Сист. n частиц ~~——~~ —> $6n$ измерений —> состояние в 1 - физ. точка —> 12.02.13

—> процесс - физ. траектория.

Плотность вероятности для n частиц - $D(q,p,t)$, подчиняется ур-ю Лиувилля: $\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial D}{\partial q} + F\frac{\partial D}{\partial p} = 0$ (F - сила). Однако из этого ур-я непосредственно можно получить $6n$ ур-й движения n частиц, т.е. утверждается, что введение D фактически не упрощает суть процессов, хоть фактически в неё уже закладывается вероятностный характер.

Другой подход: $A = A(t, A_0)$ (нач. усл.), где A - координата или скорость (любая величина), A_0 - случайная величина —> процесс случайный. Нужна ф-ия распределения A_0 —> по ней получим $\langle A(t)\rangle = m_1(t)$ // можем усреднить по A_0 //. Можно также получить: $\langle A(t)A(t_1)\rangle = m_1(t)m_1(t_1) + K_2(t,t_1) = m_2(t,t_1)$

K_2 - корреляция (определяет связ. сост. 2-х переменных). Определим K_2:

$$\langle (A(t) - \langle A(t)\rangle)(A(t_1) - \langle A(t_1)\rangle)\rangle = m_2(t,t_1) - m_1(t)m_1(t_1) = K_2(t,t_1)$$

Стац. процесс: все моменты ~~хар-ки~~ инвариантны относ. замены $t \to t + t_0$.

~~Замечание~~ Замечание: $m_1(t)$ - момент 1-го пор-ка; $m_2(t,t_1)$ - момент 2-го пор-ка

Пусть процесс стационарный => $m_1 \neq m_1(t)$; для момента 2-го пор-ка единств. возможность $m_2(t-t_1)$, для 3-го $m_3(t-t_1, t-t_2, t_1-t_2)$.

Т.о. мы избавимся от t_0 при заменах $t_n \to t_n + t_0$.

$$m_2(t,t_1) - m_1(t)m_1(t_1) = K_2(t,t_1) \Rightarrow m_2(t-t_1) - m_1^2 = K_2(t-t_1)$$

Оп: $K(t-t_1)$ - корреляционная ф-ия, кот. при конечном $\tau = t - t_1$ обращается в 0 (τ_c время корреляции)

τ_c - это время, которое определяет взаимодействие между частицами.

$$\tau_c = \frac{1}{K_2(0)} \int_0^\infty |K_2(\tau)| d\tau$$

Оценим характерные времена столкновит. процессов (в газе):

длина св. пр.: $l \sim \frac{1}{n_0 r_0^2} \sim \frac{1}{3 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-16}} \sim 10^{-4} см \gg r_0 \sim 10^{-8} см$

время между 2 ст.: $\tau_{ст} = \frac{l}{v_T} \sim \frac{10^{-4}}{5 \cdot 10^4} \sim 10^{-8} с$

время корреляции: $\tau_c = \frac{r_0}{v_T} \sim \frac{10^{-8}}{10^4} \sim 10^{-12} с$

Т.о. $\tau_{ст} \gg \tau_c$ (что характерно для разреж. газов)

Зачастую в задачах вводят безразмерный параметр $n r_0^3$.

Ср. расст. между частицами: $r_{ср} \sim \frac{1}{n^{1/3}} \Rightarrow r_{ср}^3 \sim \frac{1}{n}$ - объем, приход. на 1 частицу

$r_{ср} \sim 0,3 \cdot 10^{-6} см \Rightarrow r_0 \ll r_{ср} \ll l \ll L$ // L - характ. разм. сист., не вакуум //

Вычислим: $\varepsilon = n r_0^3 \sim 3 \cdot 10^{-5}$ - параметр порядка, что означает факт нахождения газа в 10^{-5} части занимаемого им объема.

Замечание: $n r_0^3 \ll 1$ - разреженный газ.

Оказывается, что: $\frac{\tau_c}{\tau_{ст}} = \frac{v_T}{l} \frac{r_0}{v_T} \sim \frac{r_0}{1/n r_0^2} = n r_0^3 = \varepsilon$

Т.о. можно описывать медленные (эволюционные) процессы посредством зависимостей: $m_1(\varepsilon t)$; $m_2(t - t_1, \varepsilon t)$

Концепция сокращённого описания неравновесных систем по Боголюбову

(динамич. стадия эвол.)

1-й этап: длительность → $t \le \tau_c \sim 10^{-12} \div 10^{-11}$ с. На этом этапе сист. описуется либо ур-ями движ-я, либо ур-ем Лиувилля (фактически сист. бесстолкн.)

(кинетич. ст. эвол.)

2-й этап: длительность → $t > \tau_c$ → произошли столкновения → → частицы теряют свою уникальность → → достаточно иметь одночастичн. ф-ю распределения $f(\vec{p}, \vec{r}, t)$.

Это кинетическая стадия эволюции системы

Здесь же: $\tau_0 \ll T \ll \tau_{rel}$; $r_0 \ll \ell_{\phi} \ll l$ // $\tau_{пер} = \tau = \frac{l}{v_T}$ //

Показывается, что $f(\vec{p}, \vec{r}, t) \to f_M(\vec{v}, R, t)$ - ф-ия распр. Максв.

$$f_M = \frac{n(R,t)}{(2\pi v_T^2(R,t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{v} - \vec{u}(R,t))^2}{2 v_T^2(R,t)}\right)$$

// $\vec{u}$ - среднемассовая скорость //

19.02.13

Физически малые величины $\tau_ф$, $V_ф$ как в мех. спл. сред (для времени $\tau_{ст} \ll \tau_ф$).

$\tau_ф$ - время, в течении которого произойдет столкновение любой частицы ∞-малого физ. объема.

$\tau_ф = \frac{\tau}{N} = \frac{\tau}{n l_ф^3}$; τ - время между 2-мя столкн. отд. выбр. частицы;

$\tau = \frac{l}{v_T}$; $\tau_ф = \frac{l_ф}{v_T}$ // l - длина св. пробега // →

∴ $\boxed{\frac{\tau}{n l_ф^3} = \frac{l_ф}{v_T}}$ - отсюда можно определить $l_ф$: $l_ф^4 = \frac{l}{n} \to l_ф = \left(\frac{l}{n}\right)^{1/4} = l\left(\frac{1}{l^3 n}\right)^{1/4} =$

$$= \ell\left(\frac{(n r_0^2)^3}{n}\right)^{1/4} = \ell(n^2 r_0^6)^{1/4} \quad // \ \ell \sim \frac{1}{r_0^2 n} = \frac{1}{n\sigma} \ // \Rightarrow // \ \varepsilon = n r_0^3 \ll 1$$

$$\Rightarrow \ell_\varphi = \ell(\varepsilon^2)^{1/4} = \sqrt{\varepsilon}\,\ell \quad \text{т.е.} \quad \boxed{\ell_\varphi = \sqrt{\varepsilon}\,\ell}$$

$$\tau_\varphi \sim \frac{\ell_\varphi}{v_T} = \frac{\ell\sqrt{\varepsilon}}{v_T} \sim \tau\sqrt{\varepsilon} \ll \tau \rightarrow \boxed{\tau_\varphi = \sqrt{\varepsilon}\,\tau}$$

Кинетическое ур-е Больцмана

Число частиц dN, облад. имп-ом и коорд. $\vec{p}$ и $\vec{r}$ в интервале $d\vec{p}$, $d\vec{r}$ опред. соотн. $dN = f(\vec{r}, \vec{p}, t)\, d\vec{r}\, d\vec{p}$, где f – одночастичная ф-ия распределения.

Из $N = \int f\, d\vec{r}\, d\vec{p}$ вытекает, что распределение плотности частиц определяется соотн.: $n(\vec{r}, t) = \int f(t, \vec{r}, \vec{p})\, d\vec{p} \Rightarrow N = \int n(\vec{r}, t)\, d\vec{r}$;

~~Плотность вероятности (распр. плотности)~~

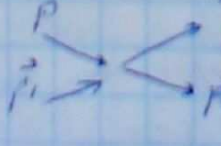
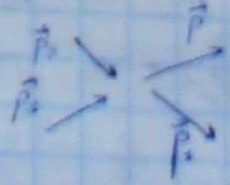
Тогда $\langle A(t, \vec{r}) \rangle = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int f(t, \vec{r}, \vec{p})\, A(t, \vec{p}, \vec{r})\, d\vec{p}$

$\langle n(\vec{r}, t) A \rangle = \int f A\, d\vec{p}$

~~Прочнать~~ Потока величины $\overbrace{A}^{\text{вдоль направления } \vec{n}}$ $Q = \frac{1}{n}\int (\vec{v}\,\vec{n})\, A f(\vec{r}, \vec{p}, t)\, d\vec{p}$ // $\vec{n}$ – направление потока

~~Плотность~~ Потока: nQ.

Кол-во столкн. прямых и обратных:

①  ② 

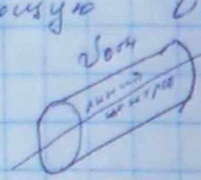
(частица может „уходить" и „входить" в интересующий объем)
и пр. ой

$$\frac{d\,dN}{dt} = \frac{d}{dt}\left(f\,d\vec{r}\,d\vec{p}\right) = (b-a)\,d\vec{r}\,d\vec{p}\,, \quad \begin{matrix} a \text{ - от } (1) \\ b \text{ - от } (2) \end{matrix} \;; \to$$

$$\to \frac{df}{dt} = (b-a). \qquad b, a - ?$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \underline{I}_{ст.}$$ - интеграл столкновений

Каждая из dN частиц, имеющих импульс $\vec{p}$ испытывает столкновения с ~~…~~ частицами с имп. $\vec{p}_1$ и находящихся вдоль линии центров на расстоянии $\leq v_{отн}$ ~~…~~ в цилиндре, имеющем образующую $v_{отн}$; основании $d\sigma = \sigma\, d\Omega$, нах. $d\sigma \cdot v_{отн} f(\vec{p}_1, \vec{r}, t)\, d\vec{p}_1\, d\vec{r} = d\tilde{N}_1$



$\leftarrow$ в нем dN_1 частиц, те число частиц, кот. в ед. вр. могут столкн. с нашей част.

