(3) f_0(2) + g(2) f_0(3) - g(1) f_0(p) - g(p) f_0(1)\right)$$

$\int d\vec{p} f_0(i) \sim n$

Как работать с $\frac{df}{dt} = -\frac{g}{\tau}$?

$\frac{df}{dt} = -\frac{g}{\tau}$, $\frac{d(f_0 + g)}{dt} = -\frac{g}{\tau}$, $t \sim T$

Содержит все слагаемые всех порядков по K

$\frac{df_0}{dt} \sim \frac{f_0}{\tau}$, $\frac{\tau}{T} = \frac{g}{f_0} = +\frac{\ell}{L} \ll 1$

По порядку вел-ны

$f_0 = f_M$, $g = K f_M$

Что такое f_0, что такое g

Почему $f = f_0 + g = f_0 + f_0 K$

почему разл-е такое

?-прибл-е у-я Больцмана

В первом порядке по $K = \frac{\ell}{L}$

$K \ll 1$

$\Rightarrow K \frac{df_M}{dt} = I_{ст}$

$\Rightarrow I_{ст}$ зав-т от $(f_M + g)$

$I_{ст} \sim$ зав-т от $(f_M + K f_M)$

В I-порядке по K

$$K \frac{df_M}{dt} = \underbrace{\int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma v_{отн} \left(\dots \right)}_{\sim \frac{1}{\tau}} = \frac{g(p)}{\tau}$$

$\left(\frac{1}{K}\hat{I}_{ст}\right)$ — но откуда?

релакс. процесс

$$\boxed{g = -\tau \frac{df_M}{dt} \sim -K}$$

$K \frac{df_M}{dt} = -\frac{g}{\tau} = -\frac{f_M K}{\tau}$?

$\frac{df_M}{dt} = -\frac{f_M}{\tau}$?

В чём была проблема?

$$\frac{df}{dt} \sim -\frac{g}{\tau}$$

При раз-и $f = f_M + f_M k + f_M k^2 + \dots$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{T}\frac{df}{d\hat{t}}$$

В I-прибл-и по k, $k = \frac{\tau}{T} \ll 1$: $f_M = f_M + f_M k = f_M + g$

$g = f_M k$

$g \sim k$

$$\frac{1}{T}\frac{d(f_M + f_M k)}{d\hat{t}} \sim -\frac{g}{\tau}$$

$$k\frac{d(f_M + f_M k)}{d\hat{t}} \sim -g$$

~~[illegible]~~

$k\frac{d f_M k}{dt}$ выбрасываем как м-е

$\Rightarrow k\frac{df_M}{d\hat{t}} \sim -g$, $\frac{\tau}{T}\frac{df_M}{d\hat{t}} \sim -g$, $\frac{df_M}{dt} \sim -\frac{g}{\tau}$ | Но ведь $\frac{df_M}{dt} = 0$?!

$$\Rightarrow \frac{g}{f_M} \sim k = \frac{\tau}{T}$$

Если берём $f = f_M + g$, g - произвольная м.м. поправка к f_M

$$\frac{df}{dt} = -\frac{g}{\tau}, \quad \frac{df_M}{dt} + \frac{dg}{dt} = -\frac{g}{\tau}, \quad \frac{\tau}{T}\frac{df_M}{d\hat{t}} + \cancel{\frac{\tau}{T}\frac{dg}{d\hat{t}}} = -g \Rightarrow k\frac{df_M}{d\hat{t}} = -g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df_M}{dt} = -\frac{g}{\tau}$$

Из $k\frac{df_M}{d\hat{t}} = -g \Rightarrow kf_M \sim -g$

$\Rightarrow$ В I прибл-и по k поправка к f_M

$$f = f_M - kf_M$$

$\Rightarrow$ Вся вопр. $\frac{df}{dt} \overset{?}{=} -\frac{g}{\tau}$ | $\Rightarrow I_{ст} = \int dp_1 \int d\Omega\, v_{отн}\sigma\big(f_0(3)f_0(2) - f_0(1)f_0(p) + g(3)f_0(2) + g(2)f_0(3) - g(1)f_0(p) - g(p)f_0(1)\big)$

При $k \gg 1 \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{1}{k}\hat{I}_{ст} \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0$ в 0-порядке по k.

$\int dp_1 d\Omega\, v_{отн}\sigma\,(f_0(3)f_0(2) - f_0(1)f_0(p)) = I^M_{ст} = 0$ для Максвела

$\Rightarrow I_{ст} = \int dp_1 d\Omega\, v_{отн}\sigma\,(g(3)f_0(2) + g(2)f_0(3) - g(1)f_0(p) - g(p)f_0(1))$

Оценка $\int dp_1 f_0(i) \sim n$, $i = 1,3$

$$I_{ст} \sim n\sigma v_{отн}\, g = \frac{v_{отн}g}{1/n\sigma} = \frac{v_{отн}}{\ell}g = \frac{g}{\tau} \Rightarrow k\frac{df_M}{d\hat{t}} = -\frac{g}{\tau}$$

Док-но

Мигдал "Качественные методы кв.мх"

Качественное вычисл-е и-лов.

Метод Чепмена-Энского - регул-е раз-е у-я Больцмана

Перенос ℓ и темпер по $k \ll 1$.

$\to$ Вычисл-е коэф-тов переноса.

$[t \gg 1]$

~~стационарный процесс, где работа теории~~

Т.к. правильность самоподобной кривой известна из ед. что её размерность также известна

Если самоподобная кривая разбита на N частей по ε

$\Rightarrow N = \varepsilon^{-d}$, $L(\varepsilon) = N\varepsilon = \varepsilon^{1-d}$, d - размерность самоподобной кривой

$L(\varepsilon)$ - длина самоподобной кривой

Пр. $d = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ - размерность кривой Коха

Общая лекция

26.03.13

Обзор прошлой лекции

А) $\frac{df}{dt} = I_{ст}$, $I_{ст} \sim -\frac{f}{\tau}$

τ - столкн-я, l - free пробега

При обезразмеривании: $t \sim \tau t'$, $r \sim l r'$ // $1 \sim \frac{V_0 \tau}{l} \sim \frac{F\tau}{mV_0}$ // $V \sim V' V_0$

$\Rightarrow \frac{1}{\tau}\frac{df}{dt'} = -\frac{f}{\tau}$, $\frac{df}{dt'}$ - обезразмеренное

2 м. парам. на кин стадии

$\Rightarrow \frac{df}{dt'} = -f$

$f = \frac{\rho}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{2v_T^2}}$ на τ, l, v_0 / однородно - кин стадия эвол

Б) $\frac{df}{dt} = I_{ст}$, $t \sim Tt'$, $r \sim Lr'$, $v = v_T v'$; $\frac{FT}{mv_T} = F'$

$T \gg \tau$, $L \gg l$

$\frac{1}{T}\frac{df}{dT} = I_{ст}$ $\Rightarrow 1 \sim \frac{v_T T}{L} = \frac{FT}{mv_T}$ 3 м. парам. на гидродинам. стад

Если $f = f_m + g$ нек. м. вариация отн-о f_m, f_m - однородно на T, L.

$\Rightarrow I_{ст} \sim -\frac{g}{\tau}$

$\Rightarrow \frac{\tau}{T}\left(\frac{df_m}{dt'} + \frac{dg}{dt'}\right) = -g$, $\frac{\tau}{T} \ll 1$, $g \ll 1$

$\Rightarrow$ с точностью до м. вел-н²

$\frac{\tau}{T}\frac{df_m}{dt'} = -g$ На масштабе T, L.

$\frac{1}{T}\frac{df}{dt} = I_{ст} \sim -\frac{f}{\tau}$ // $f = f_M + \varphi \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{df_M}{dt'} + \frac{1}{T}\frac{d\varphi}{dt'} \sim -\frac{f_M}{\tau} - \frac{\varphi}{\tau}$

$K = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau \cdot v_T}{T \cdot \frac{v_T}{V_T} V_T} = \frac{l}{L} \cdot \frac{1}{\frac{v_T}{V_T}} \ll \frac{l}{L}$

$\underbrace{v_T \gg V_T}_{\text{на гидродинам. стадии}}$ // За счёт вязкости макро дв-е останавливается $V_T = 0$, а $v_T \neq 0$.

На кин стадии $v_T \sim V_T$

$\Rightarrow$ на кин стадии $K = \frac{l}{L}$

На гидродинам стадии $v_T \gg V_T$

$\Rightarrow$ на этой стадии $K \ll \frac{l}{L}$

Как определять K? Если в каждой стадии оно разн.

$V_T < v_T$ всегда фронт не может распространятся быстрее теплового дв-я ч-ц.

Def. $K = \frac{\tau}{T} \ll 1$, $\tau \ll T$, и на гидродинам $K = \frac{\tau}{T} \ll \frac{l}{L} \ll 1$

$K = \frac{l}{L} \cdot \frac{1}{\frac{v_T}{V_T}} \ll \frac{l}{L} \ll 1$

$\Rightarrow$ Def $K = \frac{l}{L}$ более строгое, чем $K = \frac{\tau}{T}$.

Когда

$l > L$, $V_T = v_T$

ч-ца пролетает сосуд (L-масштаб сосуда)

$l = l_{free}$

L сосуд

Т.е. к т/рму пришли

$\frac{df}{dt'} = \frac{1}{K} I_{ст}'$, $I_{ст} \sim \frac{f}{\tau} \propto \frac{1}{\tau}$

$\frac{df}{dt} = 0$ нет эвол, к равновесному состоянию

$l > L$ озн. что ч-ца "болтается" между стенками сосуда

Взаим-е ч-цы со стенками "успокаивает" ч-цу

$\rightarrow$ приходим к равновесному состоянию (выравнивание простр-т ф-ла $\exists$ границ)

Когда τ - столкн-е ч-ц с друг-другом

T - со стенками

$\tau \gg T$ частота столкн-й между собой $\ll$ частоты столкн-й со стенками.

$\Rightarrow K = \frac{\tau}{T} \gg 1$

Когда $\frac{df}{dt} = \frac{1}{K} I_{ст}$ || Это в безразмерных?

