Физическая кинетика

Михайленко Владимир Степанович

12.02.13. классическая физ. кинетика и квантовая

Это наука, кот. описывает систему очень большого числа частиц

Сист. N частиц можно описать $6N$ - измерений (3 скор., 3 рад. вект.)

как точку в $6N$-мерном фаз. пр-ве в кажд. мом. времени

$\dot{D}(q,p,t)$ - плотн. вер-ти для N частиц

$\int dP(q,p,t) = \int D\cdot dq\cdot dp = 1$ ур-е Лиувилля: $\boxed{\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{p}{m}\cdot\frac{\partial D}{\partial q} + F\frac{\partial D}{\partial p} = 0}$

плотн. вер-ти D может измен. только при изменении отд. частиц

$F(q)$ - сила, кот. действ. на отд. частицу

$F(q,t)$ - ф-я коорд. и вр.

$\frac{\vec{p}_1}{m} = \vec{v}_1 \quad v_{1x}\frac{\partial D}{\partial x_1} + v_{1y}\frac{\partial D}{\partial y_1} + v_{1z}\frac{\partial D}{\partial z_1}$ 1 частица $\Big|\ \sum_{i=1}^{N}\left(v_{ix}\frac{\partial D}{\partial x_i} + v_{iy}\frac{\partial D}{\partial y_i} + v_{iz}\frac{\partial D}{\partial z_i}\right)$

$dt = \frac{dx_1}{v_{x1}} = \frac{dy_1}{v_{y1}} = \dots \frac{dz_1}{v_{z1}} = \dots = \frac{dz_N}{v_{zN}} = \frac{dp_{1x}}{F_{1x}} = \dots \to$ проблема

$$\frac{\partial u}{\partial t} + X_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2} + X_3\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

$$dt = \frac{dx_1}{X_1()} = \frac{dx_2}{X_2()} = \frac{dx_3}{X_3} \qquad u = u(\psi_1(x_1, x_2, \dots), \psi_2(x_1, \dots))$$

$A = A(t, A_0)$ A - любая случ. величина (коорд., импульс), ..)
для сист. многих частиц A_0 - случ. величина

Для случ. процесса вводится понятие момента

моменты ф-ции распределения:

усреднение по A_0

$\langle A(t)\rangle = m_1(t)$ первый момент ф. распред.

$\langle A(t)A(t_1)\rangle = m_1(t)\cdot m_1(t_1) + \underline{K_2(t,t_1)} = m_2(t,t_1)$

$\langle (A(t) - \langle A(t)\rangle)(A(t_1) - \langle A(t_1)\rangle)\rangle = m_2(t,t_1) - m_1(t)\cdot m_2(t_1) = K_2(t,t_1)$

корреляция ↗ опредед. связанное состояние двух переменных
двухвременной момент

def: <u>стационарные процессы</u> - все числовые хар-ки не зав. от сист. отсч. инвариантны относ. замены $t \to t + t_0$

все моменты ф. распред. (случ. величины) инвар. относ. замены $t \to t + t_0$ для всех времен, опред.-х эти моменты

Мом. перв-го пор. $m_1(t)$ не должен зав. от вр. $m_1(\cancel{t})$, чтобы быть стационарным

Мом. 2-го порядка, соотв-е стац. процессу: $m_2(t-t_1) - m_1^2 = K_2(t-t_1)$

Мом. 3-го пор.: $m_3(t, t_1, t_2) = m_3(t-t_1, t-t_2)$ только в этой комбинации момент <u>не</u> зав. от <u>t_0</u>.

Величина $K(\overbrace{t-t_1}^{\tau})$ наз. корреляц. функцией

Она обладает св-м, что для конечного времени она обращ. в нуль. Этот мом. времени наз. <u>временем корреляции</u>. τ

$$\tau = \frac{1}{K_2(0)} \cdot \int_0^\infty |K_2(\tau)| \cdot d\tau$$

$\tau_{корр} = \tau_0 = \frac{r_0}{v_T}$ r_0 - рад. атома, v_T - тепл. скорость

$r_0 \sim 10^{-8}$ см $v_T \sim 5 \cdot 10^4 \frac{см}{с}$ $\tau_0 = \frac{10^{-8}}{5 \cdot 10^4} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-12} \sim 10^{-12}$ с

вр. в течении котор. одна част. нах в поле другой

Для ид. газа (сист. N частиц)

$^*\ l = \frac{1}{n\sigma}$ $\sigma = \underbrace{\pi} r_0^2$, поэтому знак „$\sim$"

$\tau_0 \sim 10^{-12}$ с $l \approx \frac{1}{n \cdot r_0^2}\ ^*$ $n_0 = 3 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ число Лошмидта

$r_0 = 10^{-8}$ см

длина своб. пробега $l \sim \frac{1}{3 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-16}} \sim 10^{-4}$ см $\gg r_0 \sim 10^{-8}$ см

вр. между столкнов. 2-х частиц $\tau = \frac{l}{v_T} \sim \frac{10^{-4}}{5 \cdot 104} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-8}$ с $\sim 10^{-8}$ с

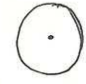
вр. релаксации должно быть $\sim 10^{-8}$ с (вр. между дв. столкнов.)

$\tau_{релакс.} \sim 10^{-8}$ с $\gg \tau_{коррел.}$

r_0, l $\quad$ (r_0, n) для этих пар-в найти общий обезразмеренный пар-р $\quad nr_0^3$

$r_{ср} \sim \frac{1}{n^{1/3}}$ - ср- расст. между част. $\quad r_{ср}^3 \sim \frac{1}{n}$ объем, кот. приходится на 1 частицу

$r_{ср} \sim \frac{1}{(3 \cdot 10^{19})^{1/3}} \sim \frac{1}{(30 \cdot 10^{18})^{1/3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^6} \sim 0,3 \cdot 10^{-6}$ см



$r_0 << r_{ср} << l$

$m_0^3 = \frac{r_0^3}{r_{ср}^3} = 3 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-24} \sim 3 \cdot 10^{-5}$ $\quad$ газ, для кот. $\varepsilon = m_0^3 < 1$ наз. разреженный газ.
ε - пар-р газовости.

Оценим $\frac{\tau_{cor}}{\tau_{rel}} = \frac{r_0}{v_T} \cdot \frac{v_T}{l} \sim \frac{r_0}{\frac{1}{nr_0^2}} = nr_0^3 = \varepsilon$

$m_1(\varepsilon t)$ $\quad$ два масштаба времени

$m_2(t - t_1, \varepsilon t)$

Концепция сокращенного описания неравновесных систем по Боголюбову.

3 этапа развития сист. N частиц

1 этап: динамический, длится $t \leq \tau_0 \sim \tau_{corr} \sim 10^{-10} \div 10^{-11}$ с

нужно описание всех N частиц в рамках ур-я движения.

Сист. описыв. либо N ур. движения, либо ур. Лиувилля.

2 этап: (столкнов. произошли) Кинетический $\quad$ взаимодействие

$\frac{r_0}{l}$ - угол, под кот. видна частица

после столкновения частицы теряют свою индивидуальность (нач. данные)

if в ур. нет нач. данных, нет выделенных частиц.

У нас работает 1 частица

(2) $\tau_0 < t \lesssim \tau_{col} \sim \tau_{rel}$ $\quad$ опред. ф-распред. одной част. $f(\vec{p}, \vec{r}, t) \to f_M$ одночастичная ф. распред-я.

collision

равновесное сост. → Максвелловское распределение

τ_{col} - вр., за кот. две выделенные частицы столкнулись

$r_0 \ll r_{ср} \ll l \ll L$ $\qquad$ $r_0 \ll R_{rel} \ll l$

$f(\vec{p},\vec{r},t)$ $\qquad$ $\tau_0 \ll T \ll \tau_{rel}$

$\Downarrow$

$f_{макс.}(v,R,t)$

$$f_M = \frac{n(R,t)}{(2\pi v_T^2(R,T))^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{v}-\vec{u}(\vec{R},t))^2}{2v_T^2(\vec{R},t)}\right)$$ формируется локальный Максвелл

③ этап: гидродинамический. нужно знать ур. непр-ти
ур. диффузии
ур. теплопроводности
ур. переноса импульса

19.02.13. осн. книга ~~[illegible]~~ Климонтович „Стат. физика"
Квасников

сокр. описание по Боголюбову

1. динамическая стадия
2. кинетическая стадия эволюции - формир. локальная Максвелловская ф-я.
3. гидродинамическая стадия

$r_{cor} \sim r_0$ $\quad$ r_0 - диам. частицы $\quad$ $\boxed{r_{cor} \ll r_{ср} \ll l \ll L}$

$r_{ср} = n^{-1}$ $\qquad$ $\ll L \ll l$ - вакуум (бесстолкнов. среда)

l - дл. своб. пробега

L - макроскоп. масштаб $\quad$ $N_ф = nV_ф = nl_ф^3$ - число частиц в физ. ∞ малом объеме

$V_ф = l_ф^3$ - физически бескон. малый объем

физически ∞ малое время $\tau_ф \gg \tau_{cor}$ (мы не должны замечать акт столкновения)

$l = v_T \cdot \tau$

Мы должны учесть все столкновения

$\tau_ф = \frac{\tau}{N} = \frac{\tau}{nl_ф^3}$ это вр. в течение кот. произойдет столкнов. ∀ частицы в $V_ф$.

$\tau_{cor} \sim \tau_0 \ll \tau = \dfrac{l}{v_T}$ $\qquad \tau_\varphi = \dfrac{l_\varphi}{v_T} \qquad \tau = \dfrac{l}{v_T}$

$$\tau_\varphi = \frac{\tau}{N} = \boxed{\frac{\tau}{n\, l_\varphi^3} = \frac{l_\varphi}{v_T}} \longrightarrow l_\varphi^4 = \frac{l}{n} \Rightarrow l_\varphi = \left(\frac{l}{n}\right)^{\frac{1}{4}} = l\left(\frac{1}{l^3 n}\right)^{1/4} = l\left(\frac{(n r_0^2)^3}{n}\right)^{1/4} \circleddash$$

τ - время между $\forall$ парой частиц, наход. в V_φ. - физ. ∞ малом V

$$\circleddash\, l\cdot\left(n^2 r_0^6\right)^{\frac{1}{4}} = l\cdot\left(\varepsilon^2\right)^{1/4} = \sqrt{\varepsilon}\, l \qquad\qquad l = \frac{1}{n r_0^2} = \frac{1}{n\sigma}$$

$$\varepsilon = n r_0^3 \ll 1$$

$$\varepsilon = \left(\frac{r_0}{r_\varphi}\right)^3$$

$$n\cdot l_\varphi^3 = n\cdot l^3\cdot \varepsilon^{3/2} = n\cdot\frac{1}{n^3\cdot r^6}\cdot\varepsilon^{3/2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \gg 1$$

$$\tau_\varphi \sim \frac{l_\varphi}{v_T} = \frac{l\sqrt{\varepsilon}}{v_T} = \tau\sqrt{\varepsilon} \ll \tau$$

динамич. $t \leqslant \tau_0$ для учета столкнов. должны следить за каждой частицей

кинетич. стад. эвол. - процессы опред-ся одночастичной ф-й распределения

$\tau_{cor} \sim \tau_0 \ll t \lesssim \overset{\tau_{rel}}{\tilde{\tau}} = \dfrac{l}{v_T}$ $\qquad l = \dfrac{1}{n r_0^2}$ - длина своб. пробега

$\downarrow$

$\tau_{corr} \ll \tau_\varphi$ $\qquad \tau \sim \tau_{rel}$ - локальной релаксации

кинетич. стад. начин. позже τ_{corr}, когда $\underline{t \sim \tau_\varphi}$

верхний предел - время порядка нескольких столкновений τ

Кинетическое уравнение Больцмана

функция распределения нормирована на число частиц, наход. в системе

число частиц dN обладающие значением коорд. $\vec{r}$ и имп. $\vec{p}$ в инт. $d\vec{r}$, $d\vec{p}$ определяются соотношением: $\boxed{dN = f(t,\vec{r},\vec{p})\, d\vec{r}\, d\vec{p}}$

$f(t,\vec{r},\vec{p})$ - одночастичная ф. распред.

$$N=\int d\vec r\,\underbrace{\int d\vec p\; f(t,\vec r,\vec p)} \qquad N=\int d\vec r\cdot n(t,\vec r)$$

$$n(\vec r,t)=\int f(t,\vec r,\vec p)\,d\vec p \qquad 1=\frac{1}{n(\vec r,t)}\int f(t,\vec r,\vec p)\,d\vec p$$

$$\langle A(t,\vec r)\rangle=\frac{1}{n(\vec r,t)}\int f(t,\vec p,\vec r)\,A(t,\vec p,\vec r)\,d\vec p$$ – ср. знач. велич. A

$$\langle n(\vec r,t)\cdot A\rangle=\int f\cdot A\cdot d\vec p$$ – ср. знач. плотности велич. A

$$(\vec v\cdot\vec n)A \;\to\; Q=\frac{1}{n}\int(\vec v\cdot\vec n)A\,f(\vec r,\vec p,t)\,d\vec p$$ - средний поток

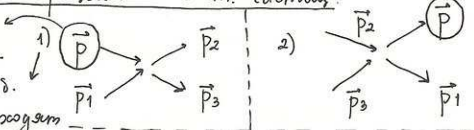
$$\langle n\,Q\rangle=\int\ldots$$ – плотность потока

$\vec v$ - скорость

$\vec n$ - ед. вектор, указыв. направление потока

столкновит. процессы в сист. частиц:

$f(t,\vec p,\vec r)$

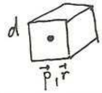


1) число частиц в об. будет ↓ - част. уходят из объема

2) число частиц в объеме будет расти (частицы входят в эл. об.)