// 

//.

$$dN\,d\tilde{N}_1 = f(\vec{r}, \vec{p}, t)\, d\vec{p}\, d\vec{r}\, f(\vec{r}, \vec{p}_1, t)\, \sigma\, v_{отн}\, d\Omega\, d\vec{p}_1$$

Общее число столкновений, кот. испыт. частицы с $\vec{p}$ с част. $\vec{p}_1$:

$$\int d\Omega \int d\vec{p}_1\, \sigma\, v_{отн} f(\vec{p}_1, \vec{r}, t) \int f(\vec{p}, \vec{r}, t)\, d\vec{r}\, d\vec{p} - d\vec{r}\, d\vec{p} \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{отн}\, f(t, \vec{r}, \vec{p})\, f(t, \vec{r}, \vec{p}_1) =$$

$$= a\, d\vec{r}\, d\vec{p}$$

$$a = \int dp_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{отн} f(\vec{p}, \vec{r}, t)\, f(\vec{p}_1, \vec{r}, t)\,, \quad v_{отн} = |\vec{v}_1 - \vec{v}|$$

26.02.13

Число парных столкн., кот. испыт. част. в 6-D объеме $d\vec{r}\,d\vec{p}'$ $d\Omega\, d\vec{p}_2\, d\vec{r}_2 (\vec{p}_3\, \sigma\, v'_{отн})$

$v'_{отн} = |\vec{v}_3 - \vec{v}_2|$. Оно равно:

$$dN_2\, d\tilde{N}_3 = f(\vec{p}_2, \vec{r}, t)\, d\vec{r}_2\, d\vec{p}_2\, f(\vec{p}_3, \vec{r}, t)\, \sigma\, v'_{отн}\, d\Omega\, d\vec{p}_3$$ Эта запись должна учитывать только диаграмму (2)

Сводим $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_3$ с $\vec{p}$ и $\vec{p}_1$, а затем $d\vec{p}_2 d\vec{p}_3$ с $d\vec{p}\, d\vec{p}_1$. Из

З-нов сохр.: $\begin{cases} \vec{p} + \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \\ p_1^2 + p^2 = p_2^2 + p_3^2 \end{cases}$ // Закон действия: нужно определить для ... выписанного ур-я определить $\vec{p}_2 \vec{p}_3$ и ...

$$\vec{p}_2 = \vec{p} + \Delta\vec{p} \qquad \vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{p} + \Delta\vec{p} + \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1 = \vec{p} + \vec{p}_1 \Rightarrow \Delta\vec{p} = -\Delta\vec{p}_1$$

Будем полагать, что $\Delta\vec{p} \parallel \Delta\vec{p}_1 \parallel \vec{n}$ ($\vec{n}$ - вектор ~~ед.~~ вдоль линии центров);

$$\vec{p}_2^{\,2} + \vec{p}_3^{\,2} = (\vec{p} + \Delta\vec{p})^2 + (\vec{p}_1 - \Delta\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2} + \vec{p}_1^{\,2} \Rightarrow 2(\vec{p} - \vec{p}_1)\Delta\vec{p} + 2(\Delta\vec{p})^2 = 0 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{p}\left(\vec{p} - \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}\right) = 0 \Rightarrow \Delta p = \left((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n}\right)\vec{n} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_2 = \vec{p} + \Delta\vec{p} = \vec{p} + \vec{n}\left((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n}\right) = \vec{p} + \vec{n}\,(\vec{v}_{отн} \cdot \vec{n})m \\ p_3 = \vec{p}_1 - \Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{n}\left((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n}\right) \end{cases}$$

$$\vec{v}_{отн}' = \frac{1}{m}(\vec{p}_3 - \vec{p}_2) = \frac{1}{m}(\vec{p}_1 - \vec{p}) - 2\vec{n}\left((\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{n}\right) = \vec{v}_{отн} - 2\vec{n}\,(\vec{v}_{отн}\vec{n})$$

$$\Rightarrow \vec{n}\,\vec{v}_{отн}' = \vec{n}\,\vec{v}_{отн} - 2(\vec{v}_{отн}\vec{n}) = -\vec{v}_{отн}\vec{n}$$

$$\rightarrow \vec{v}_{отн}' = \vec{v}_{отн\parallel}' + \vec{v}_{отн\perp}' \rightarrow v_{отн\parallel}' = -v_{отн\parallel};$$

$$(\vec{v}_{отн}' \times \vec{n}) = (\vec{v}_{отн} \times n) \rightarrow v_{отн\perp}' = v_{отн\perp}$$

Меняя индексы импульсов:

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{p}_2 + \left((\vec{p}_3 - \vec{p}_2)\vec{n}\right)\vec{n} \\ \vec{p}_1 = \vec{p}_3 - \left((\vec{p}_3 - \vec{p}_2)\vec{n}\right)\vec{n} \end{cases}$$ // Практически инверсия от 1 и 2 //

$$\vec{p} = \vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp: \quad \begin{matrix} \vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp = \cancel{\vec{p}_{2\parallel}} + \vec{p}_{2\perp} + \vec{p}_{3\parallel} - \cancel{\vec{p}_{2\parallel}} \\ \vec{p}_{3\parallel} + \vec{p}_{3\perp} = \vec{p}_{3\perp} + \cancel{\vec{p}_{3\parallel}} - \cancel{\vec{p}_{3\parallel}} + \vec{p}_{2\parallel} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} p_\parallel = p_{3\parallel};\ p_\perp = p_{2\perp} \\ p_{3\parallel} = p_{2\parallel};\ p_{3\perp} = p_{3\perp} \end{matrix}$$

Осн. результат: $|\vec{v}_{отн}'| = |\vec{v}_{отн}|$

$$d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 = \left|\frac{\partial(p_{2\perp}, p_{2\parallel}, p_{3\perp}, p_{3\parallel})}{\partial(p_\perp, p_\parallel, p_{1\perp}, p_{1\parallel})}\right| d\vec{p}\, d\vec{p}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\vec{p}\, d\vec{p}_1 = |-1|\, d\vec{p}\, d\vec{p}_1$$

Т.о. $d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 = d\vec{p}\, d\vec{p}_1$

С частицами dN_2 действуют частицы с всевозм. имп. p_3 $\to$

$$\to \int_{(p_3)} dN_2 d\tilde{N}_3 = d\vec{r}_2 \int_{(p_3)} d\vec{p}_3\, d\vec{p}_2\, d\Omega\, \sigma |v_{отн}| f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2) =$$

$$= d\vec{r}_2 \int_{(p_1)} d\vec{p}_1\, d\vec{p}\, d\Omega\, \sigma |v_{отн}|\, f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2)\}; \quad \underline{b = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma |v_{отн}| f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2)}$$

Тогда
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma |v_{отн}| \{f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2) - f(\vec{p}) f(\vec{p}_1)\} = I_{ст}}$$

ур-е Больцмана

666-667, Левич Т2 Теор. физ.

Оценим столкновительный интеграл: $I_{ст} \sim -f(\vec{p}) v_T \cdot \underset{\text{плотность газа}}{n} \cdot \sigma = -f v_T \cdot \frac{\frac{1}{l}}{n\sigma} \sim$

$$\sim -f\frac{v_T}{l} \sim -\frac{f}{\tau}$$

5

.03.13

Св-ва ур-я Больцмана

Лемма Больцмана: (формулировка в конце)

Введем: $\mathcal{J}(r,t) = \int I_{ст}(p)\, \varphi(\vec{p}, \vec{r}, t)\, d\vec{p} =$

$$= \int d\vec{p}\, d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{отн} \{f(\vec{p}_3) f(\vec{p}_2) - f(\vec{p}_1) f(\vec{p})\} \varphi(\vec{p})$$

Св-во симметрии физ. свобод: ① $\vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}$; $\vec{p}_2 \leftrightarrow \vec{p}_3$ $\Rightarrow$ ничего не изменится, более того $\mathcal{J}$ тоже не изменится.

② $\vec{p} \leftrightarrow \vec{p}_2$; $\vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_3$ $\Rightarrow$ $\{\,\} \to -\{\,\}$;

$d\vec{p}\, d\vec{p}_1 \to d\vec{p}_3 d\vec{p}_2 = $ // мы показывали // $= d\vec{p}\, d\vec{p}_1$ $\Rightarrow$ $\mathcal{J} \to -\mathcal{J}$ - меняет знак.

③ $\vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_2 \quad \vec{p} \leftrightarrow \vec{p}_3$ → Паналог => ...

Эти св-ва симметрии позволяют записать интеграл от про-
ведения $I_{ст}$ с произв. ф-цией $\varphi(\vec{p})$ в симметризованном виде:

$$\boxed{\mathcal{J}(\vec{r},t) = \frac{1}{4}\int d\vec{p}\, d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{отн} \{f(3)f(2) - f(p)f(1)\} \times (\varphi(\vec{p}) + \varphi(\vec{p}_1) - \varphi(\vec{p}_2) - \varphi(\vec{p}_3))}$$

Представление есть суть лонны.

Следствия: 1) $\mathcal{J} \equiv 0$ в случаях $\varphi(\vec{p}_i) = m_i$; $\varphi(\vec{p}) = \vec{p}$; $\varphi(\vec{p}) = p^2$,

т.е. $\mathcal{J} \equiv 0$ для сохраняющихся φ в данном процессе.

2) Если $\varphi = +\ln f(\vec{p}) \Rightarrow \mathcal{J}(r,t) < 0$ // $\mathcal{J} \sim \{f(3)f(2) - f(p)f(1)\} \times \ln\left(\frac{f(p)f(1)}{f(2)f(3)}\right)$ //

2.1) Th Больцмана: при эволюции системы N част.

энтропия системы растет

$$S(\vec{r},t) = \int f\cdot(1-\ln f)\, d\vec{p} \text{ - плотность энтропии. } \mathcal{S} = \int d\vec{r}\, S(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\int \frac{\partial f}{\partial t}\ln f\, d\vec{p} \quad // \text{более того } \int \frac{\partial}{\partial x}\{f(1-\ln f)\} d\vec{p} = -\int \frac{\partial f}{\partial x}\ln f\, d\vec{p}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{V}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + I_{ст} \to -\int d\vec{r}\int \frac{\partial f}{\partial t}\ln f\, d\vec{p} = \int d\vec{r}\int\left[\left(\vec{V}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)f\right]\ln f\, d\vec{p}$$

$$- \int d\vec{r}\int d\vec{p}\, I_{ст}\cdot \ln f =$$

$$= \int d\vec{r}\int\left(\vec{V}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)(f(1-\ln f))\, d\vec{p} - \int d\vec{r}\int d\vec{p}\, I_{ст}\ln f = -\int d\vec{p}\, d\vec{r}\, I_{ст}\ln f = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}$$

Итого $$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\int d\vec{p}\, d\vec{r}\, I_{ст}\ln f$$

Изменение S происх. лишь за счет столкновений. А из следствия $\int d\vec{p}\, I_{ст} \ln f \le 0 \to \frac{\partial S}{\partial t} \ge 0$.

Равновесное р-ие ур-я Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma v_{отн} \left(f(\vec{p}_3)f(\vec{p}_2) - f(\vec{p})f(\vec{p}_1)\right)$$

Для УБ равновесия ~~означает~~ состояние эквивалентно стац. сост., т.е. $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Считаем $\vec{F}=0$, а также, поэтому, нет оснований полагать ф-ию распр. неоднородной, т.е. $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0$

Т.о. $\frac{df}{dt} = 0 = I_{ст} \Rightarrow f(\vec{p}_3)f(\vec{p}_2) = f(\vec{p})f(\vec{p}_1)$ (для всех значен) – вот так для равновесия.