Сохраняя максвелловость f-и распредел-я, увидим: где нах звезд от $\vec{r}, t$.

$$f = f_m(\vec{v}, \vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r},t))^2}{2v_T^2(\vec{r},t)}\right)$$

Локальный Максвел ~~не может~~ $\frac{df_m}{dt} = 0$ т.к. его интеграл $I_{ст} = 0$ $F = 0$.

На масштабе:

$\vec{r} \sim L$, $t \sim T$ – гидродинам стадия

$v_T \overset{?}{=} v_T(\vec{r}, t)$

① $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{u}(\vec{r},t)) = 0$

② $\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_j} + \frac{1}{m}\rho F_j$

③ $\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial r_i}\right) + \frac{2}{3} m \frac{\partial Q_i}{\partial r_i} = -\frac{1}{3} P_{ij} \Lambda_{ij}$

$$P_{ij} = \rho\langle (v_i - u_i(\vec{r},t))(v_j - u_j(\vec{r},t))\rangle$$

$$Q_i = \frac{1}{2}\rho\langle (v_i - u_i(\vec{r},t))|\vec{v} - \vec{u}(\vec{r},t)|^2\rangle$$

Что происх-т, зачем?

Ввд м. возмущ-е ~~не~~ на динам стадии

$f = f_m + K \cdot g$

$\frac{d}{dt}(f_m + K \cdot g) = \frac{1}{K} I(f, f) = \frac{1}{K}\int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, v_{отн}\sigma \left((f_m(p_3) + Kg(p_3))(f_m(p_2) + Kg(p_2)) - (f_m(p_1) + Kg(p_1))(f_m(p) + Kg(p))\right)$ откуда

$$\frac{d}{dt} f_m + K\frac{dg}{dt} = \underbrace{\frac{1}{K} I(f_m, f_m)}_{\substack{0\text{-порядка по } K \\ = 0}} + \underbrace{\frac{1}{K} I(f_m, g)}_{\substack{1\text{-поряд-ка по } K \\ \sim -\frac{g}{\tau}K}} + \underbrace{\frac{1}{K} I(g, g)}_{\substack{2\text{-порядка по } K \\ \text{выкидываем}}}$$

из $\frac{df_m}{dt} = I_{ст\, m}$, $I_{ст\, m} = 0$

$t \to Tt'$

$\frac{1}{T}\frac{d}{dt'} f_m + \frac{K}{T}\frac{dg}{dt'} = -\frac{gK}{\tau} \cdot \frac{1}{K}$, $\frac{df_m}{dt'} + K\frac{dg}{dt'} = -\frac{g}{\tau}\frac{K}{K}$ → все слагаемые одного порядка по K

$$\frac{df_m}{dt'} = -\frac{g}{\tau}$$

$\tau \frac{df_m}{dt} = -g$ формальное реш-е ур-я Больцмана в 1-порядке по числу Кнудсена

24.04.13 Общая лекция

С уевлаева + ур-я ГД реш. последовательно

Д. Ур-я Больцмана + ГДО в 0-порядке по числу Кнудсена

1 $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = I_{ст}$$

$$f_0 = f_M(\vec{r},\vec{v},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r},t))^2}{2v_T^2}\right)$$ ~~def~~

локальный Максвел

локальный / не локальный Максвел) Разл

① $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}(\vec{r},t)) = 0$$

② $$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = -\frac{1}{\rho(\vec{r},t)}\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i} + \frac{1}{m}F_j(\vec{r},t)$$

P_{ij} - тензор давлений

Q_i - ~~поток~~ плотность потока тепла

③ $$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i\frac{\partial T}{\partial r_i} + \frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\frac{\partial Q_i}{\partial r_i} = -\frac{2}{3}P_{ij}\Lambda_{ij}\frac{1}{\rho}$$

$$P_{ij} = \rho\langle(v_i-u_i)(v_j-u_j)\rangle,\quad Q_i = \frac{\rho}{2}\langle(v_i-u_i)|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle,\quad \Lambda_{ij} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

1.1 P_{ij}, Q_i, Λ_{ij} находим ~~сно~~ только зная f-ю распределения

а) Определим Q_i в 0-порядке по числу Кнудсена.

Обозн искомое $\vec{Q}_{(0)}$

то скорость 1-ой средн.массовая скорость, нек. макро скорость с тепловая скорость

$$\vec{Q}_{(0)} = \frac{1}{n}\frac{\rho}{2}\int d\vec{v}\, f_M(\vec{v}-\vec{u})|\vec{v}-\vec{u}|^2$$ Обозн $\vec{v}-\vec{u} = \vec{U}$ - скорость тепловых флуктуаций !

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r},t)$ нек. напр. лен... (скорость распростр. фронта)

$$\vec{Q}_{(0)} = \frac{1}{n}\frac{\rho}{2}\frac{n}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int_{V_\infty} d\vec{U}\,\underbrace{e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}\vec{U}U^2}_{нечёт} = 0 \qquad d\vec{v} = d\vec{U}$$

S. $\vec{Q}_{(0)} = 0$ в 0 порядке по Кн-кнудсен.

б) $$P_{ij}^{(0)} = \frac{1}{n}\rho\int d\vec{v}(v_i-u_i)(v_j-u_j)f_M = \frac{1}{n}\rho\frac{n}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int d\vec{U}\, e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}U_iU_j =$$

$\to 0$ когда подинтер f-я чётная

$$= \frac{\rho}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int d\vec{U}\, U_i^2\delta_{ij}\, e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}} =$$

δ_{ij} - метр. тензор, ~~дек.~~ симв. кр-ве д-я

$$= \frac{\rho}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int d\vec{U}\,U^2 e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}} = \frac{\rho}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}4\pi\int_0^{+\infty} dU\, U^4 e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}} =$$

$d\vec{U} = 4\pi U^2 dU$

$$= \frac{\rho}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}4\pi\frac{d^2}{d\left(\frac{1}{2v_T^2}\right)^2}\int_0^{+\infty} dU\, e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}} = \frac{\rho\, 4\pi}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\frac{d^2}{d\left(\frac{1}{2v_T^2}\right)^2}\sqrt{2v_T^2\pi}\,\frac{1}{2} =$$

$$= \left\|\ \frac{1}{2v_T^2} = a,\ \frac{d^2}{da^2}\frac{1}{a^{1/2}} = \frac{3}{4}a^{-5/2}\ \right\| = \frac{\rho\, 4\pi}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\frac{3}{8}(2v_T^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{\pi} =$$

$$v_T = \frac{T}{m}, \quad T \text{ - в эрг. ед.}$$

$$P_{ij}^{(0)} = n T \delta_{ij}$$

$$p = nT$$

$$P_{ij}^{(0)} = p\delta_{ij}$$

1) Получим у-е переноса M в 0-порядке по К-кнудсен.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + (u_i \nabla_i) u_j = \frac{1}{m} F_j(r,t) - \frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial p\delta_{ij}}{\partial r_i}}_{= \frac{\partial p}{\partial r_j} \equiv \nabla_j p}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r},t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vec{r}}}$$

2) Получим у-е переноса тепла в 0-порядке по К-кнудсен

$$P_{ij}\Lambda_{ij} = \delta_{ij}\, p\, \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial r_i} + \frac{\partial u_i}{\partial r_j}\right)}_{= \operatorname{div}\vec{u}} = p \operatorname{div}\vec{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)T = -\frac{3}{2}\frac{nTm}{\rho} \operatorname{div}\vec{u} = -\frac{2}{3} T \operatorname{div}\vec{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)T = -\frac{3}{2} T \operatorname{div}\vec{u} \qquad \frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2} T \operatorname{div}\vec{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)T + \frac{3}{2} T \operatorname{div}\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\vec{u}T) + \frac{1}{2} T \operatorname{div}\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\vec{u}T) = -\frac{1}{2} T \operatorname{div}\vec{u}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)T = -\frac{3}{2} T \operatorname{div}\vec{u} & \Big| \cdot \rho \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}) = 0 & \Big| \cdot T\vec{u} \end{array}\right) +$$

$$\frac{\partial T\rho\vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\rho\vec{u}\nabla)T + \cancel{\rho T \nabla \vec{u}}}_{\nabla \rho\vec{u}} = -\frac{3}{2}\rho T \nabla\vec{u}$$

$$\frac{\partial (T\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}T) = -\frac{3}{2}\rho T \nabla\vec{u}$$

$$\frac{dT\rho\vec{u}}{dt} = -\frac{3}{2}\rho T\nabla\vec{u}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla\vec{u}) + (\vec{u}\nabla\rho) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\vec{u} = 0 \Rightarrow \underset{if}{\rho \neq \rho(t)} \Rightarrow \nabla\vec{u} = 0 \text{ несжим. ж-ть}$$

Возьмём

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)T = -\frac{3}{2}T div\vec{u}, & \frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2}T\nabla\vec{u} \Rightarrow \nabla\vec{u} = -\frac{2}{3}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\vec{u}\rho) = 0, & \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{2}{3}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}, \quad d \to \text{и-е по } dt \quad \int_{\rho_0} d\ln\rho_0 = \frac{2}{3}\int_{T_0}^{T} d\ln T \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$P = nT = \frac{m}{V}T. \quad T = \frac{V}{m}P$$

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{VP}{V_0P_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \boxed{VP = V_0P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ ур-е адиабаты}}$$

Б. Получим у-я ГД в 1-порядке по К-кнудсен

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{K}I_{ст}, \quad f = f_m + gK$$

$$\frac{d}{dt}(f_m + Kg) = \frac{1}{K}\int d\vec{p}_1\int d\Omega\,\sigma\,v_{отн}\Big(f_m(3)f_m(2) - f_m(1)f_m(p) + Kf_m(3)g(2) +$$

$$+ Kf_m(2)g(3) - Kf_m(1)g(\vec{p}) + Kf_m(p)g(1)\Big) \approx -\frac{g}{\tau}$$

Сокр. в правой части $K \to$ левая часть становится 0-порядка по K

$\Rightarrow$ Сокр. с K в левой части было бы превыш. точности (правая и левая части должны быть с одной точностью по K)

выкидываем $\frac{d}{dt}Kg \to 0$.