2 типа столкновений

$$dN=f(t,\vec p,\vec r)\,d\vec r\,d\vec p \qquad d\frac{dN}{dt}=\frac{d}{dt}(f)\,d\vec r\cdot d\vec p)=(\overset{2)}{b}-\overset{1)}{a})\,d\vec r\,d\vec p$$



$$\frac{df}{dt}=b-a \qquad \frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial\vec r}\cdot\underbrace{\frac{d\vec r}{dt}}_{\vec v}+\frac{\partial f}{\partial\vec p}\cdot\underbrace{\frac{d\vec p}{dt}}_{\vec F}=$$

вн. сила

$$=\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+\vec v\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec r}+\vec F\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec p}=I_{ст.}}$$ первонач. форма ур-я Больцмана

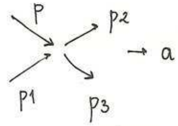
| интеграл столкновений $I_{ст.}$ |

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_x\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad dt=\frac{dx}{v_x}\to x=v_x t+X \to X=x-v_x t$$

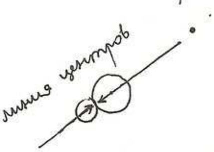
$$f(x,v,t_0)\to f(X,v,t_0)=f(x-\underline{\underline{v_x}}\,t,v_x,t_0)$$ молекулярные течения

Максвелл не получится

Задача найти коэф. $\underline{a}$ и $\underline{b}$, кот. учитывают столкновения.

1) 

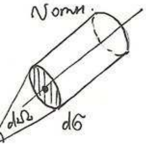
Каждая из dN частиц, имеющих импульс $\vec{p}$ испытывает столкнов. с частицами, имеющие имп. $\vec{p}_1$ и наход. вдоль линии центра на расст. $\leq v_{отн}$.



В цилиндре, имеющем образующую $v_{отн}$ и основании $d\sigma = \sigma \cdot d\Omega$ нах. $d\tilde{N}_1$ частиц -

$$d\sigma \cdot v_{отн} \cdot f(\vec{p}_1, \vec{r}, t)\, d\vec{p}_1 \cdot d\vec{r} = d\tilde{N}_1$$

(число частиц, кот. могут столкн. с нашей частицей)



$\underline{\underline{dN \cdot d\tilde{N}_1}}$ - столько парных столкнов. произойдет для частиц с имп. $\vec{p}_1$

$dp\, d\vec{r} f(\vec{r}, p, t) = dN$ - в элементе об. нах. столько частиц (с ними столкнутся $d\tilde{N}_1$ частиц в ном. вр.)

$$dN \cdot d\tilde{N}_1 = f(\vec{r}, \vec{p}, t) \cdot d\vec{p} \cdot d\vec{r} \cdot f(\vec{r}, \vec{p}_1, t) \cdot \sigma \cdot v_{отн} \cdot d\Omega \cdot \underline{\underline{d\vec{p}_1}}$$

Общее число столкновений, кот. будет испытываться dN частицами с имп. $\vec{p}$ с частицами с имп. $\vec{p}_1$ =

$$= \cancel{dN} \int d\Omega \int d\vec{p}_1\, \sigma \cdot v_{отн} \cdot f(\vec{p}_1, \vec{r}, t) \cdot \underbrace{f(\vec{p}, \vec{r}, t)\, d\vec{r} \cdot d\vec{p}}_{dN} = d\vec{r}\, d\vec{p} \underbrace{\int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma v_{отн} \cdot f(t, \vec{r}, \vec{p}) \cdot f(t, \vec{r}, \vec{p}_1)}_{a} = a \cdot d\vec{r}\, d\vec{p}$$

мы должны учесть всевозможные столкновения → $\int dp_1$ и $\int d\Omega$

26.02.13.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I_{ст} = b \cdot a}$$ ур-е Больцмана

(a) I. 

(b) II. 

$d\vec{r}\, d\vec{p}$

$a = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{отн} \cdot f(p) f(\vec{p}_1) \qquad f(\vec{p}, \vec{r}, t) \qquad v_{отн} = |\vec{v}_1 - \vec{v}|$

Аналогично, число парных столкн. кот. испытывает частица в

б. мерном объеме $= d\vec{p}_2 d\vec{r}_2 d\vec{p}_3\, \sigma\, v'_{отн}\, d\Omega$

$dN_2 \cdot d\tilde{N}_3 = f(p_2) d\vec{r}_2 d\vec{p}_2 f(\vec{p}_3) \sigma\, v_{отн} \cdot d\Omega\, dp_3 \qquad dN = f(\vec{p}, \vec{r}) dp\, dr$

Кинематика столкновений

$\vec{p}_1 + \vec{p} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$

$p^2 + p_1^2 = p_2^2 + p_3^2$

$\Rightarrow$ 4 ур-я, а нам надо 6 (2 ур-я будут опред. углами)

1) выполн. ЗС

2) изгин. комп. имп только по линии центра

Найдем связь между $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ и $\vec{p}, \vec{p}_1$. Для того, чтобы опред. v_3 и v_2

$v'_{отн} = v_3 - v_2 = \frac{1}{m} |\vec{p}_3 - \vec{p}_2|$

$\vec{p}_2 = \vec{p} + \Delta p \qquad p_3 = \vec{p}_1 + \Delta p_1 \qquad \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \Delta p_1 + \vec{p} + \Delta p = \vec{p}_1 + \vec{p} \Rightarrow \Delta\vec{p} = -\Delta\vec{p}_1$

$\Delta\vec{p} \parallel \Delta\vec{p}_1 \parallel \vec{n}$

Из ЗСЭ получим $\quad p_2^2 + p_3^2 = (p - \Delta p)^2 + (p_1 + \Delta p)^2 = \cancel{p^2} + 2p\Delta p_1 + \Delta p^2 + \cancel{p_1^2} -$

$- 2p_1\Delta p + \Delta p^2 = \cancel{p^2} + \cancel{p_1^2} \quad \Rightarrow \quad 2(p - p_1)\Delta p + 2\Delta p^2 = 0$

$\Delta p^2 + (\vec{p} - \vec{p}_1)\Delta p = 0$

$\Delta p^2 + (\vec{p} - \vec{p}_1)\Delta p = 0$

$\Delta p(\Delta p + (\vec{p} - \vec{p}_1)) = 0 \quad \Delta p \neq 0$

$\Downarrow$

$\Delta p = ((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n})\vec{n} \qquad \vec{p}_2 = \vec{p} + \Delta\vec{p} = \vec{p} + \vec{n}((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n}) = \vec{p} + \vec{n}(\vec{v}_{отн} \cdot \vec{n})m$

$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 - \Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{n}((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n}) \qquad \sigma = \pi r_0^2$

$v'_{отн.} = \frac{1}{m}(\vec{p}_3 - \vec{p}_2) = \frac{1}{m}(\vec{p}_1 - \vec{p}) - 2n \cdot ((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n}) = v_{отн} - 2n(v_{отн} \cdot \vec{n})$

$\vec{n} \cdot \vec{v}'_{отн} = \cancel{\vec{n} \cdot \vec{v}_{отн}} - 2(\vec{v}_{отн} \cdot \vec{n}) = -(\vec{v}_{отн} \cdot \vec{n})$

$$\vec{v}'_{отн.} = \vec{v}'_{отн.\parallel} + \vec{v}'_{отн.\perp} \Rightarrow v'_{отн.\parallel} = -v_{отн\,\parallel}$$

$$[v'_{отн.\parallel} \times n] = [v_{отн\perp} \times \vec{n}] \Rightarrow v'_{отн} = v_{отн} \qquad \vec{p} = \vec{p}_\perp + \vec{p}_\parallel$$

$$\vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp = \cancel{\vec{p}_{2\parallel}}' + \vec{p}_{2\perp} + \vec{p}_{3\parallel} - \cancel{\vec{p}_{2\parallel}} \qquad p_{1\parallel} + p_{1\perp} = p_{3\perp} + \cancel{p_{3\parallel}} - \cancel{p_{3\parallel}} + p_{2\perp}$$

$$p_\parallel = p_{3\parallel} \qquad p_\perp = p_{2\perp} \qquad |v'_{отн}| = |v_{отн.}|$$

$$p_{1\parallel} = p_{2\parallel} \qquad p_{1\perp} = p_{2\perp}$$

$$d\vec{p}_2\, d\vec{p}_3 = \left|\frac{\partial(p_{2\perp}, p_{2\parallel}; p_{3\perp}\ p_{3\parallel})}{\partial(p_\perp, p_\parallel, p_{1\perp}, p_{1\parallel})}\right| \cdot d\vec{p}\, d\vec{p}_1 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} d\vec{p}\, d\vec{p}_1 = |-1|\, d\vec{p}\, d\vec{p}_1$$

$$b = \int d\vec{p}_1\, d\Omega\, \sigma\, v_{отн} \cdot f(3) \cdot f(2)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \int\limits_{(p_1)} dp_1\, d\Omega\, \sigma\, v_{отн} \cdot (f(3) \cdot f(2) - f(p) f(p_1))}$$ ур-е Больцмана

$$I_{ст.} = -f(p) \cdot v_T \cdot n\sigma \sim -\frac{f v_T}{\frac{1}{n\sigma}} \sim -\frac{f v_T}{l} \sim -\frac{f}{\tau}$$

τ - вр. между парными столкновениями

Ур-е Больцмана содерж. масштабы времени соизмеримые с τ.

05.03.13.

стр. 666-667 Левич том 2, курс теор. физики

посмотреть вывод ур-я Больцмана.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega \cdot \sigma \cdot v_{отн} \cdot (f(p_3) \cdot f(p_2) - f(p_1) \cdot f(p)) \sim$$

7 переменных

$$\sim -f\sigma v_m \cdot n = -\frac{f}{\frac{1}{\sigma \cdot v_{отн} \cdot n}} = -\frac{f}{\frac{l}{v_T}} = -\frac{f}{T}$$

$f(\vec{p}, \vec{r}, t)$ - нужно найти эт. ф-ю

Лемма Больцмана:

$$\mathcal{J}(r,t) = \int I_{cm.}(p)\,\psi(\vec{p},\vec{r},t)\,d\vec{p} = \int d\vec{p}\,d\vec{p}_1 \int d\Omega\,\sigma\,v_{omn}\left\{f(\vec{p}_3)f(\vec{p}_2) - f(\vec{p}_1)f(\vec{p})\right\}\psi(\vec{p})$$

поменяем индексы у импульсов

① $p \rightleftarrows p_1,\ \ p_2 \rightleftarrows p_3$ при этой замене $\mathcal{J}$ сохр. свой вид

$f(3)\cdot f(2) - f(\ )\cdot f(1)$

② $\vec{p} \rightleftarrows \vec{p}_2,\ \vec{p}_1 \rightleftarrows \vec{p}_3$ $\quad d\vec{p}\,d\vec{p}_1 \to d\vec{p}_3 \cdot d\vec{p}_2 = d\vec{p}\cdot d\vec{p}_1 \quad v_{omn.} = v'_{omn.}$

$\mathcal{J}$ только меняет знак

③ $\vec{p} \rightleftarrows \vec{p}_3,\ \vec{p}_1 \rightleftarrows \vec{p}_2 \to \mathcal{J}$ только меняет знак $\quad \ln$

$$\mathcal{J}(\vec{r},t) = \frac{1}{4}\int d\vec{p}\,d\vec{p}_1\int d\Omega\,\sigma\,v_{omn}\left\{f(\vec{p}_3)\cdot f(\vec{p}_2) - f(\vec{p}_1)\cdot f(\vec{p})\right\}\underbrace{\left(\psi(\vec{p}) + \psi(\vec{p}_1) - \psi(\vec{p}_2) - \psi(\vec{p}_3)\right)}_{=0} \quad (*)$$

Эти св-ва симметрии позволяют запис. $\int$ по имп-су p от произвед-я инт. столкн. на произвольную ф-ю от имп-са $\psi(\vec{p})$ в симметризованом виде.

