

Электродинамика сплошных сред.

Обозначим микрополе $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и запишем ур-е кот-ыми мы пользуемся в вакууме

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

Т.к. e^- движется очень быстро, то поле $\vec{E}$ и $\vec{H}$ очень быстро меняются в пространстве и во времени.

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{div} \vec{H} = 0$$

Эти изменения невозможно отследить приборами. Нужно избавиться от неровности связанной с атомным строением ве-ва.

Три вектора внеш. поле создают дополнительное поле

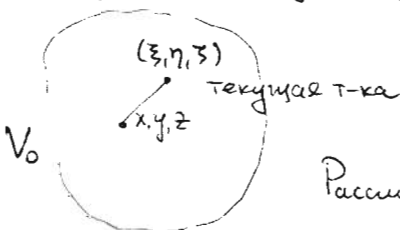
Характерными размерами могут быть: длина волны внешнего поле, L -размер образца, характерный размер атома L_A .

l -размер на кот-ом мы делаем микрополе $L_A \ll l_0 \ll L$
(на нем мы будем усреднять)

Каждо выделим физически малый объем, таких размеров, что при усреднении исчезают неровности св-з. с атом. строен, а L - остается.

Усреднение по времени $\tau_A \ll \tau_0 \ll T$ (период внешнего поле).

Тогда
$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\zeta \vec{E}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau)$$



$$\vec{E}(x, y, z, t) \equiv \vec{E}$$

Как получить ур-е для макронполя?

Рассмотрим
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\zeta \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau)$$

Т.к. $\int_0^{\tau_0} d\tau \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$ возмощим.

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\zeta \vec{E}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}$$

Такие образом $\vec{h} \equiv \vec{B}$, тогда запишем
3-макроскоп. магн. поле

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{S} \vec{v}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \vec{\rho} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Эти микр. ур-ния будут полны, когда $\vec{S}$ и $\vec{S} \vec{v}$ — э-м поле.
Самое точное описание (но более сложное) кинетическое описание
учитывая состояние в-ва. Менее точн. с помощью модельных
представлений в-ва. Еще имеются статистические и связанные заряды

тогда $\vec{S} = \vec{S} + \vec{S} \phi$. $\vec{S} \vec{v} = \vec{j} + (\vec{S} \vec{v}) \phi$. $\vec{S}, \vec{j}$ — заряды.

Что собой представляет собой плотность связанных токов?
Поток действ. внем поле прехл. намагниченности в-ва

$$\vec{P} \equiv \frac{1}{V} \sum \vec{d} \quad \text{средний дипольный момент единиц объема в-ва}$$

$$\vec{j}_{\text{поверх.}} = \frac{1}{V} \int (\vec{S} \vec{v}) \phi dV = \frac{1}{V} \sum \frac{1}{V} \int \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) dV =$$

$$= \frac{1}{V} \sum e \vec{v} = \frac{1}{V} \sum e \dot{\vec{z}} = \frac{1}{V} \sum \dot{\vec{d}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \vec{j}_{\text{поверх.}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

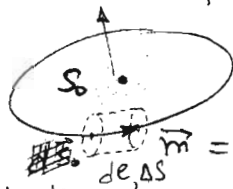
Окаж. что $\vec{J}$ еще ток намагничивания (молекулярный ток)
Можно ввести вектор намагниченности

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum \vec{m} \quad \text{магнитный момент единиц в объеме.}$$

Как возникает этот ток?

Тогда запишем:

$$\vec{j} = \frac{d\vec{e}}{dt} \quad dV = dS \cdot d\vec{e}$$



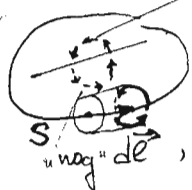
$$\vec{m}_0 = \frac{1}{2c} \sum e \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2c} \sum e \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int e \vec{r} \times \vec{v} dV = \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{j} dV$$

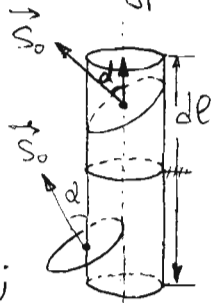
$$\vec{m}_0 = \frac{1}{2c} \oint \vec{r} \times d\vec{e} \int \vec{j} dS = \frac{1}{c} i_0 \cdot \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{e} \quad \vec{m} = \frac{i_0 S_0}{c}$$

Выберем произвольную площадку в ве-ве.

Будут только векторы только те амперовы токи
 кот-ые пересекают контуром



(нарисуем отдельно)



n - плотность амперового
 тока одного сорта

$$d\vec{i} = n_{i0} \vec{S}_0 d\vec{\ell}; \quad \vec{i} = \int n_{i0} \vec{S}_0 d\vec{\ell};$$

$$\vec{i} = c \oint n \vec{m} d\vec{\ell}; \quad \text{где } n \text{ - густота сорта} \quad \vec{M} = \frac{1}{V} N \vec{m} = n \vec{m}$$

$$\vec{i} = c \oint \vec{M} d\vec{\ell} - \text{это где } \vec{M} \text{ - магнитный момент элементарных магнитиков}$$

(т-на Стокса)

$$\vec{i} = c \int_S \text{rot} \vec{M} d\vec{S} \quad \text{с гр. стороны} \quad \vec{i} = \int \vec{j}_{\text{амп}} d\vec{S}$$

приравнявая

$$\vec{j}_{\text{амп}} = \text{rot} \vec{M}$$

Плотность ^{тока} вращающих токов в ве-ве связана с поляризацией и намагниченностью ве-ва.

Найдем $\vec{S}_\phi$ из ур-я непрерывности.

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \text{div}(\vec{S} \vec{v}) = 0 \quad \text{добавим заряды тоже} \quad \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \text{div}(\vec{S} \vec{v}) = 0, \text{ возмита:}$$

$$\frac{\partial \vec{S}_\phi}{\partial t} + \text{div}(\vec{S} \vec{v})_\phi = 0 \quad \text{мы уже знаем } (\vec{S} \vec{v})_\phi = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot} \vec{M}$$

$$\frac{\partial \vec{S}_\phi}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \nabla \times \vec{M} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} (\vec{S}_\phi + \text{div} \vec{P}) = 0$$

$$\vec{S}_\phi = -\text{div} \vec{P} \quad (\text{константа} = 0 \text{ т.к. в } t=0 \quad \vec{P}=0)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left\{ \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot } \vec{M} \right\}$$

$$\text{rot}(\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi(\rho - \text{div } \vec{P}); \quad \text{div}(\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi \rho$$

Введем вектор индукции $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$,
 вектор поле $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$

$\vec{B}$ - истинное макроскопическое
 магн. поле в ве-ве (по Кельвину)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Но не всегда возможно
 разделение на $\vec{j}_{\text{пол.}}$ и $\vec{j}_{\text{ам.}}$
 (напр. при больших
 частотах)

Т.о. применение как одна система ур-ний так и другая
 система еще не замкнута $\Rightarrow$ вводит материальные ур-я.

$$D_i(t, \vec{r}) = \hat{\epsilon}_{ij} E_j(t, \vec{r}) \quad B_i(t, \vec{r}) = \hat{\mu}_{ij} H_j(t, \vec{r})$$

$\hat{\epsilon}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}$ - линейные операторы; ϵ и μ среда изотропна

Для изотропных сред и
 медленнотекущих полей.

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad B_i = \mu_{ij} H_j$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

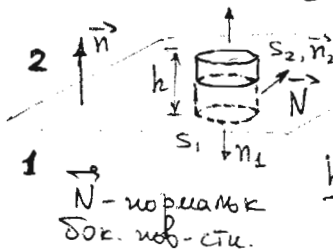
К этим ур-ям надо добавить граничные условия

Заменим ур-я
 в S-ой ф-ме:

$$\left\{ \begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{r} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H} d\vec{r} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} + \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= 4\pi \int_V \rho dV \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \end{aligned} \right.$$

Микрооскоп сила Лоренца $\vec{f} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}$, после усреднения.

$$\vec{F} = \overline{\vec{f}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}.$$



Рассм ур-е $\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_1} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{D} d\vec{S}$$

$h \rightarrow 0$, $\vec{D}_2 \vec{n}_2 S_e + \vec{D}_1 \vec{n}_1 S = \lim_{h \rightarrow 0} 4\pi \rho h S$

возможные r-ции о среднем :

$\lim_{h \rightarrow 0} \rho h = \frac{\Delta \epsilon}{\Delta h} k$ - заряд приходящийся на ед. поверхности $= G_s$

На границе $\vec{n}_2 = \vec{n}$, $\vec{n}_1 = -\vec{n}$

$\vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi G_s$ или
аналогично получим

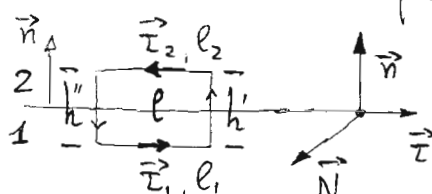
$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi G_s$

$B_{2n} - B_{1n} = 0$ непрерывность на $\vec{v}$ границе разрыва.

Рассмотрим ур-е

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} d\vec{S} + \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} d\vec{S}$$



$$\oint_{l_1} \vec{H} d\vec{r} + \oint_{l_2} \vec{H} d\vec{r} + \oint_{h'} \vec{H} d\vec{r} + \oint_{h''} \vec{H} d\vec{r} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{S \rightarrow 0} \vec{D} d\vec{S} + \frac{4\pi}{c} \int_{S \rightarrow 0} \vec{j} d\vec{S}$$

$h' \rightarrow 0$, $h'' \rightarrow 0$

$$\vec{H}_1 \vec{e}_1 l + \vec{H}_2 \vec{e}_2 l = \frac{4\pi}{c} \lim_{h \rightarrow 0} \vec{j} \vec{N} h l$$

$\vec{e}_1 = \vec{e}$; $\vec{e}_2 = -\vec{e}$;

$\lim_{h \rightarrow 0} j_N h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta j}{\Delta h} h$ - сила тока приходящаяся на единицу длины гр. разд.

$$\vec{e}(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \frac{4\pi}{c} \vec{e} \vec{N}$$

$\vec{e} = [\vec{n} \times \vec{N}]$; $[\vec{n} \times \vec{N}](\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \frac{4\pi}{c} \vec{e} \vec{N}$;

$([\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] - \frac{4\pi}{c} \vec{e}) \cdot \vec{N} = 0$

$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{e}$

Т.к. $\vec{n}$ - нормаль к поверхности

Аналогично запишем для ур-е $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

51

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}|_S$$

Как выглядит закон сохранения энергии в веществе?

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} \\ \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} &= \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) \end{aligned} \right\} \text{---}$$

$$\frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} \quad | \cdot \frac{c}{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \text{div} (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\sum \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \sum_a e_a \vec{v}_a \cdot \vec{E} = \int j \vec{E} dV, \quad \sum \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} + \int \frac{\partial W}{\partial t} dV = -\oint \vec{S} d\vec{S}$$

 если брать $\vec{n}$ -компл. вектора $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$ надо брать $\vec{E}$ -ист. поля.

$$\text{Т.к. } H_{2\tau} = H_{1\tau}|_S \text{ и } E_{2\tau} = E_{1\tau}|_S \Rightarrow S_{in} = S_{2n}$$

Вектор Пойнтинга один и тот же в диэлектрике и в вакууме.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \text{откуда } \delta W = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} d\vec{D} + \vec{H} d\vec{B})$$

$$\delta W = d \frac{1}{4\pi} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad \text{только когда } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \text{ можно записать}$$

$$W = \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi} + \frac{\mu_0 H^2}{8\pi} \quad \text{но сохраняется и для медленно меняющихся полей}$$

В общ. случае записать W нельзя.

При временной дисперсии среда поглощает энергию. Когда поле не зависит от времени, то:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 4\pi g \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

В случ. электростатик. поле внутри металла $= 0$ и все заряды на ~~вн~~ поверхности.

Зран. условия 1) диэл. - диэл. $E_{2\tau} = E_{1\tau}|_S$
 $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_S$

2) диэл. - проводник $E_\tau|_S = 0$
 $D_n|_S = 4\pi\sigma_S$

В случ электростат. ~~поле~~ $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$

Если $\epsilon_{ij} = f(\text{координат.})$

где изотроп. $\epsilon_{ij} = \epsilon\delta_{ij}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -4\pi\rho$$

$$\epsilon_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = -4\pi\rho$$

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho$$

1) диэл. - диэл. $\varphi_1 = \varphi_2|_S$ (скачок $\varphi \Rightarrow \Rightarrow \vec{E} \rightarrow \infty$)

2) диэл. - провод

$$\varphi|_S = \text{const.}$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_S$$

$$\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = -4\pi\sigma_S$$

Дан. задача электростат. при задан. ρ в диэл. и σ в проводн. найти поле вне проводника

• Для магнитостатики 1) диэл. - диэл.

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}|_S \quad \text{нет тока}$$

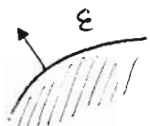
2) диэл. - провод.

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = \frac{4\pi}{c} \vec{I}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

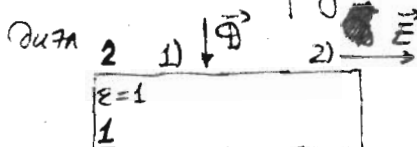
Как определить поле в диэл. области поверхности проводника?



$$E_{\tau}|_S = 0$$

$$D_{n}|_S = 4\pi\sigma_S$$

Каково поле в вырезе в диэлектрике?



$$1) E_{1\tau} = E_{2\tau} = 0$$

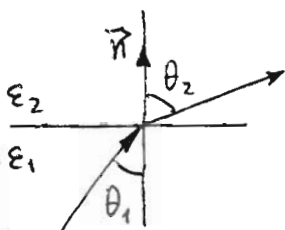
$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$E_{1n} = D_{2n}$$

$$2) E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

$$D_{1n} = D_{2n} = 0$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}$$



Если рассм. безграничный диэлектрик то $\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho$
 Это решение $\varphi = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho}{r} dV$ $\varphi = \frac{\varphi_{\text{вак}}}{\epsilon}$

Если заряд - точечный то $\rho = e\delta(\vec{r})$ и тогда $\varphi = \frac{e}{\epsilon r}$

Если диэл. как-е в неоднор. электроитат. поле то можно найти индуцированную на в. область.

$$\vec{f} = e(\text{центр полож. заряда}) \quad \vec{f} = e\vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) - e\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{f} = e\{\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{l}\nabla)\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r})\}$$

$$\vec{f} = (e\vec{l}\nabla)\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{d}\nabla)\vec{E}$$

l - малое коэф.
 с макс. размерами

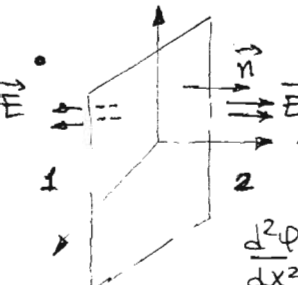
$$\vec{F} = \frac{1}{V} \sum_V \vec{f} = \frac{1}{V} \sum_V (\vec{d}\nabla)\vec{E} = (\vec{P}\nabla)\vec{E}; \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$\epsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad \vec{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi}\vec{E}$$

$$\vec{F} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} (\vec{E} \nabla) \vec{E} = \nabla \frac{E^2}{2} = (\vec{E} \nabla) \vec{E} + \vec{E} \times \text{rot} \vec{E}$$

$$\vec{F} = \frac{\epsilon-1}{8\pi} \text{grad} E^2$$

металл. плоскость равномерно заряжена с σ_s



из симметрии зададим $\varphi = \varphi(x)$

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$$

$$\vec{E} = -\vec{e}_x \frac{d\varphi}{dx}$$

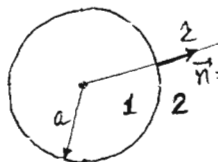
$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -C$$

$$\vec{E} = C \vec{e}_x; \quad C - \text{н.г.у.}$$

г.у.: $\Phi_{2n} - \Phi_{1n} = 4\pi \sigma_s$ $\epsilon_1 = 1$ $\epsilon_2 = 1$ $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi \sigma_s$

$E - (-E) = 4\pi \sigma_s$; $2C = 4\pi \sigma_s$; $\boxed{\vec{E} = 2\pi \sigma_s \cdot \vec{n}}$

- Цилиндр. заряд. пов-сть (∞ -ая)



$\Delta \varphi = 0$ $\varphi = \varphi(r)$ т.к. $L_z \gg a$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\varphi}{dr} = 0; \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{C}{r}; \quad \vec{E} = -\text{grad} \varphi(r) = -\vec{e}_r \frac{d\varphi}{dr}$$

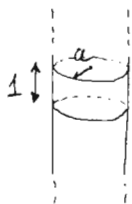
1) $r < a$ надо $C_1 = 0$ иначе в $r=0$ поле было бы ∞ -ым.