S.

$$\Rightarrow \boxed{g = -\tau\frac{df_m}{dt}} \qquad f_m = \frac{n(\vec{r},t)}{(2\pi mk_bT)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}{2mk_bT}\right)$$

$n = n(\vec{r},t)$
$T = T(\vec{r},t)$
$\vec{p}_0 = m\vec{u}, \ \langle\vec{u}\rangle = \vec{u}(\vec{r},t)$

$$g = -\tau\frac{df_m}{dt} = -\tau\left(\frac{\partial f_m}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_m}{\partial \vec{r}} + \frac{F}{m}\frac{\partial f_m}{\partial \vec{v}}\right) =$$

$$= -\tau\left(\frac{\partial f_m}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \right.$$

$$+ v_i \frac{\partial f_m}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial r_i} + v_i \frac{\partial f_m}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial r_i} + v_i \frac{\partial f_m}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m}\frac{\partial f_m}{\partial v_i}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial r_i}\right)}_{\frac{\partial}{\partial r_i}(\rho U_i)} + \frac{\partial f_m}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) + \frac{\partial f_m}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i\frac{\partial T}{\partial r_i}\right) + \frac{F_i}{m}\frac{\partial f_m}{\partial v_i}\right)$$

Хотим избавиться от пр-вод-х по t. $U_i\frac{\partial u_i}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho T)}{m\partial r_i} + \frac{F_i}{m_i}$ $\quad U_i\frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac{2}{3}\frac{T\partial v_i}{\partial r_i}$

Для этого используем у-е непрер-ти, Н-е в 0-порядке по К.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i\frac{\partial \rho}{\partial r_i} = v_i\frac{\partial \rho}{\partial r_i} - \operatorname{div}\rho\vec{u} = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial r_i} - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial r_i} = -\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial r_i}$$

$$\cancel{\frac{\partial u_i}{\partial t}}\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} = v_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - u_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m} = U_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m}$$

На след. занятии определим поправку g.

$v_i = \frac{dr_i}{dt}$

$u_i(\vec{r}, t)$ нек. макродвж-е

Спец. курс

Ц ф-лу Винера-Хинчена: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}$

$x(t) \to x(\omega)$ Фурье-преоб.

$\langle x_i(\omega) x_j(\omega_1)\rangle = I_{ij}(\omega)\delta(\omega + \omega_1)$

$\langle x_i(t) x_j(t_1)\rangle = K_{ij}(t, t_1) = K_{ij}(|t - t_1|) = K_{ij}(\tau)$, $\quad K_{ij}(t, t_1) = K_{ij}\delta(t - t_1)$?

if the corr $\tau_{corr} = 0$ => случ-й процесс наз дельта-коррелированным
$\quad\quad\quad\quad \| t - t_1$

Пр- $\tau_{corr} = 0$

Корр. ил в у-и Ланжевена

Определим коорд. и скорость броун. ч-цы.

Use спектр. плотность случ. процесса

$\dot{p}_i(t) + \Gamma p_i(t) = F_i(t)$; $\quad p_i(0) = p_{i0}$, $x_i(0) = x_{i0}$

$\dot{x}_i(t) = \frac{p_i(t)}{m}$

Запомните: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \frac{dp(t)}{dt} e^{i\omega t} = -i\omega p(\omega)$ Хотите верьте, хотите проверьте...

$$\frac{D\delta_{ij}e^{\Gamma(\tau)}}{-i\Gamma} = \frac{D\delta_{ij}e^{\Gamma\tau}}{\Gamma}$$

б) $\tau<0$ $\quad k_{ij}(\tau) = \frac{D}{\pi}\delta_{ij}\frac{e^{-i\omega\tau}}{2\omega}\Big|_{\omega=i\Gamma}\cdot 2\pi i = \frac{D}{\Gamma}\delta_{ij}e^{\Gamma\tau} \overset{\tau<0}{=} \frac{D}{\Gamma}\delta_{ij}e^{-\Gamma|\tau|}$

обход по верхней полупл-ти

S. $k_{ij}(\tau) = \frac{D}{\Gamma}\delta_{ij}e^{-\Gamma|\tau|}$

Временная ~~ф-я~~ корр. скорости

~~Дисперсия~~ D - спектральная плотность шт-ка

16.04.13

Общая лекция

I-прибл-е по K позволяет $\exists$ g, не содержащий пр-вод-е по t_m. (это происх-т применяя выводы от 0-прибл-я)

кр-е

$$g = -\tau\left[\frac{\partial f_m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r_i}(\rho U_i) + \frac{\partial f_m}{\partial u_j}\left(\frac{F_i}{m} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_i} + U_i\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) + \frac{\partial f_m}{\partial T}\left(U_i\frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac{2}{3}T\frac{\partial u_i}{\partial r_i}\right) + \frac{F_i}{m}\frac{\partial f_m}{\partial v_i}\right]$$

$$f_m = \frac{\rho}{m}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2T}U^2\right); \quad \vec{U} = \vec{v} - \vec{u}(\vec{r},t), \; \rho = \rho(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}f_m, \quad \frac{\partial f_m}{\partial T} = f_m\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{T} + \frac{mU^2}{2T^2}\right), \quad \frac{\partial U_i}{\partial v_i} = +1$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial u_i} = f_m\frac{mU_i}{T}, \quad \frac{\partial f_m}{\partial v_i} = -\frac{mU_i}{T}$$

$$g = -\tau f_m\left[\frac{U_i}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\left(\frac{mU^2}{2T} - \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{T}\Lambda_{ij}\left(U_iU_j - \frac{1}{3}U^2\delta_{ij}\right)\right]$$

Важно:
1) Сила сократилась
2) Только в Λ_{ij} - нахи;
$\Lambda_{ij} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$
3) $\nexists$ пр-вод-я по ρ
$\exists$ ~~...~~ $\frac{\partial T}{\partial r_i}$

$\exists$ $\frac{\partial T}{\partial r_i}$ ~~...~~ $\Rightarrow$ теплопроводность

$\exists$ $\Lambda_{ij} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$ $\Rightarrow$ Вязкость

тензор деформ-и

$\nexists$ $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ - к-ть сама в себе диффундировать не может

Требуем ρ, $\vec{u}$, T - определяются максвеллом f_m, и не переопределяем эти понятия для др. членов разл-я f по K в окрестности f_m. т.е. $\int g\begin{pmatrix}1\\ v\\ v^2\end{pmatrix}d\vec{v} = 0$

$\rho(\vec{r},t) = m\int d\vec{v}\, f_m$

$\vec{u}(\vec{r},t) = \frac{1}{n}\int f_m\vec{v}\,d\vec{v}$

! $T(\vec{r},t) = \frac{1}{3}\frac{m}{n}\int f_m \vec{U}\,d\vec{U}$

Поправки к f-и распредел-я будут в

P_{ij} и $\vec{Q}$

т.е. ~~и будут~~ поправки P_{ij} – малы и к $\vec{Q}$ малы.
будут

А. Вычислим $\vec{Q}$ в 1-порядке по K (К вычислим позже)

$$\vec{Q} = \frac{1}{2}\rho\langle \vec{U} U^2\rangle = \frac{1}{2}\frac{\rho}{2n}\int (f_m + g)\vec{U}U^2 d\vec{U} = \frac{m}{2}\int d\vec{U}\, g\vec{U}U^2 =$$

$$= -\tau\int f_m\Big[\frac{U_i}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\Big(\frac{mU^2}{2T} - \frac{5}{2}\Big) + \frac{1}{T}\Lambda_{ij}\underbrace{\Big(U_iU_j - \frac{1}{3}U^2\delta_{ij}\Big)}_{\to 0 \text{ при и-и}}\Big]\vec{U}U^2 d\vec{U} =$$

порядок $\frac{\partial T}{\partial r_i} \sim \frac{T}{L}$

Далее надо найти К работая с конкретной ф-ой @

$$= -\frac{\tau m}{2}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\int d\vec{U}(U_1\vec{e}_1 + U_2\vec{e}_2 + U_3\vec{e}_3)U^2U_i\Big(\frac{mU^2}{2T} - \frac{5}{2}\Big)f_m =$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ортонорм. репер

$$= -\frac{\tau m}{2}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\int d\vec{U}\, \underbrace{U_1\vec{e}_1 U^2 U_i}_{\substack{\vec{e}U_i \\ \neq 0 \text{ if } i=1}}\Big(\frac{mU^2}{2T} - \frac{5}{2}\Big)f_m + \underset{\substack{i=2 \\ \frac{\partial T}{\partial r_2}\vec{e}_2}}{(1 \to 2)} + \underset{\substack{i=3 \\ \frac{\partial T}{\partial r_3}\vec{e}_3}}{(1\to 3)} =$$

$$= -\frac{\tau m}{2}\frac{1}{T}\nabla T\int d\vec{U}\,\frac{U^2}{3}U^2\Big(\frac{mU^2}{2T} - \frac{5}{2}\Big)f_m \ominus$$

$U_xU_x = U_zU_z = U_yU_y$

$\vec{e}_x U_x^2\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{e}_y U_y^2 \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{e}_z U_z^2\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{U^2}{3}\Big(\vec{e}_x\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial T}{\partial z}\Big)$

$\ominus\; -\varkappa\nabla T$

$$\vec{Q} = -\varkappa\nabla T, \quad \varkappa = \frac{\tau m}{6T}\Big(\frac{m}{2\pi T}\Big)^{3/2} n\int d\vec{U}\, U^4\Big(\frac{mU^2}{2T} - \frac{5}{2}\Big)e^{\dots}$$

$$= \frac{\tau m n}{6T}\Big(\frac{m}{2T}\langle U^6\rangle - \frac{5}{2}\langle U^4\rangle\Big)$$

$$\langle U^2\rangle = \frac{3T}{m}, \quad \langle U^4\rangle = 15\Big(\frac{T}{m}\Big)^2, \quad \langle U^6\rangle = 105\Big(\frac{T}{m}\Big)^3$$

Хотите верьте, хотите проверьте...