массы частиц не изменяются $\quad m_1 + m = m_1 + m$

1. $\psi(\vec{p}) = m$ $\quad$ масса
2. $\psi(\vec{p}) = \vec{p}$ $\quad$ импульс
3. p^2 $\quad$ энергия

1 следствие: Для сохр-ся при столкновении величин (масса, имп, эн.) $\mathcal{J}$ тожд-но $= 0$.

2 следствие: $\psi = -\ln f(\vec{p})$

$$\int d\vec{p}\,d\vec{p}_1\int d\Omega\,\sigma\,v_{omn.}\left\{f(\vec{p}_3)\cdot f(\vec{p}_2) - f(\vec{p}_1)\cdot f(\vec{p})\right\}\ln\left(\frac{f(\vec{p})\,f(\vec{p}_1)}{f(\vec{p}_2)\,f(\vec{p}_3)}\right) < 0$$

Следствием 2-го следствия явл. теор. Больцмана (в процессе эволюции системы N частиц энтропия растет)

$\underbrace{S(\vec r,t)}_{\text{плотность энтропии}} = \int f(1-\ln f)\, d\vec p$

$f(\vec p, \vec r, t)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \int\left[\frac{\partial f}{\partial t}(1-\ln f) - f\cdot\cancel{\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t}}\right]d\vec p = -\int \frac{\partial f}{\partial t}\ln f\, d\vec p$$ производная от плотности энтропии

$$-\int \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \ln f \cdot d\vec p = \int \frac{\partial}{\partial x}\left[f(1-\ln f)\right]d\vec p$$

Рассмотрим ур-е Больцмана: $\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec v\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec r} - \vec F\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec p} + I_{ст.}$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\int d\vec r\int \frac{\partial f}{\partial t}\ln f\, d\vec p = \int\underbrace{\left[\vec v\frac{\partial f}{\partial \vec r} + \vec F\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec p}\right]\ln f\, d\vec p}\, d\vec r - \int d\vec p\, I_{ст.}\ln f\, d\vec r$$

полная энтропия

$$= \int\left(\vec v\frac{\partial}{\partial \vec r} + \vec F\cdot\frac{\partial}{\partial \vec p}\right)\left(f(1-\ln f)\right)d\vec p\, d\vec r - \int d\vec p\, I_{ст.}\ln f\, d\vec r = \underbrace{-\int d\vec p\, I_{ст.}\cdot\ln f = \frac{\partial S}{\partial t}}_{\text{энтропия изменялась только за счет столкнов-й}} > 0$$

вся энтроп. сист. $\Rightarrow \underline{\underline{S}} = \int s(\vec r,t)\, d\vec r$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial \vec r}(\ )\, d\vec r = f(\ )\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

Знак производной будет опред-ся $I_{ст.}\cdot\ln f$

Энтропия системы растет за счет только столкновений.

Равновесное реш-е ур-я Больцмана.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec v\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec r} + \vec F(\vec r)\frac{\partial f}{\partial \vec p} = \int d\vec p_1\int d\Omega\cdot\sigma\cdot v_{отн}\left(f(\vec p_3)\cdot f(\vec p_2) - f(\vec p_1)\cdot f(\vec p)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,\quad \vec F = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial \vec r} = 0 \quad\Rightarrow\quad I_{ст.} = 0 \to f(\vec p_3)\cdot f(\vec p_2) = f(\vec p)\, f(\vec p_1)$$

единств. источник зав-ти ф. распред. от коорд-т в $\vec F(\vec r)$, если $\vec F(\vec r) = 0$, то и ф. распред. не зав-т от $\vec r$

$$\ln f(\vec p_3) + \ln f(\vec p_2) - \ln f(\vec p) - \ln f(\vec p_1) = 0$$

$$\ln f(\vec{p}) = \alpha + \vec{\beta}\cdot\vec{p} + \gamma\cdot p^2$$

$f(p) = \exp(\alpha + \vec{\beta}\cdot\vec{p} + \gamma p^2) = a\exp(-b(\vec{p}-\vec{p}_0)^2)$

вер-ть больших импульсов должна

$\exp \to 0$

11.03.13.

$$I_{cm.} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\cdot\sigma\cdot v_{omn} \underbrace{(f(\vec{p}_3)\cdot f(\vec{p}_2) - f(\vec{p})\cdot f(\vec{p}_1))}_{=0} = 0$$

$\ln f(\vec{p}_3) + \ln f(\vec{p}_2) = \ln f(\vec{p}) + \ln f(\vec{p}_1)$

фактически, з-н сохранения

$\ln f(\vec{p}) = \alpha + \vec{\beta}\cdot\vec{p} + \gamma\cdot p^2$

$\psi(\vec{p})$

$$f(\vec{p}) = a e^{-b(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}$$

$\int f(\vec{p})\,d\vec{p} = n$ - плотность частиц, $\frac{1}{n}\int d\vec{p}\,\vec{p}\,f(\vec{p}) = \vec{p}_0 = m\cdot\vec{v}_0$

$$\frac{1}{n(\vec{r},t)}\int f(p,r,t)\vec{A}(\vec{p},r,t)\,d\vec{p} = \langle\vec{A}\rangle$$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x\,dx = \frac{1}{2\alpha}}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2n}dx = (-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^2dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^2dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^4dx = \frac{3}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2n+1}dx = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\cdot\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x\,dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}; \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^3dx = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^5dx = \frac{1}{\alpha^3}$$

① $\int f\cdot dp = n$, $\int f(\vec{p})d\vec{p} = \underbrace{a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b(p_x-p_{0x})^2}dp_x}_{p_x - p_{0x}\to p_x}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b(p_y-p_{0y})^2}dp_y\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b(p_z-p_{0z})^2}dp_z =$

① $a\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bp_x^2}\,dp_x\right)^3 = a\cdot\frac{\pi^{3/2}}{b^{3/2}} = n$ $\quad \boxed{a = n\frac{b^{3/2}}{\pi^{3/2}}}$

② $\boxed{\langle \vec v\rangle} = \frac{1}{n}\int d\vec p\cdot\frac{\vec p}{m}\cdot a\cdot e^{-b(\vec p-\vec p_0)^2} = \left\{\vec p - \vec p_0 = \vec P\right\} = \frac{1}{n}\cdot\frac{a}{m}\int d\vec P(\vec P+\vec p_0)e^{-bP^2} =$

$= \frac{a}{mn}\cdot\int d\vec P\cdot\vec P\cdot e^{-bP^2} + \cancel{\frac{a}{mn}}\cdot\vec p_0\cancel{\int d\vec P e^{-bP^2}} = \boxed{\frac{\vec p_0}{m}}$ $\quad \left\{\int_{-\infty}^{\infty} dP_x P_x e^{-bP_x^2} = -\frac{1}{2b}e^{-bP_x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\right\}$

$a\int d\vec P e^{-bP^2} = n$

среднемассовая скорость

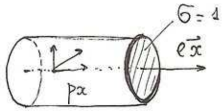
③ $\frac{m\cdot v^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ $\quad \varepsilon = \frac{a}{n_0}\int d\vec p\cdot\frac{p^2}{2m}e^{-bp^2} = \left\{d\vec p = 4\pi p^2\, dp\right\} = \frac{2\pi a}{mn}\int_0^\infty dp\cdot p^2\cdot p^2\cdot e^{-bp^2} =$

ср. энергия одной молекулы

Элемент объема

$= \left\{\begin{matrix} bp^2 = x^2 \\ p = \frac{1}{\sqrt b}x\end{matrix}\right\} = \frac{2\pi a}{mn}\cdot\frac{1}{b^{5/2}}\cdot\underbrace{\int_0^\infty dx\cdot x^4 e^{-x^2}}_{\frac{3}{8}\sqrt{\pi}} = \frac{3}{4}\left(\frac{\cancel{n}\,b^{3/2}}{\cancel{\pi^{3/2}}}\right)\cdot\frac{\cancel{\pi^{3/2}}}{b^{5/2}}\cdot\frac{1}{\cancel{n}\cdot m} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{bm}$

$\varepsilon = \frac{3}{4}\frac{1}{bm}$, $\quad \boxed{b = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\varepsilon m}}$, $\quad \boxed{a = \frac{n}{\pi^{3/2}}\cdot\frac{1}{(\varepsilon\cdot m)^{3/2}}\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} = n\left(\frac{3}{4\pi\varepsilon m}\right)^{3/2}}$



пластинка

частица сталкив. с пластиной, if $p_x > 0$

$\Delta p_x = 2p_x$

число молекул за ед. вр. отразившихся от пластинки: $dN = v_x\cdot 1\cdot f(\vec p)\cdot d\vec p$

$\vec P = \int_{(v_x>0)} d\vec p\cdot 2p_x\cdot\frac{p_x}{m}\cdot f(\vec p) = \frac{2a}{m}\int_0^\infty dp_x\cdot p_x^2\cdot e^{-bp_x^2}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dp_y\, e^{-bp_y^2}\int_{-\infty}^{\infty}dp_z\cdot e^{-bp_z^2}}_{\frac{\pi}{b}} =$

$= \frac{2a}{m}\cdot\frac{\pi}{b}\int_0^\infty dp_x\cdot p_x^2 e^{-bp_x^2} = \left\{\begin{matrix}bp_x^2 = x^2\\ p_x = \frac{x}{\sqrt b}\end{matrix}\right\} = \frac{2a\pi}{mb}\cdot\frac{1}{b^{3/2}}\cdot\underbrace{\int_0^\infty dx\cdot x^2 e^{-x^2}}_{} =$

$$= \frac{2}{m}\cdot\left(\frac{n\cdot b^{3/2}}{\cancel{\pi}^{3/2}}\right)\cdot\underline{\frac{\cancel{\pi}}{b^{5/2}}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4\ 2} = \frac{n}{2bm} = \underbrace{nk_Б\cdot T}_{\text{это давление}} = \frac{n}{2\cancel{m}}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\cancel{m}\mathcal{E}\right) = n\cdot\frac{2}{3}\mathcal{E} = nT\cdot k_Б$$

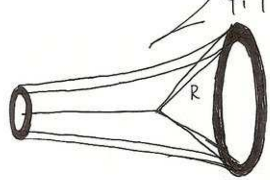
$$b = \frac{3}{4}\,\frac{1}{m\mathcal{E}} \qquad \boxed{\mathcal{E} = \frac{3}{2}k_Б\cdot T}$$

$$b = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{m\mathcal{E}} = \frac{\cancel{3}}{2\cancel{4}}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{k_Б\cdot T} = \frac{1}{2nk_Б\cdot T}; \quad a = n\cdot\left(\frac{b}{\pi}\right)^{3/2} = n\cdot\left(\frac{1}{2\pi m k_Б\cdot T}\right)^{3/2} =$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\vec{p}) = n\cdot\frac{1}{(m\,2\pi k_Б T)^{3/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}{2mk_БT}\right\}} \qquad f(\vec{v}) = F(m,\vec{v})\underline{\left(\frac{dp}{d\vec{v}}\right)^3}$$

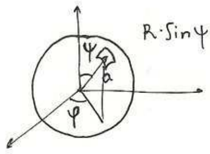
ф-я распределения для импульсов

Сечение рассеяния



$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$ телесный угол

$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$



$R\cdot\sin\psi\cdot d\varphi\, R\, d\psi = dS$

$$\frac{dS}{R^2} = d\Omega = \sin\psi\cdot d\psi\cdot d\varphi$$

$$d\sigma = \sigma\cdot d\Omega$$

dN - число частиц, кот. разлетаются под углом $\psi, \psi + d\psi$

12.03.13.