2) $r \geq a$:

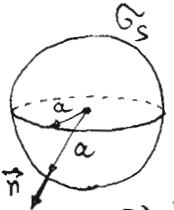
$\epsilon = 1$: $D_n|_{r=a} = E_n|_{r=a} = \frac{C_2}{a} = 4\pi \sigma_s$ $C_2 = 2 \cdot 2\pi a \sigma_s$

$2\pi a \cdot 1 \text{ см} = S_1$; $2\pi a \cdot 1 \text{ см} \cdot \sigma_s = \varphi$ - заряд ед. длины
цил. пов-сти

$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{2\varphi}{r}$



58



$$\Delta\varphi = 0 \quad \varphi = \varphi(R); \quad \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 \frac{d\varphi}{dR} = 0; \quad \frac{d\varphi}{dR} = -\frac{C}{R^2}$$

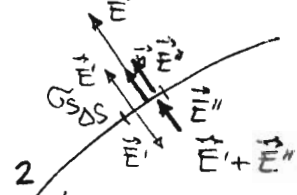
$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{e}_R \frac{d\varphi}{dR} = \vec{e}_R \frac{C}{R^2}$$

1) $R < a$: $C_1 = 0$ $\vec{E} = 0$

2) $R \geq a$ $D_n|_{R=a} = E_n|_{R=a} = \frac{C_2}{a^2} = 4\pi\sigma_s$ $C_2 = 4\pi a^2 \sigma_s = q$ полный заряд на сфере

$$\vec{E} = \vec{e}_R \frac{q}{R^2} = \frac{q\vec{R}}{R^3}$$

Какая сила действует на ед. пов.-сти зар. проводника?



Смотрим поле отдельно ΔS и всего проводника с густотой σ ΔS ($\vec{E}'$)

$$\vec{E}' + \vec{E}'' = \vec{E} \quad \vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = 2\vec{E}'' = 4\pi\sigma_s \vec{n} \quad \vec{E}'' = 2\pi\sigma_s \vec{n}$$

сила действующая на ΔS . $\vec{F} = \sigma_s \Delta S \cdot \vec{E}'' = 2\pi\sigma_s^2 \Delta S \vec{n}$; $\vec{F}_1 = 2\pi\sigma_s^2 \vec{n}$

Выразим σ -у истинное поле: $E_n = 4\pi\sigma_s$

$$\vec{F}_1 = 2\pi \left(\frac{E}{4\pi} \right)^2 \vec{n} = \frac{E^2}{8\pi} \vec{n}$$

• Емкость удлиненного проводника.

Если мы имеем зар. провод. $\Rightarrow$ можно говорить о φ проводника

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = -4\pi\sigma_s; \quad q = \oint \sigma_s ds = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds; \quad \varphi = \text{const на пов.-сти проводника}$$

$$C \equiv \frac{q}{\varphi} = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

C - показывает какой на проводник надо положить заряд чтобы его $\varphi = 1$.

Для шара $C = \frac{q}{\varphi_a} = a$ $1 \text{ фарада} = 1 \text{ кулон} / 1 \text{ вольт} =$

$$= \frac{3 \cdot 10^9}{1} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

Если длины l др. проводник $\frac{l}{300}$

то их заряды и потенциалы оказываются связанными.

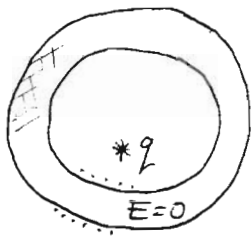
В силу ~~электростатической~~ электростатической и $\rightarrow \rightarrow$ ГУ, можно считать

$$\epsilon_a = \sum_b C_{ab} \varphi_b$$

на происходит перераспредел. зарядов
так чтобы по-прежнему поле
внутри = 0.
"поле"

C_{aa} - коэф-т емкости

C_{ab} ($a \neq b$) - коэф-т взаимной индукции.



• На поверхности проводника происх. перераспр. зарядов т.е. $E=0$ внутри пр.

Поле внутри проводника = 0. т.е. $\Rightarrow$ $\oint$ по Гаусса

Если заряд внутри проводника то поле вне проводника $\neq 0$.

Конденсатор

$$C = \frac{\text{заряд одной из пластин}}{\text{разность потенц. м-ду.}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Слоистые конденсатор.

$$\begin{array}{c} \sigma_{s1} \quad \sigma_{s2} \\ | \epsilon_1 | \epsilon_2 | \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad \Delta \varphi = 0 \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -C_1$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{e}_x \frac{d\varphi}{dx} = \vec{e}_x C_1$$

$$D_{1n}|_1 = 4\pi \sigma_{s1}$$

$$\epsilon_1 E_1 = 4\pi \sigma_{s1} \quad C_1 = \frac{4\pi \sigma_{s1}}{\epsilon_1}$$

$$D_{2n}|_3 = D_{1n}|_3$$

$$E_{2n} = \frac{4\pi \sigma_{s1}}{\epsilon_2}$$

$$\vec{D}_2 \vec{n}_2 = 4\pi \sigma_{s2} \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}$$

$$\sigma_{s1} = -\sigma_{s2}$$

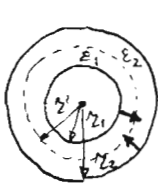
$$-D_{2n} = 4\pi \sigma_{s2}$$

$$d\varphi = -\vec{E} d\vec{r}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = -\int_1^3 \frac{4\pi \sigma_s}{\epsilon_1} dx - \int_3^2 \frac{4\pi \sigma_s}{\epsilon_2} dx$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -4\pi \sigma_s \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

$$C = \frac{SQS}{4\pi G_S \sum \frac{d_i}{\varepsilon_i}} = \frac{S}{4\pi \sum \frac{d_i}{\varepsilon_i}} \quad d_1 + d_2 = d \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \quad C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} = \varepsilon C_{\text{vac}}$$

• Цилиндрический конденсатор



$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad \text{и симметрия } \varphi = \varphi(r), \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{e}_r \frac{d\varphi}{dr}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r D_r = 0; \quad D_r = \frac{C}{r};$$

$$r_1 \leq r \leq r_2: D_n|_{r=r_1} = \frac{C_1}{r_1} = 4\pi G_S \quad C_1 = 2 \cdot 2\pi r_1 G_S = 2\pi$$

$$\vec{D}_1 = \frac{2\pi}{r} \vec{e}_r$$

$$D_{1n} = D_{2n}|_{r=r_2} \quad D_{2n} = \frac{2\pi}{r_2} \quad \vec{D}_2 = \frac{2\pi}{r} \vec{e}_r$$

$$\vec{D}_2 \vec{n}_2|_{r=r_2} = 4\pi G_{S2}; \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}; \quad -\frac{2\pi}{r_2} = 4\pi G_{S2} \quad -2\pi = 2 \cdot 2\pi r_2 G_{S2} \quad \boxed{x_2 = -x}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{2\pi}{\varepsilon_1} \frac{dr}{r} - \int_{r_2}^{r_2} \frac{2\pi}{\varepsilon_2} \frac{dr}{r} = -2\pi \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$C_{(1)} = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)}; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \quad C_{12} = \frac{\varepsilon}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \varepsilon C_{1 \text{ вак}}$$

• Находим электростатическую энергию системы проводников. $4\pi g$

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 dV = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{D} \text{grad } \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int (\text{div}(\varphi \vec{D}) - \varphi \text{div } \vec{D}) dV$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \oint \varphi \vec{D} d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \sum_a \oint \varphi \vec{D} \vec{n} dS + \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \sum_a \varphi_a \oint \vec{D}_n dS + \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_a \varphi_a e_a + \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV; \quad \rho = 0 \quad U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab} \varphi_a \varphi_b > 0$$

т.е. - нормированная форма

т.е. нормированная форма т.е. для системы проводников $e_a = \sum_b C_{ab} \varphi_b$

$$C_{aa} \geq 0 \quad C_{aa} C_{bb} > C_{ab}^2$$

$$C_{ab} = C_{ba}$$

Для конденсатора $U = \frac{1}{2} (e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2) = \frac{1}{2} e (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{e^2}{2C}$

Рассм. сист. заряженных проводников

внесим $\varphi_a > 0$

$\varphi = 0$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} > 0$

$e_b = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_b} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS < 0$ невозможна

$\varphi = 0$

$e_b = \sum_d C_{bd} \varphi_d = C_{ba} \varphi_a$

отсюда $C_{ba} < 0$

• Найдём потенциал объёмных и поверхностных зарядов.

Вторая ф-ла Грина $\int_V (\varphi \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi) dV = \oint_S (\varphi \text{grad} \varphi - \varphi \text{grad} \varphi) d\vec{S}$

В кав-ве $\varphi = \frac{1}{R}$, φ - потенциал.

$\int_V (\varphi \Delta (\frac{1}{R}) - \frac{1}{R} \Delta \varphi) = \oint_S (\varphi \text{grad} (\frac{1}{R}) - \frac{1}{R} \text{grad} \varphi) d\vec{S}$

$\oint_S \varphi \text{grad} (\frac{1}{R}) d\vec{S} = \sum_a \oint_{S_a} \varphi \text{grad} (\frac{1}{R}) \vec{N} dS = - \sum_a \varphi_a \oint_{S_a} \text{grad} (\frac{1}{R}) \vec{N} dS$

φ - на пов

Т.к. $\vec{n}$ - у проводника то S -ые будут проводящие по объему проводника.

$\oint_{\sum_a S_a} (\frac{1}{R} \text{grad} \varphi \vec{N}) dS = - \sum_a \oint_{S_a} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \sum_a \frac{4\pi}{\epsilon} \oint_{S_a} \frac{\sigma_s}{R} dS$

$-4\pi \varphi_p + \frac{4\pi}{\epsilon} \int \frac{\rho}{R} dV = - \frac{4\pi}{\epsilon} \sum_a \oint_{S_a} \frac{\sigma_s}{R} dS$ отсюда находим φ_p

$$\varphi_p = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho}{R} dV + \sum_a \frac{1}{\epsilon} \oint_{S_a} \frac{\sigma_s}{R} dS$$

Теорема единственности решения электростатических задач.

Электростат. задача имеет единств. решение если задано
однородное распредел. зарядов в дан. расположении
и формы проводников, либо полный заряд на
каждом проводнике, либо потенциал на кажд.
проводнике.

Докажем от противного.

1) $\vec{D}, \vec{E}, \varphi$ $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$
2) $\vec{D}', \vec{E}', \varphi'$ $\text{div } \vec{D}' = 4\pi\rho$

3) $\vec{D}'' = \vec{D} - \vec{D}', \vec{E}'' = \vec{E} - \vec{E}', \varphi'' = \varphi - \varphi'$

Рассмотрим величину $0 < \epsilon E''^2 = \vec{D}'' \cdot \vec{E}'' = -\vec{D}'' \text{grad } \varphi'' =$
 $= -\text{div}(\varphi'' \vec{D}'') + \varphi'' \text{div } \vec{D}''$
 $\text{div } \vec{D}'' = \text{div } \vec{D} - \text{div } \vec{D}' = 0$

$$\int_V \epsilon E''^2 dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \text{div}(\varphi'' \vec{D}'') dV = - \oint_{S_a} \varphi'' \vec{D}'' \cdot d\vec{S} =$$

$$= \sum_a \oint_{S_a} \varphi'' \vec{D}'' \cdot d\vec{S} = \sum_a \varphi''_a \oint_{S_a} (4\pi\sigma_s - 4\pi\sigma'_s) dS = \sum_a \varphi''_a \oint_{S_a} \vec{n} dS = - \oint_{S_a} \vec{n} dS$$

$$= 4\pi \sum_a (\varphi_a - \varphi'_a)(q_a - q'_a) = 0$$

§ Если задан потенциал, то
он единственный, аналогично
для заряда.

$$z > 0 \quad \Delta\varphi = -4\pi q \delta(\vec{r})$$

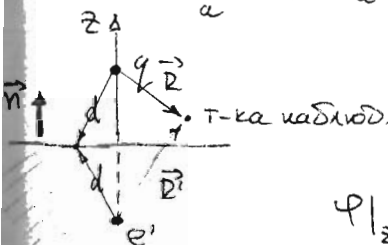
$$\varphi = \frac{q}{R} + \varphi' \quad \Delta\varphi' = 0 \quad \varphi' = \frac{e'}{R'}, R' \neq 0$$

$$\varphi|_{z=0} = 0 \quad \frac{q}{R} + \frac{e'}{R} = 0, e' = -q$$

Какой заряд
будет на пов-сти?

$$\varphi = \frac{q}{R} - \frac{q'}{R'}$$

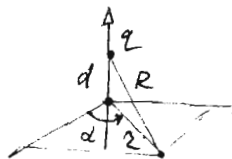
$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{z=0} = -4\pi\sigma_s; \quad \sigma_s = -\frac{1}{4\pi} \vec{n} \text{grad } \varphi|_{z=0}$$



$$G_s = -\frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \left\{ -\frac{q\vec{R}}{R^3} + \frac{q\vec{R}'}{R'^3} \right\} = -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{d}{R^3} + \frac{d}{R'^3} \right\} = -\frac{qd}{2\pi R^3}$$

$$q' = \oint G_s ds \quad G_s = -\frac{qd}{2\pi(z^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = -\frac{4\pi G_s}{\epsilon} \quad ds = 2\pi z d\alpha d\varphi$$

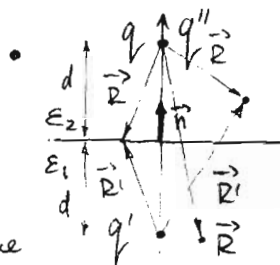


$$q' = -qd \int_0^\infty \frac{2z dz}{(z^2+d^2)^{3/2}} = \frac{z^2+d^2 = \xi^2}{2z dz = \xi d\xi} = qd \frac{1}{\xi} \Big|_d^\infty = -q$$

Какая сила действ. со стороны индуцированных на пов-сти зарядов на этот заряд.

$$P = \frac{q}{R} - \frac{q}{R'} \quad \varphi' = -\frac{q}{R'} ; \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E} \Big|_{z=d}$$

$$\vec{F} = q^2 \text{grad} \left(\frac{1}{R'} \right) = -\frac{q^2 \vec{R}'}{R'^3} \Big|_{z=d} = -\frac{q^2}{(2d)^2} \vec{n} \text{ (сила притяжения)}$$



$$\Delta \varphi_2 = -\frac{4\pi}{\epsilon_2} q \delta(\vec{R})$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{\epsilon_2 R} + \varphi_2', \quad \Delta \varphi_2' = 0$$

создается связанной зарядом на гр. раздела

$$1) \varphi_2' = \frac{q'}{\epsilon_2 R'}, \quad R' \neq 0 \Rightarrow \text{удовлетвор при } z > 0 \text{ ур-ю Лапласа}$$

вс связанные заряды относительно q'

$$2) z < 0 : \Delta \varphi_1 = 0 \quad \varphi_1 = \frac{q''}{\epsilon_1 R}$$

Надо найти q' и q'' из Г.У.

$$1) \varphi_1 = \varphi_2 \Big|_{z=0}$$

$$\frac{q''}{\epsilon_1 R} = \frac{q}{\epsilon_2 R} + \frac{q'}{\epsilon_2 R'} \quad (R = R')$$

$$q + q' = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} q''$$

$$2) \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{z=0} \Leftrightarrow \epsilon_1 \vec{n} \text{grad} \varphi_1 = \epsilon_2 \vec{n} \text{grad} \varphi_2 \Big|_{z=0}$$

$$\epsilon_1 \vec{n} \left(-\frac{q'' \vec{R}}{\epsilon_1 R^3} \right) = \epsilon_2 \vec{n} \left(-\frac{q \vec{R}}{\epsilon_2 R^3} - \frac{q' \vec{R}'}{\epsilon_2 R'^3} \right) \Big|_{z=0} \quad q'' d = q d - q' d$$

$$q'' = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$q' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q$$

Итого:
$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{q}{\varepsilon_2 R} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{q}{\varepsilon_2 R'} \\ \varphi_1 &= \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{R} \end{aligned} \right. \quad 1) \varepsilon_1 \rightarrow \infty \quad \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 R} - \frac{q}{\varepsilon_2 R'} \quad \varphi_1 = 0$$

$\Rightarrow$ проводник это диэлектрик с $\varepsilon \rightarrow \infty$.