$$\varkappa = \frac{\tau m n}{6T}\Big(\frac{m}{2T}\cdot 105\Big(\frac{T}{m}\Big)^3 - \frac{75}{2}\Big(\frac{T}{m}\Big)^2\Big) = \frac{5}{2}\frac{n\tau T}{m}$$

$$\vec{Q} = -\varkappa\nabla T = -\frac{5}{2}n\tau\underbrace{\frac{T}{m}}_{\approx v_T^2}\nabla T = -\frac{5}{2}n\underbrace{\tau v_T}_{\approx l}v_T\underbrace{\nabla T}_{\approx \frac{T}{L}}$$

// $\varkappa = \frac{5}{2}\frac{n\tau T}{m}$

$\vec{Q} = -\varkappa\nabla T$

$\Rightarrow \vec{Q} = -\frac{5}{2}n l v_T\nabla T$

Получили $\vec{Q} \sim \frac{l}{L} = K$ $\quad \| \vec{Q} \sim \frac{l}{L} = K$

Б. Вычислим P_{ij}

$$U_i = v_i - u_i$$

$$P_{ij} = \rho\langle U_i U_j\rangle = \frac{nm}{n}\int d\vec{U}\, U_i U_j (f_m + g) = p\delta_{ij} + \underbrace{m\int d\vec{U}\, U_i U_j g}_{\pi_{ij}\ \text{тензор вязкости}};$$

$$\pi_{ij} = -\tau m \int d\vec{U}\, U_i U_j \Big[\underbrace{\frac{U_k}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k}\Big(\frac{m U^2}{2T}}_{\text{нечет. ф-я} \Rightarrow 0 \text{ при инт}} + \frac{1}{T}\Lambda_{ke}\Big(U_k U_e - \frac{1}{3}U^2\delta_{ke}\Big)\Big] f_m =$$

т.к. оставшееся $\Rightarrow \nabla T$ вклада не вносит

$= \Big/\!\Big/$ чтоб подинтегр. выр-е было чётной ф-ей необх-о $(k=i, l=j)+(k=j, l=i)$ $\Big/\!\Big/ = -\frac{2\tau m}{T}\int d\vec{U}\, U_i U_j \Lambda_{ij} f_m =$

δ_{ij} при $i\neq j$ $\Rightarrow \delta_{ke} = 0$ (недиаг.)

$$= -\frac{2\tau m}{T}\Lambda_{ij}\, n\Big(\frac{m}{2\pi T}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dU_s \exp\Big(-\frac{mU_s^2}{2T}\Big)\int_{-\infty}^{\infty} dU_i U_i^2 \exp\Big(-\frac{mU_i^2}{2T}\Big)\Big(\frac{m}{2\pi T}\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$i\neq j\neq s$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} dU_j U_j^2 \exp\Big(-\frac{mU_j^2}{2T}\Big)\Big(\frac{m}{2\pi T}\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{2\tau m n}{T}\Lambda_{ij}\Big(\frac{m}{2\pi T}\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} dU_i U_i^2 e^{-\frac{mU_i^2}{2T}}\Big)^2 =$$

$$= -\frac{2\tau m n}{T}\Lambda_{ij}\Big(\frac{m}{2\pi T}\Big)\Big(-\frac{\partial}{\partial \frac{m}{2T}}\int_{-\infty}^{\infty} dU_i\, e^{-\frac{mU_i^2}{2T}}\Big)^2 =$$

$$= -\frac{2\tau m n}{T}\Lambda_{ij}\Big(\frac{m}{2\pi T}\Big)\cdot\pi\,\frac{1}{2}\Big(\frac{m}{2T}\Big)^{-3/2} = -\frac{2n\tau T}{m}\Lambda_{ij} =$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{m}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\Big)$$

$$= -n\tau T\Big(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\Big) = -\frac{\eta 2}{m}\Lambda_{ij}$$

B. В у-и переноса η в $\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}$ исп P_{ij} в 0-м и в 1-м порядке по K

Случай несжимаемой ж-ти

$$\rho\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j}\Big) = \frac{\rho}{m}F_i - \frac{\partial P_{ij}}{\partial r_j}.$$

в 0 порядке по K, в I порядке по K

S. $\boxed{P_{ij} = p\delta_{ij} - \frac{2}{m}\eta\Lambda_{ij}}$ $\quad \pi_{ij} = -\frac{2}{m}\eta\Lambda_{ij}$

$$-\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i} = -\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{2}{m}\eta\frac{\partial}{\partial r_i}\Lambda_{ij} = -\delta_{ji}\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{1}{m}\eta\Big(\frac{\partial u_i}{\partial r_i \partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i \partial r_i}\Big)$$

Из у-я непр-ти $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{u} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{u} = 0$ несжим ж-ть

$$\cancel{\frac{\partial u_i}{\partial r_i}\frac{\partial u_j}{\partial r_j} = \frac{\partial}{\partial r_j}\operatorname{div}\vec{u} + \frac{\partial}{\partial r_i}\operatorname{div}\vec{u} = 0}$$

$$\cancel{-\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i} = -\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial r_i}} \qquad \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_j}\operatorname{div}\vec{u} + \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}u_j$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\nabla\vec{u}\right)=\frac{\rho F}{m}-\nabla p+\eta\Delta\vec{u}}$$ У-е Навье-Стокса (6)

У-е теплопроводности в I-прибл-и по K

В u_j: $\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial r_i}\right)+\frac{2}{3}m\frac{\partial Q_i}{\partial r_i}=-\frac{2}{3}P_{ij}\Lambda_{ij}$ (8)

$\sim\frac{1}{L}$, $\sim\frac{1}{L}$ — в 1-порядке по K

$\sim\frac{1}{L}$

В P_{ij} оставляем $p\delta_{ij}$, чтоб $P_{ij}\Lambda_{ij}\sim\frac{1}{L}$

Тогда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{u}\nabla T\right)=-\frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\varkappa\Delta T-\frac{2}{3}p\frac{m}{2}\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{u}$$ (9)

Спец. курс

16.04.13

Метод Чепмена-Энскога

(Лекция посвящена кинетике)

Установили, что $\frac{df}{dt}=\frac{1}{K}I_{ст}$ (а вообще $K\to 0$)

Идея метода: разложение f в ряд по K -> вычисл. f в последовательных прибл-ях по K

$$f=f^{(0)}+Kf^{(1)}+K^2f^{(2)}+\dots$$ индекс разлож. (не путать с прибл. 2-го порядка)

- f - явно от t не зав., но $f=f(\rho,\vec{u},T)$; $\rho=\rho(\vec{r},t)$, $\vec{u}=\vec{u}(\vec{r},t)$, $T=T(\vec{r},t)$

$$\rho(\vec{r},t)=m\int f^{(0)}d\vec{v},\quad \vec{u}(\vec{r},t)=\frac{m}{\rho}\int f^{(0)}\vec{v}\,d\vec{v},\quad T(\vec{r},t)=\frac{1}{n}\int f^{(0)}\frac{m}{3}(\vec{v}-\vec{u})^2d\vec{v}$$

- $\{f^{(i)}\}_1^{+\infty}$ - нек. к-ты разл-я
- т.е. $\int d\vec{v}\,f^{(i)}\begin{Bmatrix}1\\ \vec{v}\\ \vec{v}^2\end{Bmatrix}=0\quad\forall i\geq 1$ // это требование исходит из определения ρ, $\vec{u}$, T

Напомню осн. у-я (после будем их писать в ~~V пор.~~ ону порядке по K)

1) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{u}=0$

2) $\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\nabla)\vec{u}\right)=\frac{\rho}{m}\vec{F}-\underbrace{\nabla\vec{P}}_{=\frac{\partial P_j}{\partial r_j}}$

3) $\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{u}\nabla)T\right)=-\frac{2}{3}\nabla\vec{Q}-\frac{2}{3}P_{ij}\Lambda_{ij}$

Теперь имеется всё, чтоб записать у-е в I-ому порядке по Кн.

24.04.13 Общая лекция || 24.04.13 / 30.04.13 | Две лекции

В уравн. нет $\nabla \rho$, - диффузия в-ва самого в себя не может быть

В q есть $(\vec{u}\nabla)\vec{u}$, ∇T

Релаксация ~~ко~~ примеси лёгкого газа в тяжёлом газе

~~Лоренцева~~ (Лоренцева м-ла столкн-й);

Диффузия примесей лёгких ч-ц в газе тяж-х ч-ц)
дифф-я определ. на осн-и ф-и распредел-я,
сначала ф-я распредел-я отрелакс-я находим дифф-ю

$\rho_1 \ll \rho_2$, $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$

"1" - лёгкие ч-цы
"2" - тяж-е ч-цы

f_1 и f_2 образуют связ-ю с-му ф-й распредел-я

У-е Больцмана для ч-ц лёгкого газа

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = \underbrace{\int d\vec{p}_1' \, d\Omega \, \sigma_{11} |\vec{v}_1 - \vec{v}_1'| \left(f_1(\vec{p}_1'') f_1(\vec{p}_1''') - f_1(\vec{p}_1^*) f_1(\vec{p}_1')\right)}_{I_{ст_{11}}} +$$

$I_{ст_{11}}$ И-л столкн-й лёгких с лёгкими

То, что раньше в одноатомном (одномолекул-м) газе обозн как dp_1 здесь dp_1', $p_2 = p_1''$, $p_3 = p_1''$, $p = p_1^*$ - 4 лёгких ч-ц

σ_{11} - сеч-е расс-я от столкн-я лёгких с лёгкими

$$+ \underbrace{\int d\vec{p}_2 \int d\Omega \, \sigma_{12} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \left(f_2(\vec{p}_2') f_1(\vec{p}_1') - f_2(\vec{p}_2) f_1(\vec{p}_1)\right)}_{I_{ст_{12}}}$$

Ряд упрощений от Лоренца (а именно - методика, она от. верна):

I Порядок вел-н $I_{ст_{11}}$ и $I_{ст_{12}}$

$$I_{ст_{11}} \sim -\frac{f_1}{\tau_{11}}, \quad I_{ст_{12}} \sim -\frac{f_1}{\tau_{12}}$$

τ_{11} - характерное t релакс-и от столкн-й лёгких с лёгкими $\quad \tau_{11} = (n_1 \sigma_{11} c_{T_1})^{-1}$

τ_{12} - t релакс-и от столкн-й лёгких с тяж-ми $\quad \tau_{12} = (n_2 \sigma_{12} c_{T_1})^{-1}$

1) if n_1 - мало и σ_{12} - преобладает над σ_{11} => τ_{12} меньше τ_{11} ~~преобла~~

1 Т.е. будем полагать $\tau_{11} \gg \tau_{12}$

В этом случае $I_{ст_{11}}$ пренебрегаем, т.к $I_{ст} \sim -\frac{f_1}{\tau_{11}}$

2) Полагаем: газ тяж-х ч-ц нах в ТД равновесии, т.е. $f_2 = f_M$

$\Rightarrow$ лёгкая примесь в тяж-х ч-цах будет релаксировать к этому ТДР.

