

Конспект лекций по курсу «Электродинамика»,
(Кирочкин Ю.А., ФТФ ХНУ, Харьков, 2002 г.)

Список литературы

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Том II. Теория поля.* → 1-й семестр.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Том VIII. Электродинамика сплошных сред.* → 2-й семестр.
3. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. *Классическая электродинамика.* // 1985.
4. Левич В.Г. *Курс теоретической физики, том 1.* // М.: Наука, 1969.
5. Джексон Дж. *Классическая электродинамика.* // М.: Мир, 1965
6. Угаров В.А. *Специальная теория относительности.* // М.: Наука, 1977.
7. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. *Сборник задач по электродинамике.*
8. Беккер Р. *Теория электричества. Том II. Электронная теория* // Л.-М.: ГИТТЛ, 1941.

Лекция 1

Электродинамика – наука, изучающая электромагнитное поле и его взаимодействие с заряженными частицами как в вакууме, так и в веществе.

История измерений скорости света

Античные учёные, за редким исключением, считали скорость света бесконечной. В Новое время этот вопрос стал предметом дискуссий. Галилей и Гук допускали, что она конечна, хотя и очень велика, в то время как Кеплер, Декарт и Ферма по-прежнему отстаивали бесконечность скорости света.

Первую оценку скорости света дал Олаф Рёмер (1676). Он заметил, что когда Земля и Юпитер находятся по разные стороны от Солнца, затмения спутника Юпитера Ио запаздывают по сравнению с расчётами на 22 минуты. Отсюда он получил значение для скорости света около 221 000 км/сек – неточное, но близкое к истинному. Спустя полвека открытие абберации позволило подтвердить конечность скорости света и уточнить её оценку.

Абберация света была открыта в 1727 г. английским астрономом Брэдли, который, намереваясь определить параллаксы некоторых неподвижных звёзд, заметил их перемещение. Открытие вместе с тем послужило новым подтверждением орбитального движения Земли и справедливости вычисления датского астронома Рёмера относительно скорости света.

Абберация света – кажущееся смещение небесного объекта вследствие конечной скорости распространения света в сочетании с движением наблюдаемого объекта и наблюдателя. Действие абберации приводит к тому, что видимое направление на объект не совпадает с геометрическим направлением на него в тот же момент времени.

Первая составляющая абберации связана с собственным движением объекта. Вторая часть абберации, связанная с движением наблюдателя, носит название звёздной абберации. Она включает в себя:

- суточную абберацию, обусловленную участием наблюдателя в суточном вращении Земли;
- годовую абберацию, вызванную движением Земли по орбите относительно центра масс Солнечной системы;
- вековую абберацию, связанную с движением Солнечной системы вокруг центра Галактики.

Эффект возникает ввиду изменения пространственной проекции направления на наблюдаемый объект при переходе между разными системами отсчёта.

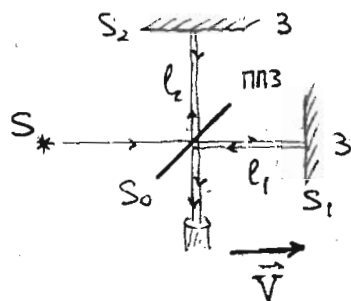
Измерения, основанные на вычислении абберации, позволили более точно определить $c = 303\,000$ км/сек.

Параллакс – изменение видимого положения объекта относительно удалённого фона в зависимости от положения наблюдателя. Зная расстояние между точками наблюдения (база) и угол смещения, можно определить расстояние до объекта: $L = D / (2 \sin \alpha/2)$. Для малых углов: $L = D/\alpha$, где угол α выражен в радианах. Параллакс используется в геодезии и астрономии для измерения расстояния до удалённых объектов. На явлении параллакса основано бинокулярное зрение.

Суточный параллакс (геоцентрический параллакс) – разница в направлениях на одно и то же светило из центра масс Земли (геоцентрическое направление) и из заданной точки на поверхности Земли (топоцентрическое направление). Из-за вращения Земли вокруг своей оси положение наблюдателя циклически изменяется. Для наблюдателя, находящегося на экваторе, база параллакса равна диаметру Земли и составляет 12742 км.

Годичный параллакс – угол, под которым со звезды видна большая полуось земной орбиты, перпендикулярная направлению на звезду. Годичные параллаксы являются показателями расстояний до звёзд. Расстояние, годичный параллакс которого равен 1 угловой секунде, называется парсек ($1 \text{ парсек} = 3,1 \times 10^{16} \text{ м}$). Ближайшая звезда Проксима Центавра имеет параллакс $0,77''$, следовательно, расстояние до неё составляет 1,295 пк.

Лекция 2 Опыт Майкельсона



$$ct_{1\rightarrow} = l_1 + Vt_{1\rightarrow}$$

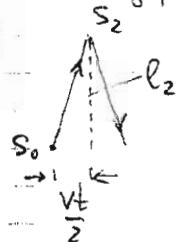
согласно класс.
3-му соотношению
скоростей.

$$t_{1\rightarrow} = \frac{l_1}{c-v}$$

$$t_{1\leftarrow} = \frac{l_1}{c+v}$$

$$t_1 = t_{1\rightarrow} + t_{1\leftarrow} = \frac{2l_1}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

Т.к. зеркало S_2 движется, то имеем такой ход лучей:



$$ct_2 = 2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{Vt_2}{2}\right)^2} \text{ откуда } t_2 = \frac{2l_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Разница времен будет равна: $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left[\frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right]$$

Повернем прибор на 90° тогда, по отношению к скорости $\vec{V}$,

$l_1 \rightarrow l_2$, $l_2 \rightarrow l_1$, и будем иметь ту же разность времен:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right); \text{ Разность во времени, хода лучей из-за поворота должна поменять интерфер. картину.}$$

$$\tau = \Delta t' - \Delta t = \frac{2(l_1 + l_2)}{c} \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Если $\tau = T = \frac{\lambda}{c}$ то решим половин $\rightarrow$ светлые.

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad \tau = \frac{2(l_1 + l_2)}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{l_1 + l_2}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{l_1 + l_2}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{\lambda}{c}; \quad l_1 + l_2 = \lambda \cdot \frac{c^2}{v^2}$$

Для видимого света $\lambda \approx 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, тогда $l_1 + l_2 \approx 5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8 = 50 \text{ м}$.

Не обязательно $\tau = T$. Если $\tau \sim 0,1 \cdot T$, уже заметно смещение полос.

Майкельсон не обнаружил смещ. полос при повороте на 90° .
Опыт Майк. показал, что при распр. св. $\parallel$ и $\perp$ движению Земли скорость с огн. и гальв. постоянна.

Равномерное движение тела не влияет на оптические св. происходящие на нем.

Значит и в оптике справедлив. принцип относительности.

Гуанкаре: все явление на Земле подчиняется принципу относ.

Опыт Майкельсона-Морли (1887)

Все это помещалось в ртуть, l_1 и l_2 за счет многократн. отраж. были очень большими.

Гипотеза Фитцджеральда Лоренца: предпол. что если масштаб движется отн. системой S со скоростью V то его продольные размеры сокращ.

S $\uparrow$
 l_0, V
 $\overline{\hspace{1cm}}$

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \text{ - лоренцево сокращ. длины.}$$

1). $S_0 - S_1: l_0$, $S_0 - S_2: l_0$ тогда

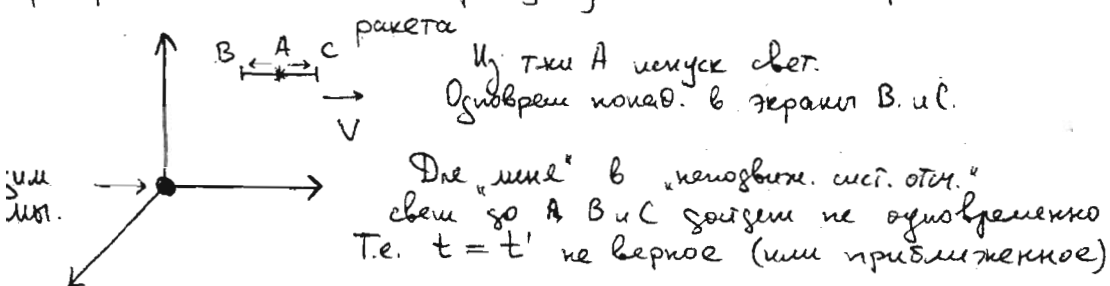
$$\Delta t = \frac{2}{c} \left(\frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{(1 - \frac{V^2}{c^2})} \right) = \frac{2}{c} \frac{l_0 - l_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$2) \Delta t' = \frac{2}{c} \left(\frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) = \Delta t \quad \tau = \Delta t - \Delta t' = 0$$

Но тогда при переходе из одной сист. и назад будем заметно уменьшение длины.

В природе $\exists$ скорость распространения взаимодействия.

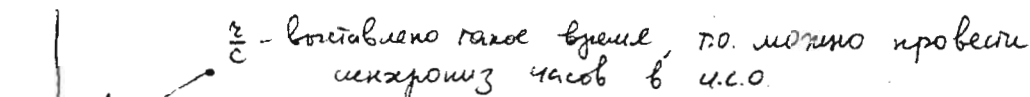
Преобр. Запишем соотв. принципу абсолютности времени.



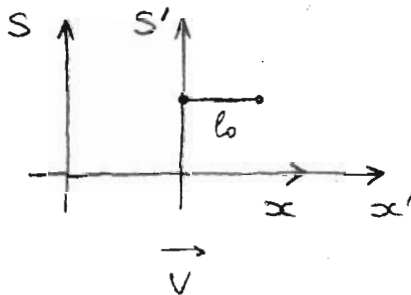
Надо найти новые преобразования позволяющие находить координаты и время для одного и того же события в разных сист. отч.

Надо построить систему координат, и часы в каждой из сист. отч. были часы и они синхронны.

Надо бы было сказать что скор. движ. часов во время переноса часов не влияет на ход времени.



Как измерить длину предмета движущегося отн. нас?



l_0 - длина масштаба в S.

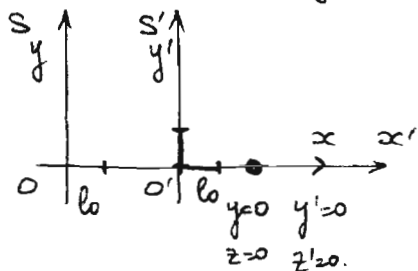
Длина физич. масштаба определяется в один и тот же момент времени по часам с.о. в кот. он движется.

Преобразование Лоренца.

Постулаты СТО.

- ① Ничейность преобразования ($\Rightarrow$ из однородн. пр-ва и времени).
- ② Скорость распространения света c_0 во всех и.с.о. постоянна
- ③ $V = \text{const}$ (ограничение)
- ④ Ничейными измерениями нельзя отличить одну и.с.о. от др.

Исходя из этих постулатов мы найдем преобраз. Лор.



В нач. моменты времени начала коорд. совпад. $t=0$
 $t'=0$

$$\begin{cases} y = d y' + \beta z' \\ z = d_1 y' + \beta_1 z' \end{cases}$$

убавимся от $\rightarrow$ пространственный поворот.
считая что $y \uparrow y'$, $z \uparrow z'$

$$\begin{cases} y = d \cdot y' \\ z = \beta \cdot z' \end{cases} \quad d = \beta. \quad \begin{cases} y = d y' \\ z = d z' \end{cases} \quad \text{Возьмем что } d.$$

1) Возьмем I там в S' $y'_1 = 0$ $y'_2 = 1$; $y_1 = d \cdot y'_1 = 0$

2) Возьмем I в S $y_1 = 0$; $y_2 = 1$ $y_2 = d \cdot y'_2 = d$

$$y'_1 = \frac{y_1}{d} = 0 ; y'_2 = \frac{y_2}{d} = \frac{1}{d}$$

Надо потребовать $\frac{1}{d} = d$ т.е. $d = 1$.

Когда $x'=0$ $x=0 \Rightarrow$ следовательно $x' = \gamma'(x-vt)$ (*)

$$x=0 \quad x' = -vt' \Rightarrow x = \gamma \cdot (x' + vt')$$
 (***)

Убедимся, что $\gamma = \gamma'$.

Пусть в S' масштаб лезвия на x .

$$1) \quad x'_1 = 0, \quad x'_2 = l_0 : \quad l_0 = x'_2 - x'_1$$

В эти и тот же моменты вр. по часам в S и записываем начало и конец.

$$t=0 \text{ у } (*) \quad x_1 = \frac{x'_1}{\gamma'} = 0 ; \quad x_2 = \frac{x'_2}{\gamma'} = \frac{l_0}{\gamma'}$$

$$2) \quad x_1 = 0 \quad x_2 = l_0 ; \quad l_0 = x_2 - x_1$$

$$t'=0 : \quad x'_1 = \frac{x_1}{\gamma} = 0 ; \quad x'_2 = \frac{x_2}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma} \quad \gamma = \gamma' \text{ чтобы не было противоречия в п. 4) постулатов СТО.}$$

$$\text{Тогда. } \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

Найдем γ рассматривая как событие - распространение светов.

$$t = t' = 0. \quad \begin{matrix} S: t : x = ct \\ S': t' : x' = ct' \end{matrix} \quad \begin{cases} ct = \gamma t'(c+v) \\ ct' = \gamma t(c-v) \end{cases}$$

$$c^2 t t' = \gamma^2 t t' c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) , \text{ откуда}$$

Возберем "+":

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} ; \quad \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Возберем у нас $t'(x;t)$

$$x' = \gamma^2(x' + vt') - \gamma vt$$

$$t = \gamma t' + x'(\gamma^2 - 1) \frac{1}{\gamma v} = \gamma \left(t' + \frac{x'}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Ели $c \rightarrow \infty$ ($\frac{v}{c} \ll 1$)

$$x = x' + vt' = x' + vt, \quad t = t'$$

$$y' = y, \quad z' = z.$$

(преобразование
Ланжев.)

Следствия вытекающие из нр. Лоренца.

1. Сокращение длины.

$$x_2' - x_1' = l_0 \text{ (покоится в } S'), \quad x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l_0;$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Длина масштаба покоя относительное.

2. Лоренцевское замедление времени.

Пусть в S' (в x') последовательно происходят два события в моменты времени t_1' и t_2' .

Разница во времени по часам системы S' (часы покоя-ся рядом с событием) наз-во собств. время.

$$t_2' - t_1' = \Delta t_0.$$

Какой пром-к времени в др. сист. отч.?

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Собственное время течет медленнее.

3. Одновременность.

Пусть в S' в моменты t' происходят 2 события в точках x'_1 и x'_2 .
Как же в S ?

$$t_1 = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_2 = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Если события происходят в один момент времени в одной и той же Т-ке — то такие события одновременны и в мод. гр. и.о.

$$\bullet \quad v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}; \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

Т.к. преобраз. линейные то и гуд-аут удовлетвор. пр. лор.

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = v_x$$

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v \cdot v'_x}{c^2}}; \quad dy = dy' \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}$$

$$v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \cdot v'_x}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \cdot v'_x}{c^2}}$$

релятивистский
закон сложения скоростей.

В случ. $c \rightarrow \infty$

классич.

г-н слож.
скоростей

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{array} \right.$$

Проверим, что $c = \text{const}$ во всех и.о.

Пусть в S' свет распространяется вдоль x' со скор. c .

$$S': v'_x = c \quad v'_y = v'_z = 0$$

$$S: v_y = v_z = 0 \quad v_x = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c \Rightarrow c = \text{const.}$$

$$\text{Пример 1) } v'_x = c; \quad v < c$$

$$v'_y = 0$$

$$v'_z = 0$$

получим тот же результат.

$$2) \quad v'_x = c - \alpha, \quad \alpha > 0; \quad v_y = v_z = 0$$

$$v = c - \beta, \quad \beta > 0$$

$$v'_y = v'_z = 0.$$

$$v_x = \frac{c - \alpha + c - \beta}{1 + \frac{(c - \alpha)(c - \beta)}{c^2}} = \frac{2c - (\alpha + \beta)}{2 - \frac{(\alpha + \beta)}{c} + \frac{\alpha\beta}{c^2}}$$

$$v_x = \frac{2 - (\alpha + \beta) \frac{c}{c^2}}{2 - \frac{(\alpha + \beta)}{c} + \frac{\alpha\beta}{c^2}} \cdot c < 1 \cdot c < c$$

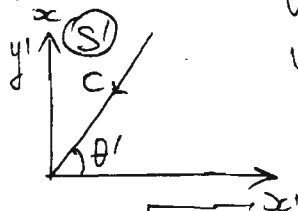
• Аппроксимация схемы



* 3

$$v_x = -c \cdot \cos \theta$$

$$v_y = -c \cdot \sin \theta$$



$$v'_x = -c \cdot \cos \theta'$$

$$v'_y = -c \cdot \sin \theta'$$

$$-c \cdot \sin \theta = \frac{-c \cdot \sin \theta' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{vc \cos \theta'}{c^2}}; \quad \sin \theta = \frac{\sin \theta' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \theta'}$$

$v < c$, возвращаем $\frac{v^2}{c^2}$

$$\sin \theta - \sin \theta' = \sin \theta' \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta'} - 1 \right) \approx \sin \theta' \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta' - 1 \right) = \frac{v}{c} \sin \theta' \cos \theta' < 1.$$

$$2 \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \cdot \cos \frac{\theta + \theta'}{2} = \frac{v}{c} \sin \theta' \cos \theta'$$

$$\theta \approx \theta' \quad \theta - \theta' \approx \frac{v}{c} \sin \theta' \approx \frac{v}{c} \sin \theta, \text{ добавив } \varphi = \frac{v}{c} \sin \theta \text{ сдвига.}$$

Направление скорости в разных С.О. разн..

• Инвариантные величины.

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Поперечные размеры не изменяются.

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Все эти ф-лы подтвержденные экспериментом.

Время жизни движущегося μ -мезона $T_{\text{дв.}} = \frac{T_{\text{покоя}}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$

Экс. измерение $T_{\text{покоя}} = 2 \cdot 10^{-6}$ сек.

Если $T_{\text{дв.}} \approx T_{\text{покоя}}$: то ретада он был прошел путь:

$$l_0 = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ сек} = 600 \text{ м. Наблюдение показывает что}$$

$$\mu\text{-мезоны} \text{ проходят путь } l \approx 20 \text{ км.}; \quad T_{\text{дв.}} = \frac{20 \text{ км}}{3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{сек}}} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100}{3} \approx 33 T_{\text{покоя}}$$

Одна из них задач СТО - нахождение инв. величин.

1) Скорость света в вакууме. (везде)

2) Интервал м-ду событиями: $S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$

$$S_{12} = (c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2)^{1/2}$$

$$S_{12} \stackrel{?}{=} S'_{12} \text{ - используем, преобраз. Лоренца:}$$

$$S_{12} = \left[c^2 \left(\frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 - \left(\frac{x_2' + vt_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1' + vt_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 \right]^{1/2}$$

$$1-2: \frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \left\{ \overset{1}{(t_2' - t_1')^2} + \frac{v^2}{c^4} (x_2' - x_1')^2 - 2 \frac{v}{c^2} (t_2' - t_1')(x_2' - x_1') \right\} -$$

$$- \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \left\{ (x_2' - x_1')^2 + v^2 (t_2' - t_1')^2 - 2v (x_2' - x_1')(t_2' - t_1') \right\} =$$

$$= \frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \left\{ (t_2' - t_1')^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} + \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} (x_2' - x_1')^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) =$$

$$= c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2. \text{ Тогда}$$

$$S'_{12} = \left[c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 \right]^{1/2}.$$

Интервал - аддитивная величина

$$1) \text{ Пусть } S_{12}^2 > 0; S_{12} = S'_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}'^2}$$

можно найти такую с.о. что $l'_{12} = 0$. тогда $t'_{12} = \frac{S_{12}}{c}$.

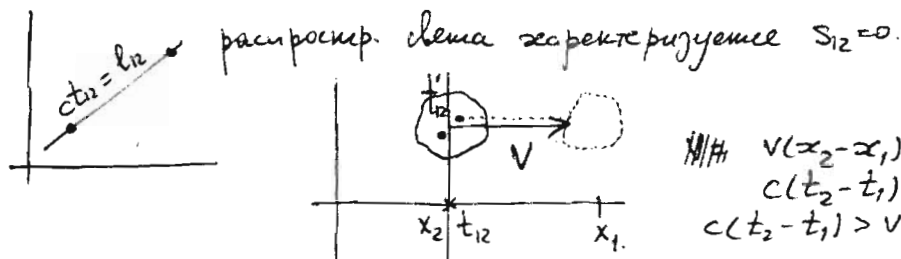
Интервалы где ком-от $S_{12}^2 > 0$ наз-е временноподобные интервалы.

$$2) S_{12}^2 < 0; S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}'^2}, \quad l'_{12} > ct'_{12}$$

Можно найти с.о. в. ком-от $t'_{12} = 0$; $S_{12} = \sqrt{-l_{12}'^2}$

Интервалы где ком-от $S_{12}^2 < 0$ наз-е пространственноподобные.

3. $S_{12} = 0$.



$$\begin{aligned} V(x_2 - x_1) &= r_{12} V \\ c(t_2 - t_1) &= t_{12} c \\ c(t_2 - t_1) &> V(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Инт. и-сы ∞ -но движущимися событиями.

$$ds = [c^2 dt'^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{1/2} = [c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{1/2}$$

$$dx = dy = dz \quad ; \quad dt' = \underline{\underline{dt_0}} = \frac{ds}{c} \quad \underline{t_0 = \frac{1}{c} \int ds} - \text{inv.}$$

собственное время.

$$ds = [c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{1/2} = c dt \cdot \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}\right)^{1/2}$$

$$= c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt \quad ; \quad \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad \text{е. вместо } v - v_{\text{замедл.}} \Rightarrow \text{получаем собственное время.}$$

$$\text{Величина } \int_t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt = \text{inv.}$$

$$dt_0 = \int_0^t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt \quad \text{е. } v \neq v(t) \text{ то в СТО это собственное время}$$

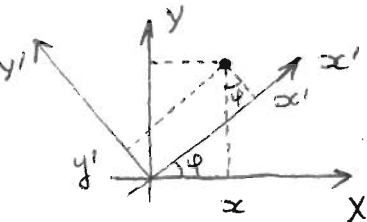
Инвариантность ф-ц. γ -пов. зависимости от д-в. простран-ва.

1) $A = B$ скалярная зависимость какого-то γ -на.
тогда $A' = B'$.

2) $\vec{A} = \vec{B}$ при повороте компоненты разных векторов меняются
 $\vec{A}' = \vec{B}'$ одинаковым образом.

$$3) T_{ik} = B_{ik} \rightarrow T'_{ik} = B'_{ik}$$

1), 2), 3) - inv-относительно γ -пов. или пространственного поворота.



$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

$$x_\alpha = a_{\alpha\beta} x'_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ матрица поворота.}$$

Компоненты вектора A, A_2 являются величинами преобразующимися, при повороте, по правилу

$$A_\alpha = a_{\alpha\beta} A'_\beta$$

Тензор (II ранга)

$$T_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\mu} T_{\gamma\mu}$$

$$m \ddot{x} = \vec{F}; \quad m \ddot{x}_\alpha = F_\alpha; \quad m a_{\alpha\beta} \ddot{x}'_\beta = a_{\alpha\mu} F'_\mu \quad (\text{исходим суммирование по } \beta \text{ и по } \mu).$$

$$\text{заменим } \beta \rightarrow \mu; \quad a_{\alpha\beta} (m \ddot{x}'_\beta - F'_\beta) = 0. \quad \text{т.к. } a_{\alpha\beta} \text{ не нулевой.}$$

$$\text{то } m \ddot{x}'_\beta = F'_\beta \Rightarrow \text{3-и Ньютона инв. отн. поворота.}$$

3-ий природн. инв. отн. преобр. Лоренца как это записать?

Будем исходить из инв-ти интервала отн.