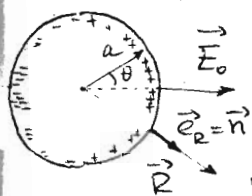
Найдем плотность связанных зарядов.

$$\sigma_{\text{связ}} = P_{1n} - P_{2n} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_{1n} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_{2n} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi \varepsilon_1} D_{1n} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi \varepsilon_2} D_{2n} =$$

$$= \frac{D_{1n}}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) = \frac{D_{1n}}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

Сила, действующая на заряд q , $\vec{F} = q \vec{E}_2' = -q \cdot \text{grad} \varphi_2' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{q^2}{(2d)^2} \vec{n}$

- В простр-ве $\mathbb{E}$ однород. электростат поле, вносим в это поле проводящий шар радиуса a . Возникнут связанные заряды на пов-сти шара так чтобы в шаре поле $= 0$.



$\Delta \varphi = 0$ (во всех r -ках вне шара)
Будем считать $\varphi|_S = 0$ (заземлен. шар)

$\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, $\varphi_0 = -\vec{E}_0 \vec{R}$ тогда $\Delta \varphi' = 0$.
Решения удовлетворяющие условию $\varphi'|_{\infty} = 0$: пусть $\varphi'|_{\infty} = 0$.

Возьмем решение вида $\frac{A}{R}, (\vec{A} \nabla) \frac{1}{R}, A_i B_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{R}$,

$\varphi' = B(\vec{E}_0 \nabla) \frac{1}{R} = -B \frac{\vec{E}_0 \vec{R}}{R^3}$; $\varphi = -(\vec{E}_0 \vec{R})(1 + \frac{B}{R^3})$

$\varphi|_{S: R=a} = 0 \quad B = -a^3$; $\varphi = -(\vec{E}_0 \vec{R})(1 - \frac{a^3}{R^3})$ $\varphi' = \frac{\vec{E}_0 \vec{R}}{R^3} a^3$

$G_S = \frac{1}{4\pi} E_n|_S = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \text{grad} \varphi|_{R=a} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial R}|_{R=a} = \frac{\vec{E}_0 \vec{n} \cdot \vec{R}}{4\pi} \frac{3a^3}{R^4}|_{R=a}$

$= \frac{3}{4\pi} \vec{E}_0 \vec{n} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta$;

$\varphi' = \frac{4\pi a^3}{3} \frac{3}{4\pi} \frac{\vec{E}_0 \vec{R}}{R^3} = V \cdot \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} \quad \vec{P} = \frac{3}{4\pi} \vec{E}_0$

Диэлектр. шар нах-ся во внешнем диэлектрике ϵ_2 До вставления шарика было поле $\vec{E}_0$



$\Delta\varphi_2 = 0$ Если бы не было шара $\varphi_0 = -\vec{E}_0 \vec{R}$
 На границе возникнут связанные заряды. $\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_2'$

$$R \neq 0 \quad \varphi_2' = A(\vec{E}_0 \nabla \frac{1}{R}) = -A \frac{\vec{E}_0 \vec{R}}{R^3}$$

$$\Delta\varphi_2' = 0 ; \quad \varphi_2 = -(\vec{E}_0 \vec{R})(1 + \frac{A}{R^3})$$

Если диэлектр $\perp$ анизотроп-? есть ур-е $\text{div } \vec{D}_1 = 0$
 Т.к. задача статическая то и $\text{rot } \vec{E}_1 = 0$; $\vec{E}_1 = -\text{grad } \varphi$

$$0 = \text{div } \vec{D}_1 = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{1i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ij} E_{1j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\epsilon_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Повернем в главные оси, получим:

$$\epsilon_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \epsilon_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \epsilon_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

сделаем замену переменных: $x = \sqrt{\epsilon_{xx}} x'$

$$y = \sqrt{\epsilon_{yy}} y' \quad z = \sqrt{\epsilon_{zz}} z'$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0$$

Мы ищем решение конечное во всех точках

Оказывается что такое решение: $\varphi = -B \vec{E}_0' \vec{R}' = -B \vec{E}_0 \vec{R}$

Т.о. $R \leq a$: $\varphi_1 = -B(\vec{E}_0 \vec{R})$

А и В - из ГУ: $\varphi_1 = \varphi_2|_{R=a}$; $B = 1 + \frac{A}{a^3}$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_2 &= -(\vec{E}_0 \vec{R})(1 + \frac{A}{R^3}); \quad R > a \quad \vec{E}_2 = -\text{grad } \varphi_2 = \vec{E}_0(1 + \frac{A}{R^3}) - (\vec{E}_0 \vec{R}) \frac{3A\vec{R}}{R^5} \\ \varphi_1 &= -(\vec{E}_0 \vec{R})(1 + \frac{A}{a^3}); \quad R \leq a \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_0 - A \frac{3(\vec{E}_0 \vec{R})\vec{R} - R^2 \vec{E}_0}{R^5} \end{aligned} \right.$$

$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}|_{R=a}$$

$$\vec{n} \vec{D}_1 = \vec{n} \epsilon_2 (\vec{E}_0 - A \frac{3(\vec{E}_0 \vec{R})\vec{R} - R^2 \vec{E}_0}{R^5}) \Big|_{R=a} = \dots$$

$$\dots = \vec{n} \epsilon_2 \vec{E}_0 (1 - A \frac{2}{a^3})$$

$$\vec{D}_1 - \epsilon_2 \left(1 - \frac{2A}{a^3}\right) \vec{E}_0 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{D}_1 = \epsilon_2 \left(1 - \frac{2A}{a^3}\right) \vec{E}_0 \\ \vec{E}_1 = \left(1 + \frac{A}{a^3}\right) \vec{E}_0 \end{array} \right.$$

У нас есть ищем:

$$\vec{D}_1 + 2\epsilon_2 \vec{E}_1 = 3\epsilon_2 \vec{E}_0 \quad \text{— это для шара}$$

И аналогичное соотнош. и для цилиндра

$\vec{E}_0 \perp$ оси цилиндра $\vec{E}_0 \parallel$ оси цилиндра

$$\frac{1}{2}(\vec{D}_1 + \epsilon_2 \vec{E}_1) = \epsilon_2 \vec{E}_0 \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_0$$

Для плоского диэлектрика $\vec{E}_0$ $\vec{D}_1 = \epsilon_2 \vec{E}_0$

Для любой выпуклой фигуры лн. соотнош. сохраняются.

Внутри $\epsilon = \epsilon_1$. $\vec{E}_1 = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \vec{E}_0$; рав-во полей на границе (для шарика) $\frac{A}{a^3} = \frac{3\epsilon_2 - 1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}$

Подставим A в φ $\varphi_2 = -\vec{E}_0 \vec{R} - A \frac{\vec{E}_0 \vec{R}}{R^3} = \varphi_0 + \varphi'_2$

$$\varphi'_2 = \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \frac{\vec{E}_0 \vec{R}}{R^3} = V \frac{\vec{P} \vec{R}}{R^3} \quad \vec{P} \text{ — вектор поляризации единицы объема шара.}$$

$$\sigma_{\text{св.}} = P_{1n} - P_{2n} \Big|_{R=a} = \frac{D_{1n}}{4\pi} \Big|_{R=a} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \quad \vec{P} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \frac{3}{4\pi} \vec{E}_0; \quad \epsilon_1 \rightarrow \infty \quad \vec{P}_{\text{проб.}} = \frac{3}{4\pi} \vec{E}_0$$

Поляризация и намагничивание веществ.

При наложении внешнего эл. поле нарушается симметрия в строении атома $\Rightarrow$ атом приобретает дип. момент.

У диэлектриков (как у полярных так и неполярных) средний дип. момент равен из-за теплового движения.

$$\vec{P} = \alpha \vec{E} \quad \alpha \text{ — поляризуемость; для мол.-л. } \vec{P} = \beta \vec{E} \text{, если}$$

(для неполярного диэл.) в ед. объема N мол.-л, то β — поляризуемость отдельной мол.-л

$$\vec{P} = N \vec{p} = N \beta \vec{E} \quad \alpha = N \beta \quad \beta = f(T^\circ)$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}; \quad \epsilon = 1 + 4\pi N \beta$$

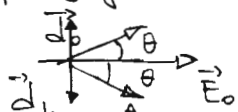
Что будет при полном гизл?

Собств. гизл. мом $\vec{d}_0$; Энергия в $\vec{E}$ внешнем

$$U = -\vec{d}_0 \vec{E}_0$$

три заданных: $T^\circ, \vec{E}$ Момент центр

Итого: $\vec{d}_I = 0, \vec{d}_{II} \neq 0$.



Вероятность того что элемент гизла будет (внезапно) ориентирован в телесный угол $d\Omega$, равна

$$dW = C_1 e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega \quad \int dW = 1; \quad \vec{d}_{II} = \int d\Omega \cos\theta dW$$

$$dW = C_1 \exp\left(\frac{\vec{d}_0 \vec{E}_0}{kT}\right) d\Omega = C_1 \exp\left(\frac{1}{kT} d_0 E_0 \cos\theta\right) \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{E_0 d_0}{kT} = \chi_E$$

$$\vec{d}_{II} = d_0 \int_0^\pi \frac{\exp(\chi_E \cos\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi \exp(\chi_E \cos\theta) \sin\theta d\theta}; \quad \mathcal{I}(\chi_E) = \int_0^\pi \exp(\chi_E \cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{\chi_E} \text{sh} \chi_E$$

$$\int_0^\pi \exp(\chi_E \cos\theta) \cos\theta d\theta \sin\theta = \frac{d\mathcal{I}(\chi_E)}{d\chi_E} = \frac{2}{\chi_E} \text{sh} \chi_E \left(\text{ch} \chi_E - \frac{1}{\chi_E} \right)$$

Ф-ция Ланжевена: $L(\chi) = \text{ch} \chi - \frac{1}{\chi}$ $\vec{d}_{II} = d_0 L(\chi_E)$

$P = n \vec{d}_{II} = n d_0 L(\chi_E); \quad L(\chi) \approx \frac{\chi}{3}; \quad L(\chi) \approx 1$
 $\chi \ll 1 \quad \chi \gg 1$

1) $\chi_E \ll 1. P = n d_0 \frac{d_0 E}{3kT} = \frac{n d_0^2}{3kT} E_0$

$$\alpha = \frac{n d_0^2}{3kT}$$

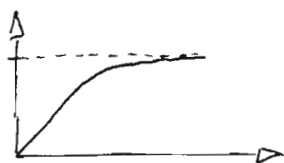
фра Дебая-Ланжевена

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi n d_0^2}{3kT}$$

фра Кюри-Дебая.

2) $\chi_E \gg 1: P = n d_0$ - случай насыщения - практически насыщенный.

$$\chi_E \gg 1 \quad \frac{E d_0}{kT} \gg 1 \quad E \gg \frac{kT}{d_0} = \frac{1,37 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{К}^{-1} \cdot 300 \text{ К}}{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-8}} = 10^4 \text{ эрс} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$



Намагничивание.

84

Магнитность определяется средним магнитным моментом единицы объема
 $\vec{b} - \vec{b}_a$ - вектор намагниченности $\vec{b} - \vec{b}_a$

В отсут. внеш. поле не имеют собств. маг. мом - диамагнетики

При иском. - возникает магн. мом. напр. против внеш. поля.

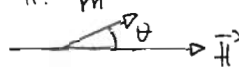
В противн. сл. - парамагнетики, ферромагнетики; ... по внеш. полю.

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad \chi - \text{магнитная восприимчивость}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \mu - \text{магн. проницаемость.}$$

диамагн. $\chi \sim 10^{-6}$
 парамагн. $\chi \sim 10^{-4}$

⊛ Парамагнетики. Атом обладает собств. магн. моментом $\vec{m}_0$, $\vec{u} = -\vec{m}_0 \cdot \vec{H}$
 без $\vec{H}$ все $\vec{m}_i$ распол. хаотически так что $\vec{M} = 0$
 $\vec{K}_H = \vec{m}_0 \times \vec{H}$

Вкл. поле: ~~идеальный~~ идеальный "газ магнитиков"
 хаотич. распол. сохранитя только вокруг $\vec{H}$ будут прецессировать.
 реальный газ: в рез-те столкновений будут стремитя повернуте по $\vec{H}$. $\vec{m}$

 $dW = C_2 \exp(+\frac{\vec{m}_0 \cdot \vec{H}}{kT} \cos \theta) d\Omega$; $\frac{m_0 H}{kT} = \chi_H$

$$M = n \cdot \vec{m}_H = n m_0 L(\chi_H)$$

1. $\chi_H \ll 1$ $M = \frac{n m_0^2}{3kT} H$, $\chi = \frac{n m_0^2}{3kT}$ $\left[\begin{array}{l} \text{для Кюри} \\ \text{Дебая.} \\ \chi > 0 \end{array} \right]$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \Rightarrow \vec{M} \uparrow \vec{H}$$

2. $\chi_H \gg 1$ $M = n \cdot m_0$

⊛ Диамагнетики. При вкл. $\vec{H}$ e^- на оболочке начинают прецесс вokr направл. $\vec{H}$.

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e \vec{r} \times \Delta \vec{v}, \quad \Delta \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{где } \vec{\omega} = -\frac{e}{2mc} \vec{H}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e \vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \frac{1}{2c} \sum e \{ \vec{\omega} r^2 - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \}$$

перейдем к непрерывн. распределению.

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \rho (\vec{\omega} r^2 - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r})) dV$$

усредним по $t = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_z \vec{z} \quad \vec{m}_x = -\frac{\omega}{2c} \int \rho x z dV = 0 \quad \text{т.к. } \bar{x} = 0$$

$$\vec{m}_y = -\frac{\omega}{2c} \int \rho y z dV = 0 \quad \text{т.к. } \bar{y} = 0$$

$$\vec{m}_z = \frac{\omega}{2c} \int \rho (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) dV = \frac{\omega}{2c} \cdot \frac{2}{3} \alpha^2 \int \rho dV = \frac{\omega}{3c} \alpha^2 Z e$$

$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \alpha^2$; α - Боровский радиус
 $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = \frac{1}{3} \alpha^2$
 Z - порядковитй номер. эл-та

$$\vec{e}_z \cdot \vec{m}_z = \vec{m} ; \quad \vec{m} = -\frac{e\hbar}{2mc} \cdot \frac{a^2}{3c} \cdot z\vec{e} ; \quad \vec{m} = -\frac{ze^2 a^2}{6mc^2} \vec{H} ;$$

$$\vec{M} = n\vec{m} = -\frac{nze^2 a^2}{6mc^2} \vec{H} = \chi_{\text{qua}} \vec{H} \quad \chi_{\text{qua}} = -\frac{nze^2 a^2}{6mc} < 0.$$

Сравним $\vec{m}$ парамагнетика
и возникающий $\vec{m}$ у диамагнетика

$$m_{\text{пара}} = \frac{e}{2mc} \cdot L = \frac{e}{2mc} \cdot L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \sim \hbar \text{ при } l=1. \quad \frac{e\hbar}{2mc} = \mu_B \text{ магнетон Бора}$$

$$|m_{\text{qua}}| = \frac{e^2 z a^2}{6mc^2} H ; \quad \frac{m_{\text{пара}}}{m_{\text{qua}}} = \frac{e\hbar}{2mc} \cdot \frac{6mc^2}{e^2 a^2 z H} = \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \frac{ze}{a^2 z H} = 137 \cdot 3 \cdot \frac{4.8 \cdot 10^{-10}}{10^{-16}} \frac{1}{zH} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^9}{zH} \gg 1. \quad \text{если во-во парамагнетизма то диамагн. можно не учт.}$$

• Сила действующая на магнетик в постоянном неоднородном магнитном поле.

$$U = -\vec{m} \vec{h} ; \quad \vec{f} = -\text{grad } U = \nabla (\vec{m} \vec{h})$$

$$\vec{f} = \nabla (\vec{m} \vec{B}) = (\vec{m} \nabla) \vec{B} + \vec{m} \times \text{rot } \vec{B} ;$$

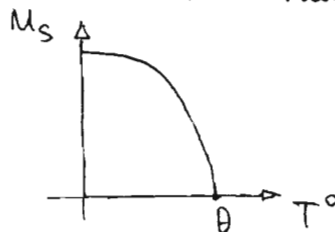
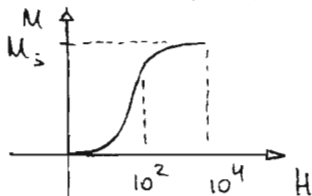
$$\vec{F} = n\vec{f} = (n\vec{m} \nabla) \vec{B} + n\vec{m} \times \text{rot } \vec{B} = (\vec{M} \nabla) \vec{B} + \vec{M} \times \text{rot } \vec{B} =$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \quad \vec{M} = \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \vec{B} = \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \left\{ (\vec{B} \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{B} \right\} = \frac{\mu-1}{2\pi\mu} \nabla B^2$$

- 1) парамагнетик $\chi > 0$ - увлекается в сторону роста магн. поля.
- 2) диамагнетик $\chi < 0$ - выталкивается.