Теорема Больцмана. З-ны сохранения

$\int I_{cm}\,\psi(\vec{p},\vec{r})\,d\vec{p} = 0 \qquad \psi(\vec{r},\vec{p})$ - сохраняющ. величина

$$\int I_{cm}\,\psi(\vec{p},\vec{r})\,d\vec{p} = \psi\left(p, \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{r}} + \vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\vec{p}\,\psi(\vec{p})f + \frac{d}{d\vec{r}}\int d\vec{p}\,f(\psi\cdot\vec{v}) - \int d\vec{p}\,f v\cdot\frac{d\psi}{d\vec{r}} + \int d\vec{p}\,\frac{d}{d\vec{p}}(\psi f)\vec{F} - \int d\vec{p}\,\frac{f}{m}\frac{\partial}{\partial\vec{v}}(\psi(\vec{p})\vec{F}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\psi\rangle + \frac{d}{d\vec{r}}\langle n\vec{v}\psi\rangle - \langle nv\frac{d\psi}{d\vec{r}}\rangle - \frac{1}{m}\langle n\frac{\partial}{\partial v}(F\cdot\psi(p))\rangle = 0$$

$n\langle A\rangle = \langle nA\rangle$ выражение для з-на сохранения ($\forall$ величины)

Посмотрим для:

1) $y = m$

2) $y = m v_j$

$$\frac{d}{dt}\langle n y\rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle n v_i y\rangle - \langle n v_i \frac{\partial y}{\partial r_i}\rangle - \frac{n}{m}\langle \frac{\partial}{\partial v_i}(F_i y)\rangle = 0$$

① $y = m$ $\quad \rho(r,t) = m n(r,t) \quad u(r,t) = \langle \dot{v}\rangle$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{u} = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\cdot\rho\vec{u} = 0 \qquad F = e(\vec{v}\times\vec{B})$$

② $y = m\cdot v_j$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \rho v_i v_j\rangle - \underbrace{\frac{\rho}{m}\langle F_i \underset{\delta_{ij}}{\frac{\partial v_j}{\partial v_i}}\rangle}_{\frac{1}{m}\rho F_{ij}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \rho v_i v_j\rangle = \frac{1}{m}\rho F_j$$

$$\langle v_i v_j\rangle = \langle v_i - u_i(r_i,t)(v_j - u_j(r,t)\rangle + \langle \underbrace{v_i}_{u_i}\rangle u_j + \langle \underbrace{v_j}_{u_j}\rangle u_i =$$

$$= \langle (v_i - u_i)(v_j - u_j)\rangle + u_i u_j$$

$$P_{ij} = \rho\langle (v_i - u_i)(v_j - u_j)\rangle; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial p_{ij}}{\partial r_i} = \frac{\rho}{m}F$$

$$u_j\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i}\rho u_i\right) + \rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial r_i} = -\frac{\partial p_{ij}}{\partial r_i} + \frac{F_j\cdot\rho}{m}$$

① $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{u} = 0$

② $\quad \rho\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{u}) = \frac{\rho\vec{F}}{m} - \frac{\partial p}{\partial \vec{r}}$

③ $\quad y = \frac{m^2}{2}(\vec{v} - u(\vec{r},t))^2$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(m^2|\vec{v}-\vec{u}|^2 n) + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \frac{n m^2}{2} v_i |\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle - \langle \frac{n}{2} v_i m^2 \frac{\partial}{\partial r_i}|\vec{v}-\vec{u}(r,t)|^2\rangle -$$

$$- \frac{n}{m}\langle \frac{m^2}{2} F \frac{\partial}{\partial v_i}|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle = 0$$

$$\langle \frac{\partial}{\partial v_i}|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle = 2\langle |v_i - u_i|\rangle = 0$$

Введем определение: $k_Б T = \frac{m}{3}\langle |v - u|^2\rangle$

Темп-ра опред. плотность потока тепла:

$$Q = \frac{\rho}{2}\langle(\vec{v}-\vec{u})|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle$$

④ $= 0$

② $= \frac{1}{2}m\rho\langle v_i|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle = \frac{1}{2}m\rho\langle(v_i-u_i)\cdot|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle + \frac{1}{2}m\rho u_i\langle|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle =$

$= mQ_i + \frac{3}{2}\rho u_i T$

③ $= \langle\frac{1}{2}\rho m v_i\frac{\partial}{\partial r_i}|\vec{v}-\vec{u}(r,t)|^2\rangle = \frac{1}{2}m\rho\langle v_i\cdot 2(v_j-u_j)(-\frac{\partial u_i}{\partial r_i})\rangle =$

$= -\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\langle(v_i-u_i)(v_j-u_j)\rangle + m\rho\frac{du_j}{dr_j}u_i\langle v_j-u_j\rangle = p_{ij}\underbrace{\frac{m}{2}\left(\frac{du_i}{dr_i}+\frac{du_j}{dr_j}\right)}_{\Lambda_{ij}} =$

$= p_{ij}\Lambda_{ij}$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho u_i T) + \frac{\partial}{\partial r_i}(mQ_i) + p_{ij}\Lambda_{ij} = 0$$

$p_{ij} = \langle\ldots\rangle$

$$\frac{3}{2}T\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial r_i}\rho u_i\right) + \frac{3}{2}\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i\frac{\partial T}{\partial r_i}\right) + m\cdot\frac{\partial Q_i}{\partial r_i} + p_{ij}\Lambda_{ij} = 0$$ ур-е переноса тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2m}{3\rho}\frac{\partial Q_i}{\partial r_i} = \frac{2}{3}\frac{\vec{p}\Lambda}{\rho}$$

τ_0

τ - вр. между двумя столкн.

$\tau_0 < \tau \leq t \sim \tau \ll T$

формируется лок. Максвелл:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\vec{v}} = I_{ст} \sim \frac{f}{\tau}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = I_{ст} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial t_1}} + \frac{\partial f}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_L\cdot\frac{\partial f}{\partial r} + F\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{I}{b} = -\frac{f}{\tau} =$$

19.03.13.

1) $f(\vec{v},t) = \dfrac{n}{(2\pi v_T^2)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\dfrac{(\vec{v}-\vec{u})^2}{2v_T^2}\right)$ $\qquad t \sim \tau$, $\quad r \sim l$

$r_0 < l < L$

$\tau_0 < \tau < T$

2) $\int \psi(p)\left(\dfrac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\nabla f + \dfrac{\vec{F}}{m}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{p}}\right)d\vec{p} = \int \psi(\vec{p})\, I_{cm}\, d\vec{p} = 0$

Кин. стадия заканчив-ся таким распределением

$\rho(\vec{r},t)$

$\vec{u}(\vec{r},t)$

$T(\vec{r},t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0 \quad \text{ур-е непр-ти} \\ \rho\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial t} + u_i\cdot\dfrac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) = -\underline{\underline{\dfrac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}}} + \dfrac{1}{m}F_j \\ \rho\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + u_i\cdot\dfrac{\partial T}{\partial r_i}\right) + \dfrac{2}{3}m\cdot\underline{\underline{\dfrac{\partial Q_i}{\partial r_i}}} = -\dfrac{2}{3}\underline{\underline{P_{ij}}}\Lambda_{ij} \end{cases}$$

$\Lambda_{ij} = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial r_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$

$P_{ij} = \rho\langle(v_i - u_i)(v_j - u_j)\rangle$

$Q_i = \dfrac{\rho}{2}\langle(v_i - u_i)|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle$

ур-е Больцмана: $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dfrac{\vec{F}}{m}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = I_{cm} \sim \dfrac{f}{\tau}$

перейдём к обезразмер-м переменным:

$t = T\cdot\hat{t}$

$\vec{r} = L\cdot\hat{r}$

$\vec{v} = v_T\cdot\hat{\vec{v}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial \hat{t}}\cdot\dfrac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \hat{t}}$

$\vec{v}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{r}} = v_T\cdot\hat{\vec{v}}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \hat{\vec{r}}}\cdot\dfrac{\partial \hat{\vec{r}}}{\partial \vec{r}} = \dfrac{v_T}{L}\cdot\hat{\vec{v}}\dfrac{\partial f}{\partial \hat{\vec{r}}} = \left(\dfrac{1}{T}\right)\cdot\hat{\vec{v}}\,\dfrac{\partial f}{\partial \hat{\vec{r}}}$ $\qquad \hat{\vec{r}} = \dfrac{1}{L}\cdot\hat{r}$

$dt = \dfrac{dv}{\frac{F}{m}} \qquad T = \dfrac{v\cdot m}{F}$

$\dfrac{1}{T}\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial \hat{t}} + \hat{v}\,\dfrac{\partial f}{\partial \hat{r}} + \dfrac{F\,\partial f}{m\cdot\partial\hat{v}}\right) = \dfrac{f}{\tau} \qquad \dfrac{\vec{F}}{m}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} \qquad dt = \dfrac{d\vec{v}}{\frac{F}{m}} \to T\cdot d\hat{t} = \dfrac{v_T\cdot d\hat{\vec{v}}}{\frac{F}{m}}$

$$\hat{F} = \frac{F\cdot T}{m\cdot v_T} \qquad \mathcal{F} = \frac{F}{m\cdot v_T} \qquad \frac{1}{T}\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{t}} + \hat{\vec{v}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \hat{r}} + \vec{\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}\right) = -\frac{f}{\tau}$$

число Кнудсена

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{t}} + \hat{\vec{v}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{\hat{r}}} + \vec{\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{\hat{v}}} = -\frac{T}{\tau}\cdot f = -\frac{T\cdot v_T}{\tau\cdot v_T} f = -\frac{L}{l}\cdot f \qquad \boxed{K = \frac{l}{L}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{K}\, I_{cm}.$$

l – длина своб. пробега

L – длина макромасштаба

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{t}} + \hat{\vec{v}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{\hat{r}}} + \mathcal{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \hat{\vec{v}}}\right) = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\cdot v_{отн}\sigma\,\big(f(3)\cdot f(2) - f(1)\cdot f(p)\big) =$$

$$= \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\cdot v_T\cdot\hat{v}\cdot\sigma\big(f(3)\cdot f(p_2) - f(1)\cdot f\big) = n\cdot v_T\cdot\sigma \int d\Omega\cdot v_{отн}\,\hat{\sigma}\big(f(3)\cdot f(p_2) - f(1)\cdot f\big) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\cdot I_{cm}.$$

① $K = \frac{l}{L} \gg 1$ вакуум (ур-е в 0-ом порядке по K $\quad \frac{df}{dt} = 0$)

τ- приближение $\qquad$ f_0 – равновесное Максвел. распределение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \underbrace{-\frac{f-f_0}{T}}_{I_{cm}.\ \text{в таком виде}} = -\frac{g}{T}\ \Bigg|\ t\sim T,\ r\sim L \qquad f = f_0 + g$$

g - отклонение от Максв. ф. распред-я

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{F}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int d\vec{p}_1\cdot\int d\Omega\cdot\sigma\cdot v_{отн}\cdot\big(\underbrace{f_0(3)\cdot f_0(2) - f_0(1)\cdot f_0}_{} + g(3)\cdot f_0(2) + g(2)\cdot f_0(3) -$$

$$- g(1)\cdot f_0 - g(\ )\,f_0(1)\big)$$

$$\frac{g}{f_0} = K \qquad f = f_0 + Kg$$

$$\frac{d}{dt}(f_0 + g) = -\frac{g}{\tau} \qquad \frac{f_0}{T} \sim -\frac{g}{\tau};\quad \frac{\tau}{T} = -\frac{g}{f_0} = -\frac{\tau\cdot v_T}{T\cdot v_T} = -\frac{K}{L} \ll 1$$

$$K\cdot\frac{df_M}{dt} = I_{cm}\ (\to f \to f_M + g)$$

$$K\cdot\left(\frac{\partial f_M}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_M}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f_M}{\partial \vec{v}}\right) = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\cdot\sigma\cdot v_{отн}\big(f_M(2)\cdot f_M(2) - f_M(1)\cdot f_M(0) +$$

$$+ g(3)\cdot f_M(2) + g(p_2)\cdot f_M(3) - g(\vec{p})\cdot f_M(p_1) - g(p_1)\,f_M(\vec{p})\big) = -\frac{g(\vec{p})}{\tau}$$

$$g = -\tau\left(\frac{\partial f_M}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_M}{\partial \vec{r}} + \frac{F}{m}\cdot\frac{\partial f_M}{\partial \vec{v}}\right) \sim -K$$

26.03.13.