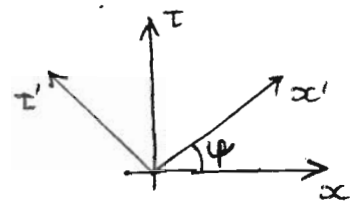
$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2; \quad \text{Лоренс ввел } \tau = ict, \text{ тогда}$$

$$-ds^2 = c^2 d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \leftarrow \text{кварет. растр. в 4-мерн. сист коорд.}$$

и-ду т-ками
Растр. не меняющееся при II-ном переносе и повороте.

Преобр. Лоренца соотв. повороту в 4-мерн.

Мы должны рассмотреть поворот в м-ти $x\tau$



$$\begin{cases} x = x' \cos \psi - z' \sin \psi \\ z = x' \sin \psi + z' \cos \psi \end{cases}$$

Заменим по преобраз. где $z' = 0$.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \psi & \frac{x}{z} &= \cot \psi \\ z &= x' \sin \psi \end{aligned}$$

$$\cot \psi = \frac{vt}{ict}$$

$$\begin{aligned} x' &= 0 & x &= -z' \sin \psi & \frac{x}{z} &= -\tan \psi; \tan \psi = i \frac{v}{c} \\ z &= z' \cos \psi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \psi - z' \sin \psi \\ z = x' \sin \psi + z' \cos \psi \end{cases}$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sin \psi = \tan \psi \cdot \cos \psi = \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' - i \frac{v}{c} z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$z = \frac{z' + i \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$\left. \begin{aligned} ict &= z \\ ct &= x_0 \end{aligned} \right\} z = ix_0$$

Умова Лоренца-превращення:

$$\begin{cases} ct = x^0 \\ x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$$

$$x'^1 = \frac{x^1 + (v/c)x^0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad x'^0 = \frac{x^0 + (v/c)x^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3$$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Обр. переход: $x'^1 = \frac{x^1 - (v/c)x^0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad x'^0 = \frac{x^0 - (v/c)x^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3$

Компоненты 4-вектора $x^i(x^0, \vec{x})$.

Следо $x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k; \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

контр.вариант. вектор.

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{его } j\text{-к.} \\ \text{преобразована} \\ \text{нул.} \end{array} \right.$$

контравариантный тензор.
II. ранга.

$$T^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} T'^{mn}$$

функция φ скаляр

4-мерн. градиент. $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$

матрица $\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$ симм. от $\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}$ заменой $v \rightarrow -v$.

4-мерн A_i - ковариантный; T_{ik} - 4-мерн тензор (ковариантн).

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \quad ; \quad T_{ik} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T'_{mn}$$

Появляющиеся тензоры смешанного типа.

$$T^i_k \quad (T^i_k \neq T^k_i) \quad \text{их закон преобраз. "смешан".}$$

$$T^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T'^m_n$$

$S^{ik} = S^{ki}$ (симметрия по индексам). $\left(\begin{smallmatrix} n^2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ - мин. независимых компонент.

абс. антисимметр. $\left(\begin{smallmatrix} n^2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) A'' = -A'' = 0. \quad \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \dots$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_i T(i,k) = B^k$ - гок-ем что $T(i,k)$ -тензор.

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'_m T(i,k) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^s} B'^s \quad \left| \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \right.$$

$$\frac{\partial x'^n}{\partial x'^s} = \delta^s_n$$

справа: B'^n ; $\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T(i,k) A'_m = T'(m,n) \cdot A'_m$

$$T'(m,n) = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T(i,k)$$

$$T'^{mn} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T^{ik}$$

g_{ik} - метрический тензор.

В. и.с.о. и.м.е.м. один и тот же вид (в смысле)

$$A^i \delta_i^k = A^k \Rightarrow \delta_i^k - \text{метрический тензор.}$$

$$\delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тензоры обратные друг другу.

$$T^{ik} T_{ke} = \delta_e^i$$

по заданному T^{ik} и мет. т-ру δ_i^j находим компоненты T_{ke} .

$$g^{ik} g_{ke} = \delta_e^i ; \text{ дубль м-ду ковар. и контравар.}$$

$$A^i = g^{ik} A_k$$

$$A^i = g^{ik} A_k \mid \cdot g_{ie} \quad A^i g_{ie} = A_e$$

$$g_{ik} dx^k = dx_i$$

$$ds^2 = dx_i dx^i$$

суммирование надо проводить по индексам равн. вариационности, тогда получится тензор.

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \frac{\partial x'^e}{\partial x^i} B'_e = \frac{\partial x'^e}{\partial x'^k} A'^k B'_e = \delta_k^e A'^k B'_e = A'^k B'_k$$

$$S^{ik} g_{ke} = S^i_e, \text{ где симметр. тенз. } S^i_e = S_e^i$$

Введем 4-мерн. контр.вар. вектор скорости.

$$u^i \equiv \frac{dx^i}{ds}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{cdt}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

v - 3-мерн. скорость частицы.

если пробегаем $\frac{1}{3}$ год. - латинские буквы.
- греческие.

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{dx^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt} = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \text{ и того } u^i \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

4-мерн. ускорение $w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2}$

$$u^i u_i = g_{ik} u^i u^k = \frac{g_{ik} dx^i dx^k}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 \quad u^i u_i = 1$$

прогнф.
наименьшее
p-то:

$$\frac{du^i}{ds} u_i + u^i \frac{du_i}{ds} = 0, \quad u_i \frac{du^i}{ds} = u_i w^i$$

$$A_i = g_{ik} A^k$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = g_{0k} A^k = g_{00} A^0 = A^0$$

$$A_1 = g_{1k} A^k = g_{11} A^1 = -A^1$$

$$A_2 = g_{2k} A^k = g_{22} A^2 = -A^2$$

$$A_3 = g_{3k} A^k = g_{33} A^3 = -A^3$$

$$A^i (A^0, \vec{A})$$

$$A^1 = A_x, A$$

Релятивистская механика.

Принцип наименьшего действия.

Можно определить S , как-то для действительного движения наименьший, а $\Rightarrow$ его вариация $= 0$.

S скаляр должен иметь вид инв. по отн. к преобраз. Лоренца $\Rightarrow$ имеет вид скаляра.

Диф-ал пог. S должен быть инв.; для свободной частицы это ds .

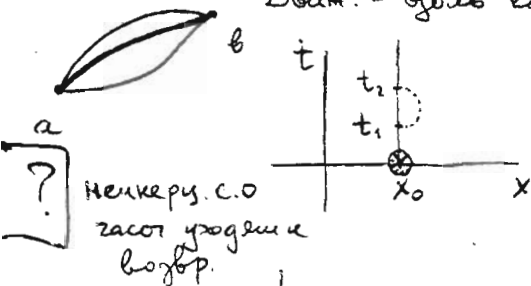
$$S = -\alpha \int_a^b ds, \quad \alpha > 0.$$

Т-ка как-то характеризует событие в 4-пр-те. - мировые т-ки.
Движение - по мировой линии.

$$a(x_1, y_1, z_1, t_1), \quad b(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

" - кривая в пространстве-времени

Движ. - вдоль кон-ой $\delta S = 0$.



движущаяся засот отстоящие от неподвижной.
мировая линия времени $\parallel$ -д t .

α -характеризует инвариантность частиц.

$$\delta S = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt; \quad S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt$$

$L(t)$ - ф. Лагранжа. $L_{кл} = \frac{mv^2}{2};$

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\alpha c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} = \frac{\alpha v^2}{2c}$$

Видно, что $L \rightarrow L_{кл}$ если $m = \alpha c$ $v \ll c$ (const и L и. наоборот).

Т.о. $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, и $S = -mc \int_a^b ds$

Зная L и. определить E, p - частицы и т.д.
Определим импульс релятив. частицы.

By def. $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}, \quad \vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v \ll c \quad \vec{p}_{кл} = m \vec{v}$

В клас. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \vec{F}_{кл} = m \vec{a}$ в релятив

1) $\vec{v}$ меняется только по направл. $\vec{v} = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}_0$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

2) $\vec{v}$ меняется по величине $\vec{v} = \vec{v}_0 \cdot v(t)$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m \vec{v}_0 \left(\frac{dv}{dt}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m v \vec{v}_0 \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \right\} \cdot \left(-2 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right)$$

$\vec{r}_0$ - пос. производную.

13

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m \frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right\} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Т.о. m не ест. коэф. пропорциональности м-ду силой и ускорением.

Выведем E свобод. частицы.

$$E = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L ; \quad E = \vec{p} \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 0$$

Если $v=0$, то $E=mc^2$.

(Впервые по соотн. было высказано А. Эйнштейном, а не А. Пуанкаре, и не А. Минковский.)

Мы нигде не пользовались элементарностью свобод. частицы. Мы лишь только учли Ф-е воздействия внешних сил т.е. собит и для системы частицы не считали ее взаимодействием с внеш. миром.

Если в системе м-ду частицами F взаимодействия то в $E=mc^2$ входит и кин. энергия и энерг. взаимодей. , т.е. в $M \neq \sum m_i \Rightarrow$ в релятив. мех-ике отсутствует J -и сохр. масот.

Когда пишут m_0 - масса покоя, а $m(\vec{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, тогда для массы бывает разнч. в разн. и.с.о.

Частицы с $m \neq 0$ не могут двигаться со скор. $\geq c$. Если ~~масса~~ $m=0$ тогда только со скор. c . (фотоны, нейтрино)

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \quad E^2 = \frac{m^2 c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4 (1-\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2})}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^4 + \frac{m^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot c^2$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

$m=0 \quad E=cp$ - для фотона.

$$1) v \ll c: p \approx mv \ll mc; \quad \varepsilon \approx mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} = mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2}\right) =$$

$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

(энерг. покоя) (энерг. в кл. мех.)

$$2) v \lesssim c: p \gg mc, \quad \varepsilon = pc$$

ультрарелятив.
частица

Энергия вычитания 2-й слагаемой к-во ф. Ланжмюра.

$$\mathcal{H} = c^2 \sqrt{p^2 + m^2 c^2}; \quad v \ll c \quad \mathcal{H} = mc^2 + \mathcal{H}_{кл}; \quad \mathcal{H}_{кл} = \frac{p^2}{2m}$$

Найдем гр-е движения в 4-мерн. буле.

Будем варьировать S гамильтониал. $S = -mc \int_a^b ds$

$$\delta S = -mc \int_a^b \delta ds; \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dx_i dx^i$$

$$2\delta s \delta ds = dx^i \delta dx_i + dx_i \delta dx^i; \quad A^i B_i = A_i B^i$$

$$2\delta s \delta ds = 2dx_i \delta dx^i; \quad \text{варьирование и диф-ние по независимым переменным}$$

$$2\delta s \delta ds = 2dx_i d\delta x^i$$

$$\delta dS = \frac{dx_i}{ds} d\delta x^i = u_i d\delta x^i;$$

$$\delta S = -mc \int_a^b u_i d\delta x^i = -mc \int_a^b \{d(u_i \delta x^i - \delta x^i du_i)\}$$

$$\delta S = -mc u_i \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \frac{du_i}{ds} \delta x^i ds$$

Вариации на краяхах нем $\uparrow$

$$\delta S = 0; \quad \frac{du_i}{ds} = 0 \quad \frac{du_i}{ds} = 0.$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0; \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$0 = \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \quad \boxed{\begin{matrix} v = \text{const.} \\ \vec{v} = \text{const.} \end{matrix}} \rightarrow \begin{matrix} \varepsilon = \text{const} \\ \vec{p} = \text{const} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \end{matrix}$$

начем
 $\vec{v}, \vec{v} = \text{const.}$

14
7

$\alpha \xrightarrow{S(x^i)} b$

$$\delta x^i|_a=0 \quad \delta x^i|_b = \delta x^i ; \quad \delta S = -mcu_i \delta x^i \quad mcu_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$$

$$\varepsilon_{ku} = -\frac{\partial S_{ku}}{\partial t}, \quad \vec{p}_{ku} = \frac{\partial S_{ku}}{\partial \vec{r}_k}; \quad mcu_0 = -\frac{\partial S}{c \partial t} = \frac{1}{c} \varepsilon$$

$$mcu_0 = \frac{\varepsilon}{c}$$

$$mcu_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, \quad mcu^\alpha = \frac{\partial S}{\partial x_\alpha};$$

$$mc \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}, \quad \vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \quad mcu^i \equiv p^i; \quad p^i \{ \varepsilon, \vec{p} \}$$

Мы знаем, что где контрлар 3-го преобраз именов буд:

$$A^0 = \frac{A'^0 + (v/c) A'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c} A'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad A^2 = A'^2; \quad A^3 = A'^3.$$

$$p^0 = \frac{p'^0 + v/c \cdot p'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon' + v p'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$p^1 = \frac{p'^1 + \frac{v}{c} p'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow p_x = \frac{p'_x + \frac{v}{c^2} \varepsilon'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z$$

Из определения 4-импульса: $p^i p_i = m^2 c^2 u^i u_i = m^2 c^2$. [ж].

Продифференцируем по i : (т.к. $u^i u_i = 1$.)

$$p^0 p_0 + p^\alpha p_\alpha = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

тут надо

Уг ур-е [X] записать ур-е зам.-л. - Якоби.

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} ; p^i p_i = g^{ik} p_i p_k = g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k}$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0 \quad \text{— ур-е Гамильтона-Якоби в 4-мерн. виде.}$$

Просуммируем по i и по k.

$$\underset{\substack{1 \\ \text{"}}}{g^{00}} \left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 + \underset{\substack{1 \\ \text{"}}}{g^{11}} \left(\frac{\partial S}{\partial x^1} \right)^2 + \underset{\substack{1 \\ \text{"}}}{g^{22}} \left(\frac{\partial S}{\partial x^2} \right)^2 + \underset{\substack{1 \\ \text{"}}}{g^{33}} \left(\frac{\partial S}{\partial x^3} \right)^2 - m^2 c^2 = 0,$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\text{grad } S)^2 - m^2 c^2 = 0. \quad \begin{array}{l} \text{3-мерная ф.-на ур-е зам.-л.} \\ \text{в релятив. мех-ке.} \end{array}$$

$$\frac{p^2}{2m} = \varepsilon \rightarrow \frac{\partial S_{cl}}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\text{grad } S_{cl})^2 = 0$$

$$\forall \ll c: \quad \varepsilon = mc^2 + \varepsilon_{cl} ; \quad -\frac{\partial S}{\partial t} = mc^2 - \frac{\partial S_{cl}}{\partial t}$$

$$S = S_{cl} - mc^2 t.$$

$$\forall \ll c: \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t} - mc^2 \right)^2 - (\text{grad } S_{cl})^2 - m^2 c^2 = 0.$$

$$\frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial S_{cl}}{\partial t} mc^2 + m^2 c^4 \right] - (\text{grad } S_{cl})^2 - m^2 c^2 = 0.$$

В кл. с. $\rightarrow \infty$.

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\text{grad } S_{cl})^2 = 0$$

Экстрем. и миним. величины относительно
разных значений в разн. мнж. отмечено.

Распад свободной частицы.

Рассм. со в ком-ой исход. частица покоилась $\Rightarrow$ ее энергия есть Mc^2 (система центра инерции).

Доп. пм что частица развалилась на две, ϵ_1 и ϵ_2 .

$Mc^2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Надо найти ~~энергии~~ ~~энергии~~ разлетевшихся частиц, если известны их массы m_1 и m_2 .

$Mc^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$ (если частицы не взаимодей.)

Чтобы проанализировать произвольный распад, надо чтобы $M \geq \sum_i m_i$; если $M < \sum m_i$

Величина $\sum m_i - M = \Delta m$ - дефект. массы.

Часть массы при соударениях переходит в энергию связи

$\Delta m c^2$ - энергия связи.

В той системе где ОА частица покоилась имеем:

$\vec{p} = 0$; закон сохр. импульса $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. т.е. $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 p_1^2 = c^2 p_2^2$; $\epsilon_1^2 - m_1^2 c^4 = \epsilon_2^2 - m_2^2 c^4$;

$(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2) = (m_1^2 - m_2^2) c^4$;

$$\begin{cases} \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} c^2 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = M c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2 \\ \epsilon_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2 \end{cases}$$

Решим эту задачу в 4-мерн. виде.

Запишем закон сохр. в 4-мерн. виде.

$p^i = p_1^i + p_2^i$

1) $p_i - p_{1i} = p_2^i$ (выбегает в квадраты $\Rightarrow$ умн. на координаты.).

опустим индексы вниз. $p_i - p_{1i} = p_{2i}$

перемножим обе р-ты: $p_i^i p_i - p_i^i p_{1i} - p_1^i p_i + p_1^i p_{1i} = p_2^i p_{2i}$

$p_i^i p_i$ (т.к. по i идет Σ -ние).

$p_i^i p_i + p_1^i p_{1i} - 2p_i^i p_{1i} = p_2^i p_{2i}$

$M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2 \frac{M m_1}{c} \frac{\epsilon_1}{c} = m_2^2 c^2$; $\epsilon_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2$

$\epsilon_1, m_1 \rightarrow m_2$ (показание в Л-сист.).

$M \geq \Sigma m$; M - масса составной частицы.

где частицы расем. как одно целое.

$\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{\epsilon}$; скорость ч.ц.

$\vec{V} = \frac{c^2 \Sigma \vec{p}}{\Sigma \epsilon} = \frac{c^2 p_1}{\epsilon_1 + m_2 c^2}$ скор. центра инерции отн. Л-сист.

$M^2 c^4 = \epsilon^2 - c^2 p^2 = (\epsilon_1 + m_2 c^2)^2 - (\epsilon_1^2 - m_1^2 c^4) =$
 $= \epsilon_1^2 + 2\epsilon_1 m_2 c^2 + m_2^2 c^4 - \epsilon_1^2 + m_1^2 c^4$

• Упругое столкновение релятив. частиц.

Внутр. состояние частиц не меняется.

В Л-сист. $m_1, \epsilon_0, \vec{p}_0, m_2$ Расем. удару в с.ц.м.

$\vec{V} = \frac{c^2 \vec{p}_0}{\epsilon_0 + m_2 c^2}$ (показано что это действительно скорость ч.ц., перешли в сист.

и.и. приобрета. Лор. и показание $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$.

$$p'_{20x} = -\frac{m_2 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} ; \quad \varepsilon'_{20} = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (V - \text{известно}).$$

ε_{20} после столкн. в Λ -сист. (сдвиги энергии). равнение:

$$\varepsilon_{20} = \frac{\varepsilon'_{20} + V \cdot p'_{20x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{преобр. Лоренца}).$$

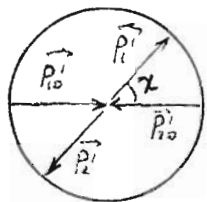
$$\varepsilon'_{10} + \varepsilon'_{20} = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \quad \text{з-н сохр. энерг. но в ~~И~~ Λ -сист.}$$

$$c^2 \sqrt{p_{10}^2 + m_1^2 c^4} + c^2 \sqrt{p_{20}^2 + m_2^2 c^4} = c^2 \sqrt{p_1^2 + m_1^2 c^4} + c^2 \sqrt{p_2^2 + m_2^2 c^4}$$

до столк $\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = 0$ после столк. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$.
в Λ -сист.

$$\sqrt{p_{10}^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p_{20}^2 + m_2^2 c^4} = \sqrt{p_1^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2 c^4}$$

это соотношение, когда $p_{10} = p_1 = p_{20} = p_2$



$$\begin{aligned} \xrightarrow{x, x'} \quad \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon'_{20} + V p'_{20x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\varepsilon'_{20} - V p'_2 \cos \chi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\varepsilon'_{20} - V p'_{20} \cos \chi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{m_2 c^2 - V \cdot m_2 V \cos \chi}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{m_2 c^2 [1 - \frac{V^2}{c^2} + \frac{V^2}{c^2} (1 - \cos \chi)]}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \end{aligned}$$

$$= m_2 c^2 + \frac{(\frac{V^2}{c^2})}{1 - \frac{V^2}{c^2}} m_2 c^2 (1 - \cos \chi)$$

теперь
2-ой част.

до столк.

теперь кон. а перемен. от 1-ой част. но
2-ой в раз-е. столк.

$$\frac{V^2}{c^2} = \frac{c^2 p_{10}^2}{(\varepsilon_{10} + m_2 c^2)^2} = \frac{\varepsilon_{10}^2 - m_1^2 c^4}{(\varepsilon_{10} + m_2 c^2)^2}; \quad 1 - \frac{V^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_{10}^2 + 2\varepsilon_{10} m_2 c^2 + m_1^2 c^4 - \varepsilon_{10}^2 - m_1^2 c^4}{(\varepsilon_{10} + m_2 c^2)^2}$$

$$\varepsilon_2 = m_2 c^2 + \frac{m_2 c^2 (\varepsilon_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{(m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \varepsilon_{10}) c^2} (1 - \cos \chi).$$

Энергия падающей частицы после столкновения

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} - \frac{m_2 (\varepsilon_{10}^2 - m_1^2 c^4) (1 - \cos \chi)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \varepsilon_{10}}$$

$\delta \varepsilon$ - энергия переданная от 1-ой к 2-ой
 $\delta \varepsilon$ - макс. когда $\chi = \pi$.

$$\delta \varepsilon = \frac{2m_2 (\varepsilon_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \varepsilon_{10}}; \quad \varepsilon_{1\min} = m_1 c^2 + (\varepsilon_{10} - m_1 c^2) \cdot \frac{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \varepsilon_{10} - 2m_2 (\varepsilon_{10} + m_1 c^2)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \varepsilon_{10}}$$

$$\frac{\varepsilon_{1\min} - m_1 c^2}{\varepsilon_{10} - m_1 c^2} = \frac{T_{1\min}}{T_{10}} = \frac{(m_1 - m_2) c^2}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \varepsilon_{10}}$$

Если же падающей: $v \ll c$; $\varepsilon_{10} = m_1 c^2 + \frac{m_1 v^2}{2}$; $\frac{T_{1\min}}{T_{10}} = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right]^2$

$$\begin{matrix} v \rightarrow c \\ \varepsilon_{10} \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \frac{T_{1\min}}{T_{10}} \Rightarrow 0 \quad \frac{\varepsilon_{1\min} - m_1 c^2}{\varepsilon_{10}} = \frac{(m_1 - m_2) c^2}{2m_2 \varepsilon_{10}}$$

$$\varepsilon_{1\min} = \left\{ 2m_2 m_1 c^2 + (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2) c^2 \right\} \cdot \frac{1}{m_2} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_2} c^2$$

Доля переданной энергии

$$\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2m_2 (\varepsilon_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \varepsilon_{10}}$$

1) $m_1 \gg m_2$

1а) $v \ll c$, $\varepsilon_{10} \approx m_1 c^2 + \frac{m_1 v^2}{2}$,

$$\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2m_2 \cdot 2m_1 c^2 \cdot \frac{m_1 v^2}{2}}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 m_1 c^2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{v^2}{c^2} \ll 1.$$

$$15) \quad v \rightarrow c; \quad \frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{2m_2 \mathcal{E}_{10}^2}{(m_1^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_{10}) \mathcal{E}_{10}} = \frac{1}{1 + \frac{m_2^2 c^2}{2m_2 \mathcal{E}_{10}}} \approx 1$$

$$\text{или } \mathcal{E}_{10} \geq \frac{m_1^2 c^2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot c^2$$

$$2. \quad m_1 \ll m_2$$

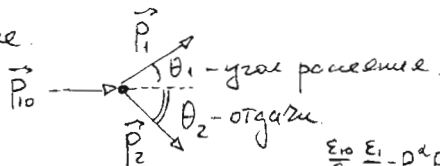
$$2a) \quad v \ll c; \quad \mathcal{E}_{10} \approx m_1 c^2 + \frac{1}{2} m_1 v^2; \quad \frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_{10}} = \frac{2m_2 \cdot 2m_1 c^2 \cdot \frac{1}{2} m_1 v^2}{m_2^2 c^2 \cdot m_1 c^2} \approx \frac{m_1}{m_2} \frac{v^2}{c^2} \ll 1.$$

$$25) \quad v \sim c, \quad \mathcal{E}_{10} \rightarrow \infty$$

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{2m_2 \mathcal{E}_{10}^2}{(m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_{10}) \mathcal{E}_{10}} = \frac{1}{1 + \frac{m_2 c^2}{\mathcal{E}_{10}}} \approx 1 \quad \text{или } \mathcal{E}_{10} \geq m_2 c^2$$