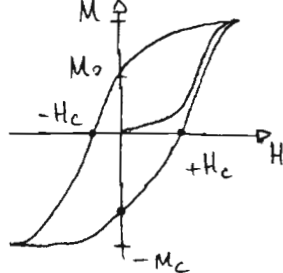
⊗ Ферромагнетизм.

Атомы обладающ. собств. магн. моментом ; $B = f(H)$ - кривая связи
 $M = \chi(H) \cdot H$ M_s - спонтанная, техническая намагниченность.



$T > \theta$ - переход ферромагнетика в парамагнетик

$$\chi = \frac{C}{T - \theta}$$



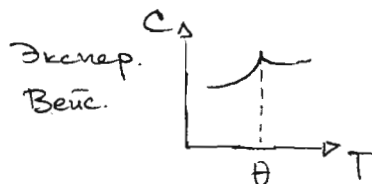
Производится работа

$$dA = \frac{1}{4\pi} \vec{H} d\vec{B}$$

$$\vec{B} = 4\pi d \vec{M}$$

$$dA = \vec{H} d\vec{M}$$

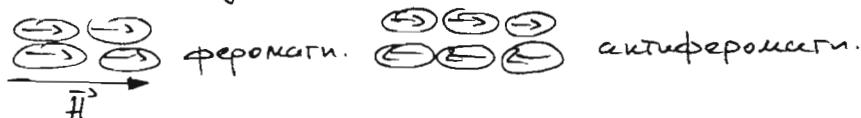
Процесс необратимый
выделяется тепло: $Q = f \cdot V \oint \vec{H} d\vec{M}$
 f - α -та намагничивающая.



для железа $\theta = 1047^\circ \text{K}$.

Вейс. предп. что $\vec{E}$ внутри молек. поле
которое действует на соседние атомы.

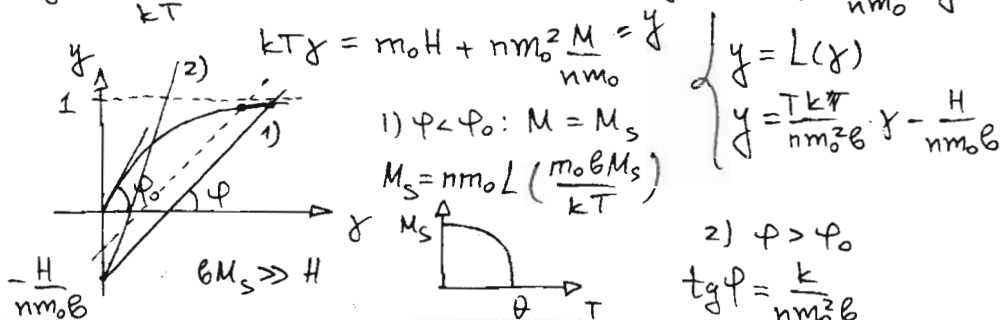
Спик-спиковое взаимодействие приводит к тому что атомы
группируются в домены. В домене все атомы ориентированы
одинаково. Без поле все магн. моменты ориент. хаотич-но и



Вейс: $\vec{H}_{\text{эф}} = \vec{H} + \theta \vec{M}$; θ - пост. Вейса несколько сотен

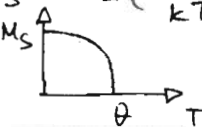
$$dW = C \exp\left[-\frac{U}{kT}\right] d\Omega = C \exp\left(\frac{\vec{m}_0 \vec{H}_{\text{эф}}}{kT}\right) d\Omega = C \exp\left(\frac{1}{kT} m_0 H_{\text{эф}} \cos\theta\right) d\Omega$$

$$\chi = \frac{m_0(H + \theta M)}{kT} \quad M = n m_0 L(\chi) \quad \text{введем обозн. } \frac{M}{n m_0} = y$$



$$1) \varphi < \varphi_0: M = M_s$$

$$M_s = n m_0 L\left(\frac{m_0 \theta M_s}{kT}\right)$$



$$2) \varphi > \varphi_0$$

$$\tan \varphi = \frac{k}{n m_0^2 \theta}$$

$$\chi \ll 1: y = \frac{\chi}{3} \quad \tan \varphi_0 = \frac{1}{3}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{k \theta}{n m_0^2 \theta} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \frac{n m_0^2 \theta}{3k}$$

$$y = \frac{3kT}{n m_0^2 \theta} y - \frac{H}{n m_0 \theta}$$

$$y \left(\frac{T}{\theta} - 1 \right) = \frac{H}{n m_0^2 \theta}$$

$$y = \frac{\theta}{T - \theta} \frac{1}{n m_0^2 \theta} H = \frac{n m_0^2 \theta}{3k \cdot n m_0^2 \theta} \frac{1}{T - \theta} H$$

$$T \cdot k \frac{M}{n m_0} = y$$

$$M = \frac{n m_0^2}{3k(T - \theta)} H$$

Постоянный ток в проводниках

В отсутств. $\vec{E}$ $\vec{v} = 0$, хотя $v \neq 0$ (тепловая скорость)

Если рассм. газ электронов $m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E}$; решение, по порядку величины $\vec{u} = \frac{e\tau}{m} \vec{E}$

ср. знат. скорости м-ду двумя столкн.

$$\vec{u} = \frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

$$\vec{j} = en\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{2m} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

$\vec{u}$ - направленный скорость.

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m} = \frac{ne^2e}{2m\omega}$$

(при не слишком больших полях)

σ - тензор проводимости.

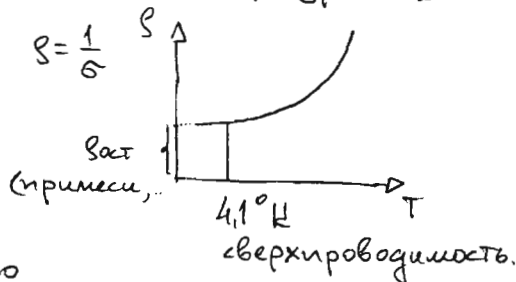
$\sim 10^4$ К.

В реальн. электронит газ - вырожден.; вырожден $\rightarrow$ классический газ
 $v_{теп} \neq f(T)$, $\alpha = f(\text{плотности})$

Хар-ная для каждого металла - дедбаевская температура θ_D

$$T > \theta_D : \ell \sim \frac{1}{T} \\ \sigma \sim \frac{1}{T}$$

$$T < \theta_D : \ell \sim \frac{1}{T^5} \\ \sigma \sim \frac{1}{T^5}$$



Во всех т-ках внутри ве-ва

$$\vec{B} = 0, \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\bar{\rho}, \bar{\rho} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \vec{j} = 0$$

только поверхностный ток

верх. пр. вакуум

$$B_{1n} = B_{2n} = 0 ; H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i$$

Скорость кот-ую e^- имеет между столкн. $\vec{u} = \frac{e\tau}{m} \vec{E}$

$$W_1 = \frac{m u^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{e^2 \tau^2}{m^2} E^2 ; \text{ а в единицу времени в единицу объема } \frac{nW}{\tau}$$

эту энергию e^- передает иону

$$q = \frac{nW}{\tau} = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2 = \sigma E^2$$

з-к Джоуля-Ленца

У полупр $\sigma \uparrow$ с ростом Т
концентр. e^- ов проводимости

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta}{kT}}$$

Δ - энергия активации.

Электронитет. $\vec{u}_i = v_i \vec{E}$ v - подвижность.

i - и-тый ток.

$$\vec{j}_i = n_i n_i q_i$$

$$\vec{j} = \sum_i e_i n_i \vec{u}_i = \sum_i e_i n_i v_i \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

Для анизотропных проводников

$$\vec{j}_i = \sigma_{ik} \vec{E}_k \quad \text{тензорный хар-тер.}$$

$$\sigma = \sum_i e_i n_i v_i$$

Плотность зарядов в проводнике со временем ост. постоянным иначе менялось бы поле при постоянном токе.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

т.е. при постоянном токе $\text{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow$ шлобы линии пост. тока явл. замкнутыми

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} : \oint \vec{j} d\vec{l} = \sigma \oint \vec{E} d\vec{l} = ;$$

$$\text{ток} \quad = -\sigma \oint \text{grad} \varphi d\vec{l} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = 0 : \vec{E} = -\text{grad} \varphi$$

Самое электростат поле не может поддерживать пост. ток в проводнике $\Rightarrow$ должны еще быть силы на сторонние.

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + \vec{F} \quad \vec{F} = e\vec{E}^{\text{ст.}} \quad \vec{E}^{\text{ст.}} \neq \text{grad} \varphi \quad m \frac{d\vec{u}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст.}}).$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст.}}), \text{ тогда и } \rho = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст.}})^2 = \frac{j^2}{\sigma}$$

(обобщенный закон Ома)

Минимальные проводники - минимальные поперечные $\ll$ продольные с пост. током

Сила тока где мин. пр-ка n - j каждое из них одинаково.



$$\text{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{проводник} - \text{проводник} \quad j_{2n} = j_{1n} |_S$$

$$\text{диэлектрик} \quad j_{1n} |_S = 0$$

$$0 = \int_V \text{div} \vec{j} dV = \oint \vec{j} d\vec{S} =$$

$$= \int_{S_1} \vec{j} \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{j} \vec{n}_2 dS + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{j} \vec{N} dS \rightarrow 0 \quad \vec{j} \cdot \vec{N} = 0$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = n$$

$$= - \int_{S_1} \vec{j} \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{j} \vec{n} dS = -I_1 + I_2 \quad I_1 = I_2.$$

Для мн. проводников справедливы законы Кирхгофа.

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad 0 = \int_S \text{div } \vec{j} dV = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \sum_i I_i$$

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{ст.}} \quad \int_1^2 \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст.}} d\vec{l}$$

ток постоянный $\frac{j}{\sigma}$; $d\vec{l} = \vec{n} dl$ $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$

$$I_{12} \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст.}} d\vec{l} \quad ; \quad \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S} = R \quad R = \frac{l}{\sigma S} = S \frac{l}{S}$$

$I_{12} \cdot R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$ - интегральный закон Ома для участка

замкнутой контур. $IR = \varepsilon$

Рассм. объемные проводящие среды.

$\text{rot } \vec{E} = 0$
 $\text{div } \vec{j} = 0$ $\int \vec{j} = \sigma \vec{E}$ $\text{и } \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow E_{2\tau} = E_{1\tau}|_S$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{соответствующие} \\ \text{этой системе ур-ний} \\ \text{ГУ.} \end{array} \right.$

(при пост. токе)

$$\frac{1}{\sigma_2} E_{2n} = \frac{1}{\sigma_1} E_{1n}|_S$$

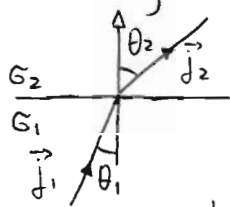
В сл. сист. ур-ний

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{j}}{\sigma} \right) = 0$$

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

$$\frac{j_{2\tau}}{\sigma_2} = \frac{j_{1\tau}}{\sigma_1}|_S$$

$$j_{2n} = j_{1n}|_S$$



$$\frac{j_1 \sin \theta_1}{\sigma_1} = \frac{j_2 \sin \theta_2}{\sigma_2}$$

$$j_1 \cos \theta_1 = j_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

2-й потенциал:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\text{div}(\sigma \text{grad } \varphi) = 0$$

е. $\sigma = \text{const}$, то $\Delta \varphi = 0$

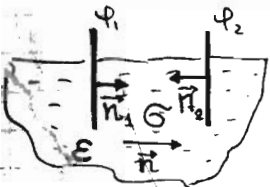
$$E_{1\tau} = E_{2\tau}|_S: \varphi_1 = \varphi_2|_S$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}|_S$$

Если рассм. распростр. тока по объемн. проводн. Какое тепло выделяется в проводнике?

$$Q = \int q dV = \int \frac{\vec{j}^2}{\sigma} dV = \int \vec{j} \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст.}}) dV = \int \vec{j} \vec{E}_{\text{ст.}} dV - \int \vec{j} \text{grad } \varphi dV$$

$$= \int \vec{j} \vec{E}_{\text{ст.}} dV - \int \{ \text{div}(\vec{j} \varphi) - \varphi \text{div } \vec{j} \} dV = \int \dots - \oint_S \varphi \vec{j} d\vec{S} = j_n dS = 0 = \int \vec{j} \vec{E}_{\text{ст.}} dV$$



Как определить сопротивление такого устр-ва

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{e}{\gamma S}$$

Геометрия $\Rightarrow$ задана ёмкость.

$$C = \frac{e}{|\varphi_1 - \varphi_2|}$$

J_1 - сила тока стекающего с "1"

e_1 - заряд на "1"

$$J_2 = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} e_2$$

$$\frac{e}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$$

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma C}$$

~~т.е.~~

$$J_1 = \oint_{S_1} \vec{j} d\vec{S} = \oint_{S_1} \sigma \vec{E}_n dS = \sigma \oint_{S_1} \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} dS = \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma e_1$$

$$J_1 = J_2 : e_1 = -e_2$$

• Магнитное поле постоянных токов.

Ур-я магнитостатики:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{можно ввести } \vec{A}$$

Всегда можно подобрать усл. $\text{div } \vec{A} = 0$.

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

В обд. сл. $\mu = \mu(\vec{r})$ решать не просто.

Если μ как ф-ция от r задано не много гр. условий

Пусть среда однородна в одном направлении (z)
Пусть ток течёт вдоль z . $\vec{j} = \vec{e}_z j(x, y)$ тогда $\mu = \mu(x, y)$.

Выберем $\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y)$: действии. $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0$.

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{e}_z A = \nabla_{\perp} A \times \vec{e}_z$$

$$\text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \nabla \times \left(\frac{\nabla_{\perp} A \times \vec{e}_z}{\mu} \right) = \left(\vec{e}_z \nabla \right) \frac{1}{\mu} - \vec{e}_z \nabla \cdot \left(\frac{\nabla_{\perp} A}{\mu} \right)$$

$$\text{div} \left(\frac{\text{grad } A(x, y)}{\mu(x, y)} \right) = -\frac{4\pi}{c} j(x, y)$$

Пусть $\vec{z}$

$$\text{Const} = \mu_1 \quad \mu_2 = \text{Const}$$

$$\Delta_{\perp} A(x, y) = -\frac{4\pi}{c} \mu j(x, y) - \text{уравнение Г.У.}$$

$A_{1\tau} = A_{2\tau}|_S$; Т.к. поверхностного тока в объёмном проводнике нет иначе он вызовет ∞ -ое E .