$t \sim \tau$, $r \sim l$ Кинетич. этап

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = \frac{\rho}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_T^2}\right) \qquad r = lr',\ t = \tau t',\ v = V_0\cdot\vec{v}'$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = I_{ст.} \sim -\frac{f}{\tau}$$

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{\partial f}{\partial t'} + V_0\cdot\vec{v}'\cdot\frac{\partial f}{l\,\partial \vec{r}'} + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{1}{V_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}'} = -\frac{f}{\tau} \to \frac{1}{\tau}\left(1\cdot\frac{\partial f}{\partial t'} + \underbrace{\frac{V_0\tau}{l}}\cdot\vec{v}'\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}'} + \underbrace{\frac{\vec{F}\cdot\tau}{mV_0}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}'}\right) = -\frac{f}{\tau}$$

$1 \sim \frac{V_0\cdot\tau}{l} \sim \frac{F\cdot\tau}{m\cdot V_0}$ (чтобы все коэф. в скобках были одного порядка

$$V_0 \sim \frac{l}{\tau} = v_T \Rightarrow l = v_T\cdot\tau \Rightarrow \frac{F\cdot\tau}{mv_T} \sim 1 \qquad \frac{F\cdot\tau^2}{mv_T^2} \sim 1$$

$t = T\cdot t'$, $\vec{r} = L\cdot\vec{r}'$, $\vec{v} = V_0\cdot\vec{v}'$ гидродинам. этап

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial f}{\partial t'} + V_0\cdot\vec{v}'\cdot\frac{\partial f}{L\cdot\partial \vec{r}'} + \frac{\vec{F}}{mV_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}'} = I_{ст.} \sim -\frac{f}{\tau}$$

$$\frac{1}{T}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{V_0\cdot T}{L}\cdot\vec{v}'\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}'} + \frac{\vec{F}\cdot T}{mV_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}'}\right)}_{\frac{df}{dt}} \sim -\frac{f}{\tau}$$

$$1 \sim \frac{V_0\cdot T}{L} \sim \frac{F\cdot T}{m\cdot V_0} \qquad \frac{df}{dt} \sim -\frac{T}{\tau}\cdot f \sim -\frac{1}{K}\cdot f$$

$$V \sim \frac{L}{T}$$

$$K = \frac{\tau}{T} \sim \frac{\tau\cdot v_T}{T\cdot v_T} = \frac{l}{T\cdot\frac{v_T}{V_0}\cdot V_0} = \frac{l}{L\cdot\underbrace{\frac{v_T}{V_0}}_{v_T \gg V_0}} \ll \frac{l}{L}$$

$V_0\cdot T = L \qquad v_T \gg V_0 \qquad v_T \sim V_0$

$$K = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau\cdot v_T}{T\cdot v_T}$$

① число Кнудсена большое $K = \frac{l}{L} \gg 1$

② Число Кнудсена малое

① $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{K}\cdot I_{ст.}$ $(K \ll 1)$ только на гидродин. стадии

$f = f_M(\vec{v}, \vec{r}, t)$ $\vec{r} \sim L,\ t \sim T$ смотрим на этих масштабах

$$f_M = \frac{\rho(\vec{r},t)}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r},t))^2}{2v_T^2(\vec{r},t)}\right)$$

② $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}(\vec{r},t)) = 0$

③ $\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i\cdot\frac{\partial u_j}{\partial r_j}\right) = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_j} + \frac{1}{m}\cdot\rho F_j$

④ $\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i\frac{\partial T}{\partial r_i}\right) + \frac{2}{3}m\cdot\frac{\partial Q_i}{\partial r_i} = -\frac{2}{3}P_{ij}\Lambda_{ij}$

$P_{ij} = \rho\langle (v_i - u_i(\vec{r},t))(v_j - u_j(\vec{r},t))\rangle$

$\hat{Q} = \frac{1}{2}\rho\langle(\vec{v}-\vec{u}(r,t))(\vec{v}-\vec{u})^2\rangle$ $\langle\ldots\rangle = \frac{1}{n}\int\ldots f\,d\vec{v}$

$f = f_0 + K\cdot g$ вводим малое возмущение в ф. распред-я, обусловл. релаксац. проц-ми на динам. стадии эволюции...

$f_0 = f_M$

$\frac{d}{dt}(f_0 + K\cdot g) = \frac{1}{K}\cdot I(f,f) = \frac{1}{K}\int dp_1\int d\Omega\, v_{om}\,\sigma\big((f_0(\vec{p}_3) + Kg(p_3))(f_0(\vec{p}_2) + K\cdot g(\vec{p}_2)) -$

$-(f_0(\vec{p}_1) + K\cdot g(\vec{p}_1))(f_0(p) + K\cdot g(p)\big) =$

$\frac{df_0}{dt} + K\cdot\frac{dg}{dt} = \frac{1}{K}\int d\vec{p}_1\int d\Omega\,\sigma\, v_{om}\Big[f_0(\vec{p}_3)\cdot f(\vec{p}_2) - f_0(p_1)f_0(\vec{p})) + K(f(\vec{p}_3)\cdot g(\vec{p}_2) + f(\vec{p}_2)\cdot g(\vec{p}_3) -$

$-f_0(\vec{p}_1)g(\vec{p}) - f_0(\vec{p})g(\vec{p}_1) + O(K^2)\Big]$

$\frac{d}{dt}(f_0 + \cancel{K}g) = \frac{1}{\cancel{K}}\cdot K\int dp_1\underbrace{\int d\Omega\,\sigma\, v_{om}}(f(p_3)g(p_2) + f(p_2)\cdot g(p_3) - \underline{f(p_1)\cdot g(p)} - f(\vec{p})\cdot g(\vec{p}_1)) \sim$

$\sim -n v_T \sigma g = -\frac{g}{\tau}$ $\boxed{g = -\tau\cdot\frac{df}{dt}}$ реш-е ур. Больцмана в 1 порядке по числу Кнудсена

оценим пар-ры перед g.

09.04.13.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}+\frac{F}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}=I_{cm.}\rightarrow f_{(0)}=f_M(\vec{r},\vec{v},t)=\frac{\rho(r,t)}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}}\cdot\exp\left(-\frac{(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r},t))}{2v_T^2}\right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\cdot\vec{u}(\vec{r},t))=0 \qquad \Lambda_{ij}=\frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j}+\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_i\cdot\frac{\partial u_j}{\partial r_i}=-\frac{1}{\rho(\vec{r},t)}\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}+\frac{1}{m}\cdot F_j(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial r_i}+\underbrace{\frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\frac{\partial Q_i}{\partial r_i}}=-\frac{2}{3\rho}P_{ij}\Lambda_{ij}$$

$$P_{ij}=\rho\langle(v_i-u_i)(v_j+u_j)\rangle; \qquad Q_i=\frac{\rho}{2}\langle(v_i-u_i)|\vec{v}-\vec{u}|^2\rangle$$

Плотность потока тепла в нулевом пор. по числу Кнудсена

$$\vec{Q}_{(0)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\rho}{2}\int d\vec{v}\,f_M(\vec{v}-\vec{u})(\vec{v}-\vec{u})^2=\left\{\begin{matrix}\vec{v}-\vec{u}=\vec{U}\\ d\vec{v}=d\vec{U}\end{matrix}\right\}=\frac{\rho}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\cdot$$

$$\cdot\int d\vec{U}\exp\left(-\frac{U^2}{2v_T^2}\right)\vec{U}\cdot U^2=0$$

$$P_{ij}^{(0)}=\frac{1}{n}\cdot\rho\int d\vec{v}(v_i-u_i)(v_j-u_j)f_M=\frac{1}{n}\cdot\rho\cdot\frac{n}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int d\vec{U}e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}\cdot U_i\cdot U_j=$$

$$=\frac{\rho}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int d\vec{U}\cdot U_i^2e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}\delta_{ij}=\left\{\begin{matrix}\int d\vec{U}(U_x^2+U_y^2+U_z^2)e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}=\int d\vec{U}\cdot U^2e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}=\\ d\vec{U}=4\pi U^2\cdot dU \text{ - объем сферы, толщиной } dU \text{ в пр-ве скоростей}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\rho\cdot4\pi}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int_0^\infty dU\cdot U^2\cdot e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}U^2 \ominus$$

$$\ominus\left\{\frac{U^2}{v_T^2}=x^2;\ U=v_T\cdot x;\ dU=v_T\cdot dx\right\}=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\rho\cdot m^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}\cdot T^{3/2}}\cdot\left(\frac{2T}{m}\right)^{5/2}\cdot\underbrace{\int_0^\infty dx\cdot x^4e^{-x^2}}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{8}}=$$

$$=\frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{3}}\cdot\frac{n\,m\cdot m^{3/2}\cdot\cancel{2^{5/2}}\cdot T^{5/2}\cdot\cancel{3\sqrt{\pi}}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2^{3/2}}\cdot\cancel{\pi^{3/2}}\cdot T^{3/2}\cdot m^{5/2}\cdot\cancel{8}}=nT\cdot\delta_{ij}$$

$$\boxed{\begin{matrix}Q^{(0)}=0\\ P_{ij}^{(0)}=p\cdot\delta_{ij},\ p=n\cdot T\end{matrix}}$$

ответ на вопрос на зачете

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \frac{F_j}{m} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_i} p \cdot \delta_{ij}}_{\frac{\partial p}{\partial r_j}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = \frac{\vec{F}}{m} - \nabla p}$$

$-\frac{\partial p}{\partial r_j} = -\nabla_j p$ (уравнение Эйлера, ур-е идеальной жидкости)

$$P_{ij} \cdot \Lambda_{ij} = \delta_{ij} \cdot p \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial r_i} + \frac{\partial u_i}{\partial r_j}\right) = p \cdot \operatorname{div} \vec{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla) \cdot T = -\frac{2}{3}\frac{nT\cancel{m}}{\cancel{\rho}} \operatorname{div}\vec{u} = -\frac{2}{3} T \operatorname{div} \vec{u}$$

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla) T}_{\frac{dT}{dt}} = -\frac{2}{3} T \cdot \operatorname{div} \vec{u}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}\vec{u} + \vec{u}\nabla\rho = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{u} = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{} = \frac{2}{3}\frac{d\rho}{\rho}; \quad \ln T = \frac{2}{3}\ln\rho + \ln C$$

$$p = nT = \frac{\rho}{m} \cdot T \qquad \boxed{T = \frac{p \cdot m}{\rho}}$$

$T = C \cdot \rho^{2/3} \qquad \left(\frac{T}{T_0}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}$ адиабат. процесс

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{K} \cdot I_{cm}. \qquad f = f_0 + K \cdot \underbrace{f_1}_{g}$$

$$\frac{d}{dt}(f_M + \cancel{K} g) = \left(\cancel{\frac{1}{K}}\right) \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma \cdot v_{отн.} [\cancel{f_M(3) \cdot f_M(2) - f_M(1) \cdot f_M(p)} + \cancel{K} \cdot f_M(3) \cdot g(2) +$$

$$+ \cancel{K} \cdot f_M(2) \cdot g(3) - \cancel{K} \cdot f_M(1) g(\vec{p}) - \cancel{K} \cdot f_M(p) \cdot g(1)] \approx -\frac{g}{\tau}$$

$$g = -\tau \cdot \frac{df_M}{dt} = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial f_M}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_M}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f_M}{\partial \vec{v}}\right) = -\tau\left[\frac{\partial f_M}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f_M}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_M}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial f_M}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r_i} + \frac{\partial f_M}{\partial u_j} v_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial r_i} + v_i \cdot \frac{\partial f_M}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m} \cdot \frac{\partial f_M}{\partial v_i}\right] =$$

$$= -\tau\left[\frac{\partial f_M}{\partial \rho}\underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r_i}\right)}_{= \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho u_i)} + \frac{\partial f_M}{\partial u_j}\underbrace{\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)}_{u_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial m}\frac{(pT)}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m}} + \frac{\partial f_M}{\partial T}\overbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial r_i}\right)}^{u_i \cdot \frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac{2}{3} T \cdot \frac{\partial u_i}{\partial r_i}} + \frac{F_i}{m} \cdot \frac{\partial f_M}{\partial v_i}\right]$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}(\vec{r},t)) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial\rho}{\partial r_i} = v_i\cdot\frac{\partial\rho}{\partial v_i} - \operatorname{div}\rho\vec{u} = \frac{\partial}{\partial r_i}(v_i\rho) - \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho u_i) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r_i}(U_i\rho)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = \underbrace{v_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial r_i} - u_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial r_i}} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m} = U_i\cdot\frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m}$$