Или $\ln f(\vec{p}_3) + \ln f(\vec{p}_2) = \ln f(\vec{p}) + \ln f(\vec{p}_1)$, что справедливо для сохраняющихся величин в процессе, откуда:

$$\ln f(\vec{p}) = \alpha + \vec{\beta}\vec{p} + \gamma p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\vec{p}) = \exp(\alpha + \vec{\beta}\vec{p} + \gamma p^2) = a\exp(-b(\vec{p}-\vec{p}_0)^2)$$

11.03.13

Определим $a, b, \vec{p}_0$ (интегральные хар-ки всей системы)

Знаем: $\int f(p)\,d\vec{p} = n$; $\frac{1}{n}\int d\vec{p}\, \frac{\vec{p}}{m} f(\vec{p}) = \langle \vec{v} \rangle$

// $\frac{1}{n(\vec{r},t)} \int f(\vec{p},\vec{r},t)\vec{A}(\vec{p},\vec{r},t)\,d\vec{p} = \langle \vec{A} \rangle$ //

Учтем, что $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$; $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^2 dx = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$; ...; $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2n}dx = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$

$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2n+1}dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$; $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^4 dx = \frac{3}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2}}$

1) $\int f\,dp = n \qquad f = a\exp(-b(\vec p-\vec p_0)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int f(\vec p)\,d\vec p = a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b(p_x-p_{0x})^2}dp_x \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\dots = a\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bp^2}dp\right)^3 = a\frac{\pi}{b}$

$\Rightarrow \boxed{a = n\left(\frac{b}{\pi}\right)^{3/2}}$

2) $\langle\vec v\rangle = \frac1n\int d\vec p\,\frac{\vec p}{m}\,a\,e^{-b(\vec p-\vec p_0)^2} = \|\vec p-\vec p_0=\vec P\| =$

$= \frac1n\frac am\int d\vec P(\vec P+\vec p_0)e^{-bP^2} = \frac{a}{mn}\int_{-\infty}^{+\infty} d\vec P\,\vec P e^{-bP^2} + \frac{a}{mn}\vec p_0\int d\vec P\, e^{-bP^2}$

$= \|$ 1-й инт. $=0$ – нечетн. ф-ия; учтем, что $a\int d\vec P e^{-bP^2}=n\,\| = \frac{\vec p_0}{m}$

т.е. $\boxed{\vec p_0 = m\langle\vec v\rangle}$

ср. эн-я молекулы

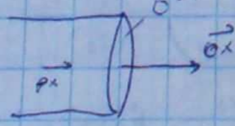
3) $\tilde\varepsilon = \frac an\int d\vec p\cdot\frac{p^2}{2m}e^{-bp^2} = \|d\vec p = 4\pi p^2dp\| = \frac{2\pi a}{mn}\int_0^\infty dp\,p^2p^2e^{-bp^2} =$

$= \| bp^2=x^2;\ p=\frac{1}{\sqrt b}x\,\| = \frac{2\pi a}{mn}\frac{1}{b^{5/2}}\underbrace{\int_0^\infty dx\,x^4e^{-x^2}}_{\frac38\sqrt\pi} = \frac34\left(\frac{nb^{3/2}}{\pi}\right)\frac{\pi^{3/2}}{b^{5/2}}\frac{1}{nm} = \frac34$

$\boxed{b=\frac34\frac{1}{\varepsilon m}} \Rightarrow \boxed{a = n\left(\frac{3}{4\pi\varepsilon m}\right)^{3/2}}$

Но хорошо пользоваться величиной, характ. сист. как целое (а не b).

Вычислим давление молекул на единицу площади ид. отраж. пов-ти.



$\Delta p_x = 2p_x$ (импульс, переданный стенке), $dN = v_x\cdot 1\cdot f(\vec p)\,d\vec p;\ \to P = \int d\vec p\,2p_x\frac{p_x}{m}$

$= \frac{2a}{m}\int_0^\infty dp_x\, p_x^2 e^{-bp_x^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}dp_y\, e^{-bp_y^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}dp_z\, e^{-bp_z^2}}_{\pi/b} = \frac{2a}{m}\frac{\pi}{b}\int_0^\infty dp_x\, p_x^2 e^{-bp_x^2} =$

$= \|bp_x^2=x^2\| = \frac{2a\pi}{mb}\frac{1}{b^{3/2}}\int_0^\infty dx\,x^2e^{-x^2} = \frac2m\left(\frac{nb^{3/2}}{\pi^{3/2}}\right)\frac{\pi}{b^{5/2}}\cdot\frac{\sqrt\pi}{4} =$

$= \frac{n}{2bm} = nk_BT \Rightarrow \|$ с учетом $b=\frac34\frac{1}{m\varepsilon}\,\| \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac32 k_BT}$

Итого $a, b, \vec{p}_0$ мы выразили через наблюдаемые величины.

$$\boxed{f(\vec{p}) = n\left(\frac{1}{2\pi m k_Б T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}{2 m k_Б T}\right)}$$ – Максвелловское распределение

З-ны сохранения

12.03.13

По лемме Больцмана: $\int I_n \, \varphi(\vec{p}, \vec{r})\, d\vec{p} = 0$ // φ – какая-то сохр. величина // =>

$$=> \int \varphi(\vec{p}, \vec{r}) \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \right\} d\vec{p} = 0$$

интегр. по частям:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\vec{p}\, \varphi(\vec{p}, \vec{r}) f + \int d\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\varphi f \vec{v}) - \int d\vec{p} f \frac{\partial(\varphi \vec{v})}{\partial \vec{r}} + \cancelto{0}{\int d\vec{p} \frac{d}{d\vec{p}}(\varphi f \vec{F})} - \int d\vec{p} \frac{f}{m}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}(\varphi \vec{F}) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\langle \varphi n\rangle + \frac{d}{d\vec{r}}\langle n\varphi \vec{v}\rangle - \langle n \vec{v}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}}\rangle - \frac{1}{m}\langle n \frac{\partial}{\partial \vec{v}}(\vec{F}\cdot\varphi)\rangle = 0}$$ З-н сохранения

Рассмотрим различные φ

1) $\varphi = m$. Введем величину: $\rho(\vec{r}, t) = m \cdot n(\vec{r}, t)$ – среднемасс. плотность

$\vec{U}(\vec{r}, t) = \langle \vec{v} \rangle$ – среднемасс. скорость

Получаем: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d}{d r_i}(\rho U_i) = 0$ // $\frac{dm}{d\vec{r}} = 0$; $\frac{\partial}{\partial \vec{v}}(\vec{F}\cdot m) = 0$ //

т.е. $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho \vec{U} = 0}$

2) $\varphi_j = m v_j$ => $\frac{\partial}{\partial t}\langle \rho v_j \rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \rho v_i v_j\rangle - \frac{\rho}{m}\langle F_i \underbrace{\frac{\partial v_j}{\partial v_i}}_{\delta_{ij}}\rangle = 0$

$$\langle v_i v_j \rangle = \langle (v_i - U_i(\vec{r},t))(v_j - U_j(\vec{r},t))\rangle + \langle v_i\rangle U_j + \cancel{\underbrace{\langle v_j\rangle}_{U_j} U_i - U_i U_j} =$$

$$= \langle (v_i - U_i)(v_j - U_j)\rangle + U_i U_j$$

Обозначение: $P_{ij} \equiv \rho \langle (v_i - U_i)(v_j - U_j)\rangle$ – тензор давления =>

$$=> \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_j) + \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho U_i U_j) + \frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i} = \frac{\rho}{m}F_j \; =>$$

$$=> U_j\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho U_i)\right) + \rho\frac{\partial U_j}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial U_j}{\partial r_i} = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i} + \frac{\rho}{m}F_j \; \rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U}\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}}\right)\right) = \frac{\rho \vec{F}}{m} - \vec{e}_j \frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}}$$ – ур-е переноса импульса

3) $\psi = \frac{m^2}{2}\,|\vec{v} - \vec{U}(\vec{r},t)|^2$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(nm^2|v-U|^2\right) + \frac{\partial}{\partial r_i}\left\langle \frac{nm^2}{2} v_i |\vec{v}-\vec{U}|^2\right\rangle -$$

$$- \left\langle \frac{n v_i m^2}{2}\frac{\partial}{\partial r_i}|\vec{v}-\vec{U}(\vec{r},t)|^2\right\rangle - \frac{n}{m}\left\langle \frac{m^2}{2} F_i \frac{\partial}{\partial v_i}|\vec{v}-\vec{U}|^2\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial v_i}|\vec{v}-\vec{U}|^2\right\rangle = 2\langle(v_i - U_i)\rangle = 0$$

Введем определение: $T = \frac{m}{3}\langle|\vec{v}-\vec{U}|^2\rangle$ – температура;

$\vec{Q} = \frac{\rho}{2}\langle(\vec{v}-\vec{U})|\vec{v}-\vec{U}|^2\rangle$ – поток тепла

2-е слагаемое: $\frac{1}{2}m\rho\langle v_i|\vec{v}-\vec{U}|^2\rangle = \frac{1}{2}m\rho\langle(v_i-U_i)|\vec{v}-\vec{U}|^2\rangle + \frac{1}{2}m\rho U_i\langle|\vec{v}-\vec{U}|^2\rangle$

$= mQ_i + \frac{3}{2}\rho U_i T$;

3-е слагаемое: $\left\langle\frac{1}{2}\rho m v_i \frac{\partial}{\partial r_i}|\vec{v}-\vec{U}|^2\right\rangle = \frac{1}{2}m\rho\left\langle v_i\, 2(v_j - U_j)\left(-\frac{dU_j}{dr_i}\right)\right\rangle$

$= -m\rho\frac{dU_j}{dr_i}\langle(v_i-U_i)(v_j-U_j)\rangle + m\rho\frac{dU_j}{dr_i}U_i\underbrace{\langle(v_j-U_j)\rangle}_{0} =$

$= -P_{ij}\frac{m}{2}\left(\frac{dU_j}{dr_i} + \frac{dU_i}{dr_j}\right) \equiv -P_{ij}\Lambda_{ij}$, где Λ_{ij} – тензор деформации

Итого: $\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial r_i}(\rho U_i T) + \frac{\partial}{\partial r_i}(mQ_i) + P_{ij}\Lambda_{ij} = 0$

1-е 2 слаг.: $\frac{3}{2}T\underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i}\rho U_i\right)}_{0} + \frac{3}{2}\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_i\frac{\partial T}{\partial r_i}\right) + \frac{m\,\partial Q_i}{\partial r_i} + P_{ij}\Lambda_{ij}$

Окончательно:
$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U}\frac{\partial T}{\partial \vec{r}} + \frac{2m}{3\rho}\frac{\partial Q_i}{\partial r_i} = -\frac{2}{3}\frac{P_{ij}\Lambda_{ij}}{\rho}}$$

ур-е теплопроводности

Гидродинамический этап

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I_{ст} \sim -\frac{f}{\tau} \quad (всегда)$$