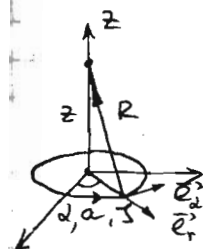
$$\frac{1}{\mu} (\text{rot } \vec{A})_{\tau} = \frac{1}{\mu} (\text{rot } \vec{A})_{\tau}$$

тогда $\vec{A} = \frac{\gamma}{c} \int \frac{d\vec{L}}{R}$ $\vec{H} = \frac{\gamma}{c} \int \frac{d\vec{L} \times \vec{R}}{R^3}$ закон Био-Савара

В слуг. мн. проводников γ писать не надо.
Для мн. можно учесть μ окр. средой.

$$\mu \neq 1: \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} \quad \vec{A} = \frac{\mu\gamma}{c} \int \frac{d\vec{L}}{R} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\gamma}{c} \int \frac{d\vec{L} \times \vec{R}}{R^3}$$

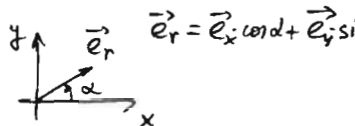
то окр. проводника а течет постр. ток



$$\vec{R} = \vec{e}_z \cdot z - \vec{e}_r \cdot a \quad \vec{H} = \frac{\gamma}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\phi \times (\vec{e}_z \cdot z - \vec{e}_r \cdot a)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$d\vec{L} = \vec{e}_\phi a d\phi$$

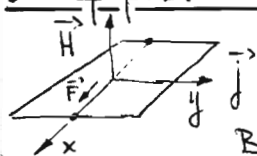
$$= \frac{\gamma a}{c(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi (z \vec{e}_r + a \vec{e}_z) =$$



$$\vec{H} = \frac{2\pi a^2 \gamma}{c(a^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z$$

Магнит. поле где таких проводников "обружается" на расст. порядка мн. размеров пр-ка

Эффект Холла



$$\vec{F} = \frac{e}{c} \vec{u} \times \vec{H} = \frac{e}{cn} \vec{u} \times \vec{H} = \frac{1}{cn} \vec{j} \times \vec{H}$$

Возникает эффект. $\vec{j}$ эл. поле.

$$\text{В равновесии } \vec{F} + e\vec{E} = 0 \quad \vec{E} = -\frac{\vec{F}}{e} = -\frac{1}{cen} \vec{j} \times \vec{H}$$

$$d\varphi = -\vec{E} d\vec{r} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \frac{1}{cen} a j H$$

$$\left. \begin{array}{l} H = 10^4 \text{ э} \\ I = 10 \text{ а} \\ a = 1 \text{ см} \\ h = 0,1 \text{ мм} \end{array} \right\} \varphi_2 - \varphi_1 = 7 \text{ мкВ}$$

Энергия систем постоянных токов

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \vec{B} dV = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \text{rot} \vec{A} dV = \frac{1}{8\pi} \int dV \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) =$$

по всему
пр-ву

$$= \frac{1}{8\pi} \int dV \cdot \{ \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \} = \dots$$

$$= \frac{1}{8\pi} \oint_{S_{00}} (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2c} \int \vec{J} \vec{A} dV ; \quad W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \vec{B} dV = \frac{1}{2c} \int \vec{J} \vec{A} dV$$

(там где есть токи) $\vec{H} = \sum_a \vec{H}_a \quad \vec{B} = \sum_b \vec{B}_b$ - суперпозиция.

$$W = \sum_a W_{aa} + \sum_{a>b} W_{ab}$$

где: $W_{aa} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H}_a \vec{B}_a dV = \frac{1}{2c} \int \vec{J}_a \vec{A}_a dV_a$

$$W_{ab} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H}_a \vec{B}_b dV$$

$$W_{ab} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H}_a \vec{B}_b dV = \frac{1}{c} \int \vec{J}_a \vec{A}_b dV_a = \frac{1}{c} \int \vec{J}_b \vec{A}_a dV_b$$

$$\vec{H}_a \vec{B}_b = \mu \vec{H}_a \vec{H}_b = \vec{B}_a \vec{H}_b$$

(симметрия по a и b)

dV_a или dV_b ? : S-объем по тому провод-ку где S-линии проще.

$$J \sim I \quad A \sim I \quad \text{то} \quad W_{aa} = \frac{1}{2c^2} L_{aa} I_a^2$$

L_{aa} - коэфт. самоиндукции a-ого проводника

$$W_{ab} = \frac{1}{c^2} L_{ab} I_a I_b$$

L_{ab} - коэфт. взаимной индукции.

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_a L_{aa} I_a^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{a>b} L_{ab} I_a I_b =$$

$$= \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} L_{ab} I_a I_b \geq 0$$

Значит на квадратах ср-на должны полож. необход: $L_{aa} \geq 0$

Пусть $\mu=1$ (не важно никаких ГЧ)

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{aa} \geq 0 \\ L_{aa} L_{bb} \geq L_{ab}^2 \end{array} \right.$$

Для объемных проводников:

$$W_{aa} = \frac{1}{2c} \int \vec{J}_a \vec{A}_a dV_a = \frac{1}{2c^2} \int \frac{\vec{J}_a \vec{J}_a'}{R} dV_a dV_a'$$

$$W_{ab} = \frac{1}{c} \int \vec{J}_a \vec{A}_b dV_b = \frac{1}{c^2} \int \frac{\vec{J}_a \vec{J}_b'}{R} dV_a dV_b$$

R - расст. м-жду dV_a и dV_b .

Для нк. проводников $\vec{J} dV = I d\vec{l}$

$$W_{ab} = \frac{I_a I_b}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{l}_a d\vec{l}_b}{R_{ab}}$$

$$L_{ab} = \oint \oint \frac{d\vec{l}_a d\vec{l}_b}{R_{ab}}$$

при $\mu \neq 1$ окр. средой

Для μ проводников мы имеем

$$L_{ab} = \mu \oint \oint \frac{d\vec{l}_a d\vec{l}_b}{R_{ab}}$$

$$W = \frac{1}{2c} \int \vec{J} \vec{A} dV \quad \text{где мн. пр-ка} \quad \vec{J} dV \Rightarrow I d\vec{l}$$

$$W = \frac{1}{2c} \sum_a \gamma_a \oint \vec{A} d\vec{a} = \frac{1}{2c} \sum_a \gamma_a \int_{S_a} \vec{B} d\vec{S}_a = \frac{1}{2c} \sum_a \gamma_a \Phi_a = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} I_a I_b$$

т.к. $\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} I_b$ $\approx \vec{A}$ - не меняется по сечению.
 контур $\vec{A}$ входит поле проводников и внеш. поле
 ого проводника

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} I_b + \Phi_e \quad \text{поток внешнего поле } z\text{-} \text{ } \text{площади охватывающие} \text{ } \text{на контур } a\text{-} \text{го проводника}$$

Оценим коэфт. самоиндукции
мн. проводника

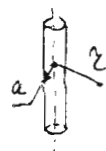
"1" - на единицу длины $W_1 = W_{1i} + W_{1e}$, $W_{1i} \ll W_{1e}$ т.к. в пределе в мн. проводнике объем $\rightarrow 0$.

$$W_{1e} = \frac{\mu_e}{8\pi} \int H^2 dV_1$$

Рассм. прямой линейный провод

$$H = \frac{2Y}{c^2}$$

$$W_{1e} = \frac{\mu_e}{8\pi} \int \left(\frac{2Y}{c^2}\right)^2 2\pi r dr d\alpha \cdot 1 \text{ см} = \frac{\mu_e}{4} \frac{Y^2}{c^2} \int \frac{dr}{r}$$



расходящийся интеграл.

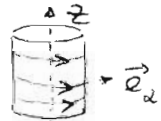
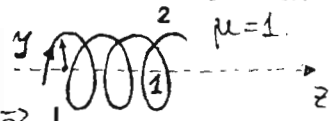
Если проводник мн. и замкнутой то поле обрывается на расст. $\approx$ мн. размеров проводника, тогда

$$W_{1e} \approx \frac{\mu_e}{4} \frac{Y^2}{c^2} \int_a^L \frac{dr}{r} = \frac{\mu_e Y^2}{c^2} \ln\left(\frac{L}{a}\right) \quad L \gg a$$

$$W_e = L \cdot W_{1e} = \frac{\mu_e c^2 Y^2}{c^2} \ln(L/a) = \frac{L}{2c^2} Y^2 \quad L = 2\mu_e L \ln(L/a)$$

Коэфт. самоиндукции соленоида

кол-во витков на 1 см. $n \gg 1$. (пустая катушка) - не зав-сти Y и H от α .



$$\vec{I} \approx n Y \vec{e}_z$$

$\vec{H} = \vec{e}_r$
 $\text{rot } \vec{H} = 0$
 $\text{div } \vec{B} = 0$

$\mu = \text{const.}$

Цилиндрическая сист. коорд.
 $z: \frac{1}{2} \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} = 0$ α - от соленоида

"2": $\frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} = 0 \quad H_\alpha = 0$

$$z: \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z H_z) - \frac{1}{z} \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 : H_z = \frac{C_2}{z}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \mu \operatorname{div} \vec{H} = 0 : \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z H_z) + \frac{1}{z} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad H_z = \frac{C_3}{z}$$

область "1" ($z=0$ принал.)

$$H_z = C_1, \quad H_z = H_z = 0.$$

область "2" ($z=\infty$ принал.) $H_z = 0$

$$H_\alpha = \frac{C_2}{z}, \quad H_z = \frac{C_3}{z}$$

ρ - радиус катушки ; заменим γ :

$$\mu H_{1z} = H_{2z} |_{z=\rho} : 0 = \frac{C_3}{z} |_{z=\rho} \quad C_3 = 0.$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{l} |_{z=\rho} ; \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_r \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} n_\gamma |_{z=\rho} ;$$

$$[\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_r] \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = -\vec{e}_z (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = H_{1z} - H_{2z} = \frac{4\pi}{c} n_\gamma |_{z=\rho}$$

$$H_{1z} = C_1 = \frac{4\pi n_\gamma}{c}$$

0

$$(\vec{e}_z \times \vec{e}_r) (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{e}_z \cdot n_\gamma \vec{e}_\alpha = 0 ; \quad \vec{e}_\alpha (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) |_{z=\rho} = 0$$

$$\vec{H}_2 = 0 ; \quad \vec{H}_1 = \frac{4\pi n_\gamma}{c} \vec{e}_z$$

$$H_{2\alpha} = H_{1\alpha} |_{z=\rho}.$$

$$W_1 = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dV_1 = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \left(\frac{4\pi n_\gamma}{c} \right)^2 \cdot \pi \rho^2 =$$

$$\frac{C_2}{\rho} = 0 ; C_2 = 0$$

$$W_1 = \frac{2\pi^2 \mu n_\gamma^2}{c^2} \rho^2 = \frac{L}{2c^2} \gamma^2 \quad \text{самолонг.} \quad L_1 = 4\pi^2 \mu n^2 \rho^2$$

ед. длины

Если длина соленоида h то $L_h = 4\pi^2 \mu n^2 \rho h$

длина катушечного
провода

$$l = 2\pi \rho \cdot n \cdot h$$

$$L_h = 2\pi \mu n^2 \rho h$$

Квазистационарное электромагнитное поле.

ЭМ поле в ве-ве сильно зависит от рога ве-ва и скорости измен. поле.

Мы рассмотрим медленнотекущее поле.

Условие квазистационарности: длина волны λ поле в вакууме $\lambda \gg$ мин. размер образца l

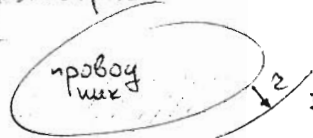
$$\lambda \sim \frac{c}{\omega} \gg l \quad \text{т.е.} \quad \omega \ll \frac{c}{l}$$

электрик

в электр.:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad |\text{rot } \vec{E}| \sim \frac{E}{l}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \sim \frac{\mu \omega}{c} H$$



$$E \sim \frac{\mu \omega l}{c} H \ll H$$

$$|\text{rot } \vec{H}| \sim \frac{H}{l} \quad \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \sim \frac{\epsilon E \omega}{c} \sim \frac{\epsilon \mu \omega^2 l}{c^2} H \quad \underbrace{\frac{\epsilon \mu \omega^2 l^2}{c^2}}_{\ll 1}$$

Т.о. вне проводника $\vec{E}$ поле, удовлетворяющее $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, $\omega \ll \frac{c}{l}$, описывается ур-нием: $\text{rot } \vec{H} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0.$

На расст $z \ll l \ll \lambda$

Будем пользоваться ур-нием с соотв Γ

Внутри проводника

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Будем пользоваться $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Ток проводимости в момент t определяется полем $\vec{E}$ в тот же мом. времени t (локальный закон)

т.е. когда $\tau_{\text{св.пр.}} \ll T$ период поле в св. пр-проводного пробела.

$$\boxed{\omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{св.пр.}}}}$$

л.св.пр. $\ll \lambda$.

Потребуем чтобы

$$\left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right|$$

хороший проводник

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon \omega E \ll 4\pi \sigma E$$

$$\boxed{\omega \ll \frac{4\pi \sigma}{\epsilon}}$$

Для неоднородного проводника

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot} \left(\frac{c}{4\pi \sigma} \text{rot } \vec{H} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Если задана $\vec{B} = B(\text{коорд.})$
то ГУ искать не надо

$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{1}{6} \text{rot} \vec{H} \right) &= - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Если $B = \text{const}$
 $\mu = \text{const}$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \vec{H} &= \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Если у нас однородное
средство то
надо ГУ.

$$B_{1n} = B_{2n}|_S \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}|_S \quad \frac{1}{G_1} (\text{rot} \vec{H}_1)_\tau = \frac{1}{G_2} (\text{rot} \vec{H}_2)_\tau$$

Для ферромагн. $\mu = \mu(\omega)$ при $\omega \rightarrow 1$ $\mu \rightarrow 1$.

⊗ Пусть магн. поле было включено, а потом выключили. Что будет?

$$\mu = 1 \quad \Delta \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{при } t < 0: \vec{H}_0(\vec{r}) \quad t = 0 \text{ поле выкл.}$$

(при $t > 0$)

Можно искать решения при $t \geq 0$ $\vec{H}(t, \vec{r}) = e^{-\gamma_m t} \vec{H}_m(\vec{r})$

$$\Delta \vec{H}_m = - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \gamma_m \vec{H}_m$$

γ_m - соотв. жан. $\vec{H}_m$ - соотв. ф. ортонормиро-
 $\text{Im} \gamma_m = 0$ - м

$$\vec{H}_0(t, \vec{r}) = \sum c_m \vec{H}_m(\vec{r})$$

$$t \geq 0: \vec{H}(t, \vec{r}) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t} \vec{H}_m(\vec{r})$$

(в образце)

Пусть наименьшее $\gamma_m = \gamma_1$,
время за кот-ое поле уменьшится в e раз $\tau = \frac{1}{\gamma_1}$

$$|\Delta \vec{H}| \sim \frac{H}{l^2} \approx \frac{4\pi\sigma}{c^2} \gamma_1 H \quad \gamma_1 \approx \frac{c^2}{4\pi\sigma l^2} \quad \tau \sim \frac{4\pi\sigma l^2}{c^2}$$

(l - мин. размер
образца)

⊗ Точечки. перем. магн. поле внутри проводника.

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

ур-е теплопроводн. $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{H}$$

$$|\Delta \vec{H}| \sim \frac{H}{\delta^2} \quad \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right| \sim \frac{H}{T}$$

$$\frac{T}{t} \approx \kappa \frac{T}{l^2} \quad l \approx \sqrt{\kappa t}$$

$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\sigma T}} \sim \frac{c}{\sqrt{\delta\omega}}$ глубина проникновения поле
за период.

4

3 2 предельных случая.

1) $s \gg l$ $\begin{cases} \Delta \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases}$ $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{G} \vec{E}$ - ne nützem $\vec{E}$
 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \vec{H}$ $E \sim \omega$

Итак надо пользоваться ур-ями

2) $\delta \ll l$, $\delta \gg l_{\text{в. пр.}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{рот } \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \vec{H} \\ \text{див } \vec{E} = 0 \end{array} \right.$

при малых
частотах.

можно было пользоваться макроскопическими ур-ями
прогнозования ВЧ поле на малую глубину - скин эффект.

Надо знать поле вне образца вблизи границы.
В первом $\approx$ можно рассм. это поле совсем не прошекает.
т.е. как проводник - "сверхпр"

$\vec{B} = 0$ $B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow$ снаружи $B_n = 0$
 проводник n y и z ∞ -ые размеры
 диэлектрик $\vec{H} = \vec{H}(z)$
 $\text{div } \vec{H} = 0$ $\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ $H_z = \text{const}$ $H_z = 0$

$$\frac{d^2 \vec{H}}{dz^2} + k^2 \vec{H} = 0, \text{ where } k = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon\omega}{c^2}} \cdot \sqrt{i} = \frac{1+i}{\delta} \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\epsilon\omega}}$$

$$z=0: \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\omega t} \quad \sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{H}(z) = \vec{H}_0 e^{i(kz - \omega t)} = \vec{H}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \vec{H}_0 e^{ikz} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ik \vec{e}_z \times \vec{H} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(i+1)}{s} \vec{e}_z \times \vec{H}$$

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-i}{\delta} \vec{n} \times \vec{H}$$

$$\vec{E}_T = \zeta(\omega) \vec{n} \times \vec{H}_T$$

условие Леонтьева $\Sigma(\omega)$ импеданс.

Тепло кот-ое выделяется в проводнике под действием переменного ЭМ поля.

$$Q = \int \vec{j} \vec{E} dV = \int G \vec{E}^2 dV$$

1) $\delta \gg l$ удобно во $E \sim \omega^2$ при мал

2) $\delta \ll l$ удобно вести расчет $Q = \oint \vec{S} d\vec{s}$

усреднение по периоду колебаний.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] =$$

2-й замкн.
проводника

$$= \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{c}{4\pi G} \frac{1-i}{\delta} \left((\vec{e}_z \times \vec{H}) \times \vec{H} \right) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{c}{4\pi G} \cdot \frac{1-i}{\delta} \vec{e}_z \vec{H}^2$$

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left\{ \frac{c}{4\pi G} i k (\vec{e}_z \times \vec{H}) \times \vec{H}^* \right\} =$$

$$\text{Re} \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{c}{4\pi G} \cdot \frac{i(1+i)}{c} \sqrt{2\pi G \omega} (-\vec{e}_z) |\vec{H}|^2 = \frac{c\omega}{16\pi \sqrt{2\pi G \omega}} |\vec{H}|^2$$

$$Q = \frac{\omega \delta}{16\pi} \oint |\vec{H}_0|^2 ds \quad |\vec{H}_0|^2 - \text{у решения внешней задачи}$$

$$\vec{H} = \vec{e}_y \vec{H} = \vec{e}_y H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)$$

Мы рассматриваем квазистат. эл. поле в массивных пр-ках.