16.04.13.

$$g = -\tau\left[\frac{\partial f_M}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial r_i}(\rho\cdot u_i) + \frac{\partial f_M}{\partial u_j}\left(\frac{F_j}{m} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_j} + u_i\cdot\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) + \frac{\partial f_M}{\partial T}\left(u_i\cdot\frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac{2}{3}T\frac{\partial u_i}{\partial r_i}\right) + \frac{F_i}{m}\frac{\partial f_M}{\partial v_i}\right]$$

$$f_M = \frac{\rho}{m}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m}{2T}\cdot U^2\right]; \quad \vec{U} = \vec{v} - \vec{u}(\vec{r},t); \quad \frac{\partial f_M}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}f_M; \quad \frac{\partial f_M}{\partial T} = f_M\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{T} + \frac{mU^2}{2T^2}\right)$$

$$\frac{\partial f_M}{\partial u_i} = f_M\cdot\frac{mU_i}{T}; \quad \frac{\partial f_M}{\partial v_i} = -\frac{mU_i}{T}; \quad \frac{\partial U_i}{\partial v_i} = 1$$

$$g = -\tau f_M\left[\frac{U_i}{T}\cdot\frac{\partial T}{\partial r_i}\left(\frac{mU^2}{2T} - \frac{5}{2}\right) + \underbrace{\frac{1}{T}\Lambda_{ij}\left(U_iU_j - \frac{1}{3}U^2\delta_{ij}\right)}_{0}\right] =$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) \qquad f_M \rightarrow f_M + g$$

$$\rho(\vec{r},t) = m\int d\vec{v}\, f_M$$

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \frac{1}{m}\int f_M\cdot\vec{v}\cdot d\vec{v} \qquad T = \frac{1}{3}\frac{m}{n}\int f_M\cdot U^2\, d\vec{U} \qquad \int g\begin{Bmatrix}1\\ v\\ v^2\end{Bmatrix}d\vec{v} = 0$$

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + \pi_{ij}$$

Выч. плотн-ть потока тепла в I порядке по числу Кнудсена

$$\vec{Q} = \frac{1}{2}\rho\langle\vec{U}\cdot U^2\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho}{2m}\int dU(f_M+g)\vec{U}\cdot U^2$$

$$= -\tau\int f_M\left[\frac{U_i}{T}\cdot\frac{\partial T}{\partial r_i}\left(\frac{mU^2}{2T} - \frac{5}{2}\right) + \underbrace{\frac{1}{T}\Lambda_{ij}\left(U_iU_j - \frac{1}{3}U^2\delta_{ij}\right)}_{0}\right]\vec{U}\cdot U^2\, d\vec{U} =$$

$$= -\frac{\tau m}{2}\cdot\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial T}{\partial r_i}\int d\vec{u}\left(u_1\vec{e}_1 + u_2\cdot\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3\right)u^2 u_i\left(\frac{mu^2}{2T}-\frac{5}{2}\right)f_M =$$

$$= -\frac{\tau m}{2}\cdot\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\int d\vec{u}\cdot u_1\vec{e}_1\cdot u^2\cdot u_i\left(\frac{mu^2}{2T}-\frac{5}{2}\right) + \left(1\xrightarrow{\vec{e}_2}2\right) + \left(1\xrightarrow{\vec{e}_3}3\right) =$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r_1}\vec{e}_1\right) \qquad \underset{\frac{\partial T}{\partial r_2}\vec{e}_2}{i=2} \qquad \underset{\frac{\partial T}{\partial r_3}\cdot\vec{e}_3}{i=3}$$

$$= -\frac{\tau m}{2}\cdot\frac{1}{T}\nabla T\int d\vec{u}\cdot\frac{u^2}{3}\cdot u^2\left(\frac{mu^2}{2T}-\frac{5}{3}\right) = -\varkappa\nabla T$$

$$\varkappa = \frac{\tau m}{6T}\cdot\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\cdot n\cdot\int d\vec{u}\cdot u^4\left(\frac{mu^2}{2T}-\frac{5}{2}\right)e^{-\frac{m}{2T}\cdot u^2} = \frac{\tau m n}{6T}\left(\frac{m}{2T}\langle u^6\rangle - \frac{5}{2}\langle u^4\rangle\right)$$

$$\langle u^2\rangle = \frac{3T}{m}, \quad \langle u^4\rangle = 15\left(\frac{T}{m}\right)^2; \quad \langle u^6\rangle = 105\left(\frac{T}{m}\right)^3$$

$$\varkappa = \frac{\tau m n}{6T}\cdot\left(\frac{m}{2T}\cdot 105\left(\frac{T}{m}\right)^3 - \frac{75}{2}\left(\frac{T}{m}\right)^2\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{n\tau T}{m}$$

$$\vec{Q} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{n\tau T}{m}\nabla T = -\frac{5}{2}n\cdot\underbrace{\tau\cdot v_T}_{l}\cdot v_T\cdot\nabla T \qquad \nabla T\sim\frac{T}{L}$$

$$P_{ij} = \rho\langle u_i u_j\rangle = \frac{nm}{n}\int d\vec{u}\cdot u_i u_j\left(f_M + g\right) = p\,\delta_{ij} + \underbrace{m\int d\vec{u}\, u_i u_j\cdot g}_{\pi_{ij}};$$

$$\pi_{ij} = -\tau m\int d\vec{u}\, u_i u_j\left[\cancel{\frac{u_k}{T}\cdot\frac{\partial T}{\partial r_k}\left(\frac{mu^2}{2T}-\frac{5}{2}\right)} + \frac{1}{T}\Lambda_{kl}\left(u_k u_l - \frac{1}{3}u^2\delta_{kl}\right)\right]f_M =$$

$$= \left\|\underbrace{(k=i,\ l=j) + (k=j,\ l=i)}_{\text{рассмотрим } i\neq j}\right\| = -\frac{2\tau m}{T}\cdot\int d\vec{u}\cdot u_i^2 u_j^2\cdot f_M\cdot\Lambda_{ij} =$$

$$= -\frac{2\tau m}{T}\cdot\Lambda_{ij}\cdot n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}du_s\, e^{-\frac{mu_s^2}{2T}}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}du_i\cdot u_i^2\cdot e^{-\frac{mu_i^2}{2T}}\cdot\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}du_j\cdot u_j^2\cdot e^{-\frac{mu_j^2}{2T}}\cdot\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} = -\frac{2\tau m n}{T}\cdot\Lambda_{ij}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}du_i\cdot u_i^2\cdot e^{-\frac{mu_i^2}{2T}}\right)^2 =$$

$$= -\frac{2m\tau}{T}\cdot n\cdot\Lambda_{ij}\cdot\frac{m}{2\pi T}\left(\underbrace{-\frac{\partial}{\partial\alpha}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}du_i\, e^{-\alpha u_i^2}}_{-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)}\Bigg|_{\alpha=\frac{m}{2T}}\right)^2 = -\frac{2n\tau\cdot T}{m}\Lambda_{ij} \ominus$$

тензор деформации

$$= -n\cdot\tau\cdot T\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) = -\eta\cdot\frac{1}{m}\Lambda_{ij}$$

Рассмотрим случай несжимаемой жидкости: $\Rightarrow \operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial r_i} = 0$

$$\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i\cdot\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) = \frac{\rho}{m}\cdot F_j - \frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}$$

u_i — среднемассовая скорость

$$\boxed{P_{ij} = p\cdot\delta_{ij} - \eta\cdot\frac{1}{m}\cdot\Lambda_{ij}}$$

тензор давления в I пор. по числу Кнудсена.

$$-\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i} = -\frac{\partial}{\partial r_i}\left(p\cdot\delta_{ij} - \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)\right) = \left(-\frac{\partial p}{\partial r_j} + \eta\cdot\frac{\partial^2 u_j}{\partial r_i^2}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\rho\cdot\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\nabla\vec{u}\right) = \frac{\rho}{m}\cdot\vec{F} - \nabla p + \eta\Delta\vec{u}}$$ ур-е Навье-Стокса

$$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i\cdot\frac{\partial T}{\partial r_i}\right) + \frac{2}{3}m\cdot\frac{\partial\hat{Q}_i}{\partial r_i} = -\frac{2}{3}P_{ij}\Lambda_{ij} \qquad Q = -\varkappa\nabla T$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\nabla T\right) = -\frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\cdot\varkappa\Delta T - \frac{2}{3}p\cdot\frac{m}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{u}$$

23.04.13.

Релаксация примесей легкого газа в тяжелом газе

(Лоренцева форма интеграла столкновений → второе название)

(диффузия примесей легких частиц в газе тяж. частиц) → третье название

① – пар-ры легкого газа

② – пар-ры тяж. газа

почему не будет этого $\int$ — интеграл столкнов. легких с легкими

легкие с легкими

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\vec{r}} + \vec{F}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\vec{p}_1} = \int d\vec{p}_1\int d\Omega\,\sigma_{11}\,|\vec{v}_1 - \vec{v}_1'|\left(f_1(\vec{p}_1')f_1(\vec{p}_1'') - f_1(\vec{p}_1)\cdot f_1(\vec{p}_1')\right) +$$

ур-е Больцмана легких частиц

$$+\int d\vec{p}_2\int d\Omega\,\sigma_{12}\,|\underline{\vec{v}_1} - \cancel{\vec{v}_2}|\left(f_2(\vec{p}_2')f_1(\vec{p}_1') - f_2(\vec{p}_2)\cdot f_2(\vec{p}_1)\right) \sim$$

$$\sim -\frac{f_1}{\tau_{11}} - \frac{f_1}{\tau_{12}} \sim -n_1\sigma_{11}v_1 f_1 - n_2\sigma_{12}v_T\cdot f$$

$\int$ столкн. легких с тяжелыми частицами

Ур-е Больцмана для тяж. частиц.

считаем что процесс релаксации легких частиц опред-ся их столкн. с тяжелыми.