Сейчас мы в стадии неравновесной гидродинамики ($t \sim T$, $r \sim L$):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial t_1}} + \frac{\partial f}{\partial t_2}$$

не изм. на малых временах — изм. на больших временах

Делаем замены: $t = T\cdot\hat{t}$; $r = L\cdot\hat{r}$ (обезразмерили) мало; $\vec{v} = v_T\hat{\vec{v}}$

$\parallel \frac{L}{v_T} = T \parallel$

19.03.13

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{t}} + \hat{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial \hat{r}} + \frac{T\vec{F}}{v_T m}\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}\right) = -\frac{f}{\tau}$$

Х. р-е для характеристик $dt = \frac{dv_i}{\frac{F_i}{m}} \to T d\hat{t} = \frac{v_T d\hat{v}_i}{\frac{F_i}{m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow d\hat{t} = \frac{v_T m}{F\cdot T} d\hat{v} \to$ предлагается обезразмерить силу $\hat{\vec{F}} = \frac{FT}{m v_T} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{t}} + \hat{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial \hat{\vec{r}}} + \hat{\vec{F}}\frac{\partial f}{\partial \hat{\vec{v}}} = -\frac{T}{\tau}f = -\frac{T v_T}{\tau v_T}f = -\frac{L}{\ell}f = -\frac{f}{K}$$

def: $K \equiv \frac{\ell}{L}$ — число Кнудсена $\parallel K = \frac{\tau}{T} \parallel$

Далее так: $\frac{1}{T}\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{t}} + \hat{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial \hat{\vec{r}}} + \hat{\vec{F}}\frac{\partial f}{\partial \hat{\vec{v}}}\right) = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, v_{отн}\, \sigma\left(f(3)f(2) - f(1)f(p)\right) =$

$= \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, v_T\, \hat{v}_{отн}\, \sigma\left(f(3)f(2) - f(1)f\right) = v_T\, \sigma \int d\Omega\, \hat{v}_{отн}\, \hat{\sigma}\left(f(3)f(2) - f(1)f(p)\right)$

$= \frac{1}{n\tau} \hat{I}_{ст}$ →

Предлагается подставить разложение $f = f_0 + g$ (maxw. волн.) в столкновительный интеграл:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, V_{отн}\Big(f_0(3)f_0(2) - f_0(1)f_0 +$$
$$+ g(3)f_0(2) + g(2)f_0(3) - g(1)f_0 - g(\,)f_0(1)\Big)$$

Худяк – метод Энскога – Чепмена

τ-приближение ур-я Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = -\frac{f - f_0}{\tau} = -\frac{g}{\tau}$$ (этот вид применим в случае $I_{ст} \ll 1$)

$$\frac{d}{dt}(f_0 + g) = -\frac{g}{\tau} \to \frac{f_0}{T} \sim -\frac{g}{\tau};\quad \frac{\tau}{T} \sim -\frac{g}{f_0} = -\frac{\tau v_T}{T v_T} = -\frac{l}{L} \ll 1$$

$f = f_0 + g \to$ подставляя в столкн. инт. (с учетом $f_0(3)f_0(2) = f_0(1)f_0(p)$):

$$I_{ст} = \int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, \vec{v}_{отн}\Big(g(3)f_0(2) + g(2)f_0(3) - g(1)f_0(p) - g(p)f_0(1)\Big) \approx -\frac{g}{\tau}$$

Тогда ур-е Больцмана в τ-приближении:

$$\frac{d(f_0 + g)}{dt} \approx -\frac{g}{\tau}.$$

т.к. $\dfrac{\frac{dg}{dt}}{g/\tau} \sim \dfrac{l}{L} = Kn \ll 1$, то записанное ур-е можно приближ. писать так:

$$\underline{\underline{\frac{df_0}{dt} \approx -\frac{g}{\tau}}}$$ (f_0 – Максв. ф. распр.)

26.03.13

Ещё раз $t \sim \tau;\ r \sim l$ — кинет. стадия эволюции → работает

ф-ия расп. Максвелла: $f(\vec{v},\vec{r},t) = \frac{\rho}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_T^2}\right)$.

Как выглядит ур-е Больцмана на таких временных масштабах

~~(поясняя)~~ введя безразм. переменные $r = l r';\ t = \tau t';\ \vec{v} = v_0 \vec{v}'$.

$$\frac{1}{\tau}\left[\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{v_0 \tau}{l} \vec{v}' \frac{\partial f}{\partial \vec{r}'} + \frac{\vec{F}\tau}{m v_0} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}'}\right] = I_{ст} \sim -\frac{f}{\tau}$$

$1 \sim \frac{v_0 \tau}{l} \sim \frac{F\tau}{m v_0}$, откуда сразу следует нормировка на v_0:

$v_0 \sim \frac{l}{\tau} = v_T$. Ур-е не имеет малых/больших параметров

Рассмотрим гидродинамическую стадию эволюции:

$t = T t';\ \vec{r} = L\vec{r}';\ \vec{v} = V_0 \vec{v}'$ →

$$\to \frac{1}{T}\frac{\partial f}{\partial t'} + V_0 \vec{v}' \frac{\partial f}{L\,\partial \vec{r}'} + \frac{\vec{F}}{m V_0} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}'} = -\frac{f}{\tau} \Leftrightarrow \frac{1}{T}\left[\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{V_0 T}{L}\vec{v}'\frac{\partial f}{\partial \vec{r}'} + \frac{\vec{F} T}{m V_0}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}'}\right] = -\frac{f}{\tau}$$

$1 \sim \frac{V_0 T}{L} \sim \frac{FT}{mV_0} \to V_0 \sim \frac{L}{T}$. В ур-е появился малый параметр τ:

$$\frac{df}{dt} \sim -\frac{T_f}{\tau} \sim -\frac{f}{k}, \text{ где } k = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau v_T}{T v_T} = \frac{l}{T\frac{v_T}{V_0}V_0} = \frac{l}{L\frac{v_T}{v_0}} \ll \frac{l}{L}$$

$(v_T \gg V_0)$. Однако полагают $V_T \sim V_0$, а, следов., $k \sim \frac{l}{L}$

Смотрим случай $K \ll 1$.

Пишем формально: $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{k} I_{ст}$, а в конце положим $K = 1$

$$f = f_m(\vec{v},\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{v} - \vec{u}(\vec{r},t))^2}{2v_T^2(\vec{r},t)}\right)$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\vec{u}(\vec{r},t)) = 0$ — ур-е непр.;

$\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_j} + \frac{1}{m}\rho F_j$ — ур-е переноса импульса

$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial r_i}\right) + \frac{2}{3} m \frac{\partial Q_i}{\partial r_i} = -\frac{2}{3} P_{ij} \Lambda_{ij}$ — ур-е переноса тепла.

В ур-я входят: $P_{ij} = \rho \langle (v_i - u_i(\vec r, t))(v_j - u_j(\vec r, t)) \rangle$ $\rightarrow$

$$\vec Q = \frac{1}{2}\rho \langle (\vec v - \vec u(\vec r, t))(\vec v - \vec u)^2 \rangle$$

для их определения нужна ф-ия распр., кот. можно получить из ур-я

Больцмана. Добавочный множитель $\frac{1}{K}$ может, оказывается, много упростить дело.

Линеаризуем ~~Линеаризуем~~ ур-е Больцмана по числу K.

Будем рассматривать $f = f_0 + Kg = f_M + K \cdot g$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(f_M + Kg) = \frac{1}{K} \underbrace{I_{ст}(f, f)}_{\substack{\text{квадратичный функционал по этой } f \rightarrow \\ \rightarrow \text{ оружены это и отражают}}} = \frac{1}{K}\int d\vec p_1 \int d\Omega\, v_{от}\, \sigma \Big[(f_0(3) + Kg(3)) \cdot$$

$$\cdot (f_0(2) + Kg(2)) - (f_0(1) + Kg(1))(f_0(p) + Kg(p)) \Big]$$

$$\frac{df_0}{dt} + K\frac{dg}{dt} = \frac{1}{K}\int d\vec p_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{от} \Big[\underbrace{(f_0(3) f_0(2) - f_0(1) f_0(p))}_{=0} +$$

$$+ K\big(f(3) g(2) + f(2) g(3) - f_0(1) g(\vec p) - f_0(\vec p) g(1) \big) + O(K^2) \Big]$$

$$\frac{d}{dt}[f_0 + Kg] = \frac{1}{K} K \int d\vec p_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{от} \big(f(3) g(2) + f(2) g(3) - f(1) g - f g(1) \big)$$

$$\sim -n v_T \sigma g = -\frac{g}{\tau} \rightarrow \frac{d}{dt}[f_0 + \underbrace{Kg}_{\text{см. пр. лекцию}}] = -\frac{g}{\tau} \Rightarrow \boxed{\frac{df_0}{dt} = -\frac{g}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \boxed{g = -\tau \frac{df}{dt}}$$

– формальное р-ие ур-я Б в 1-м порядке по числу K.

Продолжаем:

9.04.13

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}+\frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}=I_{ст}\to f_0=f_m(\vec{r},\vec{v},t)=\frac{\rho(\vec{r},t)}{m(2\pi v_T^2)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r},t))^2}{2v_T^2}\right]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho\vec{u}(\vec{r},t)\right)=0;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j}=-\frac{1}{\rho(\vec{r},t)}\cdot\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_j}+\frac{1}{m}F_i(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial r_i}+\frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\frac{\partial Q_i}{\partial r_i}=-\frac{2}{3\rho}P_{ij}\Lambda_{ij}$$

$$P_{ij}=\rho\langle\ldots\rangle;\quad \vec{Q}=\frac{1}{2}\rho\langle\ldots\rangle$$

Плотность потока тепла в 0-м пор-е по числу K

$$\vec{Q}_{(0)}=\frac{1}{n}\frac{\rho}{2}\int d\vec{v}f_m\cdot(\vec{v}-\vec{u})(\vec{v}-\vec{u})^2=\text{// обозначим } \vec{v}-\vec{u}=\vec{U}\text{ //}=$$

$$=\frac{\rho}{2}\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int d\vec{U}\exp\left(-\frac{U^2}{2v_T^2}\right)\vec{U}U^2=\text{// под инт. нечёт. ф-ия //}=0$$

$$P_{ij}^{(0)}=\frac{1}{n}\rho\int d\vec{v}(v_i-u_i)(v_j-u_j)f_m=\text{//}\vec{v}-\vec{u}=\vec{U}\text{//}=\frac{1}{n}\rho\frac{n}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int d\vec{U}\exp\left(-\frac{U^2}{2v_T^2}\right)U_iU_j=$$

$$=\frac{\rho}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int d\vec{U}U_i^2e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}\delta_{ij}=\text{//}\int\ldots=\frac{1}{3}\int d\vec{U}U^2e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}\text{//}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\rho 4\pi\delta_{ij}}{(2\pi v_T^2)^{3/2}}\int_0^\infty dU\,U^4e^{-\frac{U^2}{2v_T^2}}=\text{//}\frac{U^2}{2v_T^2}=x^2\text{//}=\frac{4\pi}{3}\frac{\rho m^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}T^{3/2}}\left(\frac{2T}{m}\right)^{5/2}\underbrace{\int_0^\infty dx\,x^4e^{-x^2}}_{=\frac{3\sqrt{\pi}}{8}}\delta_{ij}=$$

$$=nT\delta_{ij}$$

Т.о. $\boxed{\vec{Q}_{(0)}=0;\quad P_{ij}^{(0)}=nT\delta_{ij}=p\delta_{ij}}$

Получим теперь ур-е движ-я в 0-м прибл. по K:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\nabla)\vec{u}=\frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r},t)-\frac{1}{\rho}\nabla p\quad\text{– ур-е Эйлера}$$

А теперь получим ур-е переноса тепла в 0-м прибл. по K.