Кроме того, будем считать:

а) f_1 слабо отличается от f_M

лёгкий газ нах. в слаборавновесном состоянии

Масштабы $L \gg \cancel{\ell_{free}}$

Флуктуации в-ва на $r \sim \ell_{free}$ порядка самой плотности, плотности $\Rightarrow$ таких флуктуаций не имеет смысла.

Т.к. $f_1 \approx f_M$ и $f_2 = f_M \Rightarrow T_1 \approx T_2$ (темпер) $\Rightarrow$ Нужно смотреть физ-ку на б. масштабах: $r \sim L \gg \ell_{free}$

$\Rightarrow \frac{m_1 v_1^2}{2} \sim \frac{m_2 v_2^2}{2} \sim \frac{3}{2} k_Б T$

if $m_1 \ll m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \sim \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow v_1 \gg v_2$ // $v_i \equiv v_{iT}$

Т.е. $\frac{v_1}{v_2} \sim \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \gg 1$

$\Rightarrow |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \approx |\vec{v}_1|$ // т.к. $e^{-\frac{\vec{v}}{2v_1}} \Rightarrow$ для $v \ll v_1 \Rightarrow e^{-\frac{\vec{v}}{2v_1}}$ даёт ничтожно малый вклад

б) т.к. $m_1 \ll m_2 \Rightarrow$ ф-я распредел-я $f_2 \approx$ не измен при столкн-ях "1" и "2". (вообще не измен)

Т.е. при столкн-ях тяж-х и лёгких $f_2 \approx const$

Релаксация f_1 происх-т преимущественно при столкн-и с тяж. ч-цами

$f_2(\vec{p}_2') \approx f_2(\vec{p}_2)$ // $\vec{p}_2'$ - после столкн-я тяж-лёгк. $\vec{p}_2$ - до

Тогда из $\frac{df_1}{dt} = I_{ст_{12}}$ и из предпол-я б)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df_1}{dt} = n_2 v_1 \int d\Omega\, \sigma_{12} \left(f_1(\vec{p}_1') - f_1(\vec{p}_1)\right)}$$

Представл-е и-ла столкн-й в таком виде И Лоренца

: в металлов: газ e^- в крист. решётке

и в газах - годится

Благодаря и-ю по $d\vec p_2$ и-л столкн-й стал лин-й f-ей по искомой f-и распредел-я $(f_1(\vec p_1') - f_1(\vec p_1)) \to f_1$.
(Алгоритм и результат)

Реш-е ДУ-го у-я – тема этой лекции.

"Понять – это запомнить и уметь использовать" Ричард Фейнман

Будем решать частную задачу

задачу для стац. случая и отсутствия внешних сил

когда $\frac{\partial f_1}{\partial t_1}$ и $\frac{\partial f_1}{\partial \vec p_1}\vec F = 0$

i.e. $\frac{d f_1}{d t} = \vec v_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec r}$

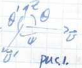
Будем решать $\vec v_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec r} = n_2 v_1 \int d\Omega\, \sigma_{12} \left(f_1(\vec p_1') - f_1(\vec p_1)\right)$ (2)

∠ψ – ∠ между направлениями до и после столкн-я.

$|\vec v_1| \approx |\vec v_1'|$ – при столкн-и легких ч-ц с тяж, модуль скорости v_1 – сохр, измен только направл-е движ-я

$\sigma_{12} = \sigma(v, \psi)$

z – ось вдоль, к-р-й f_1 неоднородна



т.о. Простр-й Δ-к.

рис.1.

$f_1(\vec v, z) = f_1(v, \theta, z)$

Ограничимся слабым неоднор. состоянием, для лёгких компонент. и f_1 может быть представлена в виде

м. поправка

$f_1(v, \theta, z) = f_{01}\cdot(1 + \cos\theta \cdot \Phi(z, v_1))$; $\Phi(z, v_1) \ll 1$, окажется $\Phi(z, v_1) \sim Kn$

Два подхода к такому виду f_1

(учитывая, что работаем в сфер СК)

Разл. зав-ть от θ по $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра

Целесообразно выбрать f_1 в указ виде | $\cos\theta$ справа и слева в у-и сокр.

Выбираем $f_{01} = f_м$

$$f_{01} = n_0(z)\left(\frac{m}{2\pi T(z)}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v_1^2}{2T(z)}\right)$$

т.е. делаем $f_1 = f_{01} + f_{01}\varphi$

$\varphi = \cos\theta \cdot \Phi(z, v_1)$

$n_0(z)$, $T(z)$ – зн. определ-т что этот максвел локальный

зав-ть от z

$$v_1\cos\theta\,\frac{\partial f_0}{\partial z} = n_2 v_1 \int d\Omega\,\sigma_{12}\Big(f_0(z,v_1')\big(1+\cos\theta'\cdot\varphi(z,v_1')\big) - f_0(z,v_1)\big(1+\cos\theta\cdot\varphi(z,\dots$$

Откуда?

В результате столкн-я "1" и "2" $|\vec v_1| = |\vec v_1'|$

$$\Rightarrow v_1\cos\theta\,\frac{\partial f_{01}}{\partial z} = n_2 v_1 \int d\Omega\,\sigma_{12}\, f_{01}\big(\cos\theta'\cdot\Phi(z,v_1) - \cos\theta\cdot\Phi(z,v_1)\big)$$

$$f_{01} \neq f_{01}(\theta,\theta')$$

$$\Rightarrow \cos\theta\,\frac{\partial f_{01}}{\partial z} = n_2\, f_{01}\,\Phi(z,v_1)\int d\Omega\,\sigma_{12}(\cos\theta'-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \cos\theta\,\frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} = n_2\,\Phi(v_1,z)\underbrace{\int d\Omega(\cos\theta'-\cos\theta)\,\sigma(\psi,v_1)}_{\text{часто встречается в задачах по столкн-ю ч-ц Леувилл}}$$

Ищем $\Phi(v_1,z)$

$$\Phi(v_1,z) = \frac{\cos\theta\,\frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z}}{n_2\int d\Omega(\cos\theta'-\cos\theta)\,\sigma(\psi,v_1)}$$

$\Rightarrow$ Задача: Вычисл $\int d\Omega(\cos\theta'-\cos\theta)\,\sigma(\psi,v_1)$

т.е. необх-о найти θ', θ и связь $\theta' = \theta'(\theta)$

Вводим ещё один рисуночек:

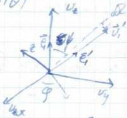


рис.2

Исп полярную СК в пр-ве скоростей

$v_z = v_1$, $\frac{\vec v_1}{v_1} = \vec e_1$

z - определ. направление неоднор-ти

$z \in$ пл-ти $v_x v_z$.

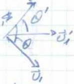


рис.1

$\frac{\vec v_1'}{v_1'} = \vec e_1'$ // Не забываем: $v_1 = v_1'$

Итого: $\vec e_1 = (0,0,1)$, $\vec e_1' = (\sin\psi\cdot\cos\varphi,\ \sin\psi\sin\varphi,\ \cos\psi)$

$\vec e_z = (\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$

Найдем $\vec e_z\cdot\vec e_1 = \cos\theta$

$\vec e_z\cdot\vec e_1' = \sin\psi\cos\varphi\sin\theta + \cos\psi\cos\theta \overset{\text{Def}}{\equiv} \cos\theta'$?

$d\Omega = d\varphi\,\sin\psi\,d\psi$

Считаем $\int d\Omega(\cos\theta'-\cos\theta)\,\sigma(\psi,v_1) =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\psi\,\sin\psi\,\sigma(\psi,v_1)\big(\underbrace{\sin\psi\cos\varphi\sin\theta}_{=0\text{ при ин-и по }d\varphi} + \cos\psi\cos\theta - \cos\theta\big) =$$

$= 2\pi \left(\int_0 d\psi\, \sigma(\psi, v_1) \sin\psi (\cos\psi \cos\theta - \cos\theta) \right) =$

$= 2\pi \cos\theta \int_0^\pi d\psi\, \sigma(\psi, v_1) \sin\psi (\cos\psi - 1)$

Вернёмся к нашему у-ю

$$\cos\theta \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} = n_2 \Phi(v_1, z)\, 2\pi \cos\theta \int_0^\pi d\psi\, \sigma(\psi, \sigma_1)(\cos\psi - 1) \cancel{\cos} \sin\psi$$

$$\frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} = 2\pi n_2 \Phi(v_1, z) \int_0^\pi d\psi\, \sigma(\psi, \sigma_1) \sin\psi (\cos\psi - 1)$$

$d\sigma \overset{?}{=} \sigma_{эф} 2\pi\, d\psi \sin\psi$, $\sigma_{эф}$ эффективное сеч-е расс-е $\ne \sigma_{full}$ сеч-е расс-я

Введем т.н. транспортное сечение:

$$\Sigma(v_1) = 2\pi \int_0^\pi d\psi \sin\psi\, \sigma(v_1, \psi) (1 - \cos\psi)$$

отл. обычное сеч-е от транспортного

$$\Rightarrow \Phi(v_1, z) = -\frac{\frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} \sim l}{n_2 \Sigma(v_1) \sim \frac{1}{l}} \sim -\frac{l}{L} \ln f_{01}, \quad \left(\frac{l}{L}\right) = K$$

$$\boxed{\Phi(v_1, z) = -\frac{1}{n_2 \Sigma(v_1)} \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z}} \quad \text{и} \quad \Phi(v_1, z) \sim -K \ln f_{01}$$