(*) $\tau_{11} \gg \tau_{12}$ → вр. релаксации легких с тяжелыми

вр. релаксации легких с легкими

1) плотности малые

2) считаем, что газ тяж-х частиц нах-ся в термодинамич. равновесии

3) считаем, что ф-я распред. легких частиц <u>мало</u> отлич-ся от Максвелл.
(слабо неравновесное состояние)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} \sim \frac{m_2 v_2^2}{2} \sim \frac{3}{2} k_Б T \qquad \frac{v_{T1}}{v_{T2}} \sim \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \gg 1$$

$$m_1 \ll m_2 \qquad \frac{m_1}{m_2} \sim \frac{v_2^2}{v_1^2} \ll 1$$

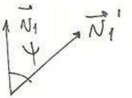
4) ф-я распред. тяж. частиц не изменяется в рез-те столкнов. тяжелых частиц с легкими

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = \qquad \left\| \int d\vec{p}_2 f(\vec{p}_2) = n_2 \right\|$$

$$= \underbrace{n_2 \cdot v_1 \cdot \int d\Omega \cdot \sigma_{12} \left(f_1(\vec{p}_1{}') - f_1(\vec{p}_1) \right)}_{}$$

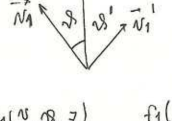
это Лоренцевская форма $\int$ столкновений

$\sigma_{12} = \sigma(v, \psi)$ → угол рассеяния



$|\vec{v}_1{}'| \approx |\vec{v}_1|$ скорость легких частиц практически остается прежней

сферич. СК



$$v_1 \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = n_2 \cdot v_1 \int d\Omega\, \sigma_{12} (f_1(\vec{p}_1{}') - f_1(\vec{p}_1))$$

разложение по полиномам Лежандра

↓

$$f_1(\vec{v}, z) = f_1(v, \vartheta, z) \qquad f_1(v, \vartheta, z) = f_{01}(1 + \cos\vartheta \cdot \varphi(z, v_1))$$

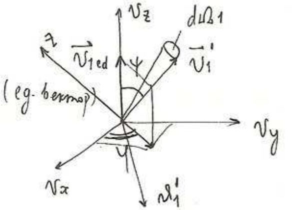
$$f_{01} = n_0(z)\left(-\frac{m}{2\pi T(z)}\right)^{3/2}\cdot \exp\left(-\frac{m v_1^2}{2T(z)}\right)$$ выбираем f_{01} в виде Максвелловской ф. распред.

$$\cancel{v_1}\cdot\cos\vartheta\,\frac{\partial f_0}{\partial z} = n_2\cancel{v_1}\int d\Omega\,\sigma_{12}\cdot\left(\underline{f_0(z,v_1')}(\cancel{1}+\cos\vartheta'\cdot\varphi(z,v_1')-\underline{f_0(z,v_1)}(\cancel{1}+\cos\vartheta\cdot\varphi(z,v_1)\right)=$$

они равны

$$= n_2\cdot\cancel{v_1}\cdot f_{01}(z,v_1)\cdot\varphi(z,v_1)(\cos\vartheta'-\cos\vartheta)$$

$$\cos\vartheta\cdot\frac{d\ln f_{01}}{dz} = n_2\cdot\varphi(v_1,z)\int(\cos\vartheta'-\cos\vartheta)\sigma(\psi,v_1)\cdot d\Omega$$



полярная СК в пр-ве скоростей:

$\vec{v}_{ed} = (0,0,1)$

$\vec{v}_{ed}' = (\sin\psi\cdot\cos\gamma,\ \sin\psi\cdot\sin\gamma,\ \cos\psi)$

$\vec{e}_z = (\sin\vartheta,\ 0,\ \cos\vartheta)$

$$e_z\cdot\vec{v}_{1ed}' = \sin\vartheta\cdot\sin\psi\cdot\cos\gamma + \cos\vartheta\cdot\cos\psi = \cos\vartheta'$$

$\vec{e}_z\cdot\vec{v}_{1ed} = \cos\vartheta$

$\vec{e}_z\cdot\vec{v}_{1ed}' = \cos\vartheta'$

$d\Omega = \sin\psi\cdot d\psi\cdot d\gamma$

$$\int(\cos\vartheta'-\cos\vartheta)\sigma(\psi,v_1)\,d\Omega = \left\{d\Omega = \sin\psi\cdot d\psi\cdot d\gamma\right\} = \int_0^{2\pi}d\gamma\cdot\int_0^{\pi}d\psi\cdot\sigma(\psi,v_1)\cdot\sin\psi\cdot$$

$$\cdot(\cancel{\sin\vartheta\cdot\sin\psi\cdot\cos\gamma} + \cos\vartheta\cdot\cos\psi - \cos\vartheta)$$

$$\cos\vartheta\cdot\frac{\partial\ln f_{01}}{\partial z} = n_2\cdot\varphi(v_1,z)\cdot 2\pi\cdot\cos\vartheta\cdot\int_0^{\pi}d\psi\cdot\sigma(\psi,v_1)(\cos\psi-1)\sin\psi$$

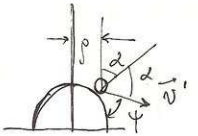
$d\sigma = \sigma\cdot 2\pi\cdot d\psi\sin\psi$ // транспортное сечение Σ //

$$\Sigma(v) = 2\pi\int_0^{\pi}d\psi\cdot\sin\psi\,\sigma(v,\psi)(1-\cos\psi)$$

$$\frac{\partial\ln f_{01}}{\partial z} = -n_2\Sigma(v)\,\varphi(z,v),\qquad \varphi(z,v_1) = -\frac{1}{n_2\Sigma}\frac{\partial\ln f_{01}}{\partial z} - \frac{\ell}{L}\ln f_{01}$$

Покажем, что транспортное сечение порядка дифф-го

(МОДЕЛЬ УПРУГИХ ШАРОВ)



$$\psi = \pi - 2\alpha$$

$$\Sigma = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\pi} d\psi \sin\psi\, \sigma(v, \psi)(1-\cos\psi) = \int d\sigma (1-\cos\psi) =$$

$$d\sigma = \rho\, d\rho\, d\gamma$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\gamma}_{2\pi} \int_0^{R} d\rho\, \rho(1-\cos\psi) = 2\pi \int_0^{R} d\psi \cdot \left|\frac{d\rho}{d\psi} \cdot \rho(\psi)\right|(1-\cos\psi) =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi} d\psi \cdot R^2 \cdot \cos\frac{\psi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2} \cdot (1-\cos\psi) = \frac{2\pi \cdot R^2}{2} \cdot \int_0^{\pi} d\psi \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\psi (1-\cos\psi) = \frac{\pi R^2}{2}(-\cos\psi)\Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{\pi R^2}{2} \cdot \cos^2\psi \Big|_0^{\pi} = \pi R^2$$

для модели упругих шаров $\Sigma = \pi R^2 =$ классическому сечению

$$f_1 = f_{10}\left(1 - \cos\vartheta \cdot \frac{1}{n_2 \cdot \Sigma} \frac{\partial \ln f_0}{\partial z}\right), \qquad \varphi(z, v) = -\frac{1}{n_2 \cdot \Sigma} \frac{\partial \ln f_0}{\partial z}$$

$\Sigma = \pi R^2$ $\qquad \frac{1}{n_2 \Sigma} = \Lambda$ — эффективная длина ~~столкновения~~ своб. пробега

$$j_z = \int f_1 \cdot v_{z1} \cdot d\vec{v}_1 = \int d\vec{v}_1 \left[v_{z1} \cdot f_{01} - v_z \cdot \Lambda \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} \cdot f_{01}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z} \int d\vec{v}_1 \cdot f_{01} \cdot v_z \cdot \cos\vartheta \cdot \Lambda = \left\{ \cos\vartheta = \frac{v_{z1}}{v_1} \right\} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\int d\vec{v}_1 \cdot f_{01} \frac{1}{3} v \cdot \Lambda\right) = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z} \langle n v \Lambda \rangle =$$

$$v_z \cdot \cos\vartheta = \frac{v_z^2}{v_1} \qquad v_{1z}^2 \Rightarrow \frac{1}{3} v^2$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{3}\langle v \cdot \Lambda \rangle}_{D} \frac{\partial n}{\partial z} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot n \cdot \frac{\partial}{\partial T} \langle v_1 \Lambda \rangle}_{D_T} \frac{\partial T}{\partial z} = j_z$$

$$D = \frac{1}{3} \langle v_1 \cdot \Lambda \rangle$$

$\vec{V}+\vec{v}_1) \approx f_0(\vec{v}_1) + \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}_1}(\vec{v}_1+\vec{V}-\vec{v}_1) = f_0(\vec{v}_1)\left(1-\frac{\vec{V}\vec{v}_1 m_1}{T_1}\right)$

...реги. частицу, которую „видит" тяжелая частица//

...силе сопротивления: её можно вычислить, как полный импульс

...ений тяжелой частице легкими частицами:

$$\Delta p = m_1 v_1 (1-\cos\psi), \quad \text{Поясним:}$$

...ил. $\vec{p}=\vec{p}_0$, после $\vec{p}\,' = p_0\vec{e}_\parallel \cos\psi + p_0\vec{e}_\perp \sin\psi \Rightarrow$

$=\vec{p}-\vec{p}\,' = p_0\vec{e}_\parallel(1-\cos\psi) + p_0\vec{e}_\perp \sin\psi$

...ется, что в среднем $\Delta p = p_0(\overline{1-\cos\psi})$ (вдоль $\perp$-го напр. рас-

...метрично). $\overline{\cos\psi} = \frac{\int \cos\psi\, \sigma(\psi,v)\, d\Omega}{\int \sigma(\psi,v)\, d\Omega}$.

...оворится (в Ландау) просто: в среднем $\Delta p = m v_1 (1-\cos\psi)$.

...ить силу трения, испытыв. тяж. частицей, нужно найти суммарный

...теряется легкими частицами при их столкновениях с тяжелой

$= \int f_0(\vec{v}_1+\vec{V})\,\vec{v}_1\, v_1 m_1 (1-\cos\psi)\, d\vec{v}_1\, \sigma d\Omega$ (далее индекс 1 будем опускать)

$\psi)\,\sigma\, d\Omega = \sigma_{tr}$ – транспортное сечение.

$\int f_0(\vec{v})\left(\underbrace{1}_{\substack{\text{при интегр.}=0,\\ \text{как при инт. от нег. ф-ии.}}}-\frac{m(\vec{v}\vec{V})}{T}\right)\vec{v}\, v\, \sigma_{tr}\, d\vec{v} = -\frac{m^2}{T}\int d\vec{v}\, f_0(\vec{v})\,(\vec{v}\vec{V})\,\vec{v}\, v\, \sigma_{tr} =$

$\vec{v}_\parallel+\vec{v}_\perp$, $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{V}$, $\vec{v}_\perp \perp \vec{V}$ $// = -\frac{m^2}{T}\int d\vec{v}\, f_0(\vec{v})\, V v_\parallel\, v\, \sigma_{tr}\, (\underbrace{\vec{v}_\perp}_{0\ \text{при интегр.}}+\vec{v}_\parallel) =$

$v_\parallel \vec{v}_\parallel = V \vec{e}_V v_\parallel^2 = \vec{V}\, v_\parallel^2 // = -\frac{m^2}{T}\vec{V}\int d\vec{v}\, f_0(\vec{v})\,\sigma_{tr}\, v_\parallel^2\, v =$

$\vec{V}\,\frac{1}{3}\int d\vec{v}\, f_0(\vec{v})\,\sigma_{tr}\, v^3 \quad -\frac{1}{3}\,\frac{m^2}{T}\langle n_1 \sigma_{tr} v^3\rangle\,\vec{V} = \vec{f}_{тр}$

$$-\frac{1}{3}\frac{m^2}{T}\langle n_1 \sigma_{tr} v^3\rangle \vec{V} + \vec{F}_{вн} = 0 \quad // \text{из } M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{тр} + \vec{F},\ \vec{V} - const // -$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{3T}{m^2\langle n_1 \sigma_{tr} v^3\rangle}\vec{F}; \quad \text{подвижность } \vec{V} = b\vec{F};$$

Соотношение Эйнштейна: $D = bT = \frac{3T^2}{m^2\langle n_1 \sigma_{tr} v^3\rangle} \sim \frac{v_T^4}{n_1 \sigma v_T^3} = \frac{v_T}{n\sigma} \sim \ell = \frac{L^2}{T}$ —

а это и есть диффузия по размерности

Диффузное приближение в кинетике. Уравнение Фоккера-Планка

Ср. изменения величин, от кот. зависит. ф-ия распр. малы по сравн. с их значениями — за частую рассматриваются такие процессы.

Например, Δp, приобр. тяж. част. при соуд. с легкой $\ll p$ её импульса.

Обозначим $w(\vec{p},\vec{q})d\vec{q}$ — вероятность, отнес. к ед. времени, перехода импульса тяж. частицы в результате её столкн. с легкой (от $\vec{p}$ к $\vec{p}-\vec{q}$)

~~Балансное кин. ур-е, кот.~~ Опять будем рассматривать примесь тяж. част. в газе легких частиц. Балансное ур-е для ф-ии распр. тяж. част.: (опис. релаксацию ф-ию распр. тяж. част. $f(\vec{p},t)$)

$$\frac{\partial f(\vec{p},t)}{\partial t} = \int \Big(\underbrace{w(\vec{p}+\vec{q},\vec{q})}_{\vec{p}+\vec{q}\to\vec{p}} f(\vec{p}+\vec{q},t) - \underbrace{w(\vec{p},\vec{q})}_{\vec{p}\to\vec{p}-\vec{q}} f(\vec{p},t)\Big) d\vec{q}$$

(добавляются частицы в $\vec{p}$) (исчезают, ...)