Найдем угол рассеяния и угол отбоя

В Л-системе.



$$P_{10}^i + P_{20}^i = P_1^i + P_2^i;$$

$$\frac{\mathcal{E}_{10}}{c} \frac{\mathcal{E}_1}{c} - p_{10}^x p_1^x \quad P_{10}^i + P_{20}^i - P_1^i = P_2^i;$$

$$m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 - m_1^2 c^2 + 2P_{10}^i P_{20}^i - 2P_{10}^i P_{1i} - 2P_{20}^i P_{1i} = m_2^2 c^2$$

$$\frac{\mathcal{E}_{10}}{c} \frac{m_2 c^2}{c} \quad \frac{m_2 c^2}{c} \frac{\mathcal{E}_1}{c}$$

$$m_1^2 c^2 + \frac{\mathcal{E}_{10} m_2 c^2}{c^2} - \frac{\mathcal{E}_1 m_2 c^2}{c^2} - \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_{10}}{c^2} + p_{10} p_1 \cos \theta_1 = 0$$

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{2 p_{10} p_1} \left[\mathcal{E}_1 (\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2) - \mathcal{E}_{10} m_2 c^2 - m_1^2 c^4 \right]$$

$$2. \quad p_{10}^i + p_{20}^i - p_i^i = p_1^i$$

$$m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 p_{10}^i p_{20}^i - 2 p_{10}^i p_{2i}^i - 2 p_{20}^i p_{2i}^i = m_1^2 c^2$$

$$m_2^2 c^2 + \frac{\varepsilon_{10}}{c} \cdot \frac{m_2 c^2}{c} - \frac{m_2 c^2}{c} \cdot \frac{\varepsilon_2}{c} - \frac{\varepsilon_{10}}{c} \frac{\varepsilon_2}{c} + p_{10} p_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{c^2 p_{10} p_2} [\varepsilon_2 (\varepsilon_{10} + m_2 c^2) - m_2 c^2 (\varepsilon_{10} + m_2 c^2)] =$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{c^2 p_{10} p_2} \cdot (\varepsilon_2 - m_2 c^2) (\varepsilon_{10} + m_2 c^2).$$

Д-то, что при $m_1 \gg m_2 \quad \sin \theta_{1 \max} = \frac{m_2}{m_1}$

Эффект Комптона: распад сл. когда $m_1 = 0$ - фотон $\varepsilon_1 = c p_1$, $\varepsilon_{10} = c p_{10}$
 $m_2 = m_e \quad \theta_1 = \theta.$

$$\cos \theta_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_{10} + \varepsilon_1 m_e c^2 - \varepsilon_{10} m_e c^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_{10}} = 1 + \frac{m_e c^2}{\varepsilon_{10}} - \frac{m_e c^2}{\varepsilon_1};$$

$$\frac{m_e c^2}{\varepsilon_1} = \frac{m_e c^2}{\varepsilon_{10}} + 1 - \cos \theta; \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{10}}{1 + \frac{\varepsilon_{10}}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

Для фотона $\varepsilon_1 = \hbar \omega$
 $\varepsilon_{10} = \hbar \omega_0$

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar \omega_0}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

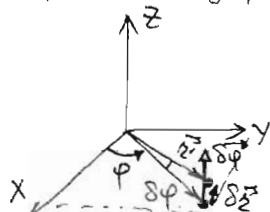
$$\frac{\hbar \omega_0}{m_e c^2} = \frac{\hbar}{m_e c} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi c} = \lambda_c / \lambda_0$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\lambda_c}{\lambda_0} (1 - \cos \theta)}$$

Четырехмерный тензор момента импульса.

$$\vec{M} = \sum_{\text{по всем}} \vec{r} \times \vec{p}.$$

частиц.



$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta \vec{r}$$

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}$$

В тензорном виде: $x'^\alpha = x^\alpha + \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \delta\varphi^\beta}_{\delta\Sigma^{\alpha\gamma}} x^\gamma$; $x'^\alpha = x^\alpha + \delta\Sigma^{\alpha\gamma} x^\gamma$

$$\delta\Sigma^{\alpha\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \delta\varphi^\beta$$

$$\delta\Sigma^{\alpha\gamma} = -\delta\Sigma^{\gamma\alpha}, \text{ действительно: } (x'^\alpha)^2 = (x^\alpha)^2 + \delta\Sigma^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

$$(x'^\alpha)^2 = (x^\alpha)^2$$

Говорим в 4-мерн. пр-ке:

$$\delta x^i \equiv x'^i - x^i = \delta\Sigma^{ik} x_k$$

и в 4-системе квадрат скал.-вектора не меняется:

$$x'^i x'_i = x^i x_i + 2 \delta\Sigma^{ik} x_i x_k$$

 $\uparrow = 0$ необход. $\delta\Sigma^{ik} = -\delta\Sigma^{ki}$

Для dim = 3 $\frac{n(n-1)}{2}$ -независимых компонент у тензора $\delta\Sigma^{\alpha\beta}$ -объект антисим.

, а dim = 4 - не-ст в ком-отх возможных поворотов
 $x^1 x^0, x^1 x^2, x^1 x^3$
 $x^2 x^0, x^2 x^3, x^3 x^0$

Когда рассматривали действие как функ. коорд. $\delta S = - \sum p_i \delta x^i |_a^b$
 ко $\delta x^i = \delta\Sigma^{ik} x_k$ где $\delta\Sigma^{ik}$ - независим от номера частиц (константа параметра поворота. за Σ)

$$\delta S = -\delta\Sigma^{ik} \sum p_i x_k = -\delta\Sigma_{ik} \sum \left(\frac{p^i x^k - p^k x^i}{2} + \frac{p^i x^k + p^k x^i}{2} \right) \Big|_a^b =$$

$\swarrow$ "A^{ik}" $\searrow$ "S^{ik}"

$$= \delta\Sigma_{ik} \frac{1}{2} \sum (x^i p^k - x^k p^i) \Big|_a^b$$

$$\delta S = 0 : \sum (x^i p^k - x^k p^i) \Big|_a = \sum (x^i p^k - x^k p^i) \Big|_b - 4\text{-мерн. момент импульса.}$$

$M^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i)$ - не меняющееся при повороте велич. углового пр-ва вращения.

$$M^{\alpha\beta} = \sum_{(\alpha, \beta = 1, 2, 3)} (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha) = e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} \sum (x^\mu p^\nu) \quad \text{сумма по индексам}$$

e - Леви-Цивита.

$$e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} = e^{\alpha\beta\gamma} e^{\mu\nu\gamma} = (\delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\nu} - \delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\mu})$$

$$= e^{\alpha\beta\gamma} \sum (\vec{x} \times \vec{p})_\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} M_\gamma$$

$$M^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta\gamma} M_\gamma; \quad M^{ik} = -M^{ki}; \quad M^{00} = M^{11} = M^{22} = M^{33} = 0.$$

здесь стоит. независимость от времени величин $M^{0\alpha}$?

$$M^{0\alpha} = \sum (x^0 p^\alpha - x^\alpha p^0) = \sum ct \cdot p^\alpha - x^\alpha \frac{E}{c} = \text{const} \neq f(t).$$

$$\frac{\sum E \vec{r}}{\sum E} - \frac{\sum c^2 \vec{p}}{\sum E} \cdot t = \text{const.}$$

радиус-вектор.
центра
инерции

скорость движения системы как единого целого.

релятивистское
выр-е для радиуса-вектора
центра инерции системы

$$\vec{R} = \frac{\sum E \vec{r}}{\sum E}$$

Если скорости всех частиц $v \ll c$, то $E = mc^2$ получим классич. выр-е для радиуса-вектора

$$\vec{R}_{cl} = \frac{\sum m \vec{r}}{\sum m}$$

Можно расм. замкн. сист. Оказывается, что релятив. выр-е справедливо без взаимодействия м-ду частицами. В противном случае необходимо учитывать энергию поле - т.к. посредством его осуществляется взаимодействие м-ду частицами.

Движение заряженных частиц в ЭМ поле.

19

В масс. взаимодействии происходит мгновенно. В релятив. изменение поля распространяется. В класс. элементарная (частица, система) описывается 3-мя координатами и 3-мя проекциями импульса.

Элемент. частицу можно рассм. как абс. твердое тело. В релятив. мех-ке, в принципе, нельзя ввести абс. Т.Т.

↑ → (абс. Т.Т.) удар происходит мгновенно со всех точек тела

в релятив. мех-ке тело будет деформироваться.

В релятив. мех-ке элемент. частица уже не будет жесткой.

Три описания движ. элементар. част. в ЭМ поле надо учитывать ее взаимодействие с полем.

Т.е. действие - аддитивная величина, тогда

$$S = S_{\text{м}} + S_{\text{мф}}$$

где $S_{\text{м}}$ - свободн.
частицы

$S_{\text{мф}}$ - интеграл действия

какой-то системы взаимодей.

$$S_{\text{м}} = -mc \int ds; \quad \text{оказываемое} \quad S_{\text{мф}} = -\frac{e}{c} \int A_i dx^i$$

e - заряд частицы;

$S_{\text{мф}}$ - определяется неоднозначно

4-мерн.
вектор

A_i - ~~вектор~~

$$A_i(\varphi, -\vec{A}); \quad A^i(\varphi, \vec{A})$$

↑ скалярный,

↑ векторный потенциал
ЭМ поля.

Тогда:

$$\begin{aligned} S &= -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_i dx^i = \int \left\{ -mc^2 \gamma^{-1} dt \right\} - \frac{e}{c} \int (\varphi dx^0 + A_\alpha dx^\alpha) \\ &= \int -mc^2 \gamma^{-1} dt - \frac{e}{c} \int \left(-\vec{A} \frac{d\vec{z}}{dt} + c\varphi \right) dt = \\ &= \int \left(-\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - e\varphi \right) dt = \int L dt \quad \text{откуда} \end{aligned}$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - e\varphi$$

Обобщ. импульс $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$

Ф-ция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi$$

Но ф-ция Гамильтона должна быть выражена 2-й обобщ. импульс.

Энергия свободн. частиц. $mc^2\gamma = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = \sqrt{c^2(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^4}$

$$\mathcal{H} = c\sqrt{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^2} + e\varphi$$

Если $v \ll c$: $|\vec{p}| = |m\vec{v}| = |\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}| \ll mc$ тогда

$$\mathcal{H}_{\text{кл.}} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m^2c^2}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} + e\varphi \underset{\text{в ред.}}{\approx} mc^2 + \frac{1}{2m}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi$$

в класс. мех-ке можно воспользоваться.

Ур-е Гамильтона-Якоби где след. зап. реч. в релятив. мех-ке.

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = (\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^2 ; \quad \vec{P} = \text{grad } S, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$(\text{grad } S - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0 \quad - \text{ур-е Гамильтона-Якоби в 3-м р-е ф-ме.}$$

Движение заряда в ЭМ. поле.

Во многих сл-х можно считать поле создаваемое зарядом покоя

$$L = -mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \text{grad } L = \frac{e}{c} \text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \text{grad } \varphi$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{v}) =$$

20

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{z}} = \frac{e}{c} \left\{ (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{v} \times \text{rot} \vec{A} \right\} + - e \text{grad} \varphi ;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \frac{e}{c} \left\{ (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{v} \times \text{rot} \vec{A} \right\} - e \text{grad} \varphi ; \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \right\} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \text{rot} \vec{A}$$

независимые от $\vec{v}$ $\sim u \perp \text{но } \vec{v}$

Сила гравитационная на единицу заряд в ЭК Максвелла - Лоренцева

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \\ \vec{H} = \text{rot} \vec{A} \end{cases} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

Найдем ур-е описывающее измен. со временем кин. энергии,

T - кин. энергия связанная с движением.

$$\epsilon_k = \gamma m c^2 = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

$$d\epsilon_k = c \frac{2\vec{p} \cdot d\vec{p}}{2\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} = \frac{c^2 \vec{p}}{\epsilon_k} \cdot d\vec{p} = \vec{v} \cdot d\vec{p} ; \quad \frac{d\epsilon_k}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\epsilon_k}{dt} = e \vec{v} \cdot \vec{E} \Rightarrow \text{векторное поле не производит работы над зарядом}$$

$$d\epsilon_k = e \vec{E} d\vec{z} - \text{работа на участке } d\vec{z}.$$

Уб. что ур-е механики не измен. при замене $t \rightarrow -t$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma m \vec{v} ; \quad \vec{v} \rightarrow -\vec{v} \text{ и } t \rightarrow -t : \quad \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow -\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ тогда поток прав. касик не поменялся. $\vec{H} \rightarrow -\vec{H}$.

т.е. $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi$ тогда $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$, $\varphi \rightarrow \varphi$.

Действие на заряд определение напряем. полей, а не потенциалов. Поэтому поле с данным напряем эквив (по действию на заряд).

Потенциалы определения неоднозначны.
Росм. гравитационную инвариантность.

$$S_{\text{inf}} = -\frac{e}{c} \int A_i dx^i \quad \text{если заменим } A_i = A'_i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (*)$$

$$S_{\text{inf}} = -\frac{e}{c} \int A'_i dx^i - \frac{e}{c} \int \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \int df = f|_a^b - \text{const. и при варьировании}$$

Запишем (*) в 3-мерн. виде. $i=2$ S_{inf} она исчезает.

$$\begin{aligned} A &= A' - \text{grad} f ; \quad i=0 : \varphi = \varphi' + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \text{"-"} \text{ т.к. подняли} \quad i=2 : \vec{A} &= \vec{A}' - \text{grad} f \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}' \\ \vec{H} = \vec{H}' \end{array}$$

Все ~~заряд~~ ур-е движения зарядов в ЭМ поле инвариантно к гравитационному преобразованию.

Для стационар. случая $\vec{E} = -\text{grad} \varphi \rightarrow$ определение с токи.
 $\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \rightarrow$ по const.

Для $\vec{H}$ с токи, по градиента некоем ф-ции.

Если потенциал ЭМ поле не зависит явно от времени то и ф-ция Лоренца явно от времени $\Rightarrow$ поэм. энергия совпадает с ф-цией Гамильтона и не меняется со врем.

$$E = \mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi = \text{const где ЭМ. поле. (S движение)}.$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi; \quad \varphi = -\vec{E} \cdot \vec{r}; \quad \vec{E} = -\text{grad} \varphi = \text{grad}(\vec{E} \cdot \vec{r}) = \vec{E}$$

$$\varphi = -\vec{E} \cdot \vec{r} \quad - \text{в смысле } \vec{E} \neq \vec{E}(\vec{r}, t).$$

$$\text{В смысле тогда } \vec{H} \neq \vec{H}(\vec{r}, t) \quad \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r} \quad [**].$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{2} \nabla \times (\vec{H} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \text{div} \vec{r} - \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{H}.$$

Получим $\vec{H}$ $\uparrow z$ оказывается что уже характеризующий того же поле можно взять $\vec{A}$ с проекциями.

$$A'_x = -yH, \quad A'_y = 0, \quad A'_z = 0.$$

$$\text{действительно } H = (\text{rot} A')_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y} = H$$

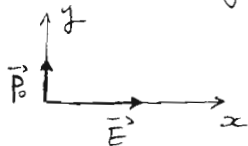
Итак получаем [**]:

$$A_x = -\frac{1}{2}yH, \quad A_y = \frac{1}{2}xH, \quad A_z = 0;$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2}yH &= -yH + \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{2}yH = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}yH - \frac{df_1}{dx} \Rightarrow f_1 = \text{const} = 0. \\ \frac{1}{2}xH &= \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{2}xyH = f(x, y) + f_1(x) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \Rightarrow f = f(x, y) \end{aligned} \right.$$

$$\text{Окончательно. } f(x, y) = \frac{xy}{2}H$$

Движение заряда в однородном электрическом и магнитном полях.



$$t=0 \\ \vec{r}_0(0; p_0; 0) \\ \vec{v}_0 = 0.$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} \Leftrightarrow \frac{dp_x}{dt} = eE_x \quad p_x = eEt + p_{0x}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \quad p_y = p_0$$

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 \quad p_{0z} = 0$$

Найдем скорость $\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{\epsilon_k}$; $\epsilon_k = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$

$\epsilon_k = (c^2 (eEt)^2 + c^2 p_0^2 + m^2 c^4)^{1/2}$;

, то $\epsilon_{k0}^2 = c^2 p_0^2 + m^2 c^4$; $\epsilon_k = [\epsilon_{k0}^2 + e^2 E^2 t^2 c^2]^{1/2}$

$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 eEt}{[\epsilon_{k0}^2 + (ceEt)^2]^{1/2}}$; $x = \frac{c^2 eE}{\epsilon_{k0}} \int \frac{t dt}{[1 + (\frac{ceEt}{\epsilon_{k0}})^2]^{1/2}}$

значения $1 + (\frac{ceEt}{\epsilon_{k0}})^2 = \tau^2$; $x = \frac{c^2 eE}{\epsilon_{k0}} \cdot \left(\frac{\epsilon_{k0}}{ceE}\right)^2 \int \frac{\tau d\tau}{\tau} = \frac{\epsilon_{k0}}{eE} \left[1 + \left(\frac{ceEt}{\epsilon_{k0}}\right)^2 \right]^{1/2} - 1$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{c^2 p_0}{[\epsilon_{k0}^2 + (ceEt)^2]^{1/2}}$; $y = \frac{c^2 p_0}{\epsilon_{k0}} \int \frac{dt}{[1 + (\frac{ceEt}{\epsilon_{k0}})^2]^{1/2}} = \frac{ceEt}{\epsilon_{k0}} = \eta$

$= \frac{c^2 p_0}{\epsilon_{k0}} \cdot \frac{\epsilon_{k0}}{ceE} \int \frac{d\eta}{[1 + \eta^2]^{1/2}} = \frac{cp_0}{eE} \text{Arsh} \eta = \frac{cp_0}{eE} \text{Arsh} \frac{ceEt}{\epsilon_{k0}}$

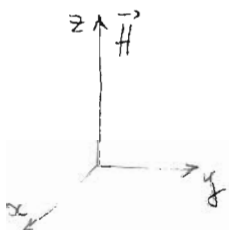
$\frac{ceEt}{\epsilon_{k0}} = \text{sh} \frac{eE}{cp_0} y$; $x = \frac{\epsilon_{k0}}{eE} \left(\text{ch} \frac{eE}{cp_0} y - 1 \right)$; $z=0$.

$t \rightarrow \infty$; $\epsilon_{k0} \rightarrow \infty$ (и. м. у. г. р. а. т.) $\epsilon_{k0} = mc^2$ $p_0 = mv_0$.

тогда

$x = \frac{mc^2}{eE} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{eEy}{mcv_0} \right)^2 - 1 \right) = \frac{eE}{2mv_0^2} y$

Движ. заряж. частиц в постоянном и однород. магнитном поле.



$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$; Т.к. $\vec{H}$ не выполняет работы,

то

$\epsilon_{кин} = const. : \vec{p} = \frac{\epsilon_k}{c} \vec{v}$

$\frac{\epsilon_k}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{eH}{c} \vec{v} \times \vec{e}_z \Big| \cdot \frac{c^2}{\epsilon_k} \quad \vec{H} = \vec{e}_z H$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega_H \vec{v} \times \vec{e}_z ; \text{ где } \omega_H = \frac{e\hbar}{\varepsilon_k} - \text{циклотронная частота.}$$

22

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \omega_H v_y ; \quad \frac{d\vec{v}_y}{dt} = -\omega_H v_x ; \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Из послед. гр-е $v_z = v_{0z}$; Равнии сист. гр-нии $\begin{cases} \dot{v}_x = \omega_H v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_H v_x \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$

Получим $\frac{d}{dt}(v_x + i v_y) = -i\omega_H (v_x + i v_y)$

$$v_x + i v_y = a e^{-i\omega_H t} , \text{ где } a = v_{0\perp} e^{-i\alpha} ; \alpha - \text{начальная фаза.}$$

$$v_x + i v_y = v_{0\perp} e^{-i(\omega_H t + \alpha)} \begin{cases} v_x = v_{0\perp} \cos(\omega_H t + \alpha) \\ v_y = -v_{0\perp} \sin(\omega_H t + \alpha) \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{0\perp}^2 - \text{величина поперечн. скорости не меняется со временем.}$$

Получим урав траектории.

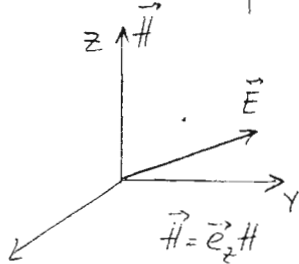
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega_H} \sin(\omega_H t + \alpha) ; \\ y(t) = y_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega_H} \cos(\omega_H t + \alpha) ; \\ z = z_0 + v_{0z} t ; \end{cases} \quad \begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= \frac{v_{0\perp}^2}{\omega_H^2} \\ \text{где } \frac{v_{0\perp}^2}{\omega_H^2} &= r_L^2 - \text{ларморовский радиус.} \end{aligned}$$

То траектория - винтовая линия с осью motion.

$$\omega_H = \frac{e\hbar}{\varepsilon_k} , \text{ если } v \ll c : \varepsilon_k = mc^2$$

$$\omega_H(k_L) = \frac{e\hbar}{mc}$$

Движ. перенос. заряда в постоянных и однородных электр. и магнитных полях.



z по $\vec{H}$, а y так чтобы $\vec{E}$ лежало в пл. xy .

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H};$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega_H \hat{v} \times \vec{e}_z + \frac{e}{m} \vec{E};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = \omega_H v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega_H v_x + \frac{e}{m} E_y \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ + \\ \cdot i \end{array} \right. \quad \frac{d}{dt}(v_x + i v_y) + i \omega_H (v_x + i v_y) = i \frac{e E_y}{m}$$

Квадрат. диф. ур-е : одн. неоднор. + "заст. неоднор."

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m} E_z \Rightarrow v_z = v_{0z} + \frac{e}{m} E_z t; \quad z = v_{0z} t + \frac{e E_z}{2m} t^2 \quad (t=0 \quad z=0).$$

Заст. перм. неоднород : $v_x + i v_y = a e^{-i \omega_H t} + \frac{e E_y}{m \omega_H}$; попом. a со a - констант.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = a \cdot \cos \omega_H t + c \frac{E_y}{H} \\ v_y = -a \cdot \sin \omega_H t \end{array} \right.$$

Зам. возьмем средние значения скоростей за период.

$$\langle v_x \rangle_T = c \frac{E_y}{H}$$

$$\langle v_y \rangle_T = 0$$

Перенос. заряда $v \ll c$ т.е. $\frac{E_y}{H} \ll 1$.

$v_d = c \frac{E_y}{H}$ - дрейфовая скор.

$$\vec{v}_d = c \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{H^2}$$

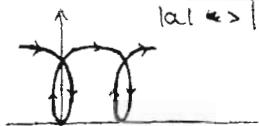
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{\omega_H} \sin \omega_H t + c \frac{E_y}{H} t \quad (t=0; \quad x=0) \\ y = \frac{a}{\omega_H} (\cos \omega_H t - 1) \end{array} \right.$$

постоянную скорость так чтобы был поск.

- эта траектория "трахеида"

Рассмотрим 3 предельных случая.

$$|a| \ll \left| \frac{c E_y}{H} \right|$$



$$|a| < \left| \frac{c E_y}{H} \right|$$



$$a = -\frac{c E_y}{H} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{c E_y}{H \omega_H} (\omega_H t - \sin \omega_H t) \\ y = \frac{c E_y}{H \omega_H} (1 - \cos \omega_H t) \end{array} \right.$$

"уширение"

Получим гр-е движения в к-мер. форме.