Предварительно: $P_{ij}\Lambda_{ij} = \delta_{ij}\, p\, \frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial r_i} + \frac{\partial u_i}{\partial r_j}\right) = mp\,\mathrm{div}\,\vec{u}$ ⇒

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)T = -\frac{2}{3}\frac{mnT}{\rho}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = -\frac{2}{3}T\,\mathrm{div}\,\vec{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)T}_{\frac{dT}{dt}} = -\frac{2}{3}T\,\mathrm{div}\,\vec{u}$$

Кстати $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$

(отсюда если $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, то жидкость несжимаема) ⇒

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{2}{3}\frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \ln T = \frac{2}{3}\ln\rho + \ln C \rightarrow$$

$$\rightarrow T = C\rho^{3/2} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}$$ — адиабатический процесс

(можно наглядно убедиться, ~~[illegible]~~ вспомним: $p = nT = \frac{\rho}{m}T \rightarrow T = \frac{pm}{\rho}$)

1-е приближение по числу K

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{K} I_{ст}\,; \quad f = f_м + Kg$$

превышение точности

$$\frac{d}{dt}(f_м + Kg) = \frac{1}{K}\int d\vec{p}_1 \int d\Omega\, \sigma\, v_{отн}\left[f_м(3)f_м(2) - f_м(1)f_м(p) + Kf_м(3)g(2) + \right.$$

$$\left. + Kf_м(2)g(3) - Kf_м(1)g(\vec{p}) - Kf_м(\vec{p})g(1)\right] \sim$$

$$\sim -n v_T \sigma g = -\frac{g}{\tau} \Rightarrow \boxed{g = -\tau\cdot\frac{df_м}{dt}}$$

$$g = -\tau\frac{df_м}{dt} = -\tau\left(\frac{\partial f_м}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_м}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f_м}{\partial \vec{v}}\right) = -\tau\left[\frac{\partial f_м}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \right.$$

$$+ \frac{\partial f_м}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial f_м}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + v_i\frac{\partial f_м}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial r_i} + \frac{\partial f_м}{\partial u_j}v_i\frac{\partial u_j}{\partial r_i} +$$

$$\left. + v_i\frac{\partial f_м}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m}\frac{\partial f_м}{\partial v_i}\right] = -\tau\left[\frac{\partial f_м}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial r_i}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_м}{\partial u_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + v_i\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) + \frac{\partial f_м}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i\frac{\partial T}{\partial r_i}\right) + \frac{F_i}{m}\frac{\partial f_м}{\partial v_i}\right]$$

Для дальнейшего продвижения необх. учесть ур-я, получ. в 0-м прибл.:

1) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial r_i} = v_i \frac{\partial\rho}{\partial r_i} - \operatorname{div}\rho\vec{u} = \frac{\partial}{\partial r_i}(v_i\rho) - \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho u_i) = \frac{\partial}{\partial r_i}(U_i\rho)$

2) $\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} = v_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} - u_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac1\rho\frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m} =$

$= U_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac1\rho \frac{\partial p}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m} = U_j\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac1\rho\frac{\partial(\rho T)}{m\,\partial r_i} + \frac{F_i}{m}$

3) $\frac{\partial T}{\partial t} + v_i\frac{\partial T}{\partial r_i} = \Big\| \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial r_i} = -\frac23 T \frac{\partial u_i}{\partial r_i}\Big\| = v_i\frac{\partial T}{\partial r_i} -$

$- u_i \frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac23 T\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = U_i \frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac23 T \frac{\partial u_i}{\partial r_i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow g = -\tau\Big[\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial r_i}\frac{\partial f_M}{\partial\rho} + \frac{\partial f_M}{\partial u_j}\Big(U_i\frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac1\rho\frac{\partial(\rho T)}{m\,\partial r_j} + \frac{F_j}{m}\Big) +$$

$$+ \frac{\partial f_M}{\partial T}\Big(U_i\frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac23 T\frac{\partial u_i}{\partial r_i}\Big) + \frac{F_i}{m}\frac{\partial f_M}{\partial v_i}\Big]$$

16.04.13

$f_M = \frac{\rho}{m}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m}{2T}U^2\right]$

$\frac{\partial f_M}{\partial\rho} = \frac1\rho f_M;\quad \frac{\partial f_M}{\partial T} = f_M\left(-\frac32\frac1T + \frac{mU^2}{2T^2}\right);\quad \frac{\partial f_M}{\partial u_i} = f_M\frac{mU_i}{T};\quad \frac{\partial f_M}{\partial v_i} = -\frac{mU_i}{T};$

Результат такой: $\boxed{g = -\tau f_M\left[\frac{U_i}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\left(\frac{mU^2}{2T} - \frac52\right) + \frac1T\Lambda_{ij}\left(U_iU_j - \frac13 U^2\delta_{ij}\right)\right]}$

Замечаем, что определенные $\rho(\vec r,t) = m\int d\vec v\, f_M$, $\vec u(\vec r,t) = \frac1n\int f_M \vec v\, d\vec v$,

$T = \frac13\frac{m}{n}\int f_M U^2 d\vec U$ — величины не изменяются при $f_M \to f_M + g$, т.е.

$\int g\cdot\begin{Bmatrix}1\\ \vec v\\ v^2\end{Bmatrix} d\vec v = 0$ (что действительно так)

Ранее было $p_{ij}^{(0)} = p\delta_{ij}$, сейчас $p_{ij} = p\delta_{ij} + \underbrace{\Pi_{ij}}_{\text{тензор вязкости}}$

Посмотрим $\vec Q_1$ в 1-м прибл. по числу K:

$$\vec{Q} = \frac{1}{2}\rho \langle \vec{U} U^2 \rangle = \frac{\rho}{2m}\int d\vec{U}(f_M + g)\vec{U}U^2 =$$

$$= \frac{m}{2}\int dU g\vec{U}U^2 = -\frac{\tau m}{2}\int f_M\Big[\frac{U_i}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\Big(\frac{mU^2}{2T}-\frac{5}{2}\Big) + \frac{1}{T}\Lambda_{ij}\underbrace{\Big(U_iU_j - \frac{1}{3}U^2\delta_{ij}\Big)}_{\text{даст } 0}\Big]\vec{U}U^2 d\vec{U} = -\frac{\tau m}{2}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\int d\vec{U}(U_1\vec{e}_1 + U_2\vec{e}_2 + U_3\vec{e}_3)U^2U_i\Big(\frac{mU^2}{2T}-\frac{5}{2}\Big)f_M = -\frac{\tau m}{2}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial r_i}\int d\vec{U}U_1\vec{e}_1 U^2 U_i\Big(\frac{mU^2}{2T}-\frac{5}{2}\Big)f_M =$$

= // в этой сумме по i выживет $i=1$ ($i=2,3$ – уничтожатся при интегр.) // $= -\frac{\tau m}{2}\frac{1}{T}\nabla T\int d\vec{U}\frac{U^2}{3}U^2\Big(\frac{mU^2}{2T}-\frac{5}{2}\Big)f_M \equiv -\varkappa\nabla T$

Т.о. $\underline{\vec{Q} = -\varkappa\nabla T}$. Вычислим $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{\tau m}{6T}\Big(\frac{m}{2\pi T}\Big)^{3/2} n\int d\vec{U}\,U^4\Big(\frac{mU^2}{2T}-\frac{5}{2}\Big)e^{-\frac{m}{2T}U^2} = \frac{\tau m n}{6T}\Big(\frac{m}{2T}\langle U^6\rangle - \frac{5}{2}\langle U^4\rangle\Big)$$

Вычисления дают: $\langle U^2\rangle = \frac{3T}{m}$; $\langle U^4\rangle = 15\Big(\frac{T}{m}\Big)^2$; $\langle U^6\rangle = 105\Big(\frac{T}{m}\Big)^3$ =>

$$\Rightarrow \varkappa = \frac{5}{2}\frac{n\tau T}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Q} = -\frac{5}{2}n\underbrace{\tau v_T}_{l}\cdot v_T\nabla T}$$, т.е. $\vec{Q} \sim$ [illegible] $\sim \frac{l}{L} = K.$

Вычислим тензор давлений:

$$P_{ij} = \rho\langle U_iU_j\rangle = \frac{nm}{n}\int d\vec{U}\,U_iU_j(f_M + g) = p\delta_{ij} + \Pi_{ij}$$

Тензор вязкости: $\Pi_{ij} = -\tau m\int d\vec{U}\,U_iU_j\Big[\frac{U_k}{T}\frac{\partial T}{\partial r_k}\Big(\frac{mU^2}{2T}-\frac{5}{2}\Big) + \frac{1}{T}\Lambda_{kl}\Big(U_kU_l - \frac{1}{3}U^2\delta_{kl}\Big)\Big]f_M =$ // под интегралом должны быть четные комбинации $(k=i, l=j)+(k=j, l=i)$ // = // для $i\neq j$ // =

$$= -\frac{2\tau m}{T}\int d\vec{v}\, v_i^2 v_j^2 f_M \Lambda_{ij} = \text{// подставляя } f_M \text{ //} =$$

$$= -\frac{2\tau m n}{T}\Lambda_{ij}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv_i\, v_i^2 e^{-\frac{m v_i^2}{2T}}\right)^2 = -\frac{2n\tau T}{m}\Lambda_{ij} \equiv -\frac{2\eta}{m}\Lambda_{ij}$$

коэф. вязкости

Итого $\boxed{P_{ij} = p\delta_{ij} - \eta\frac{2}{m}\Lambda_{ij},\quad \eta = n\tau T}$ // при $i=j$ – т.е. для диаг. эл. всё тоже самое //

Теперь получим ур-е переноса импульса (в случае несжимаемой жидкости) в 1-м прибл. по числу K:

$$\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\rho}{m}F_j - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}$$

$$-\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\delta_{ij} - \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) = \text{// } \operatorname{div}\vec{u}=0 \text{ //} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_j} - \eta\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\nabla\vec{u}\right) = \frac{\rho}{m}\vec{F} - \nabla p + \eta\Delta\vec{u} \quad \text{– ур-е Навье-Стокса}$$

Ур-е переноса тепла: $\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \frac{3}{2}m\frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = -\frac{2}{3}P_{ij}\Lambda_{ij}$

здесь в P_{ij} не будем учит. 2-е слаг. (иначе пойдет из-за Λ_{ij} уже числа $\sim K^2$) $\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\nabla T\right) = -\frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\varkappa\Delta T - \frac{2}{3}\frac{pm}{\rho}\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{u}$

23.04.13

<u>Задача 51</u>: релаксация примеси легкого газа в тяжелом газе. Лоренцова форма интеграла столкновений. Диффузия примеси легких частиц в газе тяжелых частиц.