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi G}} H_0 (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\varepsilon(t) = R j(t) \quad j(t) = \hat{Z}^{-1} \varepsilon(t)$$

сила тока в лин. пр-ке определяется значением ЭДС во все предыдущие мом. времени

$$\varepsilon = \hat{Z} j \quad \varepsilon = \varepsilon_0 e^{-i\omega t} \quad j = j_0 e^{-i\omega t}$$

$$\varepsilon = Z(\omega) j$$

$Z(\omega)$ комплексное сопротивление, импеданс.

$Z(0) = R$ - нулевой член разложения по степеням

Как найти след. члены разл?

$$\text{Рассм. замкн. лин. пр-к} \quad \vec{j} = G(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}})$$

$$\oint \vec{j} d\vec{l} \cdot \vec{s} = \oint (-\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) d\vec{l} + \oint \vec{E}^{\text{ст}} d\vec{l}$$

$$\text{В квазистат. случае } \text{div } \vec{j} = 0$$

$$\text{откуда } j = \text{const} \Rightarrow j - \text{я явл.}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \ll |\text{div } \vec{j}|$$

$$j \cdot R = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A} d\vec{l} + \varepsilon$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s}$$

Будем считать что контур не деформируется.

$$\mathcal{E} = IR + \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

Φ - полный поток магнитного поля.

22

Рассм. один замкн. мн. пр-к без внешнего магн. поля.

Тогда $\Phi = \frac{1}{c} LI$; $\mathcal{E} = IR + \frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}$

LI и R - такие же как и для пост. токов.

$$\mathcal{E}I = I^2 R + \frac{1}{c^2} L I \frac{dI}{dt} \quad \mathcal{E}I = RI^2 + \frac{d}{dt} \frac{LI^2}{2c^2}$$

$$A = \int_V \vec{j} \vec{E} \vec{c} dV = \int_V \vec{j} dS \vec{E} \vec{c} d\vec{r} = I \oint \vec{E} \vec{c} d\vec{r} = I \mathcal{E}$$

(работа ЭДС)

$\frac{LI^2}{2c^2}$ - плотность энергии магнитного поля.

$$\vec{j} = j \frac{d\vec{r}}{dr}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t} \quad I = I_0 e^{-i\omega t}$$

откуда $Z(\omega) = R - \frac{i\omega L}{c^2}$ тогда

$$\mathcal{E} = (R - \frac{i\omega L}{c^2}) I \quad \text{ср. } \mathcal{E} = Z(\omega) I$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R - \frac{i\omega L}{c^2}}$$

$$I(t) = \text{Re} \frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{R^2 + (\frac{\omega L}{c^2})^2}} e^{-i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{\omega L}{c^2})^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R c^2}$

Рассмотрим систему мн. проводников.

Тогда для а-ого проводника

$$\mathcal{E}_a = I_a R_a + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \sum_b \frac{1}{c} L_{ab} I_b$$

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{0a} e^{-i\omega t} \quad I_a = I_{0a} e^{-i\omega t}$$

$$\mathcal{E}_a = I_a R_a - \frac{i\omega}{c^2} \sum_b L_{ab} I_b$$

$$\mathcal{E}_a = \sum_b Z_{ab}(\omega) I_b$$

$$Z_{ab}(\omega) = R_a \delta_{ab} - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab}$$

I дает м. омическое сопротивление.

В-ой проводник создает в а-ом

проводнике поток кот-ые в а-ом пр-ке возбуждает электр. поле и соотв. ток Фуко кот-ые нагревают пр-ки.

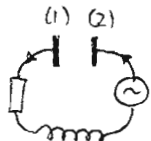
- Как меняется ток в мн. проводнике после включения ЭДС с учетом L проводника.

$$t < 0: J_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} \quad t \geq 0: \varepsilon_0 = 0: \frac{dJ}{dt} + \frac{Rc^2}{L} J = 0$$

$$J = J_0 e^{-\frac{Rc^2}{L}t} = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-\frac{Rc^2}{L}t} \quad \tau = \frac{L}{Rc^2}$$

Рассм. сум. маг. к-та в зоне квантов и R, L и C.

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{cr.}) \quad \int_{(1)} \frac{1}{\sigma} \vec{J} d\vec{e} = \int_{(1)} (-\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) d\vec{e} + \int_{(1)} \vec{E}^{cr.} d\vec{e}$$



$$R\vec{J} = \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(1)} \vec{A} d\vec{e} + \varepsilon$$

$$C = \frac{q}{|\varphi_1 - \varphi_2|}$$

$$\oint \vec{A} d\vec{e} = \int \vec{B} d\vec{s}$$

$$\varepsilon = JR + \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{q}{C}; \quad J = \frac{dq}{dt} = -i\omega q \quad q = \frac{-1}{i\omega} J$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-i\omega t} \quad J = J_0 e^{-i\omega t} \quad q = q_0 e^{-i\omega t} \quad \varphi = \frac{1}{c} L J$$

$$\varepsilon = JR - \frac{i\omega L}{c^2} - \frac{1}{i\omega C} J = Z(\omega) J \quad Z(\omega) = R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$J = \text{Re} \frac{\varepsilon_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-i\varphi_c} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi_c)$$

$$J \cdot \varepsilon = JR + \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{q}{C}; \quad \varepsilon J = RJ^2 + \frac{d}{dt} \frac{LJ^2}{2c^2} + \frac{d}{dt} \frac{q^2}{2C}$$

$$\varepsilon = R \frac{dq}{dt} + \frac{L}{c^2} \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C}; \quad \varepsilon = Z(\omega) J \quad \text{собств. колеб. когда } \varepsilon = 0, J \neq 0$$

это возн. в когда $Z(\omega) = 0$.

$$R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \quad \left| \cdot \frac{i c^2 \omega}{L} \right. \quad \omega^2 + i \frac{Rc^2}{L} \omega - \frac{c^2}{LC} = 0$$

$$\omega_{1,2} = -i \frac{Rc^2}{2L} \pm \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2}$$

$$1. \left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2 > \frac{c^2}{LC} \quad R\omega = 0 \quad \text{апериодический процесс}$$

$$2. \frac{c^2}{LC} > \left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2 \quad \text{затух. колебания}$$

$$3. R = 0 \quad \text{макс. сопр.} \quad \omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}$$

Рассм. сист. проводников канонич. у кот-ых обдлаг L, C, R .

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{I}_a R_a + \frac{q_a}{C_a} + \frac{1}{c^2} \sum_b L_{ab} \mathcal{I}_b \quad \mathcal{E}_a = \sum_b Z_{ab}(\omega) \mathcal{I}_b$$

$$Z_{ab}(\omega) = (R_a + \frac{i}{\omega C_a}) \delta_{ab} + \frac{i}{c^2} L_{ab} ;$$

Рассм. соед. коед. ($\mathcal{E}_a = 0$) $\sum_b Z_{ab}(\omega) \mathcal{I}_b = 0 \quad |Z_{ab}(\omega)| = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0 \quad \text{div} \vec{D} = 4\pi \mathcal{E} \quad \text{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0$$

$$\left| \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \sim \frac{\varepsilon \omega E}{4\pi} \quad |J| \sim \sigma E \quad \left(\frac{\omega \varepsilon}{4\pi \sigma} + 1 \right) \quad \omega \ll \frac{4\pi \sigma}{\varepsilon} : \text{div} \vec{J} = 0$$

Откуда следует законы Кирхгофа

Электромагнитные волны в средах

• ЭМВ в неогр. однород идеальной диэлектрике

$$\sigma = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0$$

const - тогда это выполняются неогр. задачи

врем. σ собственных частот.

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

уогр. неогр. : $\mathcal{E} = 0, \vec{J} = 0$ $\text{div} \vec{D} = \varepsilon_0 \text{div} \vec{E} = 0$

$$\text{div} \vec{B} = \mu_0 \text{div} \vec{H} = 0$$

$$\text{rot rot} \vec{E} = -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H}$$

$$\Delta \vec{E} = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

В кан-ве решение можно рассм. плоские волны.

$$\vec{E}(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 : \vec{E}(x, t) = \vec{E}_1(t - \frac{x}{v}) + \vec{E}_2(t + \frac{x}{v})$$

Рассмотрим монохром. волну. Пусть $E, H \sim e^{-i\omega t}$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

Для монохром плоской волны: $\frac{d^2 \vec{E}(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}(x) = 0$ $\vec{E}(x) = \vec{E}_0 e^{ikx}$
 $\vec{E}_0(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}) = 0$ $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

где $\vec{k} = k \vec{k}_0$ $\vec{k}_0$ - вектор в направлении

$\text{div} \vec{E} = 0$: $i \vec{k} \vec{E}_0 = 0$ распространением.
 и роторных $i \vec{k} \times \vec{E}_0 = i \omega \frac{\mu_0}{c} \vec{H}_0$
 $\text{div} \vec{H} = 0$: $i \vec{k} \vec{H}_0 = 0$ ур-ний : $\vec{H}_0 = \frac{c}{\omega \mu_0} \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \vec{k}_0 \times \vec{E}_0$

поляризация в среде такая же как в вакууме $\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{k}_0 \times \vec{E}_0$ - для и-дв компонентам

Рассм плотность энергии. $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi} + \frac{\mu_0 H^2}{8\pi}$

$w_H = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \vec{E}^2 = \frac{\epsilon_0}{8\pi} \vec{E}^2 = w_E$ $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{4\pi} = \frac{\mu_0 H^2}{4\pi}$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\vec{k}_0 \times \vec{E}) \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{4\pi} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \epsilon_0 E^2 \vec{k}_0 = v w \vec{k}_0$

фазовая скорость = групповая скорость.

Рассм. сл. когда существуют и ток смещения и ток проводимости ϵ_0, μ_0 , $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (такой же как и для пост. тока)

$\text{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon_0}{c} (-i\omega) \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma_0 \vec{E} = -\frac{1}{c} i\omega (\epsilon_0 + i \frac{4\pi \sigma_0}{\omega}) = -\frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E}$

$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i \frac{4\pi \sigma_0}{\omega}$ - для квазистат. полей.

$\omega \rightarrow 0$: $|\epsilon(\omega)| \rightarrow \infty$ проводник ведет себя как диэлектрик с $\epsilon \rightarrow \infty$.

И при больших ω -тах можно восп-е комплексной диэлектр. проницаемости

Будем считать $\epsilon(\omega)$ - заданной. и среда однород. изотр.

74

Тогда у нас $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H} \quad \vec{B} = \mu(\omega) \vec{H}$
 $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D} \sim e^{-i\omega t}) \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E} \quad \vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$
 $\text{div} \vec{D} = \epsilon(\omega) \text{div} \vec{E} = 0$
 $\text{div} \vec{B} = \mu(\omega) \text{div} \vec{H} = 0$

зав-сть $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ от частоты ω и времени t .

Если $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ заданы то система замкнута.

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \vec{E} = 0 \quad \text{можно рассмотреть} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad \text{откуда}$$

$$\Delta \vec{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \vec{H} = 0 \quad \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega)$$

В силу того что $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ - комплексные $\Rightarrow \vec{k}$ - комплексный
 это означает что $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$

$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow$ плоская волна - неоднородная.
 амплитуда убывает - раст. за счет диссипации.

$$\text{rot} \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H} \quad \vec{H} = \frac{c \vec{E}}{\omega \mu(\omega)} \times \vec{E}$$

$\mu(\omega) \sim 1$ для больших ω у ферромагнетиков

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)} \quad k^2 = (k' + i k'')^2 = k'^2 - k''^2 + 2i k' k'' = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon' + i \epsilon'')$$

1.) $\epsilon''(\omega) = 0, \epsilon'(\omega) > 0 \quad \epsilon''(\omega)$ - определяет потери на нагрев.
 в этом случае (нет потерь) $k'' = 0$ - идеальный диэлектрик

2.) $\epsilon''(\omega) = 0, \epsilon'(\omega) < 0 : k^2 < 0 \quad k = i |k|$
 волна не распространяется в областях, где $\epsilon'(\omega) < 0$.

Упростим задачу: изотропная среда - и изотропная дисперсия.

тогда $\vec{k} = k \vec{e}_0, k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)}$ - комплексная.

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega), \quad \sqrt{\epsilon(\omega)} \equiv n(\omega) + i \alpha(\omega)$$

$$k = \frac{\omega}{c} (n + i \alpha) \quad \text{тогда} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega \alpha}{c} \vec{e}_0 \cdot \vec{r}} e^{-i \omega (t - \frac{n}{c} \vec{e}_0 \cdot \vec{r})}$$

логарифмический диспергент $\Gamma = \frac{\omega x}{c}$

$$\vec{H} = \frac{c}{\omega \mu(\omega)} \vec{k} \times \vec{E} \quad \vec{H} = \frac{c}{\omega} \cdot \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) \vec{k}_0 \times \vec{E} =$$

$$\mu(\omega) \approx 1 = \sqrt{n^2 + \kappa^2} e^{i\varphi} \quad \vec{k}_0 \times \vec{E}_0 e^{-i\frac{\omega x}{c}} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c} \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-\frac{\omega \kappa}{c} \vec{k}_0 \cdot \vec{r}} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c} \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) + i\varphi}$$

$$\vec{H}_0 = \sqrt{n^2 + \kappa^2} \vec{k}_0 \times \vec{E}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)} = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) \quad n + i\kappa = \sqrt{\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)}$$

$$n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa = \epsilon' + i\epsilon'' \quad \begin{cases} n^2 - \kappa^2 = \epsilon' \\ 2n\kappa = \epsilon'' \end{cases} \quad \text{откуда} \quad n^4 - \epsilon' n^2 - \frac{\epsilon''^2}{4} = 0$$

Т.к. n - вещественное. - берем "+"

$$n_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\epsilon' \pm \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2})$$

$$n^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon')$$

$$\kappa(\omega) > 0, \quad \omega > 0$$

$$\begin{cases} \epsilon''(\omega) > 0 & \omega > 0 \\ \epsilon''(\omega) < 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

Т.к. амплитуда $\sim e^{-\frac{\omega}{c} \kappa x}$,
то $n(\omega) > 0 \quad \kappa = \frac{\epsilon''}{2n}$

Т.е. $\left[\begin{aligned} n(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon'} \\ \kappa(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon'} \end{aligned} \right.$

$$\kappa(\omega) = \frac{\epsilon'' \sqrt{2}}{2} \frac{(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon')^{1/2}}{(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon')^{1/2} (\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon')^{1/2}}$$

Рассмотрим случай когда $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i \frac{4\pi G_0}{\omega}$

Пусть $\vec{k} = k \vec{e}_x$; мы будем считать $\begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa x} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c} x)}$$

$$\vec{H} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{H} = \vec{e}_z \frac{c}{\omega} \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) E_0 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa x} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c} x)}$$

$$n + i\kappa = \sqrt{n^2 + \kappa^2} e^{i\varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{\kappa}{n}$$

$$\overline{W}_{E2\pi} = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}'|^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon_0 \overline{E}_0^2}{8\pi} e^{-2\frac{\omega}{c}x}; \quad \overline{W}_H = \frac{|\vec{H}|^2}{8\pi} = \overline{E}_0^2 \frac{n^2 + x^2}{8\pi} e^{-2\frac{\omega}{c}x} = \frac{n^2 + x^2}{\varepsilon_0} \overline{W}_E. \quad 75$$

1. $\varepsilon_0 \gg \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}$ ($|\varepsilon'| \gg |\varepsilon''|$ идеальный диэлектрик)

$$\Gamma = \frac{\omega x}{c} = \frac{\omega}{n} \frac{x}{v} = \frac{x}{n \lambda}$$

$\frac{n}{c}$ - фазовая скорость

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{v}{\omega}; \quad \text{см } [*] \quad n = \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{\varepsilon_0} \quad \text{и в } x(\omega) \text{ не будем подра}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon_0 (1 + (\frac{4\pi\sigma_0}{\omega\varepsilon_0})^2)^{1/2} - \varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\frac{4\pi\sigma_0}{\omega\varepsilon_0})^2} =$$

$$= \frac{2\pi\sigma_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \text{тогда} \quad \Gamma \lambda = \frac{2\pi\sigma_0}{\omega\varepsilon_0} \ll 1 \quad \text{слабое затухание на границе волновод.}$$

$$\frac{\overline{W}_H}{\overline{W}_E} = \frac{\varepsilon_0 + (\frac{4\pi\sigma_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}})^2}{\varepsilon_0} \sim 1.$$

$$2. \quad \varepsilon_0 \ll \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon''} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}}$$

$$\Gamma = \frac{\omega x}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma_0\omega}}{c} = \frac{1}{\delta} \quad k = \frac{\omega}{c} \frac{1+i}{\delta}$$

$$\frac{\overline{W}_H}{\overline{W}_E} = \frac{4\pi\sigma_0/\omega}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\sigma_0}{\omega\varepsilon_0} \gg 1.$$

Дисперсия деля

Будем считать σ мен с e^- -ов сист. средст.