Покажем, что для модели упр. шаров

$(\sigma \ne \sigma_{full})$

$\sigma = \Sigma(v_1)$ // транспортное сеч-е совпадает с полным сеч-ем

$\psi = \pi - 2\alpha$

$d\sigma = \rho\, d\rho\, d\varphi$

$$\Sigma(v_1) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\psi \sin\psi\, \sigma(v, \psi)(1 - \cos\psi) = \int d\sigma (1 - \cos\psi) =$$

$$= 2\pi \int_0^R d\rho\, \rho (1 - \cos\psi) = 2\pi \int_0^\pi d\psi \left| \frac{d\rho}{d\psi} \rho(\psi) \right| (1 - \cos\psi) =$$

Найдём связь между прицельным параметром (здесь он ρ) и $\angle$ расс-я ψ

$$\beta = \frac{\psi}{2}, \quad \rho = R\cos\beta = R\cos\frac{\psi}{2}, \quad \frac{d\rho}{d\psi} = -\frac{R}{2}\sin\frac{\psi}{2}$$

$$= \frac{2\pi R}{2} \int_0^\pi d\psi \cos\frac{\psi}{2} \sin\frac{\psi}{2} (1 - \cos\psi) =$$

$$= + \frac{2\pi R^2}{2} \int_0^\pi d\psi\, \frac{1}{2}\sin\psi\, \cancel{\cos\psi} = -\frac{\pi R^2}{2} \cancel{\sin\psi} \cos\psi \Big|_0^\pi$$

$\Rightarrow \Sigma(v_1) = \pi R^2$ Для модели упр. шаров

~~Вычислим поток ч-ц вдоль неоднородности.~~

$$f_1 = f_{10}\left(1 - \cos\theta \frac{1}{n_2 \Sigma(v_1)} \frac{\partial \ln f_{10}}{\partial z}\right)$$

$$\Phi(z, v_1) = -\frac{1}{n_2 \Sigma(v_1)} \frac{\partial \ln f_{10}}{\partial z}$$

$j_z = \int f_1 v_{z1} d\vec{v}_1$ - ср. плотность потока ч-ц в z-направл-и ($n\bar{v}_1 = n\langle v_1 \rangle$)

Обозн $\frac{1}{n_2 \Sigma} = \Lambda$ - эффективная длина свободного пробега лёгкой ч-цы между двумя столкн-ями с тяж-ми ч-цами

по размерности ~ время между столкн-ями "1" и "2"

$$j_z = \int f_1 v_{z1} d\vec{v}_1 = \int d\vec{v}_1 \{ v_{z1} f_{01} \left(1 - \cos\theta \frac{1}{n_2 \Sigma(v_1)} \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z}\right) =$$

(интег-л даёт 0; $\frac{1}{f_{01}}\frac{\partial}{\partial z} f_{01}$)

$$= -\frac{\partial}{\partial z} \cancel{\cos\theta} \int d\vec{v}_1 \cos\theta\, f_{01} \Lambda\, v_{z1} \circleddash$$

$$v_{z1} \cos\theta = (\vec{v}_1 \cdot \vec{e}_z) \cdot \frac{1}{v_1} = \frac{v_{1z}^2}{v_1}, \quad \vec{e}_z = \frac{v_{1z}}{v_1}$$

$$v_{1z}^2 = \frac{1}{3} v_1^2$$

$$\circleddash = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\int d\vec{v}_1 f_{01} \frac{1}{3} \frac{v_1^2}{v_1} \Lambda\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\langle n_1 v_1 \Lambda \rangle = -\frac{1}{3}\langle v_1 \Lambda \rangle \frac{\partial n_1}{\partial z} - \frac{1}{3} n_1 \frac{\partial}{\partial T}\langle v_1 \Lambda \rangle \frac{\partial T}{\partial z}$$

против $\nabla \rho$, ∇T

$$\boxed{\begin{aligned} &D = \frac{1}{3}\langle v_1 \Lambda \rangle \quad \text{коэф-т диффузии} \\ &D_T = \frac{1}{3} n_1 \frac{\partial}{\partial T}\langle v_1 \Lambda \rangle \quad \text{коэф-т термодиффузии} \end{aligned}}$$

$n_1 = \int f_1 d\vec{v}_1$, поэтому $\langle n_1 \ldots \rangle = n_1 \langle \ldots \rangle$, n - не зав. от $\vec{v}_1$

$$j_z = -D\frac{\partial n_1}{\partial z} - D_T \frac{\partial T}{\partial z}$$

$\vec{j} \uparrow\downarrow \nabla n$, $\vec{j} \uparrow\downarrow \nabla T$ поток ч-ц направлен на уменьш-е неоднор-ти температуры и неоднор-ти плотности.

Диффузия тяжёлого газа в лёгком газе

Use подход, осн-й на соотн-и Эйнштейна

Введём понятие подвижности

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = b\vec{f} - \gamma\vec{v}$ - у-е дв-я ч-цы в вязкой среде

γ - кфф-т вязкости

При достно б. t $t > \gamma^{-1}$ $v = \frac{1}{\gamma} bf$, — кфф-т подвижности - определ-ся средой, где ~~определяется~~ распостр-ч-ца

1) сначала пренебрегаем γv (на м. t)

$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = bf$

2) потом ($\frac{t}{m}$ t) γv начинает преобладать

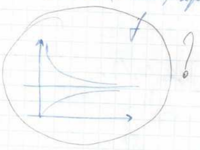
надо решать

$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \gamma\vec{v} = bf$

Одноp. общее реш-е $\vec{v}_0 = \vec{C} e^{-\gamma t}$

Def. подвижности: $v = \frac{1}{\gamma} f = bf$, $\frac{1}{\gamma} = b$

За счёт $(-\gamma v)$ происх-т уменьш-е $m\frac{dv}{dt}$ увел-е



Между кфф-том дифф-и, темпер. и b $\exists$ зв-ть:

$v = bf$

$D = bT$ $\quad$ T - темпер.

Найдём D - тяж-х в лёгком газе.

Флуктуации T - м. $T \ast const$

Полагаем: ~~лёгкие~~ тяж-е ~~лёгкие~~ ч-цы нах в СТДР, т. е. их ф-я распредел-я f_m

$$f_{01} = \frac{n_1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_1}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_1 v_1^2}{2T_1}\right) \quad \text{В ЛСК}$$

Найдем силу трения, кт-ю испытывает тяж-я ч-ца при её движ-и в лёгких ч-цах

Скорость $\overset{\text{движ-я}}{\text{тяж}}$ ч-цы $\overset{\text{в ЛСК}}{<<}$ скорости лёгких в ЛСК

$\vec V << \vec v_{1\Lambda}$

Переходим в СК, где тяж-я ч-ца покоится.

Тогда $\underset{\text{лабораторная}}{\vec v_{1\Lambda}} = \vec v_1 + \vec V \;\rightarrow\; f_{01}(\vec v_1 + \vec V) = f_{01}(\vec v_{1\Lambda})$

$$f_{01}(\vec V + \vec v_1) \approx f_{01}(\vec v_1) + \frac{\partial f_{01}}{\partial \vec v_1}\left((\vec v_1 + \vec V) - \vec v_1\right) = f_{01}(\vec v_1)\left(1 - \frac{\vec V \vec v_1 m_1}{T_1}\right)$$

Вычислим силу сопротивл-я, кт-ую испытывает тяж-я ч-ца в газе лёгких ч-ц.

Как full p, передаваемый тяж-й ч-це ву ~~в~~ лёгкими ч-цами можно вычислить

Тяж-я ч-ц движ-ся в определ. направл-и.

В СК, где она покоится это выглядит так:

∃ направленный набегающий поток лёгких ч-ц на тяж. ч-цу

Все др. направл-я для тяж. ч-цы неразличимы, ~~там~~ в ед-м кол-во столкн-й одинаково в тех направл-ях.

Смотрим только встречные (т.е. направленное движ-е переходит в хаотическое)

Рассеиваются только встречные компоненты

(Только они из направленного движ-я переходят в хаотическое, остальные ч-цы ~~были оста~~ до и после столкн-я остаются хаотическими)

Полагаем: $\underset{\text{до}}{|\vec p_1|} = \underset{\text{после}}{|\vec p_1'|}$ - лёгкой ч-цы

Т.е. измен направл-е

$mv \rightarrow mv\cos\varphi$

ср-$p_\perp = 0$ $\Rightarrow$ необх-о учит. ~~продольно~~ только продольную

поперечный к движ-ю ч-цы тяж.

ср-p продольный $\neq 0$.

$\Rightarrow \Delta p_1 = mv(1 - \cos\varphi)$

30.04.13

$\vec p = \vec p_0$

$\vec p = p_0 \vec e_\parallel \cos\psi + p_0 \vec e_\perp \sin\psi$

$\Delta \vec p = \vec p' - \vec p = p_0 \vec e_\parallel (1-\cos\psi) + p_0 \vec e_\perp \sin\psi$

Всилу изотропии $\langle \Delta p_\perp \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \Delta p \rangle = p_0(1-\langle\cos\psi\rangle)$

усреднение по возм. направл-ям и по

Def:

$$\langle\cos\psi\rangle = \frac{\int \cos\psi \, \sigma(\psi, v)\, d\Omega}{\int \sigma(\psi, v)\, d\Omega}$$

ср-е по неоднор-ти расс-я по t-ии, кт-е определ-ся сеч-ем расс-я эфф. $\sigma = \sigma(\psi, v)$

дальнее взмд-е явл определяющим

Лан Л.Л. Т.10 :

Т расс-я расс-я лёгкой на тяж.

В ср. $\Delta p = p(1-\cos\psi)$, корневое понятие в понятии транспортного сеч-я.

ψ - случайный (любой в-р)

$\vec V$ - скорость движ-я тяж. ч-цы в ЛСК

$\vec v_1$ - скорость лёгких отн-о тяж.