Применим наименьшее действие:

$$S = \int_a^b (-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i), \text{ проведём в-пробование}$$

$$\delta S = - \int_a^b mc \delta ds + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i + \frac{e}{c} A_i \delta dx^i =$$

$$= - \int_a^b mc u_i \delta dx^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i + \frac{e}{c} A_i d \delta x^i =$$

$$= - \int_a^b \left(d(mc u_i \delta x^i + \frac{e}{c} A_i \delta x^i) - \delta x^i d(mc u_i + \frac{e}{c} A_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u_i \delta x^k ds \right) = -(mc u_i + \frac{e}{c} A_i) \delta x^i \Big|_a^b +$$

$$u_i = \frac{dx^i}{ds}$$

$$+ \int_a^b \left\{ \delta x^i mc \frac{du}{ds} + \delta x^i \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{ds} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^i \delta x^k \right\} ds =$$

$$\frac{ds}{ds}$$

$i \rightarrow k$ + к. номер индекс
 $k \rightarrow i$ циклическ.

$$\delta S = -(mc u_i + \frac{e}{c} A_i) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b \left\{ mc \frac{du}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right\} \delta x^i ds$$

$$1) \delta S = 0, \quad \delta x^i \Big|_a = \delta x^i \Big|_b = 0 \text{ аналог}$$

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k, \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \text{тензор ЭМ поле.}$$

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} ; F_{ik} = -F_{ki} \Rightarrow F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0.$$

$$F_{0\alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = E_\alpha ; \begin{cases} F_{0x} = E_x \\ F_{0y} = E_y \\ F_{0z} = E_z \end{cases}$$

$$F^{ik} : F^{0\alpha} = -F_{0\alpha} ;$$

знак, при
подписании, меняем
местом 0.

коммутатор. произв
коммутатор

$$F_{0\alpha} = E^\alpha$$

$$F_{\alpha\beta} = -e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= e_{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = \\ &= -e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = -e^{\alpha\beta\gamma} (\nabla \times \vec{A})^\gamma = \\ &= -e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma ; \end{aligned}$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{12} = -e^{123} H^3 = -H_z$$

$$F_{13} = -e^{132} H^2 = H_y$$

$$F_{23} = -e^{231} H^1 = -H_x$$

$$F^{0\alpha} = -E^\alpha, F^{\alpha\beta} = -e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma$$

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k ;$$

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k ;$$

~~HP~~

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = F^{ik}$$

$$E_x \quad 0 \quad -H_z \quad H_y$$

$$E_y \quad H_z \quad 0 \quad -H_x$$

$$E_z \quad -H_y \quad H_x \quad 0$$

$$i=0 ; mc \frac{du^0}{ds} = \frac{e}{c} F^{0\alpha} u_\alpha$$

$$mc \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{e}{c} (-E^\alpha) \cdot \left(-\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k, \quad u^i u_i = p^i, \quad \frac{dp^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$$

$$i=0: \quad \frac{dE}{dt} = e \vec{v} \cdot \vec{E}$$

$$i=\alpha: \quad \frac{dp^\alpha}{c\sqrt{1-v^2/c^2} dt} = \frac{e}{c} F^{\alpha k} u_k = \frac{e}{c} F^{\alpha 0} u_0 + \frac{e}{c} F^{\alpha \beta} u_\beta =$$

$$= \frac{e}{c} E^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} +$$

$$\delta S = -(u^i u_i + \frac{e}{c} A_i) \delta x^i \Big|_a^b + \int \left(\frac{dp_i}{ds} - \frac{e}{c} F_{ik} u^k \right) \delta x^i ds$$

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k, \quad \delta x^i \Big|_a = 0 \quad \text{no variation at } a.$$

$$\delta S = -(p_i + \frac{e}{c} A_i) \delta x^i; \quad p_i + \frac{e}{c} A_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad P_i = p_i + \frac{e}{c} A_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$$

$$P_i^i = p_i^i + \frac{e}{c} A_i^i; \quad P^0 = p^0 + \frac{e}{c} A^0 = \frac{E}{c} + \frac{e\phi}{c} = \frac{E + e\phi}{c};$$

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}; \quad P^i \left(\frac{E + e\phi}{c}, \vec{P} \right).$$

$$\begin{cases} p^i = P^i - \frac{e}{c} A^i \\ p_i = P_i - \frac{e}{c} A_i \end{cases}$$

$$(P^i - \frac{e}{c} A^i)(P_i - \frac{e}{c} A_i) = p^i p_i = m^2 c^2;$$

$$g^{ik} (P_i - \frac{e}{c} A_i)(P_k - \frac{e}{c} A_k) - m^2 c^2 = 0;$$

$$g^{ik} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} + \frac{e}{c} A_i \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k \right) - m^2 c^2 = 0$$

$$0 \quad -E_x \quad -E_y \quad -E_z$$

$$E_x \quad 0 \quad -H_z \quad H_y$$

$$-ik = E_y \quad H_z \quad 0 \quad -H_x$$

$$E_z \quad -H_y \quad H_x \quad 0$$

как преобразуется E_x при переходе от одной системы к др. инерц. сист.

$$E_x = F^{10} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \frac{\partial x^0}{\partial x'^m} F'^{nm} =$$

$$= \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} F'^{n0} + \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} F'^{n1} \right) =$$

$$x^0 = \frac{x'^0 + (V/c) x'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \neq f(x'^2, x'^3)$$

$$x^1 = \frac{x'^1 + (V/c) x'^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x^2 = x'^2$$

$$x^3 = x'^3$$

$$(V \equiv v)$$

$$= \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^0} F'^{10} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} F'^{11} \right) + \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^0} F'^{01} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} F'^{11} \right) =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]^2 F'^{10} - \left[\frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]^2 F'^{10} = F'^{10} = E'_x$$

$$E_x = E'_x \quad - \text{продольное компонентна на инерц. сист. не меняется}$$

$$E_y = F^{20}$$

$F^{ik} \rightarrow A^i B^k$ - компоненты тензора преобразуются как произведение соотв. координатных векторов.

$$F^{20} \rightarrow A^2 B^0$$

$$A^2 = A'^2 \quad (\text{т.к. } x^2 = x'^2)$$

$$E_y = F^{20} = \frac{F'^{20} + (V/c) F'^{21}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{E'_y + (V/c) H'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E_z = F^{30} = \frac{F'^{30} + (V/c) F'^{31}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{E'_z - (V/c) H'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$H_x = F^{32} = F'^{32} = H'_{2x} ; \quad H_y = F^{13} = \frac{F'^{13} + (V/c) F'^{103}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{H'_y - (V/c) E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(T.v.
 $\alpha^2 = \alpha'^2$
 $\alpha^3 = \alpha'^3$)

$$H_z = F^{21} = \frac{F'^{21} + (V/c) F'^{20}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{H'_z + (V/c) E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E_x = E'_x$$

$$H_x = H'_x$$

$$E_y = \gamma \cdot (E'_y + \frac{V}{c} H'_z)$$

$$H_y = \gamma \cdot (H'_y - \frac{V}{c} E'_z)$$

$$E_z = \gamma \cdot (E'_z - \frac{V}{c} H'_y)$$

$$H_z = \gamma \cdot (H'_z + \frac{V}{c} E'_y)$$

Sum $v/c \ll 1$. ($\vec{v} \parallel x$).

$$E_x = E'_x$$

$$H_x = H'_x$$

$$E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z$$

$$H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z$$

$$E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y$$

$$H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y$$

$$\vec{E} = \vec{E}' - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}']$$

$$\vec{H} = \vec{H}' + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}']$$

Bayrae $\vec{H}' = 0$: $H_x = H'_x = 0$; $H_y = -\frac{V}{c} \gamma E'_z$

$$\vec{E}' = 0 \quad E_x = E'_x = 0; \quad E_y = \gamma \frac{V}{c} H'_z = \frac{V}{c} H_z;$$

$$E_z = \gamma \cdot \left(-\frac{V}{c}\right) H'_y = -\frac{V}{c} H_y; \quad \vec{E} \neq 0$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

Какие инварианты можно обнаружить у комбинации ЭМ. поля.

$$1) F^{ik} F_{ik} = \text{inv.}$$

$$\begin{aligned} F^{ik} F_{ik} &= F^{0k} F_{0k} + F^{\alpha k} F_{\alpha k} = F^{0\alpha} F_{0\alpha} + F^{\alpha 0} F_{\alpha 0} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \\ &= -E^\alpha E_\alpha - E^\alpha E_\alpha + (-e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma) \cdot (-e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma) = \quad \beta=1,2,3 \\ &= 2H^2 - 2E^2 \quad e^{\alpha\beta\gamma} \cdot e^{\alpha\beta\gamma} = 2\delta^{\gamma\gamma} \\ &\quad \boxed{F^{ik} F_{ik} = 2(H^2 - E^2)} \end{aligned}$$

$$2) e^{iklm} F_{ik} F_{lm} - \text{inv. по сменам. к повороту. (псевдоскаляр)}$$

$$e^{0123} = 1.$$

$$\begin{aligned} e^{iklm} F_{ik} F_{lm} &= e^{0k\ell m} F_{0k} F_{\ell m} + e^{\alpha k\ell m} F_{\alpha k} F_{\ell m} = \\ &= e^{0\alpha\beta\gamma} F_{0\alpha} F_{\beta\gamma} + e^{\alpha 0\beta\gamma} F_{\alpha 0} F_{\beta\gamma} + e^{\alpha\beta\ell m} F_{\alpha\beta} F_{\ell m} = \quad \substack{\text{к.л.м. - поворот.} \\ (\ell=\beta \text{ и } \gamma)} \\ &= e^{\alpha\beta\gamma} F_{0\alpha} F_{\beta\gamma} + e^{\alpha 0\beta\gamma} F_{\alpha 0} F_{\beta\gamma} + e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = \\ &= 2e^{\alpha\beta\gamma} (-F^{0\alpha}) F_{\beta\gamma} + 2e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta} F_{0\gamma} = \\ &= -2(-E^\alpha) e^{\alpha\beta\gamma} (-e^{\beta\gamma\delta} H^\delta) + 2e^{\alpha\beta\gamma} (-e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma) E^\gamma = \\ &= -4E^\alpha H^\gamma \delta^{\alpha\gamma} - 4\delta^{\gamma\gamma} H^\gamma E^\gamma = -8\vec{E} \cdot \vec{H} \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = -8\vec{E} \cdot \vec{H}}$$

Если в какой-то системе угол между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ острый (тупой) то он будет таким и в любой др. системе

26

Можно найти такую сист. отсчета где поле ||-н.

$$\vec{E}_0 \vec{H}_0 = EH \quad H_0^2 - E_0^2 = H^2 - E^2$$

$$\text{Если } \vec{E}' = 0 : \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \quad v = -c \frac{E}{H} \quad (E < H)$$

$$\text{Если } \vec{H}' = 0 : \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \quad v = c \frac{H}{E}$$

Составим комплекс. вектор. $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$ как его комплексный преобр.?

$$F_x = E_x + iH_x = E'_x + iH'_x = F'_x;$$

$$F_y = E_y + iH_y = \frac{E'_y + (v/c)H'_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + i \gamma (H'_y - v/c E'_z) = \gamma F'_y - \gamma i \frac{v}{c} (E'_z + iH'_z) = \gamma F'_y - \gamma i \beta F'_z$$

$$F_y = \gamma F'_y - i\gamma \beta F'_z;$$

$$F_z = E_z + iH_z = \gamma (E'_z - \beta H'_y) + i(H'_z + \beta E'_y) \gamma = \gamma i \beta F'_y + \gamma F'_z$$

$$F_z = i\gamma \beta F'_y + \gamma F'_z$$

Если замечать $\tgd \alpha = i\beta \Rightarrow \cos \alpha = \gamma, \sin \alpha = i\beta \gamma$ Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = F'_x \\ F_y = F'_y \cos \alpha - F'_z \sin \alpha \\ F_z = F'_y \sin \alpha + F'_z \cos \alpha \end{array} \right.$$

— тождество в кн-сти 42.

Мы знаем это при повороте:
не меняем квадрата вектора

$$F^2 = F'^2 : E^2 - H^2 + 2i \vec{E} \vec{H} = E'^2 - H'^2 + 2i \vec{E}' \vec{H}'$$

Знают $F_{ik} F_{ik}$ и $F_{iklm} F_{iklm}$ инвар единственные.

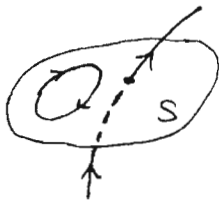
Уравнения ЭМ поля

Введем понятие о силовой линии.

$\vec{H}$, рассмотрим некую поверхность (элемент); $\vec{H} d\vec{S}$
 Всегда можно найти ситуац. когда $\vec{H} d\vec{S} = 1$. $\Rightarrow$ говорим
 что $\vec{H}$ $\vec{S}$ -я граница $d\vec{S}$ проходит одна си. линия.

$\oint_S \vec{H} d\vec{S}$ - общее кол-во силовых линий, пронизывающих пов-сть S .

Замкн. пов-сть S



$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0$. Отсутствие магн. зарядов $\Rightarrow$ поток $\vec{H}$
 $\vec{H}$ -я линия замкн. $S = 0$.

$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0$. Т-ма Гаусса $\oint_S \vec{H} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{H} dV$
 $\text{div} \vec{H} = 0$

Параген установлен $\vec{H}$ -я индукции
 ЭДС в замкн. контуре $\sim$ изменению магн. потока прониз.
 эту площадьку в ед. времени.

$$\text{ЭДС} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

В свою очередь $\text{ЭДС} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$;

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S} - \text{зак индукц}$$

Т-ма Стокса: $\int_S (\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) d\vec{S} = 0$
 (пов-сть S произвол.
 на контур L)

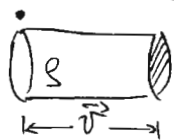
$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Тогда пока у нас
 в диф. фме $\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{H} = 0 \quad (2) \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1) \end{array} \right.$

Т-ма Гаусса в электродинамике: $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi e$
 (где e - полный заряд наход. в S)

$$e = \int_V \rho dV ; \quad \int_V (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi \rho) dV = 0 \quad \cdot \quad \underline{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho} \quad - \text{в природе } \rho \neq \text{ электр. заряды.}$$

(ρ - плотность заряда.) Ток проводимости - ток образованный движ. зарядами.



$\vec{j} = \rho \vec{v}$ - за секунду весь заряд вытекает из объема.

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S \rho \vec{v} d\vec{S} \quad - \text{сила тока } j \text{ в попер-сти } S \text{ в ед. времени.}$$



$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} \quad - \text{заряд вытекает.}$$

$$e = e(t) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S} ; \quad \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0$$

$$\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0} \quad - \text{уравнение непрерывности (з-н сохр. заряда)}$$

Если $\rho \neq \rho(t)$ то $\operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow$ условие леммы замкнутости.

$$\rho = \rho(t), \quad \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{смеш.}} \quad \text{сложение лем. } \vec{j} \text{ выполняется замкнуто.}$$

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Для поем. токов для удобства j -и Био-Савара-Лапласа

$$\oint_L \vec{H} d\vec{z} = \frac{4\pi}{c} \gamma ; \quad \gamma - \text{полный ток пронизывающий } S \text{ попер-сти}$$

$$\gamma = \int_S \vec{j} d\vec{S} ; \quad \text{Максвелл уклад ток смешивания:}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{z} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} \quad (\text{8-ая форма})$$

$$\oint_S \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Второе уравнение УМ

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} & (1) \quad \oint \vec{H} d\vec{z} = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) d\vec{S} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho & (2) \quad \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV \end{cases}$$

УМ выполняются по задан. ρ и $\vec{j}$ найти $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$.

Какие уравнения удовлетворяют потенциалы ЭМ поля?

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A} ;$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j} ;$$

$$\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} ;$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} ;$$

$$\text{div} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) = 4\pi \rho ; \quad \Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = -4\pi \rho$$

Эта сист. уравнений находим $\vec{A}$ и φ по урв. ρ и $\vec{j}$.

Но $\vec{A}$ и φ определены неоднозначно. $\vec{A} = \vec{A}' + \text{grad } f$

Используем эту неоднозначность. $\varphi = \varphi' + \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{\partial f}{\partial t}$

Выберем функцию f , так чтобы упростились уравнения.

Наконец выберем упр. 1) $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ упр. Лоренца (калибровка)

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

2) $\text{div } \vec{A} = 0$ Кулоновская калибровка потенциалов.

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \Delta \varphi &= -4\pi \rho \end{aligned} \right.$$

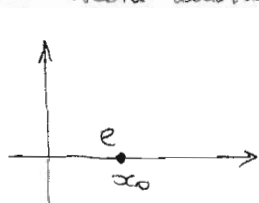
применяем обобщенно при решении задач с ГУ.

Для движущегося заряда $\frac{d\vec{E}}{dt} = e\vec{v}\vec{E}$, если $\frac{d\vec{E}}{dt} < 0 \Rightarrow$ перенос энергии к полю

Рассм. систему зарядов

$$\frac{d}{dt} \sum_a \vec{E}_a = \sum_a e_a \vec{v}_a(t) \vec{E}(t, \vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{поле движется в той же точке} \\ \text{в дан. мом. время заряд} \end{array} \right)$$

Если ввести плотность заряда:



плотность заряда $\rho = \sum \rho dV$

$$\rho = e\delta(x-x_0); \quad \rho(t, \vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t))$$

Проверим: $\sum \rho dV = \sum_a e_a \int \delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)) dV = \sum_a e_a \cdot 1 = \sum_a e_a$

$$\frac{d}{dt} \sum_a \vec{E}_a = \int \rho(t, \vec{r}) \vec{v}(t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) dV \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{поле движется в той же точке} \\ \text{они уже входят в } \rho. \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_a \vec{E}_a - \int_V \vec{j} \vec{E} dV = 0$$

V - тот объем где $j \neq 0$ т.е. там где находится заряд.

Рассм. закон. сист. "зарядов + поле", тогда

$-\int_V \vec{j} \vec{E} dV$ - изм. энергии ~~и~~ поле

Т.к. $\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, то $\frac{d}{dt} \sum_a \vec{E}_a = \frac{c}{4\pi} \int_V \vec{E} (\text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) dV =$

$$= \frac{c}{4\pi} \int_V \{ -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E^2 \} dV = \oint_S d\vec{S} \dots$$

$$= -\oint_S d\vec{S} \cdot \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV - \int_V dV \left\{ \frac{1}{8\pi c} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial H^2}{\partial t} \right\} =$$

$$\oint_V \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$= - \oint_S \vec{S} d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV, \text{ где } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}], w = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi}.$$

$$\frac{d}{dt} \sum_a \varepsilon_a + \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = - \oint_S \vec{S} d\vec{S} \quad [*].$$

плотность энергии
ЭМ поля (переносе энергии)

1. Пусть \$S\$-нее ведем по \$\infty\$-ую область.
Все физ. величины на \$\infty\$-и равны 0.

$$V_{\infty} \quad \frac{d}{dt} \sum_a \varepsilon_a + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\infty}} w dV = 0$$

В вып-е \$\frac{d}{dt} \sum_a \varepsilon_a\$ входим поток энергии.
Если нет потока энергии, то

$$2. V, S \quad \frac{d}{dt} \sum_a \varepsilon_a + \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = - \oint_S \vec{S} d\vec{S}$$

\$\vec{S}\$ - плотность потока энергии
ЭМ поля.

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$$

Запишем з-н сохр. энергии [*] в диф. ф-ме

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = - \int_V \text{div} \vec{S} dV;$$

$$\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} \right) dV = 0 \text{ - выполняется } \forall V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \text{div} \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] = - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Рассм з-н сохр. энергии где система из частиц
"зар. частицы + ЭМ поле".
идет на разгон частиц

Для одной частицы: \$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}\$, а где все системы:

$$\frac{d}{dt} \sum_a \vec{p}_a = \sum_a e_a \vec{E}(\vec{r}_a(t)) + \frac{e}{c} \vec{v}_a(t) \times \vec{H}(t, \vec{r}_a) / \vec{r}_a = \dots$$

Перейдем от суммирования к \$S\$-м по всей области
где все частицы.

$$\dots = \int_V dV \left\{ \rho(t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) + \frac{1}{c} \vec{j}(t, \vec{r}) \times \vec{H}(t, \vec{r}) \right\} = \dots$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\dots = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \left(\vec{E} \text{div } \vec{E} + \left\{ \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \times \vec{H} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V dV \left\{ \vec{E} \text{div } \vec{E} - \vec{H} \times \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{1}{c} \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right\} = \dots \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V dV \left\{ \vec{E} \text{div } \vec{E} - \vec{E} \times \text{rot } \vec{E} + \vec{H} \text{div } \vec{H} - \vec{H} \times \text{rot } \vec{H} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{4\pi c} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$$

преобразуем объёмный $\int_V$ в (гравитационные) поверхностный $\oint_S$.

$$\vec{E} \text{div } \vec{E} = \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) = (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - (\vec{E} \nabla) \cdot \vec{E}$$

$$\vec{H} \text{div } \vec{H} = \vec{H} (\nabla \cdot \vec{H}) = (\nabla \cdot \vec{H}) \vec{H} - (\vec{H} \nabla) \cdot \vec{H}$$

тогда втор-е в {...} должно
равно:

$$\{ \dots \} = (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\nabla \cdot \vec{H}) \vec{H} - \left\{ (\vec{E} \nabla) \cdot \vec{E} + \vec{E} \times \text{rot } \vec{E} + (\vec{H} \nabla) \cdot \vec{H} + \vec{H} \times \text{rot } \vec{H} \right\} =$$

$$= (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\nabla \cdot \vec{H}) \vec{H} - \text{grad } \frac{E^2 + H^2}{2} \quad \text{grad } (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \nabla) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \nabla) \cdot \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a}$$

Посмотрим α -компоненту

$$((\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E})_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (E_{\alpha} E_{\beta}) \quad \text{но } \beta\text{-цикл. } \alpha\text{-компонент}$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} p_{\alpha}^{(a)} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \left(\frac{\vec{E} \times \vec{H}}{4\pi c} \right)_{\alpha} = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(-E_{\alpha} E_{\beta} - H_{\alpha} H_{\beta} + \frac{E^2 + H^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) = \dots$$

т.е. берём $\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}$ за
сводку

$$\text{Две криволинейные } \oint_S \int_V dV \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \dots = \oint_S dS_{\beta} \dots$$

$$\dots = -\oint_S dS_{\beta} T_{\alpha\beta}, \quad \text{где } T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_{\alpha} E_{\beta} - H_{\alpha} H_{\beta} + \frac{E^2 + H^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right\}$$

$$\vec{p}^{(f)} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{плотность импульса ЭМ поля.}$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} p_{\alpha}^{(a)} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV p_{\alpha}^{(f)} = -\oint_S T_{\alpha\beta} n_{\beta} dS$$

$$\vec{p}^{(f)} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$1. V_{\infty}, S_{\infty} \Rightarrow \oint_S \dots = 0 \quad (?)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} p_{\alpha}^{(a)} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\infty}} p_{\alpha}^{(f)} dV = 0$$

$$2. \nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} p_{\alpha}^{(a)} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV p_{\alpha}^{(f)} = - \oint_S T_{\alpha\beta} n_{\beta} dS$$

Если раскинуть не уходим
то импульс будем терять
за счет ухода импульса
нале.

$T_{\alpha\beta}$ - плотность потока импульса
(α -составляющая) в направлении β
тензор напряжений (напряжений) Максвелла.

Если раскинуть поле $p_{\alpha}^{(a)} = 0$:
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V p_{\alpha}^{(a)} dV = - \oint_S T_{\alpha\beta} n_{\beta} dS$$

Т.е. ушел импульс

в α времени - сила:

$f_{\alpha} = T_{\alpha\beta} n_{\beta}$ - сила действующая на α .
нов-ти со стороны ЭМ п.

$n_{\alpha} f_{\alpha} = T_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta}$ - давление света.

Импульс и плотность импульса ЭМП - непрерывные величины.

Перейдем к 4-мер. описанию ЭМ поля

Будем исходить из принципа наим. действия.

$$S_{em} + S_{mf} = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_i dx^i$$

Вариационное

уравнение поля :
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{A} - \text{rot grad} \varphi$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{H} = \text{div rot} \vec{A} \quad \text{div} \vec{H} = 0.$$

$$(*) \frac{\partial F_{em}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{mk}}{\partial x^e} + \frac{\partial F_{ke}}{\partial x^m} = 0$$

4-мерное гамильтониан I^{em} напор ЭМ.