Рассматриваем систему, состоящую из 2-х типов газа. Пишем ур-е Больцмана:

- для легкого газа: $\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = \int d\vec{p}_1' \sigma_{11} |\vec{v}_1 - \vec{v}_1'| (f_1(\vec{p}_1''') \cdot f_1(\vec{p}_1'') - f_1(\vec{p}_1) f_1(\vec{p}_1'))+ \int d\vec{p}_2 \int d\Omega\, \sigma_{12} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| (f_2(\vec{p}_2') f_1(\vec{p}_1') - f_2(\vec{p}_2) f_1(\vec{p}_1)) \sim -\frac{f_1}{\tau_{11}} - \frac{f_1}{\tau_{12}}$ // $\tau_{11(12)}$ – релаксация легких частиц (f_1) в результате их взаимод. с легкими (тяжелыми) частицами //

- для тяж. газа: $f_2 \to f_1$; $1 \rightleftarrows 2$

Замечание: 1 – легкие частицы; 2 – тяжелые частицы

Полагаем, что $\sigma_{12} \gg \sigma_{11} \Leftrightarrow \tau_{11} \gg \tau_{12}$ (примесь легких частиц). Поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать взаимодействием легких с легкими частицами (в ур-е для легкого газа). Кроме того, будем считать, что газ тяж. частиц нах. в т/д равновесии. И последнее: полагаем, что легкий газ имеет ф-ию распр., близкую к равновесной.

Из последних 2-х замечаний: $\frac{m_1 v_1^2}{2} \sim \frac{m_2 v_2^2}{2} \sim \frac{3}{2} k_Б T \to \frac{m_1}{m_2} \sim \frac{v_2^2}{v_1^2}$

Частицы 1 легкие ($m_1 \ll m_2$) $\Rightarrow$ $v_2 \ll v_1$ // в случае равенства T_1 и T_2 //. Или так: $\frac{v_{T1}}{v_{T2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \gg 1$

Поэтому в интеграле (справа, для легк. газа) пренебрегаем $\vec{v}_2$.

Полагаем, что f_2 не изменяется в результате столкновений 1 и 2 (что основано на соотношении $m_2 \gg m_1$) $\to f_2(\vec{p}_2') = f_2(\vec{p}_2)$

Выполняем: $$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = v_1 n_2 \int d\Omega\, \sigma_{12} (f_1(\vec{p}_1') - f_1(\vec{p}_1))},$$

где $n_2 = \int d\vec{p}_2 f_2(\vec{p}_2)$

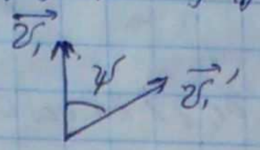
def. $I_л = v_1 n_2 \int d\Omega\, \sigma_{12} (f_1(\vec{p}_1') - f_1(\vec{p}_1))$ – лоренцов вид инт. столкновений.

Интересуемся р-ием данного уравнения. Хорошо, что теперь ур-е линейно по f_1.

Пусть нет внешн. сил и зав-ти от времени (стац. случай):

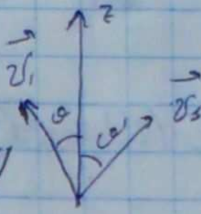
$$\vec v_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec r} = n_2 v_1 \int d\Omega\, \sigma_{12} \left(f_1(\vec p_1{}') - f_1(\vec p_1) \right)$$

$\sigma_{12} = \sigma_{12}(v_1, \psi)$



; $v = |\vec v_1| = |\vec v_1{}'|$

Будем считать, что $f_1 = f_1(\vec v_1, z)$. Вид с.к.



(z лежит не в плоскости $(\vec v_1, \vec v_1{}')$)

$f_1 = f_1(\vec v_1, z) = f_1(v_1, \vartheta, z)$ // можно не подразумевать, по зависимости от φ нет в силу симметрии неоднородности //

Положим, что $f_1(v_1, \vartheta, z) = f_{01}\left(1 + \cos\vartheta\, \Phi(z, v_1)\right)$ // это фактически начало разложения по полин-м Леж., при этом $\cos\vartheta$ в ур-е уйдет $\left(\vec v_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec r} = v_1 \cos\vartheta \frac{\partial f_1}{\partial z}\right)$ //

$$f_{01} = n_0(z) \cdot \left(\frac{m_1}{2\pi T(z)}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v_1^2}{2T(z)}\right)$$

— т.н. локальный Максвелл (т.к. $T = T(z)$)

Подставим в ур-е:

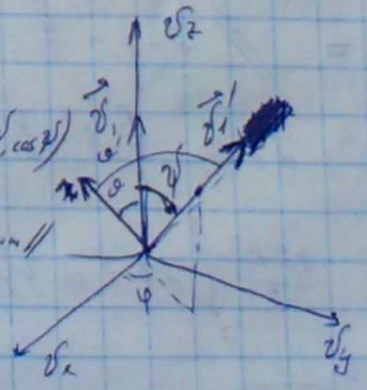
$$v_1 \cos\vartheta \frac{\partial f_{01}}{\partial z} = n_2 v_1 \int d\Omega\, \sigma_{12} \left(f_{01}(z, v_1')(1 + \cos\vartheta' \Phi(z, v_1')) - f_{01}(z, v_1)(1 + \cos\vartheta\, \Phi(z, v_1)) \right) =$$

$$= // f_{01}(z, v_1') = f_{01}(z, v_1) // = n_2 v_1 f_{01}(z, v_1) \Phi(z, v_1) \int d\Omega\, \sigma_{12} (\cos\vartheta' - \cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\vartheta \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} = n_2 \Phi(v_1, z) \int (\cos\vartheta' - \cos\vartheta)\, \sigma_{12}(\psi, v_1)\, d\Omega$$

Мы ищем Φ, что сводится к вычислению интеграла в правой стороне ур-я.

Для вычисл. инт. предварительно введем с.к., как показ. на рис.:



$\vec v_{e1} = (0, 0, 1)$; $\vec v_{e1}{}' = (\sin\psi\cos\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\psi)$

$\vec e_z (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$ // мы можем выбрать $(v_x\, 0\, v_y)$ как хотим //

$\vec e_z \vec v_{1e} = \cos\vartheta$; $\vec e_z \vec v_{1e}{}' = \cos\vartheta' =$ (с др. стор.) =

$= \sin\vartheta \sin\psi \cos\varphi + \cos\vartheta \cos\psi = \cos\vartheta'$ — связь между ϑ' и ψ.

Тогда: $\int (\cos\vartheta' - \cos\vartheta)\, \sigma_{12}(\psi, v_1)\, d\Omega = // d\Omega = \sin\psi\, d\psi\, d\varphi // =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\psi\, \sigma_{12}(\psi, v_1) \sin\psi \left(\cancel{\sin\vartheta \sin\psi \cos\varphi} + \cos\vartheta \cos\psi - \cos\vartheta\right) \to$$

при инт. по углу φ

$$\Rightarrow \cos\vartheta \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} = n_2 \Phi(v_1, z)\, 2\pi \cos\vartheta \int_0^{\pi} d\psi\, \sigma_{12}(\psi, v_1)(\cos\psi - 1)\sin\psi$$

def: $\Sigma(v) = 2\pi \int_0^{\pi} d\psi \sin\psi\, \sigma_{12}(\psi, v)(1-\cos\psi)$ - транспортное сечение.

Заметим, что без множителя $(1-\cos\psi)$ это ~~то~~ обыкновенное сечение. $\Rightarrow$

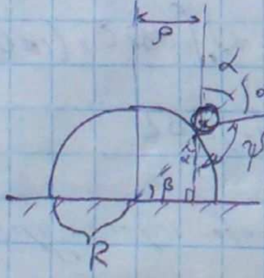
$$\Rightarrow \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} = -n_2 \Sigma(v)\, \Phi(z, v); \to \Phi(z, v_1) = -\frac{1}{n_2 \Sigma} \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z}$$

Заметим, что т.к. $\frac{1}{n_2 \sigma_{12}} = l$, а σ_{12} и Σ по физике эквивалентны, то

$\Phi(z, v_1) \sim -\frac{l}{L} \ln f_{01}$ - пропорц. числу Кнудсена

Вычислим Σ в модели столкновения тв. шаров.

// $d\sigma = \sigma d\Omega$ //



$$\Sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int d\psi \sin\psi\, \sigma_{12}(v, \psi)(1-\cos\psi) = \int d\sigma (1-\cos\psi) =$$

$$= // d\sigma = \rho\, d\rho\, d\varphi // = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} d\rho\, \rho (1-\cos\psi) =$$

$$= // \alpha + \rho = \frac{\pi}{2},\ \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2} = \beta;\ \rho = R\cos\beta = R\cos\frac{\psi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{d\psi} = -\frac{R}{2}\sin\frac{\psi}{2} // = 2\pi \int_0^{\pi} d\psi \left|\frac{d\rho}{d\psi}\rho(\psi)\right| (1-\cos\psi) = 2\pi \int_0^{\pi} d\psi R^2 \cos\frac{\psi}{2} \sin\frac{\psi}{2}(1-\cos\psi) =$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2} \int_0^{\pi} d\psi \frac{1}{2}\sin\psi (1-\cos\psi) = \frac{\pi R^2}{2}(-\cos\psi)\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi R^2}{2}\cos^2\psi\Big|_0^{\pi} = \pi R^2$$

~~[illegible]~~

Получили: $f_1 = f_{10}\left(1 - \cos\vartheta \frac{1}{n_2 \Sigma} \frac{\partial \ln f_{0}}{\partial z}\right)$, $\Sigma = \pi R^2$

Поток частиц вдоль неоднородности (оси z): $j_z = \int f_1 v_{z1}\, d\vec{v}_1 = // \text{обозн. } \Lambda = \frac{1}{n_2 \Sigma} // =$

$$= \int d\vec{v}_1 \left[\cancel{v_{z1} f_{01}} - v_{z1} \Lambda \cos\vartheta \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} f_{01} \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \int d\vec{v}_1 f_{01} v_{1z} \cos\vartheta \Lambda =$$

как нечёт. ф-ия

$$= // \cos\vartheta = \frac{v_{1z}}{v_1} // = -\frac{\partial}{\partial z} \int d\vec{v}_1 f_{01} \Lambda \frac{1}{3} v_1 = // \text{учли, что } v_{1z}^2 = \frac{1}{3} v_1^2 // =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \langle n_2 v_1 \Lambda \rangle = \boxed{-\frac{1}{3} \langle v_1 \Lambda \rangle \frac{\partial n_2}{\partial z} - \frac{1}{3} n_2 \frac{\partial}{\partial T} \langle v_1 \Lambda \rangle \frac{\partial T}{\partial z} = j_z}$$

def: $D = \frac{1}{3} \langle v_1 \Lambda \rangle$ $\frac{\partial n_2}{\partial z}$ коэффициент диффузии, а $D_T = \frac{1}{3} n_2 \frac{\partial}{\partial T} \langle v_1 \Lambda \rangle \frac{\partial T}{\partial z}$ – термодиффузии

Задача 52: диффузия примеси тяжелых частиц в газе легких частиц.