→ Переходим в СК тяж. ч-цы

$\vec v_{1л} = \vec v_1 + \vec V \qquad \| \vec v = \vec v_{1л}$

Ввиду того, что $m_{тяж} \gg m_{лёгк} \Rightarrow |\vec V| \ll |\vec v_{1л}|$

$$f(\vec v_1 + \vec V) = f_0(\vec v)(\vec v + \vec V - \vec v) = f_0(\vec v) + \vec V \frac{\partial f_0}{\partial \vec v} = f_0(\vec v) - \frac{m_1 \vec v \vec V}{T} f_0(\vec v) =$$
$$= f_0(\vec v)\left(1 - \frac{m_1 \vec v \vec V}{T}\right)$$

T - темпер

$f_0(\vec v)$ — эту ф-ю распредел-я ~~тяжёл~~ лёгких ч-ц видит тяж-я ~~лёгкая~~ ч-ца.

Чтоб вычислить $F_{тр}$, испытываемую тяж. ч-цей, необх-о найти $\Sigma \vec p$, кт-й теряется лёгк. ч-цами за ед. t при их столкн-и с тяж. ч-цей.

$\vec{F}_{тр} \equiv \int \int f(\vec{v}+\vec{V}) \vec{v} v m_1 (1-\cos\psi)\, d\vec{v}\, \sigma\, d\Omega =$ // Здесь $\cos\psi$ еще не устр.

$= m_1^2 \int f_0(\vec{v}) \left(1 - \vec{v}\vec{V}\frac{m}{T}\right) \vec{v} v (1-\cos\psi) d\vec{v}\, \sigma\, d\Omega =$

$\int (1-\cos\psi)\sigma d\Omega = \Sigma$ транспортное сеч-е

$\Sigma \equiv \Sigma_{tr}$

$= m_1^2 \int f_0(\vec{v}) \left(1 - \frac{\vec{v}\vec{V} m_1}{T}\right) \vec{v} v\, d\vec{v} \int (1-\cos\psi)\sigma\, d\Omega =$

Σ_{tr} – определ-т сеч-е расс-я с полной потерей Λ of падающей ч-цы.

$= m_1^2 \int \Sigma_{tr} f_0(\vec{v}) \left(1 - \vec{v}\vec{V}\frac{m_1}{T}\right) \vec{v} v\, d\vec{v} =$

$\underbrace{\vec{e}_x \int f_0(\vec{v}) v_x \vec{v} dv_x}_{=0}$, ?

$= \frac{m_1^2}{T} \int \Sigma_{tr} f_0(\vec{v}) (\vec{v}\vec{V}) \vec{v} \vec{v}\, d\vec{v} =$?

$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp,\ \vec{v}_\parallel \parallel \vec{V},\ \vec{v}_\perp \perp \vec{V}$

$= -\frac{m_1^2}{T} \int \Sigma_{tr} f_0(\vec{v}) V v_\parallel v \left(\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel\right) d\vec{v} =$

слагаемое $\vec{v}_\perp$ – указ. на поперечное расс-е, т.е. $\Delta p_\perp = p_0 \vec{e}_\perp \sin\psi$
~~(тк $\langle \sin\psi \rangle$)~~
(т.е. $\langle v_0 \sin\psi \rangle$ по $\vec{v}$ $= 0$

$= -\frac{m_1^2}{T} \int \Sigma_{tr} f_0(\vec{v}) V v_\parallel^2 \vec{e}_\parallel v\, d\vec{v} =$ Почему $\vec{v}_\perp$ – выпало?

$= -\frac{m_1^2}{T} \int \Sigma_{tr} f_0(\vec{v}) \vec{V} v_\parallel^2 v\, dv =$

$= -\frac{m_1^2 \vec{V}}{T} \int \Sigma_{tr} f_0(\vec{v}) \frac{v^3}{3} = -\frac{1}{3}\frac{m_1^2}{T} \langle n_1 \Sigma_{tr} v^3 \rangle \vec{V}$ ...→

$F_{тр} \propto \vec{V}$

in соотн-е Эйнштейна $\vec{V} = b\vec{F}$ ... $0 = \vec{F}_{тр} + \vec{F}$, $0 = F_{тр} + \frac{\vec{V}}{b}$ ...

$m\underbrace{\frac{d\vec{V}_1}{dt}}_{0?} = \vec{F}_{тр} + \vec{F}$, ч-ца движ-ся с постоянной скоростью, когда $\vec{F}_{тр}$ компенс. др. силой.

...→ $b = \frac{3T}{m_1^2 \langle n_1 \Sigma_{tr} v^3 \rangle}$ Подвижность

$$\vec{V} = \frac{3T}{m_1^2 \langle n_1 \Sigma_{tr} v^3 \rangle} \vec{F}$$

У-е диф-и лёгких ч-ц на тяж-х

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Оценка $\frac{n}{T_{\text{tm}}} = D \frac{n}{L^2}$, $D = \frac{L^2}{T_{\text{tm}}}$ T - темпер "1" ч-ц; T_{tm} - Δt между столкн "1" и "2"; $\frac{1}{n_1 \Sigma_{tr}} = \Lambda$ - Δ длина между ст-ии

$$D = b \cdot T = \frac{3T^2}{m^2 \langle n_1 \Sigma_{tr} v^3 \rangle} \sim \frac{v_1^2}{v^3 \cdot n_1 \Sigma_{tr}} = \frac{v}{n_1 \Sigma_{tr}} = v\Lambda = \frac{\Lambda^2}{T_{\text{tm}}}$$

$v_1 = v$ тепловое движ-е

? P.S | В D- заложено K. Attention

~~У-е Фоккер-Планка~~

{ У-е Фоккера и Планка }

Диффузное ~~урав~~ прибл-е в kin phys

Релакс-е процесси | Измен-е вел-н от, кот-х зависит f-я распредел-я, оказываются малы.

$\Delta p \ll p$

Нужно оч. много столкн-й, чтоб накопился эффект, приводящий к релаксационным эффектам.

if столк. тяж. с тяж. => Δt рел $\sim \tau_{tr}$ между столкн

Но вер-ть столкн тяж-тяж м. -> более вер-но столкн-е лёгк-тяж.

Примесь тяж-х "2" ч-ц в газе лёгких "1" | $n_2 \ll n_1$.

Вер-ть измен-я Λ лёгк. ч-цы из-за столкн-я с тяж:

Переход $\vec{p} \to \vec{p} - \vec{q}$, его вер. $w(\vec{p}, \vec{q}) d\vec{q}$

Релакс-я тяж-х ч-ц в лёгких из-за преобладания столкн-й лёгк-тяж над тяж-тяж

$$\frac{\partial f(\vec{p}, t)}{\partial t} = \int \Big(\underbrace{w(\vec{p}+\vec{q}, \vec{q}) f(\vec{p}+\vec{q}, t)}_{\text{процесс заполн-я пр-ва с } \Delta p} - \underbrace{w(\vec{p}, \vec{q}) f(\vec{p}, t)}_{\text{уход из пр-ва } \Delta p} \Big) d\vec{q}$$

$\vec{p}_1$ $\vec{p} + \vec{q} \to \vec{p} + \vec{q} - \vec{q} = \vec{p}$ $\qquad p \to \vec{p} - \vec{q}$

Из того, что наиб. вер "1"-"2" столкн-я

=> $|\vec{q}| \ll |\vec{p}|$ ..((а переходы $|\vec{q}| \sim |\vec{p}|$ маловероятны))

Разл. $f(\vec p+\vec q,t)$ в Тейлор по $\vec p+\vec q$ в окрестности $\vec p$.
$\widehat{\omega(\vec p+\vec q,\vec q)}$

$$\omega(\vec p+\vec q,\vec q)f(\vec p+\vec q,t)\approx\omega(\vec p,\vec q)f(\vec p)+\vec q\frac{\partial}{\partial(\vec q+\vec p)}\left(\omega(\vec p+\vec q,q)f(\vec p+\vec q,t)\right)\Big|_{\vec p+\vec q=\vec p}+$$

$$+\frac{q_iq_j}{2}\frac{\partial^2}{\partial(\vec q+\vec p)_i\,\partial(\vec q+\vec p)_j}\left(\omega(\vec p+\vec q,\vec q)f(\vec p+\vec q,t)\right)\Big|_{\vec p+\vec q=\vec p}$$

в смысле предыд. строчки

$$\frac{\partial f(\vec p,t)}{\partial t}\approx\int d\vec q\left\{\omega(\vec p,\vec q)f(\vec p)+\vec q\frac{\partial}{\partial\vec p}\left(\omega(\vec p,\vec q)f(\vec p)\right)+\frac{q_iq_j}{2}\frac{\partial}{\partial p_i\partial p_j}\left(\omega(\vec p,\vec q)f(\vec p)\right)-\omega(\vec p,\vec q)f(\vec p,t)\right.$$

в смысле "$\approx$" $-\partial\vec p$

$$\frac{\partial f(\vec p,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\vec p}\left[\left(\int d\vec q\ \vec q\ \omega(\vec p,\vec q)\right)\cdot f(\vec p)\right]+\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}\left[\left(\frac{1}{2}\int d\vec q\,q_iq_j\,\omega(\vec p,\vec q)\right)\cdot f(\vec p)\right]$$

Обозн. $A_i=\int q_i\omega(\vec p,\vec q)d\vec q,\quad B_{ij}=\frac{1}{2}\int q_iq_j\,\omega(\vec p,\vec q)d\vec q$

$$\boxed{\frac{\partial f(\vec p,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial p_i}\left(A_if(\vec p)+\frac{\partial}{\partial p_j}B_{ij}f(\vec p)\right)}$$

Типа у-е з-на сохр-я

У-е Фокер-Планка

Наше у и-е у-е превратилось в у-е типа дифф-и.

Ц у-е релаксации: дифф-е тяж. г-цы в Л пр-ве

Это у-е записано с учётом сохр-я числа г-ц (консервативный тип)

$$\int\frac{\partial f(\vec p,t)}{\partial t}d\vec p=\underbrace{\int d\vec p\frac{\partial}{\partial p_i}(\ldots)}_{=0}=0$$

$\vec A$, $\vec B$ - не зав от t, определ-т взмд-е г-х ч-ц

$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}n=0\ \to\ n=Const$ if ф-я распредел-я однор, $\frac{\partial}{\partial t}=0$, $\nexists$ внешн. сил $\sum F=0$

$\Rightarrow$ конц-я не будет измен. тяж-х ч-ц

Осн-е use предпол-е: процессы, из-за ктр-х мо изменяются ф-ких вел-н наиб вер.