$l \neq m \neq k$ ↑
плотность
антисимметрии

Умно (*) $e^{ik\ell m}$ и пропуская по k, ℓ, m

$$e^{ik\ell m} \frac{\partial F_{mk}}{\partial x^\ell} + e^{ik\ell m} \frac{\partial F_{\ell m}}{\partial x^k} + e^{ik\ell m} \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial x^m} = 0 ;$$

(k \neq \ell) \qquad \qquad \qquad (k \neq m)

$$e^{ik\ell m} \frac{\partial F_{\ell m}}{\partial x^k} + e^{ik\ell m} \frac{\partial F_{mk}}{\partial x^\ell} + e^{ik\ell m} \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial x^m} = 0 ;$$

(k \neq \ell) \qquad \qquad \qquad (k \neq m)

$$3e^{ik\ell m} \frac{\partial F_{\ell m}}{\partial x^k} = 0 ; \quad e^{ik\ell m} \frac{\partial F_{\ell m}}{\partial x^k} = 0 ;$$

4-пер. закон
I-й закон YM.

i=0 : $0 = e^{0k\ell m} \frac{\partial F_{\ell m}}{\partial x^k} = e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = e^{\alpha\beta\gamma} (-e^{\beta\gamma\delta} \frac{\partial H^\delta}{\partial x^\alpha}) = -2 \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^\alpha} =$

$$e^{\alpha\beta\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma} \quad \left(\begin{matrix} k, \ell, m = 1, 2, 3 \\ \text{цикл} \end{matrix} \right)$$

$$F^{\beta\gamma} = -e^{\beta\gamma\delta} H^\delta$$

$$e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\beta\delta} = 2\delta^{\alpha\delta} \quad \Rightarrow \quad -2 \operatorname{div} \vec{H}$$

i=d: $0 = e^{\alpha k\ell m} \frac{\partial F_{\ell m}}{\partial x^k} = e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} e^{\alpha\delta\ell m} \frac{\partial F_{\ell m}}{\partial x^\beta} + e^{\alpha\beta\ell m} \frac{\partial F_{\ell m}}{\partial x^\beta} =$

(цикл)
(not k)

$$= e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} = \text{изменим порядок индексов} = -e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-e^{\beta\gamma\delta} H^\delta) +$$

$$+ e^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(-\frac{\partial F^{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} H^\alpha + e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} E^\gamma = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right)_\alpha$$

(F^{\delta\gamma} = -E^\gamma)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Нодо получить в действительности минимальное симметризованное
одно М поле, т.е.

$$S = S_{\text{int}} + S_{\text{int}} + S_f$$

т.е. поле расщепляется на две
части в М. поле.

$$S_m = - \sum_{\text{по всем}} m c \delta s \quad \text{зарядам}$$

$$S_{mf} = - \sum_{\text{по всем}} \frac{e}{c} S A_i dx^i \quad \text{зарядам}$$

A_i - скаляр в тех точках где
нах-ся заряд.

Надо перейти от непрерывного
распр. заряда к непрерывн.

интегр. элемент по объ. т.к. в мод. по м. времени.

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

$$S_{mf} = - \sum \frac{e}{c} S A_i dx^i = - \frac{1}{c} \int \rho(\vec{r}, t) A_i(\vec{r}, t) dx^i dV = \quad dV - 3\text{-мерн.}$$

объем.

$$= - \frac{1}{c} \int \rho A_i \frac{dx^i}{dt} dt dV \cdot \frac{c}{c} = \int dx^0 = c \int dt = - \frac{1}{c^2} \int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i d\Omega$$

$$\text{Доказать } d\Omega = d\Omega'$$

$$\begin{aligned} d\Omega &= dx^0 dV = \\ &= dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \\ &\text{эт-т 4-мерн.} \\ &\text{объем} \end{aligned}$$

Т.е. S_{mf} - скаляр, $d\Omega$ - к., A_i - 4-вектор. $\Rightarrow$

$$\rho \frac{dx^i}{dt} - \text{4-вектор}$$

$$\text{4-вектор относительно тока } j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$$

$$j^0 = \rho \frac{dx^0}{dt} = \rho c; \quad j^a = \rho \frac{dx^a}{dt} = \rho v^a$$

$$(\vec{j} = \rho \vec{v})$$

$$j^i(j^0, \vec{j})$$

Теперь мы можем записать преобр. Лоренца для j^i .

Для мод. 4-вектора

$$A^0 = \gamma \cdot (A'^0 + \frac{v}{c} A'^1) \Rightarrow S = \gamma (S' + \frac{v}{c^2} j'_x)$$

$$A^1 = \gamma \cdot (A'^1 + \frac{v}{c} A'^0) \Rightarrow j_x = \gamma (j'_x + v S')$$

В пересчете м. $S = S'$

$$j_x = j'_x + v S$$

(кабинетный ток).

T.O. $S_{\text{uf}} = -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega$.

Рассм. скар S_f .

ЭМ поле удовлетвор. принципу суперпозиции. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ур-е для ЭМ поле - линейные диф. ур-е.

В S_f должны быть величины квадратичные по полю
 инвариантные по отн. к преобр. Лоренца

1) $F_{ik} F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$ 2) $\epsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = -2 \vec{E} \cdot \vec{H}$

Докажем что 2) 4-мерн дивергенция

$$\epsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = \epsilon^{iklm} F_{ik} \left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \right) = 2 \epsilon^{iklm} F_{ik} \frac{\partial A_m}{\partial x^l}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l} 2 \epsilon^{iklm} F_{ik} A_m - 2 \epsilon^{iklm} A_m \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}$$

$$\epsilon^{iklm} A_m \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = \epsilon^{iklm} A_m \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) =$$

$$= \epsilon^{iklm} A_m \left(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^i}}_{\text{абсолютно сим.}} A_k - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}}_{\text{сим. по } l \text{ и } k} A_i \right)$$

произведение сим. на
 анти сим. тензор $\equiv 0$.

$$S_f = a \int F_{ik} F^{ik} dt dV$$

а выберем мы водора ; точку " - " : $F_{ik} F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$
 системы единиц.

в Гауссовой сист.

$$a = -\frac{1}{16\pi}$$

нам S не эрстем иметь минимума $\Rightarrow a = -\frac{1}{16\pi}$.

$$S_f = -\frac{1}{16\pi} \int F_{ik} F^{ik} dt dV ; \quad S_f = -\frac{1}{16\pi} \int 2(H^2 - E^2) dt dV = \int_{t_1}^{t_2} L_f(t) dt$$

$$L_f = \int \frac{(E^2 - H^2)}{8\pi} dV$$

плотность ф. Лоренца $\frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2)$.

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} dS_2$$

Станерь можно находить Π^{10} перу YM в 4-вуде.

Кадэ вертырбавы аб'ядн. коард. поле - потенциалы поле.

По заданному движению распы найдём Π перу
(не будем вертырбавы коард. часу).

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} j^i \delta A_i dS_2 = -\frac{1}{16\pi c} - \frac{1}{16\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_1}^{t_2} \delta(F_{ik} F^{ik}) dS_2$$

интегрирование по ∞ -ой пространств.
в конечн. проме-к
времени

$$\delta(F_{ik} F^{ik}) = \delta F_{ik} F^{ik} + F_{ik} \delta F^{ik} = 2 F^{ik} \delta F_{ik} =$$

$$= 2 F^{ik} \delta \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) = -4 F^{ik} \delta \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = -4 F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i =$$

здесь суммируем по k

$$= -\frac{\partial}{\partial x^k} 4 F^{ik} \delta A_i + 4 \delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}$$

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int dS_2 \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{16\pi} 4 \left(-\frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} \delta A_i + \delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi c} \int F^{ik} \delta A_i dS_k - \frac{1}{c} \int dS_2 \delta A_i \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) = 0$$

интегр. по замкнутой пов-сти

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) dS_2 = \oint F^{ik} \delta A_i dS_k = 0$$

средний $\oint$ др. в нуль из-за того, что δA_i поле на ∞ равно 0 и $\delta A_i|_{t_1}^{t_2} = 0$.

$$\int \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) dV dt +$$

применяем теорему Гаусса

$$+ \int \frac{\partial}{\partial x^0} (F^{ik} \delta A_i) dV dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{S_\infty} F^{ik} \delta A_i dS_k +$$

т.к. $\oint_{S_\infty} F^{ik} \delta A_i dS_k = 0$ т.к. δA_i поле на $\infty = 0$.

$$+ \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left(F^{i0} \delta A_i dV \right) = \frac{1}{c} \int_V F^{i0} \delta A_i dV \Big|_{t_1}^{t_2} \\ \stackrel{0}{=} \text{т.к. } \delta A_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i (*)$$

$$\underline{i=0} \quad \frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^0; \quad \frac{\partial F^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j^0; \quad -\frac{\partial E^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{4\pi}{c} \rho; \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\underline{i=\alpha} \quad \frac{\partial F^{\alpha k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha; \quad \frac{\partial F^{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{\alpha \beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha;$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E^\alpha}{\partial t} = -e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial H^\gamma}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha; \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(\nabla \times \vec{H})^\alpha}$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} = +\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$\stackrel{0}{=}$
 $\stackrel{4\pi\rho}{=}$

Теперь можно записать эр-е сохр. закона в 4-виде.

Продиф (*), по x^i

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^i}{\partial x^i}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\substack{\text{адв.} \\ \text{инв. тен.}}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\substack{\text{адв.} \\ \text{антисимм.} \\ \text{тен.}}} - \text{их произведение} \equiv \Phi.$

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad \text{з-н сохр. заряда (так она записывается в без индексов)}$$

Дифференциально

$$\frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Стационарное электрическое поле.

Из УМ $\Rightarrow$ что $\uparrow$ определение ур-ний:

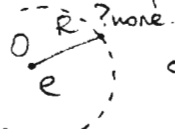
Во многих сл. проще перейти
к потенциалам

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi ; \quad \Delta \varphi = -4\pi \rho \quad - \text{ур-е Пуассона}$$

Если в рассм. обл. $\rho = 0$ $\Delta \varphi = 0$ ур-е Лапласа
 φ не имеет экстремальных знач.
Усл. экстр. 1-ое производные $= 0$ 2-ое имеет одного знака

Как определить поле создаваемое неподвижными зарядами.



$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi e ; \quad d\vec{S} = R^2 d\Omega \vec{e}_r \quad \text{В эту симметричную задачу} \\ \varphi = \varphi(R), \text{ тогда}$$

сфер. полев.

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{d\varphi}{dR} \vec{e}_r = E(R) \cdot \vec{e}_r$$

$$\oint_{4\pi} E(R) \vec{e}_r \vec{e}_r d\Omega R^2 = 4\pi e ;$$

$$4\pi E(R) R^2 = 4\pi e ; \quad E(R) = \frac{e}{R^2} ; \quad \vec{E} = \frac{e}{R^2} \vec{e}_r = \frac{e \vec{R}}{R^3}$$

R - расстояние от заряда до r -ки
наблюдения.

$$\varphi(R) = \frac{e}{R}$$

Для многих точечн. зарядов в инт. пр. суперпоз.

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a} \quad \text{если известна плотность распредел. зарядов}$$

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{R} - \vec{R}_a)$$

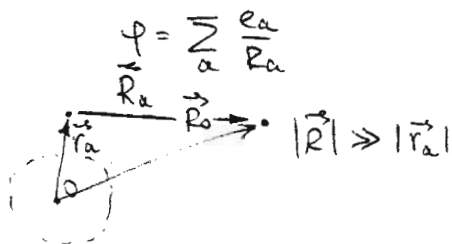
$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV ; \quad \rho = e \delta(R) \quad - \text{где } 1^{\text{го}} \text{ заряда в инт. коорд.}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\vec{R})$$

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \begin{cases} 0, R \neq 0 \\ -4\pi\delta(\vec{R}) \end{cases}$$

33

Затем упр-е когда или дел с
расстоянием большим по ср. с лин. размерами
системы.



R_a - расст. от a -ого заряда до т-ки
наблюдения.

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|}$$

$$f(\vec{R}_0 - \vec{r}_a) = f(\vec{R}_0) - (\vec{r}_a \nabla) f(\vec{R}_0) + \frac{1}{2} x_a x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_a^2 \partial x_\beta^2} f(\vec{R}_0) + \dots$$

в ряд
Тейлора

$$\varphi = \frac{\sum_a e_a}{R_0} - \sum_a e_a \vec{r}_a \nabla \frac{1}{R_0} +$$

, где x_a, x_β - коорд. $\vec{r}$
 $x_{a,\beta}$ - коорд. $\vec{R}_0$.

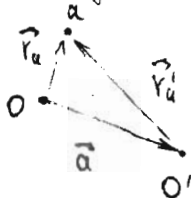
$$+ \frac{1}{2} \sum_a e_a x_a x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_a^2 \partial x_\beta^2} \frac{1}{R_0} + \dots = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$$

Большое расст. $\varphi^{(0)} = \frac{\sum_a e_a}{R_0}$; Если система электронов тр.
зарядк - как один т.е. $\sum_a e_a = 0$, тогда

$$\varphi^{(1)} = -(\vec{d} \nabla) \frac{1}{R_0}$$

Упо еще мож перейти
к новому нач. отсчета
как изменить $\vec{d}$?

где $\vec{d} = \sum_a e_a \vec{r}_a$ - дипольный
момент
системы зарядов.



$$\begin{aligned} \vec{d} &= \sum_a e \vec{r} = \sum_a e (\vec{r}' + \vec{a}) = \\ &= \vec{a} \sum e + \sum e \vec{r}' = \vec{a} \sum e + \vec{d}' \end{aligned}$$

$$E_{\text{cm}} Z e = 0 : \vec{d} = \vec{d}'$$

Поэтому запишем $e^+ = \sum_a \vec{r}_a^+ e^+ \quad e^- = - \sum_a \vec{r}_a^- e^-$

где $\vec{R}^+ = \frac{\sum e^+ \vec{r}^+}{\sum e^+}$ $\vec{R}^- = \frac{\sum e^- \vec{r}^-}{\sum e^-}$ — центры "+"- и "-"-зарядов.

$$\text{Energie } \Sigma e^+ = \Sigma e^- = q \quad ; \quad \vec{d} = q(\vec{R}^+ - \vec{R}^-) = q\vec{R}_+$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{R_0^2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$$

$$\vec{\Pi} = -\text{grad} \varphi^{(1)} = -\nabla \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \nabla (\vec{r} \cdot \vec{r}_0) - (\vec{r} \cdot \vec{r}_0) \nabla \frac{1}{R_0^3} = \dots$$

$$\nabla \frac{1}{R_0^3} = -\frac{3}{R_0^4} \nabla R_0 = -\frac{3}{R_0^4} \frac{\vec{R}_0}{R_0}$$

$$= \frac{3(\vec{R}_0 \vec{d}) \vec{R}_0 - R_0^2 \vec{d}}{R_0^5} = \frac{3(\vec{n} \vec{d}) \vec{n} - \vec{d}}{R_0^3}$$

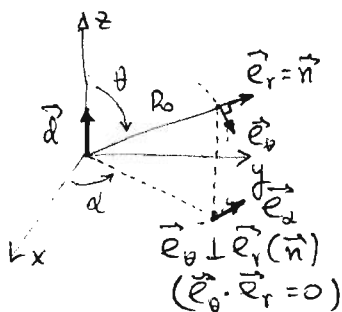
$$\vec{E} = -\nabla \varphi^{(1)} = \nabla \cdot (\vec{d} \nabla) \frac{1}{R_0} = (\vec{d} \nabla) \nabla \frac{1}{R_0}$$

Система сфер. $\vec{E}(E_R, E_\theta, E_\varphi)$

$$\vec{E}_R = \vec{E}_R \vec{t}^T = \vec{w} \vec{E} = \frac{1}{R_0^3} (3(\vec{w} \vec{d}) - (\vec{w} \vec{d})) =$$

$$= \frac{2d}{R_0^3} \cos \theta ; E_\theta = \vec{e}_\theta \vec{E} = - \frac{\vec{e}_\theta \vec{d}}{R_0^3} =$$

$$= + \frac{d}{R_0} \sin \theta$$



$$\vec{E}_d = \vec{e}_d \vec{E} = 0$$

$\vec{E}(R, E_R, E_\theta, 0)$ - поле аксиально симметр. (т.е. не зависит от ϕ).

Полный заряд 0 и дипольный момент 0. ($\sum e_a = 0$, $\vec{d} = 0$)

Тогда $\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e_a x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{R_0}$ $R_0 \gg |\vec{r}_a|$, $R_0 \neq 0$ можно.
(так точно)

$\sum e_a x_\alpha x_\beta$ - симм. тензор II ранга

$$\Delta \frac{1}{R_0} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \frac{1}{R_0} = 0 ; \quad \varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e (x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{R_0} =$$

$$= \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{R_0}$$

$$D_{\alpha\beta} \equiv \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

- тензор
квadrupольного
момента индукции

$$\begin{cases} D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha} \\ D_{\alpha\alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma D_{\alpha\beta} \text{ независ.}$$

Симм. тензор II р. вида можно привести к главным осям

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{1}{R_0} \right) = - \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial R_0}{\partial x_\beta} = - \frac{x_\beta}{R_0^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R_0} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{x_\beta}{R_0^3} = - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3} + 3 x_\beta \frac{1}{R_0^4} \frac{x_\alpha}{R_0} = - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3} + 3 \frac{x_\alpha x_\beta}{R_0^5}$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2 R_0^3} \quad \text{где } n_\alpha = \frac{x_\alpha}{R_0}, \quad \text{Затем в главных осях}$$

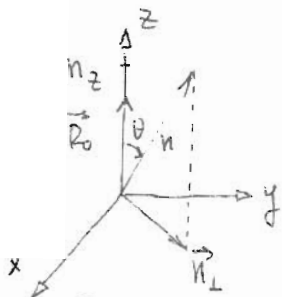
$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2 R_0^3} \{ D_{xx} n_x^2 + D_{yy} n_y^2 + D_{zz} n_z^2 \}$$

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0.$$

Для симметрии n -ого порядка $\Rightarrow$ при повороте φ вект. $\vec{r}$ на угол $\frac{2\pi}{n}$

Δz -вект. симметрии порядка > 2 В той системе $D_{xx} = D_{yy}$
 Тогда $D_{zz} = D$; $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D$

Тогда $\varphi^{(2)} = \frac{1}{2R_0^3} \left\{ D(n_z^2 - \frac{1}{2}(n_x^2 + n_y^2)) \right\}$



$$n_x^2 + n_y^2 = \sin^2 \theta ; \quad n_z^2 = \cos^2 \theta$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^3} (3\cos^2 \theta - 1) = \frac{D}{2R_0^3} P_2(\cos \theta) ; \quad \text{где } P_2(\cos \theta) - \text{полином Лежандра.}$$

Квадрупольный момент первого эквивалента.

Рассм. квадруп. потенциал сферически симм. системы зарядов
 Перейдем от точек z к $\vec{r}$ и φ .

$$D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad D_{\alpha\beta} = \int g(\vec{r}) (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dV$$

$$g(\vec{r}) = g(r) , \quad dV = r^2 dr d\Omega$$

$$D_{\alpha\beta} = \int dr r^2 g(r) \cdot \int_{4\pi} (3n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}) d\Omega \cdot \frac{1}{4\pi} = \dots$$

$$\dots = 4\pi \int r^4 dr g(r) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} (3n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}) d\Omega = \dots$$

↑
среднее по единице сферы.

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = a \delta_{\alpha\beta} ; \quad a = ? \quad a = \beta \quad \langle n_\alpha^2 \rangle = 1 = 3a \quad a = \frac{1}{3}$$

симм. тензор II ранга

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3} \quad \text{Окончательно } D_{\alpha\beta} = 0$$

кватр. вектора

$D_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow$ распределение зарядов симм.

35

Система зарядов находящаяся во внешнем постоянном электрическом поле.

для единичн. заряда $U = e\varphi$, для системы $U = \sum_a e_a \varphi(\vec{r}_a)$

Рассм. изучает тогда поле мало по сравнению с полем расм. линейных размеров системы зарядов.

$$U \approx \sum_a e_a \left\{ \varphi_0 + (\vec{r}_a \nabla) \varphi_0 + \frac{1}{2} \alpha_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \dots \right\}$$

после q -нго φ надо брать в нуле $\Rightarrow$ не зависи от помера заряда

на $\vec{r}$ поле невелико
мало $\Rightarrow \varphi \in \text{ред}$
по $\vec{r}$.

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum e;$$

$$U^{(1)} = \text{grad} \varphi_0 \cdot \sum e \vec{r} = -\vec{E}_0 \cdot \vec{d};$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \Big|_0 \cdot \sum e_{\alpha} \alpha_{\beta} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \Big|_0 \cdot \sum e (3\alpha_{\alpha} \alpha_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}) = \dots$$

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \Big|_0 = \Delta \varphi \Big|_0 = 0$$

так источник φ нах-ся вне системы зарядов

$$= \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \Big|_0$$

Доказать

$D_{\alpha\beta} = D'_{\alpha\beta}$, если $\sum e = 0$, $\vec{d} = 0$
при другом некое коорд.

Какие силы действуют на систему зарядов во внеш. поле?

$$\vec{F} = -\text{grad} U = -\text{grad} \sum e \varphi = -\sum e \text{grad} \varphi = \sum e \vec{E} \approx \text{т.к. } \varphi \text{ мало на малых } \vec{r}$$

$$\approx \sum e (\vec{E}_0 + (\vec{r} \nabla) \vec{E} \Big|_0) = \vec{E}_0 \sum e + (\vec{d} \nabla) \vec{E}_0$$

Можно ли, со стороны $\vec{E}$ View = ?

$$\vec{K}_E = \sum \vec{r} \times e \vec{E}_0 = \vec{d} \times \vec{E}_0$$

не забываем
о полярности зарядов

Примеры. 1) e_1, e_2 $U = e_1 \varphi_2 = e_1 \frac{e_2}{R_{12}} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}$

2) $\vec{E}_1$ пер-е в поле гирона $\vec{d}_2$

$$U = e_1 \varphi_2 = e_1 \frac{\vec{R}_{21} \vec{d}_2}{R_{21}^3}; \vec{R}_{21} - \text{р-в от гирона - до заряда}$$

или $U = -\vec{d}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\vec{d}_2 \cdot \frac{e_1 \vec{R}_{12}}{R_{12}^3}, \vec{R}_{12} - \text{р-в от } e_1 \text{ к гирону}$ $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21}$

3) $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ $U = -\vec{d}_1 \cdot \vec{E}_{d_2} = -\vec{d}_1 \cdot \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{d}_2) \vec{n} - \vec{d}_2}{R^3} = \frac{1}{R^3} \{ \vec{d}_1 \vec{d}_2 - 3(\vec{n} \cdot \vec{d}_2)(\vec{n} \cdot \vec{d}_1) \}$

Постоянное магнитное поле движущаяся сит зарядов

Рассмотрим сит зарядов, р-в. и скорости зарядов констант.
Среднее по большому пр-ку времени $\Rightarrow$ стационар. значения

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad \langle \text{div } \vec{H} \rangle = 0; \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dT = \frac{\vec{E}(T) - \vec{E}(0)}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

$$\left\langle \vec{H} \right\rangle = \left\langle \text{rot } \vec{A} \right\rangle \text{ из-за } \text{div } \langle \vec{A} \rangle = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{div } \vec{H} \rangle = 0 \\ \langle \text{rot } \vec{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle \end{array} \right.$$

$$\text{rot rot } \langle \vec{A} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle; \quad \Delta \langle \vec{A} \rangle = -\frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle;$$

$$\Delta \varphi = -4\pi g \quad \varphi = \int \frac{g}{R} dV \quad \langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{\langle \vec{j} \rangle}{R} dV$$

R - в т-ке наблюд. $\langle \vec{H} \rangle = \text{rot } \langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{c} \int (\nabla \frac{1}{R} \times \langle \vec{j} \rangle) dV =$

т.к. $\langle \vec{j} \rangle$ - не зависит от т-ки

набл., а от между. коорд $\langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{c} \int \langle \vec{j} \rangle \times \vec{R} \frac{dV}{R^3}$

36

$$\vec{j} = q \vec{v} \quad s = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) \text{ , тогда } \langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{c} \sum \left\langle \frac{e_a \vec{v}_a(t)}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_a(t)|} \right\rangle$$

Рассм. поле на ∞ -ом расм. $|\vec{r}_a(t)| \ll \vec{R}_0 \Rightarrow$ в ред.