Используем несколько иной подход, чем в зад. 51.

Введем понятие подвижности. Ур-е движ-я част. в вязкой среде: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \gamma \vec{v}$.

При $t \gg (\gamma/m)^{-1}$, то $\vec{v} = \frac{1}{\gamma} \vec{f}$ (частное р-ие неодн. ур-я).

def: $b = \frac{1}{\gamma}$ – коэффициент подвижности (по смыслу определяет, каким образом частица будет двигаться при $t \to \infty$)

Есть следующее соотношение $D = bT$ (от Эйнштейна), т.о.

будем искать „b" для нашей задачи. Считаем ф-ию распр.

Λ – лабор.

легк. част. максвелловской: $f_{01} = \frac{n_1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_1}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_1 v_{1\Lambda}^2}{2T_1}\right)$

Найдем силу трения, кот. испыт. тяж. част. в газе легких частиц. Полагаем $\vec{V} \ll v_{T1}$. Перейдем в с.и., связ. с тяж. частицей. // $\vec{V}$ – скор. тяж. част. в л.с.о.//

При этом $\vec{v}_{1\Lambda} = \vec{v}_1 + \vec{V} \Rightarrow f_{01}(\vec{v}_{1\Lambda}) = f_{01}(\vec{v}_1 + \vec{V})$ // v_1 – скорость легк. част. в с.и. тяж. част.

$$f_{01}(\vec V+\vec v_1)\approx f_{01}(\vec v_1)+\frac{\partial f_{01}}{\partial \vec v_1}(\vec v_1+\vec V-\vec v_1)=f_{01}(\vec v_1)\left(1-\frac{\vec V\vec v_1 m_1}{T_1}\right)$$

// ф-я распред. легк. частиц, которую „видит" тяжелая частица //

~~-~~ если сопротивление: её можно вычислить, как полный импульс передаваемый тяжелой частице легкими частицами:

$$\Delta p=m_1 v_1(1-\cos\psi).\ \text{Поясним:}$$

30.04.13 ~~#~~ до столкн. $\vec p=\vec p_0$, после $\vec p\,'=p_0\vec e_{\parallel}\cos\psi+p_0\vec e_{\perp}\sin\psi\Rightarrow$

$\Rightarrow\Delta\vec p=\vec p-\vec p\,'=p_0\vec e_{\parallel}(1-\cos\psi)+p_0\vec e_{\perp}\sin\psi$

Утверждается, что в среднем $\overline{\Delta p}=p_0\overline{(1-\cos\psi)}$ (вдоль $\perp$-го напр. рассеяние симметрично ~~#~~. $\overline{\cos\psi}=\dfrac{\int\cos\psi\,\sigma(\psi,v)d\Omega}{\int\sigma(\psi,v)d\Omega}$.

А говорится (в Ландау) просто: в среднем $\Delta p=mv_1(1-\cos\psi)$.

Вычислим силу трения, испытыв. тяж. частицей: нужно найти суммарный импульс, кот. теряется легкими частицами при их столкновениях с тяжелой частицей

$$\vec f_{тр}=\int f_0(\vec v_1+\vec V)\vec v_1\, v_1 m_1(1-\cos\psi)d\vec v_1\,\sigma d\Omega$$ (далее индекс 1 будем опускать)

$\int(1-\cos\psi)\sigma d\Omega=\sigma_{tr}$ – транспортное сечение.

$$\vec f_{тр}=m\int f_0(\vec v)\Big(\underbrace{1}_{\substack{\text{при интегр.}=0,\\ \text{как при инт. от нечет. ф-ии.}}}-\frac{m(\vec v\vec V)}{T}\Big)\vec v\,v\,\sigma_{tr}\,d\vec v=-\frac{m^2}{T}\int d\vec v\,f_0(\vec v)\,(\vec v\vec V)\,\vec v\,v\,\sigma_{tr}=$$

$$=//\ \vec v=\vec v_{\parallel}+\vec v_{\perp},\ \vec v_{\parallel}\,//\,\vec V,\ \vec v_{\perp}\perp\vec V//=-\frac{m^2}{T}\int d\vec v f_0(\vec v)Vv_{\parallel}v\sigma_{tr}\underbrace{(\vec v_{\perp}+\vec v_{\parallel})}_{0\text{ при интегр.}}=$$

$$=//\ Vv_{\parallel}\vec v_{\parallel}=V\vec e_V v_{\parallel}^2=\vec V v_{\parallel}^2//=-\frac{m^2}{T}\vec V\int d\vec v\,f_0(\vec v)\sigma_{tr}v_{\parallel}^2 v=$$

$$=-\frac{m^2}{T}\vec V\frac13\int d\vec v\,f_0(\vec v)\sigma_{tr}v^3=-\frac13\frac{m^2}{T}\langle n_1\sigma_{tr}v^3\rangle\vec V=\vec f_{тр}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{m^2}{T}\langle n_1 \sigma_{tr} v^3\rangle \vec{V} + \vec{F}_{вн} = 0 \quad // \text{из } M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{тр} + \vec{F},\ \vec{V} - const // \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{3T}{m^2\langle n_1 \sigma_{tr} v^3\rangle}\vec{F}$$; подвижность $\vec{V} = b\vec{F}$;

Соотношение Эйнштейна: $D = bT = \frac{3T^2}{m^2\langle n_1 \sigma_{tr} v^3\rangle} \sim \frac{v_T^4}{n_1 \sigma v_T^3} = \frac{v_T}{n\sigma} \cdot l = \frac{L^2}{T}$ —

а это и есть диффузия по размерности

Диффузионное приближение в кинетике. Уравнение Фоккера-Планка

Ср. ~~[illegible]~~ изменения величин, от кот. зависит ф-ия распр. мало по сравн. с их значениями — за частую рассматриваются такие процессы.

Например, Δp, приобр. тяж. част. при соуд. с легкой $\ll p$ ее импульса.

Обозначим $w(\vec{p},\vec{q})d\vec{q}$ — вероятность, отнес. к ед. времени, перехода импульса тяж. частицы в результате ее столкн. с легкой (от $\vec{p}$ к $\vec{p}-\vec{q}$)

~~Балансное кин. ур-е, кот.~~ Опять будем рассматр-вать примесь тяж. част. в газе легких частиц. Балансное ур-е для ф-ии распр. тяж. част.: (опис. релаксацию ф-ию распр. тяж. част. $f(\vec{p},t)$)

$$\frac{\partial f(\vec{p},t)}{\partial t} = \int \left(w(\vec{p}+\vec{q},\vec{q}) f(\vec{p}+\vec{q},t) - w(\vec{p},\vec{q}) f(\vec{p},t)\right) d\vec{q}$$

$\vec{p}+\vec{q} \to \vec{p}$ (добавляются частицы с $\vec{p}$) $\qquad \vec{p} \to \vec{p}-\vec{q}$ (исчезают, ..)

Рассматриваем $|\vec{q}| \ll |\vec{p}|$ (тяж. част. в газе легких). Будем разлагать:

$$w(\vec{p}+\vec{q},\vec{q}) f(\vec{p}+\vec{q}) \approx w(\vec{p},\vec{q}) f(\vec{p}) + \vec{q}\frac{\partial}{\partial \vec{p}} w(\vec{p},\vec{q}) f(\vec{p}) + \frac{1}{2} q_i q_j \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} w(\vec{p},\vec{q}) f(\vec{p})$$

Подставляем в кинетическое уравнение.

$$\frac{\partial f(\vec p,t)}{\partial t} = \int d\vec q \left\{ \omega(\vec p,\vec q) f(\vec p) + \vec q \frac{\partial}{\partial \vec p}\left(\omega(\vec p,\vec q) f(\vec p)\right) + \frac{q_i q_j}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\left(\omega(\vec p,\vec q) f(\vec p)\right) - \cancel{\omega(\vec p,\vec q) f(\vec p)} \right\} = \frac{\partial}{\partial \vec p}\left[\left(\int d\vec q\, \vec q\, \omega(\vec p,\vec q)\right) f(\vec p)\right] + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\left[\left(\frac{1}{2}\int d\vec q\, q_i q_j\, \omega(\vec p,\vec q)\right) f(\vec p)\right]$$

Обозначим: $A_i = \int q_i\, \omega(\vec p,\vec q) d\vec q$, $B_{ij} = \frac{1}{2}\int q_i q_j\, \omega(\vec p,\vec q) d\vec q$. Тогда:

~~У~~ФП: $$\boxed{\frac{\partial f(\vec p,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(A_i f(p) + \frac{\partial}{\partial p_j} B_{ij} f(p)\right)}$$ — диф. ур-е в ч. произв. ур-е типа диффузии.

Ур-е опис. ~~[illegible]~~ диффузию тяж. част. в имп. пр-ве.

Интегрируя ур-е получаем $\int \frac{\partial f}{\partial t} dp = \int dp \frac{\partial}{\partial p}(\ldots) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int f dp = \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \rightarrow$ $\underline{n = Const}$

Надо вычислить A_i и B_{ij}. Они не зависят от времени.