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{P} = N\vec{d}$$

$$m\ddot{\vec{z}} = -k\vec{z} + e\vec{E}(t) + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{z}} \quad \text{пренебрегаем членами } \sim \frac{v}{c}.$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\ddot{\vec{z}} + \omega_0^2 \vec{z} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{z}}$$

$$\ddot{\vec{z}} + \gamma \dot{\vec{z}} + \omega_0^2 \vec{z} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{z}_0 (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma) = \frac{e}{m} \vec{E}_0$$

$$\vec{z} = \frac{eim}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \vec{E}(t) \quad \vec{d} = e\vec{z}$$

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E} = \left[1 + \sum_{\omega_0} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right] \vec{E}$$

решаем методом поиска $\approx -i\omega$.

$$\ddot{\vec{z}} = -\omega_0^2 \vec{z} \quad \ddot{\vec{z}} = -\omega_0^2 \vec{z}$$

ищем решение $\vec{z}(t) = \vec{z}_0 e^{-i\omega t}$
в виде

$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}$, среда
промультивирована
набором зарядн. осцилляторов

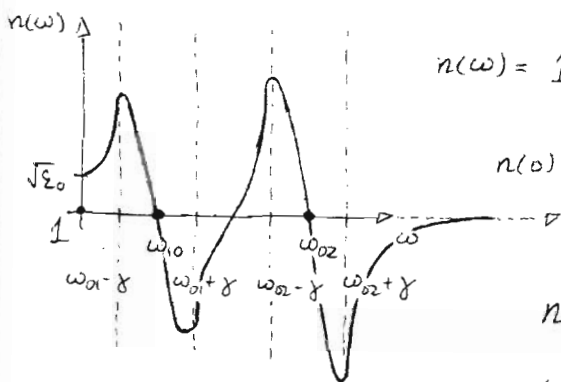
$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + i\alpha =$ рассмотрим разреженную среду, так что сумма малая по ср. единичной в $\epsilon(\omega)$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \text{ тогда } \left\{ \begin{aligned} n(\omega) &= 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ \alpha(\omega) &= \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \end{aligned} \right.$$

1. $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$ вдали от особ. частот.

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 = (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + \omega^2 \gamma^2 \text{ тогда}$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \alpha(\omega) = \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \ll n(\omega)$$



$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}$$

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_0}$$

n растет с ростом ω - нормаль дисперсия

$$v_\phi = \frac{c}{n(\omega)} \text{ убывает}$$

$$n_{\text{н.н.}} = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \sum \frac{f_z}{\omega_z^2 - \omega^2} \quad \sum f_z = 1$$

$$\omega \gg \omega_0 \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

$$\omega_z = \frac{E_z - E_0}{\hbar}$$

$$n = 1 - \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2}$$

$$v_\phi = \frac{c}{n(\omega)} > c$$

$$v_r = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} \quad \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) = \frac{1}{c} \left(n(\omega) + \frac{dn}{d\omega} \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2} + \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2} \right) \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2} \right)$$

$$v_\phi \cdot v_r = c^2$$

$$v_r = \frac{c}{1 + \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2}} \approx c \left(1 - \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2} \right) = c \cdot n(\omega)$$

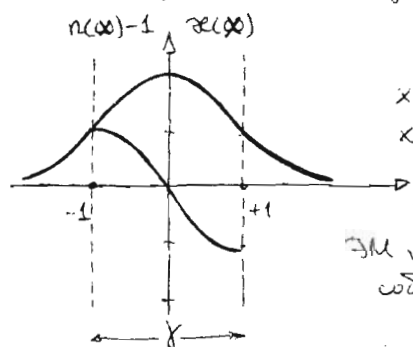
2. $\omega \sim \omega_0$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad \kappa(\omega) = \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 (\omega + \omega_0)^2 + \omega_0^2 \gamma^2} = 1 + \frac{1}{2} \omega_p^2 \frac{2\omega_0 (\omega - \omega_0)}{4\omega_0^2 (\omega - \omega_0)^2 + \omega_0^2 \gamma^2}$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0 \gamma} \frac{x}{1+x^2} \quad x = \frac{\omega - \omega_0}{(\gamma/2)}$$

$$\kappa(\omega) = \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0 \gamma}{4\omega_0^2 (\omega - \omega_0)^2 + \omega_0^2 \gamma^2} = \frac{\omega_p^2}{2\omega_0 \gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma/2}\right)^2} = \frac{\omega_p^2}{2\omega_0 \gamma} \frac{1}{1+x^2}$$



$$x = -1 : \omega - \omega_0 = -\frac{\gamma}{2}, \quad \omega = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}$$

$$x = 1 : \omega = \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$$

В обл. где ω близко ω_0 резонансное поглощение
ЭМ поле раскачивает собственную частоту.

Рассм ЭМ волны в безграничной среде анизотропной, но стационарной. Среда неограничена $\Rightarrow$ можно рассмотреть величину в разд Фурье. Если $\lambda \ll L$ то можно пользоваться ∞ -ми $\approx$ -мем.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi (\rho + \rho_0)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{g} \vec{v} + \vec{j}_0) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$\vec{g}$ - повл. при повл. поле в ве-ве и α от поле $\vec{g} = \vec{g}(\vec{E}, \vec{B})$
(напр решая ур-е движения) т.е. $\vec{B}$ выражаете з-д $\vec{E}$, то

$$\vec{g}(\vec{E}) = \vec{g}(\vec{E}) ; \quad \vec{g} \vec{v} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B}) = \vec{j}(\vec{E})$$

однородным

плотность заряда и тока индуцированные $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{E}) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0 \quad \text{Векторное } \vec{D}' = \vec{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t \vec{j}(t') dt'$$

$$\text{тогда } \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}(t); \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0$$

$$\text{div } \vec{D}' = \text{div } \vec{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t \text{div } \vec{j}(t') dt'$$

$$\text{не меняем, но поправим.} \quad \frac{\partial \rho(\vec{E})}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{добавим от } \vec{r}'. \quad \text{div } \vec{D}' = \text{div } \vec{E} - 4\pi \int_{-\infty}^t \frac{\partial \rho(t')}{\partial t} dt' = \text{div } \vec{E} - 4\pi \rho(t)$$

$$\text{Сделаем, что } \vec{j}(\vec{E}) \rightarrow 0 \text{ при } t = -\infty \quad \rho(\vec{E}) \rightarrow 0$$

$$\text{div } \vec{D}' = 4\pi \rho_0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

В одн. системе + можно замкнуть

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0$$

$$\vec{D}'_i(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int dV' \hat{\epsilon}_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}'; t, \vec{r}) E_j(t', \vec{r}')$$

$$\text{div } \vec{D}' = 4\pi \rho_0$$

Это ур-е похоже на неоднородную и нестационарную среду.

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Векторное уравнение (но не уравнение), стационарная среда

$$\vec{D}'_i(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int dV' \hat{\epsilon}_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') E_j(t', \vec{r}') \quad \text{— не локальная зависимость}$$

$t-t', \vec{r}-\vec{r}'$ — трансляционные симметрии

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \int d\omega d^3k e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \vec{E}(\omega, \vec{k}); \quad \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dt d^3r e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \vec{E}(t, \vec{r})$$

тогда: (сделаем замену $t-t' = t_1, \vec{r}-\vec{r}' = \vec{r}_1$)

оператор $\hat{\epsilon}$ зависит только от $t_1, \vec{r}_1$.

$$\begin{aligned} \vec{D}'_i(t, \vec{r}) &= \int dt_1 \int d^3r_1 \hat{\epsilon}_{ij}(t_1, \vec{r}_1) E_j(t-t_1, \vec{r}-\vec{r}_1) = \\ &= \int dt_1 \int d^3r_1 \hat{\epsilon}_{ij}(t_1, \vec{r}_1) \int d\omega d^3k e^{-i\omega(t-t_1) + i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)} E_j(\omega, \vec{k}) = \\ &= \int d\omega d^3k e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} E_j(\omega, \vec{k}) \int dt_1 \int d^3r_1 \hat{\epsilon}_{ij}(t_1, \vec{r}_1) e^{i\omega t_1 - i\vec{k}\vec{r}_1} = \\ &= \int d\omega d^3k e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \vec{D}'_i(\omega, \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\vec{D}'_i(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k})$$

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \int_0^\infty dt \int d^3r \hat{\epsilon}_{ij}(t, \vec{r}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \quad \text{— тензор проницаемости в в-ва.}$$

он образует компоненты ϵ_{ij} в $\vec{r}$ -е

$$\text{rot } \vec{E}(t, \vec{r}) = \nabla \times \int d\omega d^3k \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} = \int d\omega d^3k i\vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d\omega d^3k \vec{B}(\omega, \vec{k}) (-i\omega e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}})$$

$$\int d\omega d^3k e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \left\{ i\vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k}) - \frac{i\omega}{c} \vec{B}(\omega, \vec{k}) \right\} = 0$$

$$i\vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{i\omega}{c} \vec{B}(\omega, \vec{k}) \quad \text{т.е. формально } \nabla \rightarrow i\vec{k}$$

и тогда заменим $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$

$$\vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{\omega}{c} \vec{B}(\omega, \vec{k})$$

$$\vec{k} \times \vec{B}(\omega, \vec{k}) = -\frac{\omega}{c} \vec{D}(\omega, \vec{k}) - \frac{4\pi i}{c} \vec{j}_0(\omega, \vec{k})$$

компоненты ϵ_{ij} — есть комплексные величины

$$\vec{k} \cdot \vec{D}(\omega, \vec{k}) = -i4\pi \rho_0(\omega, \vec{k})$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}(\omega, \vec{k}) = 0$$

$$\begin{cases} \vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{\omega}{c} \vec{B}(\omega, \vec{k}) \\ \vec{k} \times \vec{B}(\omega, \vec{k}) = -\frac{\omega}{c} \vec{D}(\omega, \vec{k}) - \frac{4\pi i}{c} \vec{j}_0(\omega, \vec{k}) \\ \vec{k} \cdot \vec{D}(\omega, \vec{k}) = -i4\pi \rho_0(\omega, \vec{k}) \\ \vec{k} \cdot \vec{B}(\omega, \vec{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{D}_i = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \vec{E}_j(\omega, \vec{k})$$

зависит от истинных в-ва

$$\vec{D}_i(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \vec{E}_j(\omega, \vec{k})$$

$$\vec{B}_i(\omega, \vec{k}) = \mu_{ij}(\omega, \vec{k}) \vec{H}_j(\omega, \vec{k})$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \quad ; \quad \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \vec{j}_0$$

$$k_i (\vec{k} \times \vec{E})_i - E_i k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} E_j - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{0i} \quad | \cdot \frac{c^2}{\omega^2}$$

$$\left\{ \epsilon_{ij} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right\} E_j = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{0i} \quad \text{Возр-е } E_j \text{ через заданные } j_{0i} \text{ и } \epsilon_{ij}$$

$$\mu_{ij}(\omega, \vec{k}) \equiv \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad \text{— максвелловский тензор.}$$

$$\mu_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{0i}(\omega, \vec{k})$$

Рассм. еще внешние заряды и токи существуют.

$$\vec{j}_{0i}(\omega, \vec{k}) = 0 \rightarrow j_{0i}(\omega, \vec{k}) = 0$$

$$\mu_{ij} E_j = 0$$

т.е. даже в отсутств. зар и токов в среде может быть поле.

Удобно считать и искать не ф-ые решения каждого ~~М/к~~ моды

$M(\omega, \vec{k}) = 0$. Т.к. $\omega \in \mathbb{C}$ есть Re и Im тогда можно запис.

$$\text{Re} M(\omega, \vec{k}) + i \text{Im} M(\omega, \vec{k}) = 0$$

Будем рассматривать область прозрачности где
волн с ω и $\vec{k}$

$$| \text{Re} \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) | \gg | \text{Im} \epsilon_{mn}(\omega, \vec{k}) |$$

тогда и

$$| \text{Re} M(\omega, \vec{k}) | \gg | \text{Im} M(\omega, \vec{k}) |$$

1. В 1-ом аппр.: $\text{Re} M(\omega, \vec{k}) = 0$ откуда $\omega = \omega_k$
Т.о. ур-е — ω_k — дисперсионное ур-е для собственных
эм колебаний в ве-ве.

2. Если учесть малую мнимую часть то ω будет иметь Re и Im часть

$$\omega = \omega_k - i\gamma_k, \quad |\gamma_k| \ll |\omega_k| \quad \text{тогда получим}$$

$$\text{Re}(M(\omega_k - i\gamma_k, \vec{k})) + i \text{Im} M(\omega_k - i\gamma_k, \vec{k}) = 0$$

тогда можно разложить в ряд

$$\underbrace{\text{Re} M(\omega_k, \vec{k})}_0 - i\gamma_k \frac{\partial \text{Re} M}{\partial \omega} + i \text{Im} M(\omega_k, \vec{k}) = 0$$

$$\gamma_k = \frac{\text{Im} M(\omega_k, \vec{k})}{\frac{\partial \text{Re} M(\omega_k, \vec{k})}{\partial \omega}} \bigg|_{\omega = \omega_k} \quad \text{— декремент затухания.}$$

Рассмотрим однородную изотропную среду
Какие могут быть собств. типы волн?

Без волны нет выделенного направления, с волной
выделен. напр. вдоль $\vec{k}$

Поскольку $\vec{x} = \frac{\vec{k}}{k}$ тогда разложим $\vec{E}$ по саст.

$$\vec{E} = \vec{x} E_e(\omega, \vec{k}) + \vec{E}_\perp(\omega, \vec{k}), \quad \vec{x} \vec{E}_\perp(\omega, \vec{k}) = 0.$$

Т.о. ∇ тензор 2-го ранга может быть представлен в таком виде.

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_e(\omega, \vec{k}) \delta_{ij} + \epsilon_z(\omega, \vec{k}) (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j)$$

78

Среды изотропна, откуда тогда $\epsilon_e = \epsilon_z$?

Возник при распространении волна вызывает одинаковое тепловое движение скорости тем. движение входит в ϵ_{ij} и $\Rightarrow \epsilon_e$ от ϵ_z

Это возникает когда ϵ_{ij} зависит и от ω и от $\vec{k}$ (временное и пространственное дисперсия.)

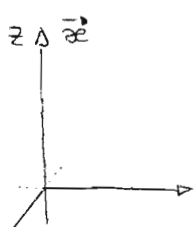
Направим ось z по направлению $\vec{x} = \frac{\vec{k}}{k}$

$$0 = M_{ij} E_j = \left\{ \epsilon_e(\omega, \vec{k}) \delta_{ij} + \left(\epsilon_z(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) \right\} \cdot \hat{x}_j E_j + E_{zj}$$

$$0 = \epsilon_e(\omega, \vec{k}) \hat{x}_i E_e + \left(\epsilon_z - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) E_{zi} \quad \text{откуда получаемые типы волн}$$

$$E_z = 0: \quad \epsilon_e(\omega, \vec{k}) = 0 \quad \text{— дисперс. ур.е для продольной волны.}$$

$$E_e = 0: \quad \epsilon_z - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0 \quad \text{— у.у. для поперечных волн.}$$



$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_z - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_z - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix}$$

$$M_{ij} E_j = 0, \quad E_j = E e_j, \quad (e_j, e_j) = 1$$

- 1) $i = x$: $(\epsilon_z - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) e_x = 0$ если $e_x \neq 0$ то $\epsilon_z - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0$ вектор поляризации.
- 2) $i = y$: $(\epsilon_z - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) e_y = 0$ тогда вектор поляризации $\vec{e}(1, 0, 0)$
- 3) $i = z$: $\epsilon_e(\omega, \vec{k}) e_z = 0$, $e_z \neq 0$, $\epsilon_e(\omega, \vec{k}) = 0$ пропорциональный $\vec{e}(0, 0, 1)$

В пунктах 1) и 2) имеет место двойное вырождение

$$\vec{E}_\perp = (\vec{e}_x E_1 + i \vec{e}_y E_2) e^{-i\omega t + ikz}$$

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_2 \sin(\omega t - kz)$$

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1$$

эллиптическая поляриз.