Рис. 1

т.к. движение функции $\langle \vec{v} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle = 0$

$$\langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{c R_0} \sum \langle e \vec{v} \rangle = \frac{1}{c} \sum \langle e \vec{v} (\vec{\nabla} \frac{1}{R_0}) \rangle = \frac{1}{c R_0^3} \sum e \vec{v} (\vec{\nabla} R_0)$$

$$\langle \vec{v} (\vec{\nabla} R_0) \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{v} (\vec{\nabla} R_0) \rangle + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \vec{v} (\vec{\nabla} R_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle \vec{v} (\vec{\nabla} R_0) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \rangle \times \vec{R}_0 \quad ? \text{ т.к. функция}$$

Магнитный момент системы зарядов

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e \vec{r} \times \vec{v} \quad \langle \vec{A} \rangle = \frac{\langle \vec{m} \rangle \times \vec{R}_0}{R_0^3} = - \langle \vec{m} \rangle \times \nabla \frac{1}{R_0}$$

В электростатике

$$\varphi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3}, \quad \langle \vec{A} \rangle = \frac{\langle \vec{m} \rangle \times \vec{R}_0}{R_0^3}; \quad \langle \vec{H} \rangle = \text{rot} \langle \vec{A} \rangle = \nabla \times \frac{\langle \vec{m} \rangle \times \vec{R}_0}{R_0^3} =$$

$$= \frac{1}{R_0^3} \nabla \times (\langle \vec{m} \rangle \times \vec{R}_0) + - (\langle \vec{m} \rangle \times \vec{R}_0) \times \nabla \frac{1}{R_0^3} =$$

$$= \frac{1}{R_0^3} \{ \langle \vec{m} \rangle \text{div} \vec{R}_0 - (\langle \vec{m} \rangle \cdot \nabla) \vec{R}_0 \} + \frac{3 (\langle \vec{m} \rangle \times \vec{R}_0) \times \vec{R}_0}{R_0^5}$$

$$\vec{H} = \frac{3 (\vec{R}_0 \vec{m}) \vec{R}_0 - R_0^2 \langle \vec{m} \rangle}{R_0^5}$$

Если расм. система зарядов q с ω -ом $\frac{e}{m} = \text{const.}$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum \frac{e}{m} \vec{r} \times m \vec{v} = \frac{1}{2mc} \sum \vec{r} \times \vec{p} = \frac{e}{2mc} \vec{M}$$

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \vec{M}$$

Рассм. фермионное - все сист. зарядов q_0 расм. однопред, все мож. поле какое для действия на эту систему?

$$\langle \vec{F} \rangle = \sum \left\langle \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} \vec{r} \times \vec{H} \right\rangle = 0 \quad \text{т.к. функция odd-н.$$

иногда имеет с средним) $\langle \vec{K}_H \rangle = \sum \left\langle \vec{r} \times \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right\rangle = \frac{1}{c} \sum e \left\langle (\vec{r} \vec{H}) \right\rangle \left\langle \vec{H} (\vec{r} \vec{v}) \right\rangle \} =$

$$\langle \vec{r} \vec{v} \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \vec{r}^2 \right\rangle = 0 \quad \text{среднее zero}$$

$$= \frac{1}{2c} \sum e \langle (\vec{r} \times \vec{v}) \rangle \times \vec{H} = \vec{m} \times \vec{H}$$

Векторное соотношение в попереч. пределах

$$\langle \vec{K}_H \rangle = \langle \vec{m} \rangle \times \vec{H} \quad \text{ср.} \quad \vec{K}_E = d \times \vec{E}.$$

Ф-ция Пограники системы зарядов нах-д в магн. поле.

$$L_H = \sum \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} = \sum \text{не иск. одпор магн. поле} \quad \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sum e (\vec{H} \times \vec{r}) \vec{v} = \vec{m} \vec{H}.$$

$$L_H = \vec{m} \vec{H}, \quad \text{ср.} \quad L_E = -U = d \vec{E}.$$

Теорема Лоренца

(о поведении заряда во внешних элект. и магнитных полях)
В 1900 получил Эф. Дирак (ред.)

Расс. переметив сист с одинак. см нах-д-з-у. е в поск. одпор
слабон магн. поле и центрально симметр. темн. поле

Ф-ция Лор. в левор. инерт. сист.

$$L = \sum \frac{m v^2}{2} + \sum \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - U(r_{ab}, t_0)$$

Перидем во вращ. инерт. сист с
угл. 2-той $\vec{\Omega}$, тогда

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

r_{ab} - расст. м-д-у а-ой и
в-ой сист.

t_0 расст. от центра
поля до т-ки наба

Тогда ф-ция Пограники будет иметь вид:

$$L = \sum \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + 2\dot{\vec{r}}(\vec{S} \times \dot{\vec{r}}) + (\vec{S} \times \dot{\vec{r}})^2) + \sum \frac{e}{2} \frac{1}{2} (\vec{H} \times \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} - U(r_{\alpha\beta}, r_0) =$$

$\vec{S}$ - вектор т.ч. можно вводить
но с.р. с

Во вращении системы (во вращении вращ.)
с единицы $\vec{S} \Rightarrow \vec{r}_{\alpha\beta}$ - не меняем. $\Rightarrow U' = U$

$$\vec{r}' = \vec{r} - (\vec{S} \times \vec{r})$$

$$\dot{\vec{r}}'(\vec{S} \times \dot{\vec{r}}) \approx \dot{\vec{r}}(\vec{S} \times \dot{\vec{r}})$$

$$= \sum \frac{m \dot{r}'^2}{2} + \sum m \dot{\vec{r}} \left\{ \left(\vec{S} + \frac{e\vec{H}}{2mc} \right) \times \dot{\vec{r}} \right\} - U' =$$

$m \times \frac{e}{m} = \text{const}$ то введем
можно вводить $\vec{S}$ так, чтобы
(...) = 0 т.е.

$$L = \sum \frac{m \dot{r}'^2}{2} - U'$$

$$\vec{S} = -\frac{e}{2mc} \vec{H}$$

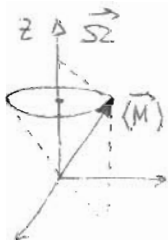
Период вращ. $T = \frac{2\pi}{\Omega} \Rightarrow T_{\text{финитного вращении}}$ т.е. если определить $\vec{r}'$, моменты
т.к. $\vec{S}$ - не меняется $\vec{H}$ $T_{\text{фин.}}$

$$\left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{T_{\text{фин.}}} = \text{скалярное произведение} = \langle \vec{K} \rangle = \langle \vec{M} \rangle \times \vec{H} = \frac{e}{2mc} \langle \vec{M} \rangle \times \vec{H} = -\frac{e}{2mc} \vec{H} \times \langle \vec{M} \rangle =$$

$$= \vec{S} \times \langle \vec{M} \rangle \quad [^*]$$

по осям:

$$\vec{S} = \vec{e}_z \Omega$$



Угол $[^*]$ на $\vec{e}_z$, поэтому

$$\frac{d\langle M_z \rangle}{dt} = 0 \quad \langle M_z \rangle = \text{const}$$

Угол $[^*]$ на $\langle \vec{M} \rangle$

$$\begin{cases} \frac{d\langle M_x \rangle}{dt} = -\Omega \langle M_y \rangle; \\ \frac{d\langle M_y \rangle}{dt} = \Omega \langle M_x \rangle \end{cases} \quad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

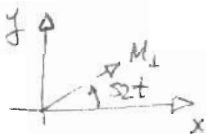
$$\frac{d}{dt} \langle M \rangle^2 = 0 \quad \langle M^2 \rangle = \text{const.}$$

$$\frac{d}{dt}(\langle M_x \rangle + i \langle M_y \rangle) = i \Omega (\langle M_x \rangle + i \langle M_y \rangle), \text{ откуда}$$

$$\langle M_x \rangle + i \langle M_y \rangle = M_{\perp} e^{i(\Omega t + \alpha)}$$

$$\langle M_x \rangle = M_{\perp} \cos(\Omega t + \alpha), \quad \langle M_y \rangle = M_{\perp} \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\langle M_x \rangle^2 + \langle M_y \rangle^2 = M_{\perp}^2$$



Рассм. неподвижные сист. зарядов. Для софрм $\vec{E}$. какова энергия этого поля?

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int E \cdot \text{grad} \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \text{grad} \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div} \{ \varphi \text{div}(\vec{E}) - \vec{E} \text{div}(\varphi \vec{E}) \} dV =$$

$$\begin{aligned} & \text{поверхности} \\ & \text{объем} \\ & \text{где нет зарядов} \\ & \text{поле } \vec{E} \text{ на } \infty \rightarrow 0 \end{aligned} = -\frac{1}{8\pi} \oint \varphi \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV$$

Если система зарядов точечная, то

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \sum e_i \varphi_i$$

Но для 1-го заряда $U = \frac{1}{2} e \varphi$ $\varphi = \frac{e}{R} \rightarrow \infty$ $R \rightarrow 0$

Значение класс. электродинамики неприменимо на малых расст.

Если принять что e^- - R_e - радиус, то энерг. e^- - а $U_e = \frac{e^2}{R_e} \approx m_e c^2$

откуда можно получить границу применимости КЭ

$$R_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad \text{то } \Rightarrow \text{из самих ур-ний КЭ.}$$

Но, оказывающиеся граница применим. КЭ на пару порядков выше.

$$R_e = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad \lambda_{ce} = \frac{h}{m_e c} = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ см} - \text{на таких расст. проявл. квантовое тфф.}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{mc} \quad \lambda_e = \frac{h}{mc} \cdot \frac{mc^2}{e^2} = \frac{hc}{e^2} = 137 \text{ постоянная тонкой структуры}$$

38

Поэтому рассмотрим не U и $U_{\text{взаимод.}} = U'$

$$U' = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi'_a, \quad \varphi'_a - \text{потенциал взаимодействия велич. с ост. зарядами.}$$

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \quad \varphi'_a = \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}}$$

Для 2х зарядов $U'_{12} = \frac{1}{2} \sum = \frac{1}{2} \left(\frac{e_1 e_2}{R_{12}} + \frac{e_2 e_1}{R_{21}} \right) = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}$

ЭМ поле в отсутствие зарядов и токов

Рассм. ЭМ при $\rho = 0 \quad \vec{j} = 0$;

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

ЭМ поле в пр-ке с-м зарядов и токов $\equiv$ ЭМ волны.

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV \quad \rho = 0 \quad \varphi = 0$$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

$$\langle \vec{A} \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV \quad \vec{j} = 0 \quad \langle \vec{A} \rangle = 0$$

Поэтому ЭМ поле Э. Лована с $\rho = 0 \quad \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{E}, \vec{H} = \vec{E}, \vec{H}(t)$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{градиент}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}, \text{ условие } \text{div } \vec{A} = 0; \Delta \varphi = -4\pi \rho$$

При тех усл. можно записать

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV \quad \rho = 0 \quad \varphi = 0$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

волновое ур-е
ур-е Даламбера

Если брать все поком. ур-е rot:

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \text{ если брать } -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

как же в волн. ур-е в 4-лгеде.
II член YM же.

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^k} (g^{il} g^{km} F_{lm}) = g^{il} g^{km} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_m^i}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l^i}{\partial x^m} \right) =$$

$$= g^{il} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^k} A^k - g^{km} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} A^i = \text{использ. } \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$$

$$-g^{km} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^m} = 0 \text{ учтем: } -g^{00} \frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^0)^2} - g^{11} \frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^1)^2} - g^{22} \frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^2)^2} - g^{33} \frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^3)^2} = 0$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A^i = 0 - \text{волновое ур-е для 4-потенциала } A^i$$

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square \quad \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -g^{km} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} = -\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^k}$$

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial A^0}{\partial x^0} = \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ где Лоренца}$$

Линейная теория

Все электромагнитные явления описываются уравнениями

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \text{где } f(x,t) \text{ модаль и зависимость поля}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0; \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

введем переменные $\xi = t - \frac{x}{c}$ $\eta = t + \frac{x}{c}$, тогда $t = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$
 $x = -\frac{c}{2}(\xi - \eta) = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} \right);$$

В новых переменных ξ, η $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$

его решение в виде: $f(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, или в старых координ.

$f(t, x) = f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$ Это будет представление для решения?

Рассм. $f_1(t - \frac{x}{c})$ решение одно и тоже когда $t - \frac{x}{c} = \text{const}$.

$t = 0: f_1(-\frac{x_0}{c})$ $t, x: f_1(t - \frac{x}{c}) = f_1(t - \frac{x - x_0}{c} - \frac{x_0}{c})$

$t - \frac{x - x_0}{c} = 0, \quad x = x_0 + ct$

Во втором случае распространение в противополож. напр. со скоростью c .

Аналогично $f_2(t + \frac{x}{c})$ - решение волны распространяющейся в напр. со скоростью c .

$\vec{A}(t - \frac{x}{c})$ $\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$ тогда и учитывая $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const.}$ но тогда

$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}$ - но это не должно зависеть от t .
 но не так, тогда $A_x = 0$.

То предположение
 что $\vec{E} = 0 \Rightarrow E$ - поперечн.

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(t - \frac{z}{c})}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{c} \vec{A}' \quad \text{где} \quad \xi = t - \frac{z}{c} \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi} = \vec{A}'$$

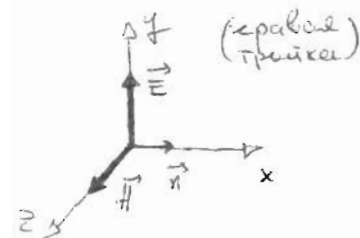
$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \times \vec{A} = \vec{e}_x \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \vec{e}_x \times \vec{A}' \left(-\frac{1}{c}\right) = -\frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{A}'$$

Тогда для плоской волны имеем еще: $\vec{n} = \vec{e}_x$ - вектор распространения

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}$$

то величина B кажд. мом. время
в кажд. z -ке пр-ва

$$H = E \quad \text{для плоской волны}$$



$$W = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} \left\{ \vec{n} E^2 - \vec{E} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \right\} = c W \vec{n} \quad \text{в плоской волне}$$

Откуда $\Rightarrow$ c - скорость распространения энергии.

$$\text{Плотность потока энергии} \quad \vec{p}(t) = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{W}{c^2} \vec{n}$$

$W = c p$ как для энергии с длиной волны Φ (фотоны)

Монохроматическая волна.

Если кажд. сечение поле ева. простой тригоном. ф-ция
времени - ν монохром. волна
 $f \sim \sin \omega t$ ω - это

В п.м. и распределение в пр-ве будем определять др-ем

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$$

Зато получим несколько интересных результатов

40

$f \sim \cos \omega t$ $f_1 = f(t - \frac{x}{c})$ тогда н.е. монохр. волны

$$f(t, x) = f_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c}) ; f(x, t) = \operatorname{Re}(f_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})})$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})} ; 1) x = 0, \vec{A}(t) = \vec{A}_0 e^{-i\omega t}$$

$$t_0 = 0 : \vec{A}(t_0) = \vec{A}_0 e^{-i\omega t_0}$$

$$t_0 + t : \vec{A}(t_0 + t) = \vec{A}_0 e^{-i\omega(t_0 + t)}$$

$$\vec{A}(t_0 + t) = \vec{A}(t_0) \text{ когда } \omega t = 2\pi n, n = \pm 1, \dots$$

$n=1$: поле повторится за время $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период волны.

$$2) t=0 \text{ } x_0 \vec{A}(x_0) = \vec{A}_0 e^{i\frac{\omega}{c}x_0}$$

$$x_0 + x : \vec{A}(x_0 + x) = \vec{A}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(x_0 + x)}$$

$\vec{A}(x_0 + x) = \vec{A}(x_0)$ при $\frac{\omega}{c}x = 2\pi n$
найдем, за какое время поле повторится при $n=1$.

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$$

λ - пространственный период

Введем волновой вектор $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$, тогда $\frac{\omega}{c}x \equiv \frac{\omega}{c}\vec{n} \cdot \vec{x}$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{A}_0 - \text{амплитудная часть}$$

$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$ - фаза волны.

Син $\vec{A}$ в таком виде:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\frac{\omega}{c} \vec{A} = ik \vec{A}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \times \vec{A}_0 = ik \times \vec{A}$$

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} = ik \cdot \vec{A} \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{k}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{A} = 0$$

$\omega^2 = c^2 k^2$ - дисперсионное
зр. в дисперсионных
волн. в вакууме.

Поверхностные электроны волно

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \text{Re } \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad \vec{E}_0 = \text{амплитуда} = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2$$

$$\vec{E}_0^2 = \text{ампл}^2 = |\vec{E}_0|^2 \cdot e^{-2id} \quad \text{тогда } \vec{E}_0 = (\vec{E}_1 + i\vec{E}_2) e^{-id}$$

$$\vec{E}_0^2 = |\vec{E}_0|^2 e^{-2id} = (\vec{E}_1 + i\vec{E}_2)^2 e^{-2id} \quad \text{здесь и далее, } (\vec{E}_1 + i\vec{E}_2)^2 = \text{ампл}^2$$

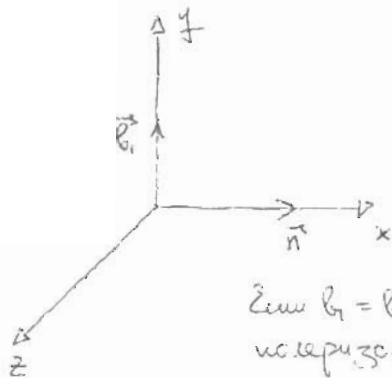
$$(\vec{E}_1 + i\vec{E}_2)^2 = |\vec{E}_0|^2 \quad E_1^2 - E_2^2 + 2i\vec{E}_1 \vec{E}_2 = |\vec{E}_0|^2 \Rightarrow \underline{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0}$$

$$\vec{E}_1 \text{ и } \vec{E}_2 \perp \vec{k} \quad (\text{div } \vec{E} = 0 \text{ сюда нет})$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re } (\vec{E}_1 + i\vec{E}_2) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t - d)}$$

, т.е. $\text{div } \vec{E} = 0$ то по гуд.

$$\text{div } \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \vec{E}_1 = \vec{k} \cdot \vec{E}_2 = 0$$

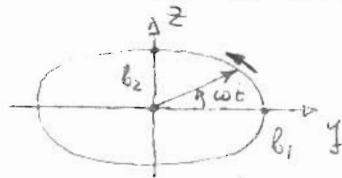


$$E_y = E_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + d)$$

$$E_z = \pm E_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + d)$$

$$\frac{E_1^2}{E_1^2} + \frac{E_2^2}{E_2^2} = 1$$

В м-ции yz $\vec{E}$ вращается
с частотой ω .



Если $E_1 = E_2$ - круговая
поверхность

В 3D с. имеет вид
сферического 2° волн с разн. амплитуд
единица 2° во yz -пл. 1° в xz -пл.

$\omega t \uparrow \sin(\dots) \uparrow \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ против час
стрелки

Аффинная Волна

Введем k -мерный волновой вектор

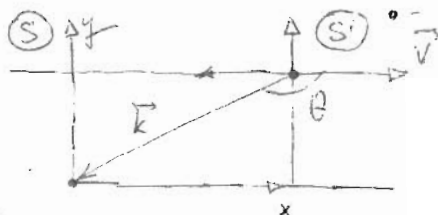
$$\text{Определим его как } k^i(\frac{\omega}{c}, \vec{k}) ; k^i k_i = k^{0^2} - k^{d^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\underline{k^i k_i = 0}$$

$$k_i x^i = k_0 x^0 + k_x x^x = \frac{\omega}{c} ct - \vec{k} \vec{r} = \omega t - \vec{k} \vec{r}$$

Для плоской монохром. волны: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-ik_i x^i}$

S-пл. вол. распространяется в ф.



В роб. ~~не~~ системе источник движется с 2-ой $\omega' = \omega_0 \cos \theta$ 2-го

Преобраз. Лоренца

$$k'^0 = \frac{k^0 - \frac{v}{c} k^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \cdot \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) \text{ источник}$$

$$k_i = k_x = k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta; \quad \omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

$$k'^0 = \frac{\omega_0}{c}, \quad k^0 = \frac{\omega}{c};$$

$$1 - \frac{v}{c} \cos \theta$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{2}, \quad v \ll c \quad \omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

1) θ меняется $0 < \theta < \pi/2$ $\omega > \omega_0$ (растягивание 2-го)

2) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ - источник убегает $\omega < \omega_0$ (сжатие)

Если $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$ обратный эффект Доплера (то источник перпен.)

• Найдём ур-е Максвелла для волн при малом заряде и токе

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (\text{II уравн. М.}) \quad g^{il} g^{km} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = g^{il} g^{km} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \right) =$$

$$= g^{il} g^{km} \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^l \partial x^k} - g^{km} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^m} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \quad \text{Нормировочное уравне}$$

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0)$$

$$\square A^i = -\frac{h\pi}{c} j^i. \text{ Тогда если возмущения год } \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

выберем гср-е

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{h\pi}{c} \vec{j} \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -h\pi g \end{array} \right.$$

Рассуждения все пр-ва не элементарны. Сделаю и рисунки
нак момент. Заряд в момент. Сделаю.

Тогда $\varphi(\vec{r}, t) = \operatorname{dect}(t) \delta(\vec{r})$ $\vec{r}$ - от. центр зарядки, то т-м вект.

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4 \operatorname{dect}(t) \delta(\vec{r})$$

$$1) R \neq 0 \quad \Delta \varphi_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

т.к. зарядки в центре зарядки $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ центр симметрии

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0$$

независимо
но

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R \varphi_1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} (R \varphi_1) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (R \varphi_1) = 0 \Rightarrow \text{решение в виде классических волн.}$$

$$R \varphi_1(t, R) = \chi_1(t - \frac{R}{c}) + \chi_2(t + \frac{R}{c})$$

$$\varphi_1 = \frac{\chi_1(t - \frac{R}{c})}{R} \quad \text{так вот пром}$$

$$2) R \rightarrow 0 \Rightarrow \text{решение комп.}$$

$$\Delta \varphi_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = -h\pi \operatorname{dect}(t) \delta(\vec{r})$$

На границе $\varphi_1 = \varphi_2$, при $R \rightarrow 0$ $\frac{1}{R}$ - растет.

можно $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right| \gg \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| \Rightarrow$ можно пропустить $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}$

тогда $\Delta\varphi = -4\pi g$

$$\varphi = \int \frac{g}{R} dV \xrightarrow{R \rightarrow 0} \varphi_2 = \frac{de(t)}{R}$$

Тогда ~~вектор~~ потенциал φ в виде

$$\varphi = \frac{de(t - \frac{R}{c})}{R} \quad de(t - \frac{R}{c}) = g(\vec{r}, t - \frac{R}{c}) dV$$

Общее решение $\varphi = \int \frac{g(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' + \varphi_0$
 $\varphi(\vec{r}, t) \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$



Аналогичным образом находим

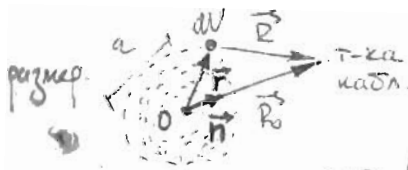
$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' + \vec{A}_0 \\ \varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{g(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' + \varphi_0 \end{cases}$$

На сфер. волн. фронте поле в р-е. Гамильтона $\vec{E}$ и $\vec{B}$ $\Rightarrow$ поле радиально распространяется $\vec{E}$ и $\vec{B}$ $\perp$ $\vec{r}$. Значит, добавим к потенциалу - $\vec{r}$ $\perp$ $\vec{E}$ и $\vec{B}$ $\perp$ $\vec{r}$.