Результат общей релаксации $\overbrace{f}^{(t\to\infty)} = C\exp\left(-\frac{p^2}{2MT}\right)$. При этом $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

Подставим такой вид в ур-е, но прежде запишем его ~~[illegible]~~ иначе:

$$\frac{\partial f(\vec p,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\underbrace{\left(A_i + \frac{\partial B_{ij}}{\partial p_j}\right)}_{\tilde A_i} f(p) + B_{ij}\frac{\partial f(p)}{\partial p_j}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\tilde A_i f(\vec p) + B_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t\to\infty} = 0 \Rightarrow \tilde A_i f(\vec p) - B_{ij}\frac{p_j}{MT} f(\vec p) = Const = 0$$ (иначе противоречие в конце физики) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde A_i = B_{ij}\frac{p_j}{MT} \rightarrow$ ур-е ФП приобретет более простой вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(B_{ij}\left(\frac{p_j}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial p_j}\right)\right)$$

При $B_{ij} \neq B_{ij}(\vec p)$:

~~B_{ij} не должен быть зависеть от напр $\vec p$~~. $B_{ij} = B\delta_{ij}$ (может быть дальше и убедимся) $\Rightarrow$

...астиц вдоль неоднородности (оси z): $j_z = \int f_1 v_{z1}\, d\vec{v}_1$ = // обозн. $\Lambda = \frac{1}{n_1 \Sigma}$ // =

$\vec{v}_1 \left[v_{z1} f_{01} - v_{z1} \Lambda \cos\vartheta \frac{\partial \ln f_{01}}{\partial z} f_{01} \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \int d\vec{v}_1 f_{01} v_{z1} \cos\vartheta \Lambda =$

как нечёт. ф-ия

$\cos\vartheta = \frac{v_{1z}}{v_1}$ // $= -\frac{\partial}{\partial z} \int d\vec{v}_1 f_{01} \Lambda \frac{1}{3} v_1$ = // учли, что $v_{1z}^2 = \frac{1}{3} v_1^2$ // =

$\frac{\partial}{\partial z} \langle n_2 v_1 \Lambda \rangle = \boxed{-\frac{1}{3} \langle v_1 \Lambda \rangle \frac{\partial n_2}{\partial z} - \frac{1}{3} n_2 \frac{\partial}{\partial T} \langle v_1 \Lambda \rangle \frac{\partial T}{\partial z} = j_z}$

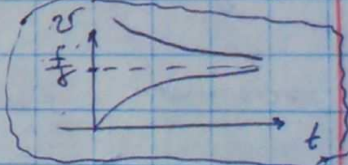
$D = \frac{1}{3} \langle v_1 \Lambda \rangle$ — коэффициент диффузии, а $D_T = \frac{1}{3} n_2 \frac{\partial}{\partial T} \langle v_1 \Lambda \rangle$ — термодиффузии

...а б2: диффузия примеси тяжелых частиц в газе легких частиц.

...уем несколько иной подход, чем в зад. б1.

... понятие подвижности. Ур-е движ-я част. в вязкой среде: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \gamma \vec{v}$.

$(\gamma/m)^{-1}$, то $\vec{v} = \frac{1}{\gamma} \vec{f}$ (частное р-ие неодн. ур-я).



$b = \frac{1}{\gamma}$ — коэффициент подвижности (по смыслу определяет, каким... частица будет двигаться при $t \to \infty$)

... следующее соотношение $D = bT$ (от Эйнштейна), т.о.

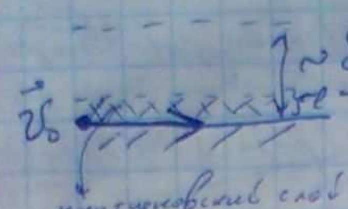
...исать „b" для нашей задачи. Считаем ф-ию распр. ... максвелловской: $f_{01} = \frac{n_1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_1}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_1 v_{1\Lambda}^2}{2T_1}\right)$

Λ — лабор...

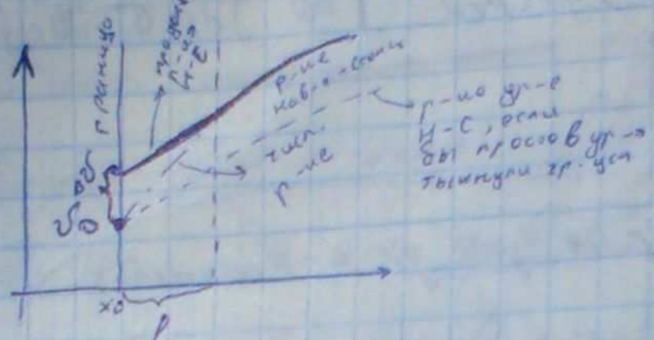
... силу трения, кот. испыт. тяж. част. в газе легких частиц. $\vec{F}_0$ —

нельзя не учитывать вязкость.

В задаче задаётся граничная скорость.



в этой области $K\sim 1$ - ур-я не работают, а гранич. усл-я ещё дальше. Что делать?



Ошибки $\sim \Delta v$; Оказывается достаточно применить гр. усл-е:

$$v\big|_{x=x_0} = v_0 + \xi \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad \xi \sim K$$

коэфф. скольжения

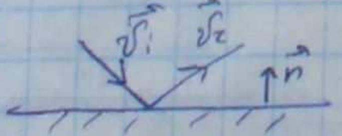
При таком усл. р-ие ур-я НС даёт точное р-ие.

Тоже самое и для ур-я переноса тепла: $T\big|_{x=x_0} = T_0 + \zeta \frac{\partial T_0}{\partial x}$.

темп. скачок

Темп. скачок и скольжения - фиктивные гран. усл-я, введённые для разрешения проблем р-ия ур-я НС во всей области.

Гран. усл. Больцмана.



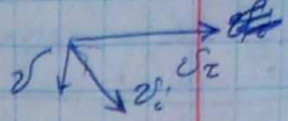
- Упали и зеркально отразились частицы. Ф-ия распр. при этом изменялась так:

$$f_r(\vec{v}_r) = (1-\alpha) f_i(\vec{v}_r - 2\vec{n}(\vec{v}_r \vec{n})) + \alpha n_r \left(\frac{m}{2\pi T_r}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v_r^2}{2T_r}}$$

α, n_r, T_r - коэффициенты аккомодации. Определяются на основании з-нов сохранения (либо опытным путём).

Оказывается тангенц. импульс переносится

только 1-м слаг. f_τ. $\vec{P} = (1-\alpha)\vec{P}_{\tau i}$;



$\alpha = \frac{P_{i\tau} - P_{i\tau}}{P_{i\tau}}$. Если $P_{i\tau} = P_{i\tau} \Rightarrow \alpha = 0$ (импульс ничего на стенке „не оставляет")

Если $P_{i\tau} = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ — все частицы остаются на стенке.

Точно также для тепловых процессов: $\alpha_E = \frac{E_i - E_\tau}{E_i - E_w}$ — эн-я отраженных частиц, имеющих $T = T_{стенки}$

Если $E_i = E_\tau \Rightarrow \alpha_E = 0$ и т.д.,

Основные ф-лы и соотношения курса

Кинетическое ур-е Больцмана	$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \int d^3p_1\, d\Omega\, \sigma V_{отн} \{f(3)f(2) - ff(1)\}$
H-теорема Больцмана: при эволюции системы N-частиц энтропия сист. растет	$\frac{\partial S}{\partial t} = \int d\vec{r} \frac{\partial}{\partial t}\left[\int f(1-\ln f) d\vec{p}\right] > 0$
Ф-ия распр. Максвелла	$f = n\left(\frac{1}{2\pi m\Theta}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}{2m\Theta}\right]$, $\vec{p}_0 = m\langle\vec{v}\rangle$
З-н сохр. в общем виде (φ - сохран. величина, т.е. $\int I_{ст.}\varphi d\vec{p} = 0$)	$\frac{\partial}{\partial t}\langle\varphi n\rangle + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\langle n\varphi\vec{v}\rangle - \langle n\vec{v}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\rangle - \frac{1}{m}\langle n\frac{\partial}{\partial\vec{v}}(\vec{F}\varphi)\rangle = 0$
Ур-е непрерывности ($\rho = nm$; $\vec{u} = \langle\vec{v}\rangle$)	$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\rho\vec{u} = 0$
Ур-е переноса импульса	$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}\right) = \frac{\rho\vec{F}}{m} - \vec{e}_j\frac{\partial P_{ij}}{\partial r_i}$, где $P_{ij} = \rho\langle(v_i - U_i)(v_j - U_j)\rangle$ - тензор давления
Ур-е теплопроводности (переноса тепла)	$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial T}{\partial \vec{r}} + \frac{2m}{3\rho}$ [redacted] $div\vec{Q} = -\frac{2}{3}\frac{P_{ij}\Lambda_{ij}}{\rho}$; $T = \frac{m}{3}\langle|\vec{v} - \vec{u}|^2\rangle$; $Q = \frac{\rho}{2}\langle(\vec{v} - \vec{u})|\vec{v} - \vec{u}|^2\rangle$ - поток тепла; $\Lambda_{ij} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$ - тензор деформации

Тензор давл. и поток тепла в 0-м прибл. по K	$\vec{Q}_{(0)}=0;\quad P_{ij(0)}=Tn\delta_{ij}=p\delta_{ij}$
Ур-е переноса импульса (Эйлера) и тепла в 0-м прибл. по K	$\frac{d\vec{U}}{dt}=\frac{\vec{F}}{m}-\frac{1}{\rho}\nabla p;\quad \frac{dT}{dt}=-\frac{2}{3}T\,\mathrm{div}\,\vec{U}$
P_{ij} и $\vec{Q}$ в 1-м прибл. по K (η - коэф. вязкости; Π_{ij} - тенз. вязкости)	$\vec{Q}_{(1)}=-\varkappa\nabla T=-\frac{5}{2}n\tau v_T^2\nabla T\sim P_0 T\sim\frac{l}{L}=K$ $P_{(1)ij}=p\delta_{ij}+\Pi_{ij}=p\delta_{ij}-\underbrace{nT\tau}_{\eta}\frac{2}{m}\Lambda_{ij}$
Ур-е Навье-Стокса (перенос импульса в 1-м прибл. по K) и ур-е теплопров.	$\rho\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+(\vec{U}\nabla)\vec{U}\right)=\frac{\rho}{m}\vec{F}-\nabla p+\eta\Delta\vec{U}$ $\frac{dT}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\varkappa\Delta T-\frac{2}{3}\frac{pm}{\text{[illegible]}}\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\vec{U}$
Лоренцов вид инт. столкновений	$I_{ст.л.}=v_1 n_2\int d\Omega\,\sigma_{12}\left[f_1(\vec{p}_1')-f_1(\vec{p}_1)\right]$ 1 - легк. част.; 2 - тяж. част.
Транспортное сечение	$\sigma_{tr}=\int(1-\cos\vartheta)\sigma\,d\Omega$
Ур-е Фоккера-Планка: начальный и конечные формы записи	(i): $\frac{\partial f(\vec{p},t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial p_i}\left(A_i f(\vec{p})+\frac{\partial}{\partial p_j}B_{ij}f(\vec{p})\right)$ (f): $\frac{\partial f}{\partial t}=B\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\left(\frac{\vec{p}}{MT}f+\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}\right)$ ($B_{ij}=B\delta_{ij}$ и $B_{ij}\neq B_{ij}(p)$)
Масштабы и времена	Длина св. проб.: $l\sim\frac{1}{nr_0^2}\gg r_0$ (r_0 - характ. размер частиц) Ср. расст. между част.: $r_{ср}\sim\frac{1}{n^{1/3}}$ Сравнение: $r_0\ll r_{ср}\ll l\ll L$ Газ. параметр: $\varepsilon=nr_0^3$ Время св. пр. и корр.: $\tau_{св}\sim\frac{l}{v_T};\ \tau_{корр}\sim\frac{r_0}{v_T}$