если бы учли $\frac{\partial f}{\partial\vec p}$ и $\frac{F}{m}\frac{\partial f}{\partial\vec v}$

$\Rightarrow$ Ц у-е непрер-ти

$\frac{\partial n}{\partial t}=0$, говорит отом, что $I_{ст}$ не явл. ист-ком г-ц.

Задача: найти $\mathcal{A}_i$ $\overleftrightarrow{B_{ij}}$.

$$f \sim C\cdot \exp\left(-\frac{P^2}{2\underset{\nwarrow \text{тяж.}}{M}T}\right)$$

$$\frac{\partial f(\vec{p},t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\mathcal{A}_i f(\vec{p}) + \frac{\partial}{\partial p_j} B_{ij} f(\vec{p})\right)} = \frac{\partial}{\partial p_i}\underbrace{\left[\underbrace{\left(\mathcal{A}_i + \frac{\partial B_{ij}}{\partial p_j}\right)}_{=\tilde{\mathcal{A}}_i} f(\vec{p}) + B_{ij}\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_j}\right]}$$

$\mathcal{A}_i$, B_{ij} - не зав. от t_m (они в начале рел. и в конце рел. одинаковы)

правая часть не зав. от t_m

Норм. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \text{Const}\, dt = \infty$ => в правой части не может быть др. const кроме 0.

$$\left.\frac{\partial f(\vec{p},t)}{\partial t}\right|_{t\to\infty} = 0 \to \tilde{\mathcal{A}}_i f(\vec{p}) - B_{ij}\frac{P_j}{MT} f(\vec{p}) = 0$$

На $t\to\infty$ ДФ равновес. (асимпт. релакс.)

$$\tilde{\mathcal{A}}_i = B_{ij}\frac{P_j}{MT}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(B_{ij}\left(\frac{P_j}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial p_j}\right)\right)$$

$|\vec{P}$ - 1 тяж. ч-цы$| \ll |\vec{p}_1$ - легкой ч-цы$|$

При $\vec{P}=0$

$\underline{B_{ij} = B\delta_{ij}}$? B_{ij} - не зав. от направл-я $\frac{\vec{P}}{P}$

Покажем это дальше. $B_{ij} = B\delta_{ij}$ - диаг, почему?

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(\frac{\vec{p}}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\right)$$ Окончательный вид У-я Фоккер-Планка

Напишем $\frac{df}{dt} = I_{ст\Lambda}$, $I_{ст\Lambda}$ - лоренцовский инт столкн-й

учит. только столкн-я лёгк-тяж.

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \underbrace{\vec{v}_2\frac{\partial f_2}{\partial \vec{r}}}_{\exists \text{ if } f_2 \text{ неоднор}} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma_{21} \left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right| \Big\{ f_1(\vec{p}_1') f_2(\vec{p}_2') - f_1(\vec{p}_1) f_2(\vec{p}_2)\Big\} \ominus$$

"2" - тяж. "1" - лёгк.

проекция на ~~...~~ вдоль направл-е движ. тяж. ч-цы

$n_2 \ll n_1$

∇f_2 - однор.

$v_2 \ll v_1$, v_2 - выкидываем

P_1 - озн. $\vec{p}$ лёгкие, f_1 - озн f лёгкие

$$\ominus \int d\vec{p}_1 \Big(\underbrace{\int d\Omega\, \sigma_{21}\, v_1\, f_1(\vec{p}_1')}_{= w(\vec{p}_1', \vec{p}_1)}\Big) f_2(\vec{p}_2') -$$

$$- \int d\vec{p}_1 \Big(\underbrace{\int d\Omega\, \sigma_{21}\, v_1\, f_1(\vec{p}_1)}_{= w(\vec{p}_1)}\Big) f_2(\vec{p}_2)$$

if не $h\nu$ анизотропно пот =>

if $|\vec{p}| \ll |\vec{p}_1| \Rightarrow$ тяж-е ч-цы по сравн-ю с лёгкими можно считать неподвижными : $|\vec{p}|=0$

$\Rightarrow D_{ij}$ has dadaz bid

Недиаг. членов $=0$ при уср-и по $\Delta \vec{p} = \vec{q}$ ($q_i q_j$)

$\frac{1}{2}\int d\vec{q}\; q_i q_j\; w(\vec{p},\vec{q}) = \int d\vec{q}\; q_i q_j \int d\Omega\, \sigma_1 v_1 f_1(\vec{p}_1') = \int d\Omega\, \sigma_1 v_1 \int d\vec{q}\, q_i q_j f_1(\vec{p}_1$

$\vec{p}_1' = \vec{p}_1 + \vec{q}$

I Гран. усл-я ~~перех~~ для у-я Больцмана

II для переноса $\vec{L}$ и переноса тепла

III Скольжение и темпер. скачёк

9 III Скольжение и темпер. скачёк

При каких обстоятельствах У-е Навье-Стокса обязательно (нельзя применять у-е Эйлера)

Nl - nonlinear

Vis - вязкость

U - гидродинам. скорость

R - число Рейнольдса

η - ~~кинем~~ вязкость

ν - кинем. вязкость

L - характерный d масштаб возм направл-я скорости

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j}}_{\sim \rho \frac{U^2}{L}}\right) = \frac{\rho}{m} F_i - \frac{\partial P}{\partial r_i} + \underbrace{\eta \Delta u_i}_{\sim \eta \frac{U}{L^2}}$$

$$\frac{Nl}{Vis} \sim \frac{\rho U^2}{L}\,\frac{L^2}{\eta U} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

$$\frac{\eta}{\rho} = \nu, \quad R = \frac{UL}{\nu}$$

"ж-ть" $\quad \delta \mid \delta \gg l_{free}, \quad \frac{l_{free}}{L} \ll 1$

$$\frac{l_{free}}{\delta} \ll 1$$

$$\eta \frac{U}{L^2} + \eta\frac{U}{\delta^2} \simeq \eta\frac{U}{\delta^2}$$

$$\frac{In}{Vis} \sim \frac{U^2\rho\delta^2}{LU\eta} = \frac{\rho\delta^2 U}{L\eta} \sim \frac{\delta^2 U}{L\nu} \sim 1$$?

в результате прибл-я к стенке вязкостное слагаемое существенно

$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} \sim \frac{L}{\sqrt{R}}$ пограничный слой

возн-е турбул. в текущей ж-ти

Пришли к ∃ погран. слоя.
Что будет происходить при $r < \delta$, и δU (прибл-е к стенке)

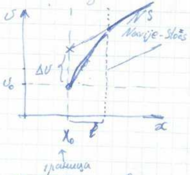
Когда $\delta L \sim l \Rightarrow K \sim 1$ — Кнудсеновский слой (здесь наши у-я не работают)

$\Rightarrow$ наши у-я переноса $\perp$ и тепла не работают.

Как сшить реш-я в обл-тях с $L \sim l$ и $L \gg l$.

В $L \sim l$ наши у-я не работают, как быть?...

Весь вдн "скольжение" и "темпер. скачёк"



в $x \in [x_0, l]$ ∃ реш-е,

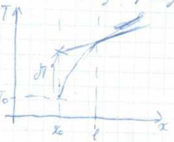
Δv – ввод поправки

Дост-но для сшивки реш-й в этих обл-тях:

$$v\Big|_{x=x_0} = v_0 + \xi\frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$\xi \sim K$

На x_0 ∃ v_0 – зад. гран. усл-я $\Delta v = \xi\frac{\partial v_0}{\partial x}$ – поправочка на вязкость (проскальзывание)



$$T\Big|_{x=x_0} = T_0 + \varsigma\frac{\partial T_0}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$$

$\delta T = \varsigma\frac{\partial T_0}{\partial x}$ – темпер. скачёк скольжение и ~~гра~~ темпер. скачёк — фиктивные добавочки к гран. усл-ям для сшивки

II Перенос λ и перенос тепла через стенку

Что падает и что отр. — важно в кнудс. слое.

$$\cancel{f}\ f_{\text{пад}}(\vec{p}) \neq f_{\text{отр}}(\vec{p})$$

т.е. $f(\vec{p})$ на стенке is разрывно λ.

- Зеркальное отр-е от стенки: $\vec{P}_{\text{пад}} = -\vec{P}_{\text{отр}}$
- отр-е диффузно расс ч-ц: отр-е в произвол. направл-и

f_r — отр reflected, $\vec{n}$ — нормаль от пл-ти стенки внутрь газа

f_i — пад

$$f_r(\vec{v}_r) = \underbrace{(1-\alpha) f_i(v_r - 2\vec{n}(\vec{v}_r\cdot\vec{n}))}_{\text{Зеркал. отр-е}} + \underbrace{\alpha n_r \left(\frac{m}{2\pi T_r}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T_r}}}_{\text{диффузное расс-е}}$$

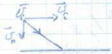
$$\text{"} f_i(\vec{v}_i) \text{"}$$

Def

α, n_r, T_r — кфф-ты аккомодации

Усл-я:

1) Сохр. число ч-ц $N_{\text{пад}} = N_{\text{отр}} \to$ находим n_r.



$\vec{v}_\tau$ — сохр $\to$ ответственна за перенос в-ва вдоль стенки ($\sim\lambda$)

$$\vec{P}_\tau = m\vec{v}_\tau$$

$$\vec{P}_\tau^{(r)} = (1-\alpha)\vec{P}_\tau^{(i)} \to \alpha = \frac{\vec{P}_\tau^{(i)} - \vec{P}_\tau^{(r)}}{\vec{P}_\tau^{(i)}}$$

кфф-т аккомодации пад. ч-ц

При $\vec{P}_\tau^{(r)} = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

$$\alpha_E = \frac{E_i - E_r}{E_i - E_w}, \quad E_w \text{ — } \text{темпер стенки}$$

акк-я of (E)

if ч-цы не преобразуют (E) от стенки $\Rightarrow E_w =$

E_w — (E) отр. ч-ц, hv темпер стенки.

$\tau \sim 10^{-12}$ sec — характерные времена

В двужидкостной среде

~~Ин~~ $I_{\text{ст}_{11}}$ — занулится, $I_{\text{ст}_{12}}$ — не занулится