Рассматриваем $|\vec{q}| \ll |\vec{p}|$ (тяж. част. в газе легких). Будем разлагать:

$$w(\vec{p}+\vec{q},\vec{q}) f(\vec{p}+\vec{q}) \approx w(\vec{p},\vec{q}) f(\vec{p}) + \vec{q}\frac{\partial}{\partial \vec{p}} w(\vec{p},\vec{q}) f(\vec{p}) + \frac{1}{2} q_i q_j \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} w(\vec{p},\vec{q}) f(\vec{p})$$

Подставляем в кинетическое уравнение

$\frac{\partial f}{\partial t} = \int d\vec q \, \{ \cancel{w(\vec p, \vec q) f(\vec p)} - \vec q \frac{\partial}{\partial \vec p} (w(\vec p,\vec q) f(\vec p)) + \frac{q_i q_j}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} (w(\vec p,\vec q) f(\vec p))$

$\cancel{- w(\vec p, \vec q) f(\vec p)} \} = \frac{\partial}{\partial \vec p} \left[\left(\int d\vec q \, \vec q \, w(\vec p, \vec q) \right) f(\vec p) \right] + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \left[\left(\frac{1}{2} \int d\vec q \, q_i q_j \, w(\vec p, \vec q) \right) f(\vec p) \right]$

Обозначим: $A_i = \int q_i \, w(\vec p, \vec q) d\vec q$, $B_{ij} = \frac{1}{2} \int q_i q_j \, w(\vec p, \vec q) d\vec q$. Тогда:

ФП $\boxed{\frac{\partial f(\vec p, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(A_i f(p) + \frac{\partial}{\partial p_j} B_{ij} f(p) \right)}$ — диф. ур-е в ч. произв. ур-е типа диффузии.

Ур-е опис. ~~процесс релаксации~~ диффузию тяж. част. в имп. пр-ве.

Интегрируя ур-е получаем $\int \frac{\partial f}{\partial t} dp = \int dp \frac{\partial}{\partial p} (\ldots) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int f dp = \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \rightarrow \underline{n = Const}$

Надо вычислить A_i и B_{ij}. Они не зависят от времени.

Результат общей релаксации $\overbrace{f =}^{(t \to \infty)} C \exp\left(-\frac{p^2}{2MT}\right)$. При этом $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Подставим такой вид в ур-е, но прежде запишем его ~~несколько~~ иначе:

$$\frac{\partial f(\vec p, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\underbrace{\left(A_i + \frac{\partial B_{ij}}{\partial p_j} \right)}_{\tilde A_i} f(p) + B_{ij} \frac{\partial f(p)}{\partial p_j} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\tilde A_i f(\vec p) + B_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t \to \infty} = 0 \Rightarrow \tilde A_i f(\vec p) - B_{ij} \frac{p_j}{MT} f(\vec p) = Const = 0 \; \left(\begin{array}{c} \text{иначе} \\ \text{противоречие} \\ \text{можно в убе-} \\ \text{диться} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tilde A_i = B_{ij} \frac{p_j}{MT} \rightarrow$ ур-е ФП приобретет более простой вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(B_{ij} \left(\frac{p_j}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) \right)$$

При $B_{ij} \neq B_{ij}(\vec p)$,

~~B_{ij} не должен зависеть от напр. $\vec p$~~. $B_{ij} = B \delta_{ij}$ (может

быть дальше и убедимся) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} = B\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(\frac{\vec{p}}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\right)}$$ — окончательный вид

~~Может быть будем получать явный вид $\omega(\vec{p}, \vec{q})$. Пишем~~

~~$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma_{1T} |v_1 - v| f_1(\vec{p}_1') f_T(\vec{p}_T') -$$~~

~~$$= \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma_{1T}\, v_1 f_1(\vec{p}_1') f_T(\vec{p}_T') - \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma_1$$~~

Все, не будем получать...

Граничные усл-я для ур-я Больцмана

Гран. усл. для ур-я переноса импульса и те

Скольжение и температурный скачок

Начнем с последнего: скольжение и темп. скачок.

Ур-е Навье-Стокса: $\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial r_j}\right) = \frac{\rho}{m} F_i - \frac{\partial P}{\partial r_i} +$

При каких обстоятельствах можно выкинуть ΔU_i? Будем

$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial r_j} \sim \rho \frac{U^2}{L}$; $\eta \Delta U \sim \frac{\eta U}{L^2}$ ⇒ отношение

к вязк. слаг.: $\frac{\text{нелин}}{\text{вязк}} \sim \frac{\rho U^2 L^2}{L \eta U} = \frac{\rho U L}{\eta} =$

⇒ надо $Re \gg 1$

Допустим поток течет у стенки ⇒

$\Rightarrow \Delta U \sim \frac{U}{L^2} + \frac{U}{\delta^2} \approx \frac{U}{\delta^2}$, но т.к. $\frac{l}{L} = K \ll 1$ (

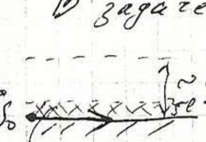
все равно требуем $\frac{l}{\delta} \ll 1$. На сей раз:

$$\frac{\text{нелин.}}{\text{вязк.}} \sim \frac{U^2 \rho\, \delta^2}{L U \eta} = \frac{\rho \delta^2 U}{L \eta} \sim \frac{\delta^2 U}{L \nu} \sim 1 \quad // \ \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

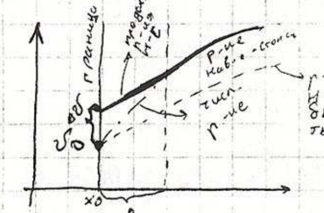
можно найти

При этом $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$. Это т.н. пограничны нельзя неучитывать вязкость.

В задаче задается граничная скорость.



→ в этой области $K \sim 1$ — ур-я не работают, а гранич. усл-я еще дальше. Что делать?



Ошибки $\sim \Delta v$; Оказывается достаточно применить ~~для~~ гр. усл-е:

$$v\Big|_{x=x_0} = v_0 + \underbrace{\xi}_{\text{коэфф. скольжения}} \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad \xi \sim K$$

При таком усл. р-ие ур-я НС дает точное р-ие.

Тоже самое и для ур-я переноса тепла: $T\Big|_{x=x_0} = T_0 + \underbrace{\delta}_{\text{темп. скачок}} \frac{\partial T_0}{\partial x}$

Темп. скачок и скольжения — фиктивные гран. усл-я, ~~для~~ введенные для разрешения проблемы р-ия ур-я НС во всей области.

Гран. усл. Больцмана.

— Упали и зеркально отразились частицы.

Ф-ия распр. при этом поменялась так:

$$f_r(\vec v_r) = (1-\alpha) f_i(\vec v_r - 2\vec n(\vec v_r \vec n)) + \alpha n_r \left(\frac{m}{2\pi T_r}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v_r^2}{2T_r}}$$

α, n_r, T_r — коэффициенты аккомодации. Определяются на основании з-нов сохранения (либо опытным путем).

Оказывается тангенц. импульс переносится

только 1-й слаг f_τ. $\vec P=(1-\alpha)\vec P_{\tau i}$;

$\alpha=\frac{P_{i\tau}-P_{r\tau}}{P_{i\tau}}$. Если $P_{i\tau}=P_{r\tau}\Rightarrow\alpha=0$ (импульс никого н... и не остав...

Если $P_{r\tau}=0\Rightarrow\alpha=1$ — все частицы остаются на стенке.

Точно также для тепловых процессов: $\alpha_E=\frac{E_i-E_r}{E_i-E_w}$ - эн... тепл... именно $T=T$...

Если $E_i=E_r\Rightarrow\alpha_E=0$ и т.д.)

Основные ф-лы и соотношения курса

Кинетическое ур-е Больцмана	$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec v\frac{\partial f}{\partial \vec r}+\vec F\frac{\partial f}{\partial \vec p}=\int d^3p_1\, d\Omega\, \sigma v_{отн}\{f($
H-теорема Больцмана: при эволюции системы N-частиц энтропия сист. растет	$\frac{\partial S}{\partial t}=\int d\vec r\frac{\partial}{\partial t}\left[\int f(1-\ln f)d\vec p\right]>0$
Ф-ия распр. Максвелла	$f=n\left(\frac{1}{2\pi m\theta}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{(\vec p-\vec p_0)^2}{2m\theta}\right];\ \vec p_0=$
З-н сохр. в общем виде (φ - сохран. величина, т.е. $\int I_{ст}\varphi d\vec p=0$)	$\frac{\partial}{\partial t}\langle\varphi n\rangle+\frac{\partial}{\partial \vec r}\langle n\varphi\vec v\rangle-\langle n\vec v\frac{\partial\varphi}{\partial\vec r}\rangle-\frac{1}{m}\langle$
Ур-е непрерывности ($\rho=nm$; $\vec U=\langle\vec v\rangle$)	$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec U=0$
Ур-е переноса импульса	$\rho\left(\frac{\partial\vec U}{\partial t}+(\vec U\nabla)\vec U\right)=\frac{\rho\vec F}{m}-\vec e_j\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}$, где $P_{ij}\equiv\rho\langle(v_i-U_i)(v_j-U_j)\rangle$ - тензор д
Ур-е теплопроводности (переноса тепла)	$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec U\frac{\partial T}{\partial\vec r}+\frac{2m}{3\rho}\operatorname{div}\vec G=-\frac{2}{3}\frac{P_i}{}$ $T=\frac{m}{3}\langle\lvert\vec v-\vec U\rvert^2\rangle$; $\vec G=\frac{\rho}{2}\langle(\vec v-$ поток тепла; $\Lambda_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial r_j}+\frac{\partial U_j}{\partial r_i}\right)$ - тензор деф

Тензор давл. и поток тепла в 0-м прибл. по K	$\vec{Q}_{(0)} = 0$; $P_{ij(0)} = Tn\delta_{ij} = p\delta_{ij}$
Ур-е переноса импульса (Эйлера) и тепла в 0-м прибл. по K	$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{1}{\rho}\nabla p$; $\frac{dT}{dt} = -\frac{2}{3}T\,\mathrm{div}\,\vec{U}$
P_{ij} и $\vec{Q}$ в 1-м прибл. по K (η - коэф. вязкости; Π_{ij} - тенз. вязкости)	$\vec{Q}_{(1)} = -\varkappa\nabla T = -\frac{5}{2} n\tau v_T^2 \nabla T \sim l\nabla T \sim \frac{l}{L} = K$ $P_{(1)ij} = p\delta_{ij} + \Pi_{ij} = p\delta_{ij} - \underbrace{nT\tau}_{\eta}\frac{2}{m}\Lambda_{ij}$
Ур-е Навье-Стокса (перенос импульса в 1-м прибл. по K) и ур-е теплопров.	$\rho\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{U}\right) = \frac{\rho}{m}\vec{F} - \nabla p + \eta\Delta\vec{U}$ $\frac{dT}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\varkappa\Delta T - \frac{2}{3}\,pm\,\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\vec{U}$
Лоренцов вид инт. столкновений	$I_{ст.л.} = v_1 n_2 \int d\Omega\, \sigma_{12}\left[f_1(\vec{p}_1') - f_1(\vec{p}_1)\right]$ 1 - легк. част.; 2 - тяж. част.
Транспортное сечение	$\sigma_{tr} = \int (1-\cos\vartheta)\,\sigma\, d\Omega$
Ур-е Фоккера-Планка: начальный и конечные формы записи	(i): $\frac{\partial f(\vec{p},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(A_i f(\vec{p}) + \frac{\partial}{\partial p_j} B_{ij} f(\vec{p})\right)$ (f): $\frac{\partial f}{\partial t} = B\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(\frac{\vec{p}}{MT}f + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\right)$ ($B_{ij} = B\delta_{ij}$ и $B_{ij} \neq B_{ij}(\vec{p})$)
Масштабы и времена	Длина св. проб.: $l \sim \frac{1}{nr_0^2} \gg r_0$ (r_0 - характ. размер частиц) Ср. расст. между част.: $r_{ср} \sim \frac{1}{n^{1/3}}$ Сравнение: $r_0 \ll r_{ср} \ll l \ll L$ Газ. параметр: $\varepsilon = nr_0^3$ Время св. пр. и корр.: $\tau_{св.} \sim \frac{l}{v_T}$; $\tau_{corr} \sim \frac{r_0}{v_T}$