Большой интерес к полю на больших расстояниях.

$$\varphi = \int \frac{g_{t-R/c}}{R} dV, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_{t-R/c}}{R} dV$$

Важно отметить, что поле распространяется с конечной скоростью c . Поэтому поле локализовано.



$$R_0 \gg a, \quad R = \sqrt{(\vec{R}_0 - \vec{r})^2} = \sqrt{R_0^2 - 2\vec{r}\vec{R}_0 + r^2}$$

$$r \leq a$$

$$= R_0 \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{R}_0 \vec{r}}{R_0 R_0}} = R_0 \left(1 - \frac{\vec{r} \vec{R}_0}{R_0}\right) = R_0 - \vec{r} \vec{R}_0$$

описывает (R_0)

$$R_0 \gg a$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{R_0} \int S_{t-\frac{R}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}} dV \\ \vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{J}_{t-\frac{R}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}} dV \end{cases}$$

Но в данных пред. по-л можно рассм. как излучен волны
красн. по-л. волн?

$$\varphi = \frac{\chi(t - R/c)}{R}$$

это не

матрица функции

т.е. амплитуда = $f(R)$

Еще для $R \gg \lambda$, $\frac{e^{i(t - \frac{R}{c})}}{R}$ $t \rightarrow t+T$, $R \rightarrow R+\lambda$ $\frac{e^{i(t+T - \frac{R+\lambda}{c})}}{R+\lambda} = \frac{\chi(t - R/c + \frac{cT - \lambda}{c})}{R+\lambda} = \frac{\chi(t - R/c)}{R+\lambda}$

$$\frac{e^{i(t+T - \frac{R+\lambda}{c})}}{R+\lambda} = \frac{\chi(t - R/c + \frac{cT - \lambda}{c})}{R+\lambda} = \frac{\chi(t - R/c)}{R+\lambda}$$

Еще $R \gg \lambda$ $R + \lambda \approx R$ и для сфер. волн можно рассм. как излучен.

$R \gg \lambda$ - волновые зоны

Для излучен волны: $\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{A} \times \vec{n}$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n}$$

$$\vec{E} = \vec{H} \times \vec{n} = \frac{1}{c} (\vec{A} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

Дифференциальное интенсивность излучения - поток энергии в элемент. тел. угла

$$dI = \vec{S} d\vec{\Omega}$$

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n} \cdot \vec{n} R_0^2 d\Omega$$

$R \gg \lambda \gg a$ при подст. $\vec{A}$ в dI R_0^2 сократить

Вне зависимости $\left| \frac{\vec{r}\vec{n}}{c} \right| \leq \frac{a}{c}$ - не имеет значения

или по времени распределение зарядов излучен не уменьшится

T - время за которое распредел. меняется угу. обрзом

43

$\frac{a}{c} \ll T$ а сс $cT = \lambda$ т.е. если $\frac{a}{c} \ll \lambda$ то временные зм. можно пренебречь.

умень. угу. обрзом $T = \frac{a}{v}$ если $v \ll c$ то $\uparrow$
в скор. заряда

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int j_{tr} dV = \frac{1}{cR_0} \sum e \vec{v}_i = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} \quad (\text{век. поля не сум. из-за-за отл. знаков})$$

($t' = t - R/c$)

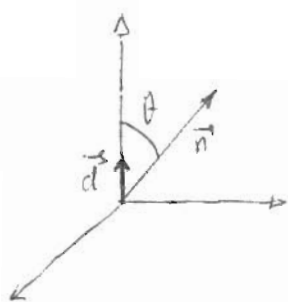
дипольное излучение

$$\begin{cases} \vec{H} = \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \times \vec{n} = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} \\ \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n} = \frac{1}{c^2 R_0} (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \times \vec{n} \end{cases}$$

Какова dI ?

$$dI = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{R_0^2} (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 R_0^2 d\Omega =$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\vec{d}}^2 \sin^2 \theta d\Omega$$



излучение распределено излучением $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\vec{d}}^2 \sin^2 \theta$

$$I = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3} \int \sin^2 \theta d\Omega = \int \sin^2 \theta d\theta d\phi =$$

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{d}}^2 \quad \vec{d} = \sum e \vec{r} \quad \ddot{\vec{d}} = \sum e \ddot{\vec{r}}$$

$$\text{Если } \vec{d} = e \vec{r} \quad I_1 = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}^2, \quad v \ll c$$

Если рассмотреть движение с зарядом $\frac{e}{m_e}$, тогда

$$\vec{d} = \sum e \vec{r} = \frac{e}{m} \sum m \vec{r} = \frac{e}{m} \sum m \vec{r} = \frac{e}{m} \sum m \vec{r}$$

Если $\ddot{\vec{R}}_y = 0 \Rightarrow$ гравитационное излучение отсутствует.

Квадратичное и линейное излучение

Возьмем мед. центр в произвольном для $\vec{n}$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \left\{ \vec{j}_t + \frac{\vec{r}\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{j}_t}{\partial t} + \dots \right\} dV =$$

$$= \frac{1}{cR_0} \int \vec{j}_t dV + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{r}\vec{n}) \vec{j}_t dV =$$

$$= \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \vec{r} (\vec{r}\vec{n}) = \sum \vec{v} \vec{r} (\vec{r}\vec{n}) = \frac{1}{2} \vec{v} \vec{r} (\vec{r}\vec{n}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \vec{r} (\vec{r}\vec{n}) - \frac{1}{2} \vec{r} (\vec{v} \vec{n})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \vec{r} (\vec{r}\vec{n}) + \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{n}$$

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \vec{r} \vec{r} (\vec{r}\vec{n}) + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{n}$$

Т.к. $\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{A} \times \vec{n}$ $\vec{A}' = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e (3\vec{r}(\vec{n} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{n}) + \frac{1}{cR_0} \vec{m} \times \vec{n}$

где $\vec{m} = \sum e \vec{r} \times \vec{v}$

$$D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

$$D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta = \sum e (3x_\alpha (\vec{n} \cdot \vec{r}) - r^2 n_\alpha)$$

$$\vec{D} = \sum e (3\vec{r}(\vec{n} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{n})$$

$$\vec{A}' = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} + \frac{\ddot{\vec{D}}}{6c^2 R_0} + \frac{1}{cR_0} \vec{m} \times \vec{n}; \quad \vec{H} = \frac{1}{c^2 R} \left\{ \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{D}} \times \vec{n} + (\vec{m} \times \vec{n}) \times \vec{n} \right\}$$

$\vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}$ (в левобок)
gone

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 R_0^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \left\{ \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{D}} \times \vec{n} + (\vec{m} \times \vec{n}) \times \vec{n} \right\}^2 d\Omega$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{1}{c^3} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left\{ \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{6c} \dddot{\vec{D}} \times \vec{n} + \vec{n} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) - \ddot{\vec{m}} \right\}^2 =$$

среднее по 4-ому углу по единич. сфере.

$$= \frac{1}{c^3} \left\{ \langle (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 \rangle + \frac{1}{36c^3} \langle (\dddot{\vec{D}} \times \vec{n})^2 \rangle + \langle (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n})^2 \rangle + \frac{1}{3c} \langle (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) (\dddot{\vec{D}} \times \vec{n}) \rangle - \right.$$

$$\left. - 2 \langle \ddot{\vec{m}} (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \rangle - \frac{1}{3c} \langle \ddot{\vec{m}} (\dddot{\vec{D}} \times \vec{n}) \rangle \right.$$

$$\ddot{\vec{D}} = \ddot{D}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$$

$$\sim \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma \rangle = 0.$$

$$\ddot{m}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} \ddot{D}_{\beta\gamma} \langle n_\gamma n_\delta \rangle = \frac{1}{3} \ddot{m}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} \ddot{D}_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\delta} =$$

$$= \frac{1}{3} \ddot{m}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} \ddot{D}_{\beta\gamma} = 0$$

$$A \cdot S = 0$$

$$\langle (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 \rangle = \langle (\ddot{\vec{d}})^2 \rangle - \langle (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}})^2 \rangle$$

$$\langle (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}})^2 \rangle = \langle n_\alpha \ddot{d}_\alpha n_\beta \ddot{d}_\beta \rangle = \ddot{d}_\alpha \ddot{d}_\beta \langle n_\alpha n_\beta \rangle = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \ddot{d}_\alpha \ddot{d}_\beta = \frac{1}{3} \ddot{d}^2$$

$$\langle (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 \rangle = \frac{2}{3} \ddot{d}^2$$

$$\langle (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n})^2 \rangle = \frac{2}{3} \ddot{m}^2 ; \quad \langle (\ddot{\vec{D}} \times \vec{n})^2 \rangle = \ddot{D}^2 - \langle (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{D}})^2 \rangle$$

$$\langle (\ddot{\vec{D}})^2 \rangle = \langle \ddot{D}_\alpha \ddot{D}_\alpha \rangle = \ddot{D}_{\alpha\mu} \ddot{D}_{\alpha\gamma} \langle n_\mu n_\gamma \rangle = \frac{1}{3} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2$$

$$\langle (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{D}})^2 \rangle = \langle n_\alpha \ddot{D}_\alpha n_\beta \ddot{D}_\beta \rangle = \ddot{D}_{\alpha\mu} \ddot{D}_{\beta\gamma} \langle n_\alpha n_\beta n_\mu n_\gamma \rangle$$

Поскольку $\langle n_\alpha n_\beta n_\mu n_\gamma \rangle$ - попарно симм. по всем индексам. симм. попарно 4-ого ранга симм. по всем индексам.

и миним. тензоров мы знаем только $\delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \dots \rangle = b (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\gamma} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\mu}) \quad \delta_{\alpha\mu} \delta_{\mu\alpha} = \delta_{\alpha\alpha}$$

$$\alpha = \beta, \mu = \gamma \quad \text{и пропуск по } \alpha \text{ и } \mu \quad 1 = b (\delta_{\alpha\alpha} \delta_{\mu\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\alpha\mu})$$

$$1 = b (3 \cdot 3 + 2 \cdot 3) \quad b = 1/15$$

$$\ddot{D}_{\alpha\mu} \ddot{D}_{\beta\nu} \langle n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu \rangle = \frac{1}{15} \ddot{D}_{\alpha\mu} \ddot{D}_{\beta\nu} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}) =$$

$$= \frac{1}{15} \left(\ddot{D}_{\alpha\mu} \ddot{D}_{\alpha\mu} + \underset{\substack{\mu \rightarrow \beta \\ 0}}{\ddot{D}_{\alpha\alpha} \ddot{D}_{\beta\beta}} + \underset{\substack{\mu \rightarrow \beta \\ \ddot{D}_{\alpha\beta}}}{\ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\beta\alpha}} \right) = \frac{2}{15} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2$$

$$\langle (\ddot{\vec{D}} \times \vec{n})^2 \rangle = \frac{1}{3} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \frac{2}{15} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \equiv I = \frac{2}{3c^2} \ddot{\vec{d}}^2 + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \frac{2}{3c^3} \dot{\vec{m}}^2$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e \vec{r} \times \vec{v} \sim \frac{v}{c}$$

основной вклад. (в квадрупольной зоне) $v \ll c$ (или) $R \gg \lambda$

$$\text{Если } \frac{e a}{m a} = \text{const}$$

~~гравитационный момент = 0~~

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \vec{M}, \quad \vec{M} \text{ гравит. мом.} = \text{const.}$$

$$\ddot{\vec{M}} = 0 \quad \ddot{\vec{m}} = 0$$

Рассм. излучение группы частиц движущихся с перемещением.
Перейдем в сопутствующую сист. отс. (преобраз. Лоренца)

Рассм. одну частицу r . движущуюся $\vec{v}$ движется к с.

$$\frac{d\varepsilon'}{dt'} \equiv I' = \frac{2e^2}{3c^3} (\ddot{\vec{r}}')^2$$

$$\text{В лоб. сист. } d\varepsilon = \frac{d\varepsilon' + \vec{v} \cdot d\vec{p}'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

при гравитационном излучении $d\vec{p}' = 0$.

излучение
в э. вращ.
в объеме

$$= \oint T_{\alpha\beta} n_\beta ds = \frac{1}{4\pi} \oint \left(-E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} H_\alpha H_\beta + \frac{E^2 + H^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) n_\beta ds = r$$

В волн. зоне E, H -поля $\vec{E}, \vec{H} \cdot \vec{n} = 0$
векторы

$$ds = R_0^2 d\Omega$$

тип гравитационного излучения $H^2 = \frac{1}{c^2} (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2$

45

$$\dots = \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 n_d = \frac{1}{c^2} \langle (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 n_d \rangle = 0 \Rightarrow d\vec{p} = 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{d\varepsilon'}{dt'} = I' \quad I = I' \quad \text{гравитационное излучение}$$

излучается во всех направлениях

$$d\vec{p} = \frac{O \cdot d\vec{p}' + \frac{\vec{v}}{c^2} d\varepsilon'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d\varepsilon'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d\varepsilon'}{dt'} = \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{du^i}{ds} \frac{du_i}{ds} = - \frac{(\dot{\vec{v}})^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2}{c^4 (1-\frac{v^2}{c^2})^3} \quad \text{в инерц. сист.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{в конформ.} \quad \vec{v}' = 0 \\ \text{сист.} \quad \dot{\vec{v}}' \neq 0 \end{array} \right\}$$

(добавь $s = s'$)

$$\frac{du'^i}{ds'} \frac{du'_i}{ds'} = - \frac{(\dot{\vec{v}}')^2}{c^4}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(-c^4 \frac{du^i}{ds} \frac{du_i}{ds} \right) = - \frac{2e^2 c}{3} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds}$$

В Л-сист.

В Л-сист.

$$\Delta\varepsilon = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\dot{\vec{v}})^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})^3} dt$$

Эта ф-ла неудобна для расч. т.к. надо
перейти к $\vec{v}$ и $\dot{\vec{v}}$. В расч. задан
бегущий нос $\Rightarrow$ перейти к ф-ле
для переменных s - γ нос.

$$\Delta\varepsilon = - \frac{2e^2 c}{3c^3} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dt = - \frac{2e^2 c}{3c^3} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} dt =$$

$$\Delta\varepsilon = - \frac{2e^2 c}{3c^3} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} u^0 ds$$

$$\Delta p^\alpha = -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-v^2}} \cdot c\sqrt{1-v^2} dt = -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} u^\alpha ds$$

Тогда $\Delta \varepsilon$ и Δp^α можно обобщить.

$$\Delta p^i = -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} u^i ds = -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i$$

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k = \frac{dp^i}{ds}$$

$$\frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} = \frac{1}{m^2 c^2} \frac{dp^k}{ds} \frac{dp_k}{ds} = \frac{1}{m^2 c^2} \left(\frac{dp^\alpha}{ds} \frac{dp_\alpha}{ds} + \frac{dp^0}{ds} \frac{dp_0}{ds} \right) =$$

$$= \frac{1}{m^2 c^4} \frac{1}{1-v^2/c^2} \left\{ -\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\varepsilon_k}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{d\varepsilon_k}{dt} = e \vec{E} \vec{v} =$$

$$= \frac{1}{m^2 c^4} \frac{1}{1-v^2/c^2} \left\{ e^2 \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right)^2 - \frac{e^2}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E})^2 \right\}$$

$$\Delta \varepsilon = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \int \frac{(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H})^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Усреднение по времени.

$$\Delta \varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} I dt \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \frac{(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H})^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

При $v \rightarrow c$ $\frac{d\varepsilon}{dt} \sim (\text{магнитное излучение})^2$ - излучение ускор.

С. когда $\vec{E} \parallel \vec{v}$, $\vec{H} = 0$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = \text{const}$ - индукционный ускор.

Ищем поле в точке наблюдения на расстоянии r от центра заряда. 46
 Излучение порождает электромагнитное поле - электромагнитное поле
 Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны друг другу. Будем считать, что
 заряд движется с постоянной скоростью v (для $v \ll c$).

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} - e_a \varphi + \frac{e_a}{c} \vec{v}_a \vec{A} ; \varphi, \vec{A} - \text{скалярное и векторное потенциалы}$$

$$\varphi = \int \frac{\rho - R/c}{R} dV, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} - R/c}{R} dV$$

$$\varphi = \int dV \frac{1}{R} \left\{ \rho - \frac{R}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{R^2}{2c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{R^3}{6c^3} \frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3} + \dots \right\}; \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int dV \frac{1}{R} \left\{ \vec{j} - \frac{R}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \dots \right\}$$

$$\sim \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = 0 \quad 1) \varphi_a = \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}}; \quad L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{b \neq a} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

2) если оставить инерционные $\sim \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow$

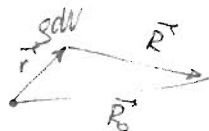
$\Rightarrow L$ будет функцией скоростей и взаимных расстояний.

3) если оставить $\sim 1/c^3$ в L полев. част сравнимой по энергии, с кинетической энергией заряда. Т.е. полев. члены $\sim$ энергии заряда

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \rho R^2 dV; \quad \varphi' = \varphi^{(3)} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{j} dV; \quad -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \rho R^2 dV - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$$

$$f = -\frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho R^2 dV =$$



$$= -\frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e (\vec{R}_0 - \vec{r}(t))^2$$

$$\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r} \quad \rho = \sum e \delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$$

$$\vec{A}' = \vec{A}^{(1)} + \text{grad} f = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{j} dV - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho \vec{R} dV =$$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \vec{v} - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e (\vec{R}_0 - \vec{r}) = -\frac{1}{c^2} \sum e \ddot{\vec{r}} + \frac{1}{3c^2} \sum e \ddot{\vec{r}} = -\frac{2}{3c^2} \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}' = 0; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{f} = e \vec{E} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \quad \text{сила излучения}$$

$$\text{Мощность} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$\langle \Sigma \vec{f} \vec{v} \rangle = \frac{2}{3c^3} \overline{\ddot{\vec{d}} \Sigma e \vec{v}} = \frac{2}{3c^2} \langle \ddot{\vec{d}} \dot{\vec{d}} \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{2}{3c^3} \dot{\vec{d}} \ddot{\vec{d}} \right\rangle - \frac{2}{3c^3} (\ddot{\vec{d}})^2 < 0$$

Сила нулевого порядка идет на 1-й шаг

$$\vec{f}_1 = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} ; \quad m\dot{\vec{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} , \quad \ddot{\vec{v}} = \frac{3mc^3}{2e^2} \dot{\vec{v}}$$

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0 e^{\frac{3mc^3}{2e^2} t} \quad \text{это справедливо когда сила не тр. должна быть малой по сравнению с внешними силами.}$$

Куда же по формуле?

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} \quad \text{будем считать}$$

Будем считать воздействие $\approx$ -м.

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{mc} \vec{v} \times \vec{H} + \frac{e}{mc} \vec{v} \times \vec{H} \rightarrow 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{расс в момент} \\ \text{существования} \\ \text{мгн.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{v}=0 \\ \vec{v} \neq 0 \end{array}$$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \vec{E} \quad (\text{в этой системе}).$$

$$\ddot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{m^2 c} \vec{E} \times \vec{H} \quad \vec{f} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\vec{E}} + \frac{2e^4}{3m^2 c^4} \vec{E} \times \vec{H} + \dots$$

$$|\vec{f}| \ll |e\vec{E}| ; \quad \frac{e^3}{mc^3} \omega E \ll eE ; \quad \frac{e^2}{mc^2} \frac{\omega}{c} \ll 1 \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$2) \frac{e^4}{m^2 c^4} EH \ll eE$$

$$1) \frac{r_0}{\lambda} \ll 1 \quad \text{условие применимости кл. электр.}$$

$$H \ll \frac{m^2 c^4}{e^3} ; \quad \frac{eH}{mc} \ll \frac{mc^3}{e^2}$$

$$\omega_H \ll \frac{mc^3}{e^2} ; \quad \frac{c}{\omega_H} \gg \frac{e^2}{mc^2} \quad \lambda_H \gg r_0$$

то можно получить по-гр.

$$\hbar \omega_H \ll \frac{\hbar c}{e^2} mc^2 \quad \frac{\hbar \omega_H}{mc^2} \ll \frac{\hbar c}{e^2} = 137$$

Однако в рф. проявл. уже когда $\hbar \omega_H \sim mc^2$

Класс электродинамика применима $\hbar \omega_H \ll mc^2$

Угтем мну мучистого тремия при колебании оциллатора.
Рассм мнелитий перелитив оциллатор

$m\ddot{x} = -kx + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}$; $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{x}$ методом последовательных $\approx$ -ит мнелитий

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$; $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$;

$\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} \frac{\omega_0}{2\pi} \omega_0 = \frac{4\pi}{3} r_0 \lambda_0 \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$

$x(t) = x_0 e^{pt}$

$(p^2 + \gamma p + \omega_0^2)x_0 = 0$

$p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ $\xrightarrow{\gamma \ll \omega_0}$

$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t}$

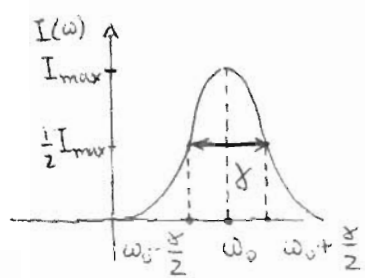
среднее значение $\langle W \rangle = m(\langle \dot{x}^2 \rangle + \omega_0^2 \langle x^2 \rangle) = W_0 e^{-\gamma t} + \dots$ $\tau = \frac{1}{\gamma}$ время жизни оциллатора.
Уменьшение и угашение оциллатора.

$\vec{E} \sim \ddot{x}$ $\vec{E}(t) = \begin{cases} \vec{E}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t} , & t \geq 0 \\ 0 , & t < 0 \end{cases}$

$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$; $\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{i\omega t} dt =$

$= \frac{\vec{E}_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t - \frac{\gamma}{2}t} dt = \frac{\vec{E}_0}{2\pi} \frac{1}{-i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}}$; $I(\omega) \sim |\vec{E}(\omega)|^2$

причем I_0 выбираем так, чтобы $I(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} I_0 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$



$\int I(\omega) d\omega = I_0$

В тех же $\omega - \omega_0 = \pm \frac{\gamma}{2}$ $I = \frac{1}{2} I_{max}$

$\gamma = \frac{1}{\tau}$, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ $|\Delta\lambda| = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \gamma =$

$= \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \cdot \frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2 = \frac{4\pi}{3} r_0 = 1.18 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$

Мы наблюдаем ширину не меньше чем $\nearrow$

Магнитно-тормозное излучение.

Если нет излучения, то движ. по окр. в $\vec{H}$ значит ∞ -долго.

Ранее получили

$$I = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H})^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

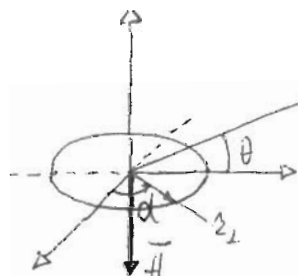
Если $\vec{E} = 0, \vec{H} \neq 0$

излучение заряда
движущегося по
окр. в $\vec{H}$

$$I = \frac{2e^4 v^2 H^2}{3m^2 c^5 (1 - \frac{v^2}{c^2})} \rho_{\perp}^2 \cdot B \text{ изгл. поле}$$

$$\omega_H = \frac{e c H}{E_k}$$

$$\omega_L = \frac{c \rho_{\perp}}{a H} \Rightarrow \frac{v_{\perp}}{\omega_H}$$



$\vec{n}$ - направление
кас. к-му крив.

Если изгл. усреднить по

периоду $T = \frac{2\pi}{\omega_H}$ (исключая зав-сть от α), тогда:

$$A = \frac{(\alpha \bar{I} / d\alpha)_{\theta=0}}{(\alpha \bar{I} / d\alpha)_{\theta=\pi/2}} = \frac{4 + \frac{v^2}{c^2}}{8(1 - \frac{v^2}{c^2})^{5/2}}$$

$$v \ll c: A \sim \frac{1}{2}$$

$v \sim c: A \rightarrow \infty$ $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - v^2/c^2}$ - излучение в основном сосред. в н-сти орбиты.

Рассеяние света на заряженных частицах.

Под действием поле волны заряды приходят в движение они начинают двиг. с ускорением начинают излучать во всех направлениях. Этот процесс удобно характеризовать сечением рассеяния.

$$dG = \frac{dI}{S_0}$$

$$[dI] = \frac{7 \text{ pI}}{\text{сек}}$$

$$[S_0] =$$

$\overline{dI}$ - усредненная
по направлению интен-
сификация в элемент.
телесного угла

S_0 - усред. по направлению
мощность потока

Пусть на единичный заряд нагнем мк. электромагнитная волна

v - скорость приобретаемая $\ll c$; $\vec{p}$ - е-е движ. радиус.
частицы под действием
поля

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

поле : $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t + d)$

$|\vec{k} \vec{r}| \sim \frac{\omega}{c} vt = \frac{v}{c} \omega t \ll \omega t \Rightarrow \vec{k} \vec{r}$ - можно пренебречь по
т.е. колебание в p -не негн. срав с ωt .
коорд.

В плоской волне

$|\vec{H}| \sim |\vec{E}| \Rightarrow$ можно $\frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$ по $e \vec{E}$.
пренебречь

Т.е. получим $\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \vec{E}$

dI где $\vec{d}$ - дипольный момент = $dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 d\Omega$ $\ddot{\vec{d}} = e \ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m} \vec{E}$.
усреднение

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\vec{d}}^2 \sin^2 \theta d\Omega = \frac{e^4 E^2}{4\pi m^2 c^3} \sin^2 \theta d\Omega = \frac{c E^2}{4\pi} \left(\frac{e}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega$$

θ - угол м-д $\vec{n}$ и $\vec{E}$; S_0 где плоской волны $S_0 = c W_0 = \frac{c E^2}{4\pi}$

Т.о. $dG = \sin^2 \theta d\Omega$

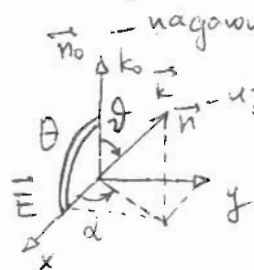
$\sin^2 \theta$ - класс. радиус частицы

Дифф. рассеяние рас. мк. полем волны на неподвижном (вызване)
заряде не зависит от λ -той падающей волны.

Полное сечение рассеяния $\sigma = \frac{1}{4\pi} \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2$; ф-ла Томсона

Какое будет сечение если поймаем е-ов. волн (непоперек)?

Для е-ов. света $\vec{k}_0$ углов и том, а $\vec{E}$ имеет равномер. напр.



Надо усреднить по углу α , т.е.

надо найти $\langle \sin^2 \theta \rangle$

с оди стороны: $\vec{n} \cdot \vec{E} = E \cos \theta$; с др. $\vec{n} \cdot \vec{E} = E_x n_x = E \sin \theta \cos \alpha$
приравняем $\cos \theta = \sin \theta \cos \alpha$

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = 1 - \langle \cos^2 \theta \rangle = 1 - \sin^2 \theta \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1 - \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \{ 2 - (1 - \cos^2 \theta) \} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

• Рассеяние линейно поляризов. волн зарядом осциллятора.

$$\langle dI \rangle = \frac{1}{4\pi c^3} \langle (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 \rangle d\Omega$$

расс. упр-е гравит. $m \ddot{\vec{z}} = -k \vec{z} + e \vec{E} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{z}}$

(сила упругого трения)

т.к. нагрели линейно поляризов. волну тогда см. ранее действие $\vec{H}$ перейдет, а $\vec{E} = \vec{E}(t)$.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{\vec{z}} + \omega_0 \vec{z} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{z}}$$

Методом послед. $\approx -i\omega$: $\ddot{\vec{z}} = -\omega_0 \vec{z}$ и подставим.

$$\ddot{\vec{z}} + \gamma \dot{\vec{z}} + \omega_0^2 \vec{z} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \text{ у нас } \vec{z}(t) = \vec{z}_0 e^{-i\omega t}$$

перенесем в левую часть

$$\vec{z}_0 = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad \gamma = \frac{2e^2}{3c^3 m} \omega_0^2 \ll \omega_0$$

тогда $\vec{z}(t) = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$; $\vec{d} = e\vec{r} = \frac{e^2 \vec{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$

$$\langle dI \rangle = \frac{1}{4\pi c^3} \langle \ddot{\vec{d}}^2 \rangle \sin^2 \theta d\theta \quad \ddot{\vec{d}} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \cdot \frac{e^2}{m} \vec{E}(t)$$

$$A(t) = A_0 e^{-i\omega t} \quad B(t) = B_0 e^{-i\omega t} \quad \langle A(t) B(t) \rangle = ? \text{ б. нам нужно,}$$

надо брать среднее $\langle \text{Re} A(t) \cdot \text{Re} B(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{4} (A_0 e^{-i\omega t} + A_0^* e^{i\omega t}) (B_0 e^{-i\omega t} + B_0^* e^{i\omega t}) \right\rangle$

$$= \frac{1}{4} \left\langle \left(A_0 B_0 e^{-2i\omega t} + A_0 B_0^* + A_0^* B_0 + A_0^* B_0^* e^{2i\omega t} \right) \right\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

↑
но не устроит.
(не просят). Замена) = 0

$$= \frac{1}{2} \text{Re}(A_0 B_0^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \langle A(t) \cdot B^*(t) \rangle$$

Если $A=B$: $\langle AB \rangle = \langle A^2 \rangle = \frac{1}{2} |A|^2$

$$\langle dI \rangle = \frac{1}{4\pi c^3} \cdot \frac{1}{2} |\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{|\vec{E}|^2}{8\pi c^3} \frac{e^4}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \sin^2 \theta d\theta$$

$$\langle S_0 \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2$$

$$d\sigma = \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \sin^2 \theta d\theta ; \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$1) \omega \ll \omega_0$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

Релевское рассеяние.

$$2) \omega \gg \omega_0$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

Томсоновское рассеяние

$\approx$ рассеяние мин.

потери волны
на неподвижном
заряде

$$3) \omega \approx \omega_0$$

$$\frac{\omega^2}{\gamma^2} \gg 1$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^2}{\gamma^2}$$

резонансное
рассеяние.

• Геометрическая оптика

Плоская волна $f = f_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

реальная волна $f(t, \vec{r}) = a(t, \vec{r}) e^{i\varphi(t, \vec{r})}$

Иногда реальную волну в некот-ых участках пр-ва
можно рассм. как плоскую.

Для малых времени и участков пр-ва

$$\varphi(t, \vec{r}) = \varphi_0 + t \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} + \dots$$

Если $a(t, \vec{r})$ мало меняется на прот. $\approx \lambda$,

$\lambda \frac{\partial a}{\partial x}$ - изменение амплитуды
на длине волны.

$$|\lambda \frac{\partial a}{\partial x}| \ll a$$

Пусть L - длина на кот-ой
меняется параметр.

$$\lambda \frac{a}{L} \ll a$$

$$\boxed{\lambda \ll L}$$

$$f = a e^{i(\varphi_0 + t \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{r} \text{grad} \varphi)}$$

$$\vec{k} = \text{grad} \varphi \quad \omega = - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

φ - фазовый; Рассеяние на ком-ых волнах можно считать
плоскост. $\lambda \ll x \ll L$.

$$g^{ik} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k} = g^{ik} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k} + i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + i \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + i \psi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right) i \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right\} e^{i\psi} = 0$$

Учитывая то что ψ - большая величина получим ур-е Гюксона

Оптика - механические аналогии

Механика

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0$$

$$\vec{p} = \text{grad } S, \quad E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}}$$

Оптика

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0$$

$$\vec{k} = \text{grad } \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\vec{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}, \quad \dot{\vec{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}}$$

В вакууме $\vec{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = c \frac{\vec{k}}{k}$;
 $\omega = ck$

$$\dot{\vec{k}} = 0$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) e^{i\psi(\vec{r}, t)}$$

Если мы рассматриваем поле в узкой
 т-ке ~~малой~~ нр-ва

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} - \text{какова ее степень монохроматичности.}$$

$$\vec{E}(t) = \int \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

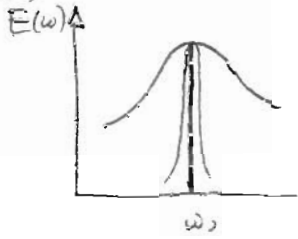
$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

$$\vec{E}_0(t) = \vec{E}_0 = \text{const} \quad \vec{E}(\omega) = E_0 \delta(\omega - \omega_0)$$

Если $\vec{E}_0 \neq f(t)$ поле монохроматическое.

Если $\Delta t \gg$ время увеличения фазы $= \frac{1}{|\omega - \omega_0|}$ неограниченно меняющаяся амплитуда.

$\Delta t \gtrsim \frac{1}{|\omega - \omega_0|}$ - в амплитуде есть все ω_0 и другие Фурье-компоненты



Т.е. критерий монохроматичности.

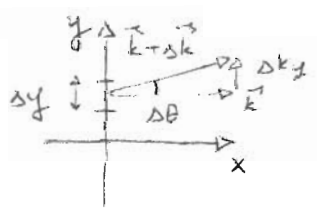
$$\Delta t \Delta \omega \gtrsim 1$$

Пусть $t = \text{const}$ $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}}$

$$\begin{cases} \Delta k_x \Delta x \gtrsim 1 \\ \Delta k_y \Delta y \gtrsim 1 \\ \Delta k_z \Delta z \gtrsim 1 \end{cases}$$

*
если в точ.
т.е. радиал
источника

Δt разброс частот $\Delta \omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}$



$$\Delta \theta \cdot k \gtrsim \frac{1}{\Delta y} \quad \Delta \theta \gtrsim \frac{1}{k \cdot \Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}$$

$\lambda < \Delta y$ - геометрич. оптика
 $\gtrsim$ - нет.



$$\Delta y \gtrsim \frac{1}{k \Delta \theta} = \frac{\lambda}{\Delta \theta}$$

увеличение не точки, а протяженности

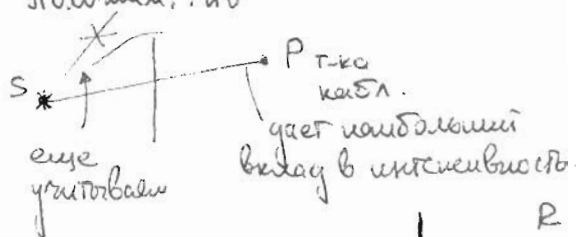
• Дифракционные явления.

Дифф. явл. связаны с конечностью числа волн.
Чем больше λ тем сильнее проявл. дифф. явления.

Задаем источник, края, надо найти интенсивность в V т.е.

Будем считать малые дифр. эл. . Все характерные $\Rightarrow \lambda$
 размером (L).

Положим, что



Р — точка кабл.

$$U_P \sim U$$

$$U_P \sim \text{кол-во дельт проходящего } r-g \text{ } ds. \text{ т.е.}$$

$$U_P \sim ds_n$$

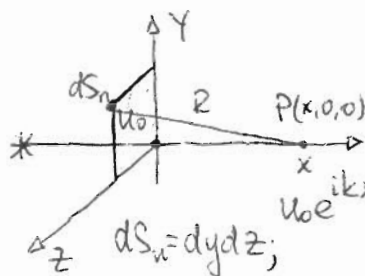
U — поле в отверстии
 (как если бы экран не было)

По принципу Гюйгенса каждая т.-ка нашей пов-сти будет источником сферич. волн.

$$U_P = a \int \frac{U e^{ikR}}{R} ds_n \quad a = ?$$

У того $U_P \sim U \cdot ds_n \cdot \frac{e^{ikR}}{R}$

Максимум — при наименьшем Δ — 0.



$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{x^2}}$$

$U_0 e^{ikx}$ — фаз экрана; при $x \gg y, z$

$$R \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

$$U_P = a U_0 e^{ikx} \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{y^2}{2x}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{z^2}{2x}} dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{y^2}{2x}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \sqrt{\frac{k}{2x}} d\xi = \sqrt{\frac{2x}{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{2x}{k}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \xi^2 d\xi \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2x}{k}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i)$$

$$U_P = a U_0 \frac{e^{ikx}}{x} \cdot \frac{\pi x}{k} \cdot 2i = U_0 e^{ikx}$$

$$a = \frac{k}{2\pi i}$$

$$U_P = \frac{k}{2\pi i} \int \frac{U_e}{R} dS_n$$

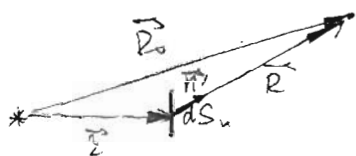
Различают два вида дифр: 1) когда при δ -ти существенна волновая теория (дифракция Френеля)

2) когда расстояние от источника до экрана и от экрана до ~~наблюдателя~~ точки наблюдения бесконечно.

На больших расст от источника падает $\parallel$ -ый пучок света (плоская волна)

Каждый π -г пучок - источник сфер. волн, но на больших расст эти сфер. волны - плоские.
(дифракция Фраунгофера)

Дома найти $I_P = f(\text{угол дифракции})$



На dS_n поле - $U_e e^{i\vec{k}\vec{r}}$

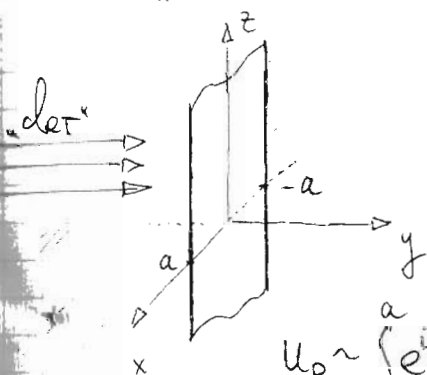
$$\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r} \cdot \vec{n}$$

$$R \approx R_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}$$

$$U_P = \frac{k U_e e^{i k R_0}}{2\pi i R_0} \int e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - i k \vec{n} \cdot \vec{r}} dS_n$$

$$U_P \sim \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} dS_n$$

$$k \vec{n} \equiv \vec{k}'$$



Элемент площади $dx dz$.

$$U_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{i(k_z - k'_z)z} \int_{-a}^{+a} dx e^{i(k_x - k'_x)x}$$

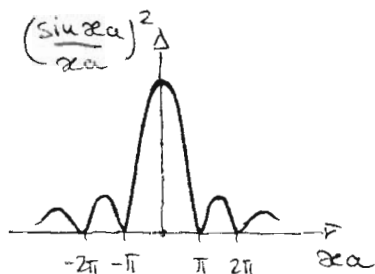
Этот $\int$ упрощается на 2π есть δ -функция

$$U_P \sim \int_{-a}^{+a} e^{i\alpha x} dx = \frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha} \Big|_{-a}^{+a} \sim \frac{\sin \alpha a}{\alpha a}$$

$\alpha = k_x - k'_x \sim \text{угол дифракции}$

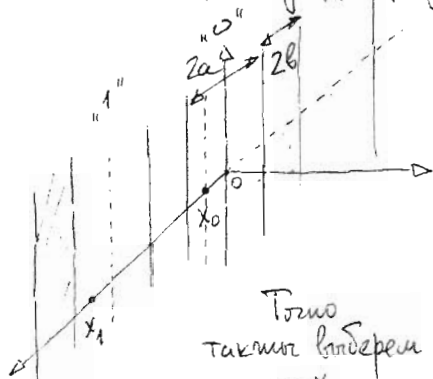
$$dI = I_0 \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \right)^2 d\alpha$$

I_0 - полная интенсивность света падающего на щель.



при $\alpha a = n\pi$,
где $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ - нули функции.

Рассмотрим дифф. Фраунгофера на дифракционной решетке.



В n -ой щели $dx_n dz_n$.

$$U_p \sim \sum_{n=0}^{N-1} \int e^{i(kx - k'_x)x_n} dx_n$$

$$k_z = k_z \quad k_x - k'_x = \alpha$$

$$x_1 = x_0 + 2(a+b) \quad \text{обозначим } a+b=d$$

$$x_1 = x_0 + 2d$$

Точно
таким образом
т.е. x_2 .

$$x_2 = x_0 + 2 \cdot 2d$$

$$x_n = x_0 + n \cdot 2d$$

~~$U_p \sim \int$~~ $U_p \sim \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\alpha x_n 2d} \underbrace{\int e^{i\alpha x_0} dx_0}_{U_0} \sim U_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2n\alpha d}$ - прогрессия.

$$1 + e^{i2\alpha d} + e^{i4\alpha d} + \dots \quad - \text{берем } N \text{ членов.}$$

$$u_1 = 1 \quad q = e^{i2\alpha d}$$

$$S_N = \frac{q_1(q^N - 1)}{q - 1} = \frac{e^{iN\alpha 2d} - 1}{e^{i\alpha 2d} - 1}$$

$$= \frac{e^{iN\alpha d}}{e^{i\alpha d}} \cdot \frac{e^{iN\alpha d} - e^{-iN\alpha d}}{e^{i\alpha d} - e^{-i\alpha d}} = \frac{e^{iN\alpha d}}{e^{i\alpha d}} \cdot \frac{\sin N\alpha d}{\sin \alpha d}$$

$$dI \sim |U_p|^2$$

$$dI = \frac{I_0}{N} \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha d}{\sin \alpha d} \right)^2 d\alpha$$

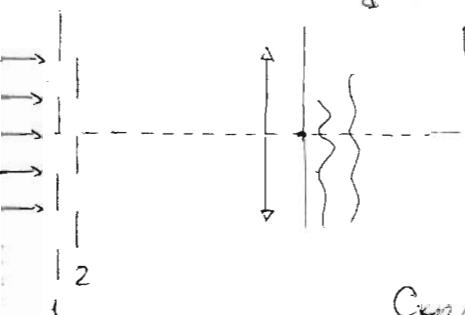
Рассмотрим при $\alpha d = \pi n + d$ - брэгги n -ого максимума 53
 $d \ll 1$

$$\sin N\alpha d = \sin(N\pi n + Nd) = \frac{\sin N\pi n \cos Nd + \cos N\pi n \sin Nd}{1}$$

$$\sin \alpha d = \cos n\pi \sin d = \cos n\pi \cdot d$$

$$dI_n = I_0 \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi n \frac{a}{d})}{\pi n \frac{a}{d}} \right)^2 \frac{\sin^2 Nd}{Nd^2} \frac{d\alpha}{d} ; \quad \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Nd}{Nd^2} = \delta(\alpha) ;$$

$$I_n = I_0 \frac{a}{d} \left(\frac{\sin(\pi n \frac{a}{d})}{\pi n \frac{a}{d}} \right)^2$$



$$U_1 \sim \int_{S_1} \dots dS_n \quad U_2 \sim \int_{S_2} \dots dS_n \quad |U_1|^2 = |U_2|^2$$

$$U_1 + U_1 = \int \dots dS_n = 0 \text{ кроме фазы}$$

открыт.
плоскость (принцип Баджи)

Сколько света поглотилось телом
 столько же света притерпело дифф



Когда мы рассматриваем рассеивание

$$\sigma = \frac{\bar{I}}{\bar{S}_0}$$

$\bar{I}$ - излученное излучение = отраженное и поглощенное

$$\bar{I} = \sigma \bar{S}_0 = \sigma \cdot c \bar{W}_0$$

излученный
излучение

$$\Delta p = \frac{\bar{I}}{c} = \sigma \cdot c \bar{W}_0$$

но при рассеивании
излучения излучение не
излучается

Значит сила $f = \sigma \bar{W}_0 = \sigma \cdot \frac{E^2}{4\pi}$

Эту силу можно получить усредненное силу лоренцского трения.

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{2e^3}{3mc} \langle \vec{E} \rangle + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle = \frac{2}{3} \epsilon_0 \frac{\langle E^2 \rangle}{4\pi} \vec{n} \frac{4\pi}{4\pi} = \frac{8\pi}{3} \epsilon_0 \frac{\langle E^2 \rangle}{4\pi} \vec{n}$$

среднее значение
перпендикул. величины

Т.е. сила действует в направлении
находящегося волны.

• Расово излучение в длинной зоне.

Сист. зарядов с мн. размерами a .

Если $R_0 \gg a$: $\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j}_{t-\frac{R_0}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{c}} dV$

R_0 - от центра коорд
до т-ки набл.

Если $\lambda \gg a$ - можно во времени замораживать
($v \ll c$) возмущение $\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{c}$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j}_t dV = \frac{\vec{j}}{cR_0}$$

$R_0 \gg \lambda$ (ван. зона) мож. получить квазистатическое, ~~электростатическое~~ излучение.

Если $R_0 \gg \lambda \Rightarrow$ надо учитывать скалярный потенциал

усл. Лоренца $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{div} \frac{\vec{d}t'}{cR_0} + \varphi \right\} = 0$

$\varphi = -\text{div} \frac{\vec{d}t'}{cR_0}$, $t' = t - \frac{R_0}{c}$; $\vec{E} = -\frac{\vec{d}t'}{cR_0}$ тогда

$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \frac{\vec{d}t'}{R_0}$

$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi =$

$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\vec{d}t - R_0/c}{R_0} + \text{grad} \text{div} \frac{\vec{d}t - R_0/c}{R_0} = \text{rot rot} \frac{\vec{d}t'}{R_0} + \underbrace{\left(\Delta \frac{\vec{d}t'}{R_0} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\vec{d}t'}{R_0} \right)}_{=0}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{d}(t) = \vec{d}_0 e^{-i\omega t} \quad \vec{d}(t - \frac{R_0}{c}) = \vec{d}_0 e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} = \vec{d}_0 e^{ikR_0 - i\omega t}$$

$$\text{rot}(\frac{\vec{d}}{R_0}) = \nabla \times \frac{e^{ikR_0 - i\omega t}}{R_0} \vec{d}_0 = \left\{ \frac{ik \vec{R}_0}{R_0} - \frac{1}{R_0^2} \right\} e^{ikR_0 - i\omega t} \times \vec{d}_0 = \frac{ikR_0 - 1}{R_0^2} \vec{n} \times \vec{d}_0$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot}(\frac{\vec{d}}{R_0}) &= \nabla \times \frac{ikR_0 - 1}{R_0^3} e^{ikR_0 - i\omega t} (\vec{R}_0 \times \vec{d}_0) = \left\{ \frac{ik \vec{R}_0}{R_0^3} - 3 \frac{1}{R_0^4} \frac{\vec{R}_0}{R_0} (ikR_0 - 1) + \right. \\ &+ ik \frac{\vec{R}_0}{R_0} \cdot \frac{ikR_0 - 1}{R_0^3} \left. \right\} \times (\vec{R}_0 \times \vec{d}_0) + \frac{ikR_0 - 1}{R_0^3} \nabla \times (\vec{R}_0 \times \vec{d}_0) = \\ &\quad \text{(запасание)} \quad \text{(свойство векторного произведения)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R_0^3} \left\{ ikR_0 - 3ikR_0 + 3 - k^2 R_0^2 - ikR_0 \right\} \cdot \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{d}) - 2 \vec{d} \frac{ikR_0 - 1}{R_0^3} =$$

$$= - \frac{\vec{d}}{R_0^3} \left\{ -3ikR_0 + 3 + 2ikR_0 - 2 \right\} + \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{d})}{R_0^3} \left\{ -k^2 R_0^2 - 3ikR_0 + 3 \right\}$$

$$\text{rot rot} \frac{\vec{d}}{R_0} = \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{d})}{R_0^3} (-k^2 R_0^2 - 3ikR_0 + 3) + \frac{\vec{d}}{R_0^3} (ikR_0 - 1)$$

$$\vec{H} = \frac{k^2 R_0^2 + ikR_0}{R_0^3} \vec{n} \times \vec{d} \quad 1) \quad kR_0 \ll 1 \quad \left(\frac{\omega R_0}{c} = 2\pi \frac{R_0}{\lambda} \ll 1 \right)$$

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{R_0^3} \quad \vec{H} = \frac{ikR_0}{R_0^3} \vec{n} \times \vec{d} \ll \vec{E}$$

$$2) \quad kR_0 \gg 1 \quad (R_0 \gg \lambda)$$