Круговая попериз. $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$ $\vec{E}_1 = \frac{E}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)e^{-i\omega t + ikz}$

Рассмотрим колеб. с малой амплитудой. гравитация не зависит от

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_+(\omega) = \epsilon(\omega)$$

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} \epsilon(\omega)$$

Тогда г.у. для $l \neq t$ волн

$$1) \epsilon(\omega) = 0$$

$$2) \epsilon(\omega) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0$$

В4 поле $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

продольн. волн. и $\epsilon(\omega) = 0$ $\omega = \omega_p$

поперечн. волна: и $\epsilon(\omega) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0$: $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}$

2. Рассматриваем колебания $\vec{j}_0 = 0$

$$M_{ij} E_j = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{0i}(\omega, \vec{k}) \quad | \cdot M_{ni}^{-1}(\omega, \vec{k})$$

$$M_{ni}^{-1} M_{ij} = \delta_{nj}$$

$$E_n = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{0i}(\omega, \vec{k}) M_{ni}^{-1}(\omega, \vec{k})$$

Введем регулярную матрицу $e_{ni}(\omega, \vec{k}) \equiv M_{ni}(\omega, \vec{k}) \cdot M_{ni}^{-1}(\omega, \vec{k})$ - алгебраическое дополнение к n -той транспонированной матрице

$$E_n = -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{e_{ni} j_{0i}(\omega, \vec{k})}{M(\omega, \vec{k})} ; \text{ в одн. прозрачн. } \frac{1}{M(\omega, \vec{k})} = \lim_{M'' \rightarrow 0} \frac{1}{M' + iM''} =$$

$$= \lim_{M'' \rightarrow 0} \frac{M' - iM''}{M'^2 + M''^2} = P \frac{1}{M'(\omega, \vec{k})} - i\pi \text{sign}(M''(\omega, \vec{k})) \delta[M'(\omega, \vec{k})]$$

$$E_n = -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{e_{ni} j_{0i}}{1} P \left(\frac{1}{M'(\omega, \vec{k})} \right) - \frac{4\pi^2}{\omega} \text{sign} M'' e_{ni} j_{0i} \sum_s \frac{\delta(\omega - \omega_s(\vec{k}))}{\left| \frac{\partial M'}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_s(\vec{k})}}$$

$M'(\omega_s, \vec{k}) = 0$ суммирует по всем суммирует по всем

$$E_n^{(p)}(t, \vec{r}) = \int d\omega d\vec{k} E_n(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} =$$

$$= -4\pi^2 \int \frac{d\omega}{\omega} \int d\vec{k} \text{sign} M'' e_{ni} j_{0i}(\omega, \vec{k}) \sum_s \frac{\delta(\omega - \omega_s(\vec{k}))}{\left| \frac{\partial M'}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_s(\vec{k})}}$$

$$\vec{j}_0(t, \vec{r}) = \vec{j}_0(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} \quad \text{монокром. ток} \quad \vec{j}_0(\omega, \vec{k}) = \vec{j}(\vec{k}) \delta(\omega - \omega_0)$$

$$E_n^{(p)}(t, \vec{r}) = -\frac{4\pi^2}{\omega_0^2} \sum_s \int d\vec{k} \operatorname{sign} M''(\omega_0, \vec{k}) \vec{j}_0(\vec{k}) \cdot e^{-i\omega_0 t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\delta(\omega_0 - \omega_s(\vec{k}))}{\left. \frac{\partial M'}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_s(\vec{k})}}$$

• Энергия ЭМ поле в вакууме.

Рассм. замкн. сист. среда + ЭМ поле в среде + движущиеся заряды
в среде

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = e\vec{v}(t) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0(t)} \quad \frac{d}{dt} \sum_a \mathcal{E}_a = \sum_a e_a \vec{v}_a(t) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)}$$

$$\vec{j}_0(t, \vec{r}) = \sum_a e_a \vec{v}_a(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) \quad \vec{j}_0 = \sum_a e_a \vec{v}_a(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t))$$

$$\frac{d}{dt} \sum_a \mathcal{E}_a - \int \vec{j}_0(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) dV = 0 \quad - \text{справедливо } \vec{r} = \vec{r}_0(t) \text{ и } \text{т.к. } \int \text{ по всему объему}$$

$-\vec{j}_0(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r})$ изменение в эд. времени плотности энергии
поле и среда

выразим ее в-ч полевыми величинами.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0; \quad -\vec{j}_0(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \left(\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \left\{ \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} \right\} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B})$$

Если не учитывать дисперсию ϵ от ω то $\vec{D}' = \epsilon \vec{E}'$

$$-\vec{j}_0(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B})$$

Учет дисперсии $\epsilon(\omega)$ приводит к убавл амплитуды.

ЭМВ проходя в среде $\rightarrow$ диссипация ее энергии

Каждое влест. энергию ЭМВ как термодинамич. величину

Пусть $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$ $D, B \sim e^{-i\omega t}$

Тогда $= - \int_0^T dt \int dV \vec{E}(t, \vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \text{Re} \left\{ \vec{E}^* \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{B}^* \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} + \frac{c}{4\pi} \text{Re} \text{div}(\vec{E}^* \times \vec{B}) =$

$= \frac{1}{8\pi} \text{Re} \left\{ \vec{E}_0^* (-i\omega) (\epsilon' + i\epsilon'') \vec{E}_0 \right\} + \frac{c}{8\pi} \text{Re} \text{div}(\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0) = \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{8\pi} |\vec{E}|^2$
 $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ - не зависит от координат. только выделенные в eq. вр. в eq. об. вр.

При малой диссипации энергии можно ввести плотность энергии в ОМВ как среднюю термодинамическую величину как разность плотностей энергии с полем и без поле при нек. характеристиках средот.

И еще т.к. $q > 0$ в равновесном сост. то $\begin{cases} \epsilon''(\omega) > 0, \omega > 0 \\ \epsilon''(\omega) < 0, \omega < 0 \end{cases}$

Диссипация мала: $|\epsilon''(\omega)| \ll |\epsilon'(\omega)|$
 $\downarrow$ (не учитываем простр. дисперсии)

$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(t) \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$ придем $T_A \gg T$
 период. изменения амплитуды фазы.

$\vec{E}_0(t) = \int \vec{E}_0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$

$\vec{E}_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} dt$ Если $\vec{E}_0(t) = \vec{E}_0$ тогда $\vec{E}_0(\omega) = \vec{E}_0 \delta(\omega)$ и вклад в $\vec{E}_0(t)$ будет давать вклад $\omega = 0$

Если $\vec{E}_0(t)$ медленно меняется тогда будет главный вклад ω близкие к 0

Т.е. волна в среде представляет собой волновой пакет. $d \ll \omega$

$\vec{E}(t, \vec{r}) = \int d\omega \vec{E}_0(\omega) e^{-i(\omega + \omega_0)t + i\vec{k}\vec{r}}$

этобы ω была ош. 2-гогт - $d \ll \omega$

$-\int_0^T \vec{E}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \hat{f} \vec{E}, \quad \vec{f} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{f} e^{-i\omega t} = f(\omega) e^{-i\omega t}, \quad f(\omega) = -i\omega \epsilon(\omega)$

$\hat{f} \vec{E}(t) = \hat{f} \vec{E}_0(t) e^{-i\omega t} = \hat{f} \int d\omega \vec{E}_0(\omega) e^{-i(\omega + \omega_0)t} = \int d\omega \vec{E}_0(\omega) \hat{f} e^{-i(\omega + \omega_0)t} = \dots$

$$\begin{aligned}
& \dots = \int d\alpha \vec{E}_0(\alpha) f(\omega + \alpha) e^{-i(\omega + \alpha)t} \neq e^{-i\omega t} \int d\alpha \vec{E}_0(\alpha) \left(f(\omega) + \alpha \frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} + \dots \right) e^{-i\alpha t} \\
& \quad \text{разл. по } \alpha \text{ и } \omega \\
& = e^{-i\omega t} \int d\alpha \vec{E}_0(\alpha) \left\{ f(\omega) + i \frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right\} e^{-i\alpha t} = e^{-i\omega t} \left(f(\omega) + i \frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \int d\alpha \vec{E}_0(\alpha) e^{-i\alpha t} = \\
& \quad (\text{не зависит от } \alpha) \\
& \Rightarrow \hat{f} \vec{E}(t) = e^{-i\omega t} \left(f(\omega) + i \frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E}_0(t) \\
& \quad \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} = e^{-i\omega t} \left(-i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0(t) + \frac{\partial \omega \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} \right) = 0 \text{ т.к. const.} \\
& -\oint_0 \vec{E} = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}^* \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{B}^* \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\vec{E}_0^* \vec{B}_0) \\
& \operatorname{Re} \vec{E}^* \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}_0^* \left(-i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0 + \frac{\partial \omega \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right) \right\} = \left| \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right| \ll \left| \vec{E}_0 \right| \text{ и на } \epsilon \in \epsilon''(\omega) \text{ т.к.} \\
& \quad \text{мы рассматриваем 2-ю поправку на частоту.} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ -i\omega \epsilon(\omega) |\vec{E}_0|^2 + i\omega \epsilon^*(\omega) |\vec{E}_0|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \omega \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \vec{E}_0^* \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} + \frac{\partial \omega \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \vec{E}_0 \frac{\partial \vec{E}_0^*}{\partial t} \right\} = \\
& = \frac{1}{2} \left\{ -i\omega |\vec{E}_0|^2 \frac{(\epsilon(\omega) - \epsilon^*(\omega))}{2i\epsilon''(\omega)} + \frac{\partial \omega \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}_0|^2 \right\} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ 2\omega \epsilon'' |\vec{E}_0|^2 + \frac{\partial \omega \epsilon'}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}_0|^2 \right\}; \operatorname{Re} (\vec{B}^* \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = \operatorname{Re} (\vec{B}_0^* \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}) = \\
& = \frac{1}{2} \left(\vec{B}_0^* \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} + \vec{B}_0 \frac{\partial \vec{B}_0^*}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{B}_0|^2 \\
& -\oint_0 \vec{E} = \frac{\omega \epsilon''}{8\pi} |\vec{E}(t, \vec{r})|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega \epsilon'}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}(t, \vec{r})|^2}{16\pi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\vec{B}(t, \vec{r})|^2}{16\pi} \\
& \quad \text{но не надо забывать } e^{-i\omega t} + i\vec{E}\vec{r} \\
& \quad \text{и } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \\
& |\vec{B}|^2 = \frac{c^2}{\omega^2} |\vec{k} \times \vec{E}|^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ k^2 |\vec{E}|^2 - |\vec{k} \vec{E}|^2 \right\} = \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ k^2 \delta_{ij} E_i^* E_j - k_i k_j E_i^* E_j \right\} = \\
& = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E_i^* E_j
\end{aligned}$$

$$-\vec{j}\vec{E} = \frac{\omega \epsilon''}{8\pi} |\vec{E}|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \omega \left[\epsilon'(\omega) \delta_{ij} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j) \right] \right\} \frac{E_i^* E_j}{16\pi}$$

$$-\vec{j}\vec{E} = q + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega M'_{ij}(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} \frac{E_i^* E_j}{16\pi}$$

$$W = \frac{\partial (\omega M'_{ij})}{\partial \omega} \frac{E_i^* E_j}{16\pi} ; \text{ теорема Рунтова (1947). } \vec{S} = W \vec{v}_{gr} \text{ — плотность потока энергии гравитационных волн}$$

Собственные волны хар-юте ур-ем $M'_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) = 0$.

Раскрывая $\frac{\partial}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial \omega}$ — получим

$$W = \omega \frac{\partial M'_{ij}}{\partial \omega} \frac{E_i^* E_j}{16\pi} = \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \epsilon'(\omega) \delta_{ij} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j) \right\} \frac{1}{16\pi} =$$

$$= \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \epsilon' \alpha_i \alpha_j + \left(\epsilon' - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) (\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j) \right\} \frac{E_i^* E_j}{16\pi} =$$

$$= \omega \frac{\partial \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{\alpha} \vec{E}|^2}{16\pi} + \omega \frac{\partial \left(\epsilon' - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}|^2 - |\vec{\alpha} \vec{E}|^2}{16\pi}$$

$$= \omega \frac{\partial \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_l|^2}{16\pi} + \omega \frac{\partial \left(\epsilon' - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_t|^2}{16\pi} \equiv W_l + W_t$$

$$\left\{ \begin{aligned} W_l &= \omega \frac{\partial \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_l|^2}{16\pi}, \text{ гравит. ур-е где } l\text{-волн } \epsilon'(\omega) = \omega \text{ — произвольная густ. не } \Phi. \\ W_t &= \omega \frac{\partial \left(\epsilon'(\omega) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_t|^2}{16\pi}, \text{ гравит. ур-е } \epsilon'(\omega) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$M_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j)$$

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}^H(\omega, \vec{k}) + \epsilon_{ij}^A(\omega, \vec{k})$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}^*}{2} + \frac{\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*}{2} \equiv \epsilon_{ij}^H + \epsilon_{ij}^A$$

гравит. ур-е где
колебаний в среде

$$M^H(\omega, \vec{k}) = 0.$$

$$W = \frac{\omega}{\text{Sp}} \frac{\partial M^H(\omega, \vec{E})}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}|^2}{16\pi}, \quad M^H(\omega, \vec{E}) = 0, \quad e_{ij} = M^H(M^H_{ij})^{-1}.$$

где V собственная скорость. $\vec{S} = \vec{v}_{gr} W$
среды

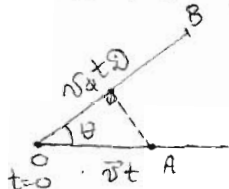
$$\vec{v}_{gr} = \frac{d\omega(\vec{E})}{d\vec{E}} = - \frac{(\partial M^H / \partial \vec{E})}{(\partial M^H / \partial \omega)} \Big|_{M^H(\omega, \vec{E})=0}$$

• Эффект Черенкова

В прозрачной среде при движении частицы возникает излучение отличное от тормозного.

На это излучение тратится 0,1% энергии $\Rightarrow$ можно считать что частица движется равномерно.

Излучение смотрим под углом θ .



$$v_\phi t = OB - OA = v_\phi t - v t \cos \theta = 0$$

$$\text{т.е. } \cos \theta = \frac{v_\phi}{v} \leq 1.$$

максимальное излучение.

$$v_\phi \leq v$$

Поэтому действ. поле движущейся част. возбуждает $\vec{E}$ в среде при прохождении возбуждая когерентно излучают. т.е. излучает среда

Среда прозрачная — энергия не диссипируется

расход энергии

раскачка продольных колеб. частиц среды

поле возникающее в среде можно разложить

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad \begin{cases} \vec{E}_1 - \text{поперечное излуч.} \\ \vec{E}_2 - \text{продольн. колеб. в ве. ве.} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E}_1 \neq 0 \\ \text{div } \vec{E}_1 = 0 \\ \text{rot } \vec{E}_2 = 0 \\ \text{div } \vec{E}_2 \neq 0 \end{cases}$$

Т.к. возникают продольные колеб.

$$\text{div } \vec{D}' = 0$$

$$\vec{D} = e\vec{E}(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$\text{div } \vec{D}' = \epsilon(\omega) \text{div } \vec{E} = \epsilon(\omega) \text{div } (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) =$$

$$= \epsilon(\omega) \text{div } \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow \epsilon(\omega) \rightarrow \text{гипергидропроводность}$$

$$d\mathcal{E}_k = q \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

(энергия теряется)
l - длина пути

Нужно найти $\vec{E}$

Т.к. среда ω -на
то будем полагать $\rho_{\text{пр}} = 0$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \int \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\omega d\vec{k}$$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega}{c} \left(-\frac{\omega}{c} \vec{E} - \frac{4\pi i q \vec{v}}{c} \delta(\vec{k}, \omega) \right)$$

$$\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} - \frac{4\pi i \omega q \vec{v}}{c^2} \delta(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{E} (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) = -\frac{4\pi i q \vec{v}}{c^2} \delta(\vec{k}, \omega) + \frac{4\pi i \omega q \vec{v}}{c^2} \delta(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = 4\pi i q \frac{\frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{k}}{c}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \delta(\vec{k}, \omega)$$

$$\delta(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \delta(\vec{r} - \vec{v}t) e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} dt d\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})t} dt = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{i q}{2\pi^2} \frac{\frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{k}}{c}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \quad \vec{E}^*(t) = \vec{E}(t); \quad \vec{E}^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega =$$

$$= \dots + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(-\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}^*(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right)^* =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

расхожется на
уменьшение и
поперечную
срещу.

тут $\vec{E}(\omega, \vec{k})$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}$$

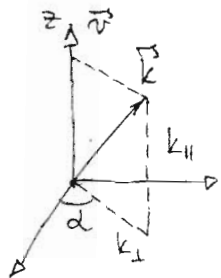
$$\vec{E} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c} \vec{A} - \frac{4\pi i q \vec{v}}{c} \delta(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = -4\pi i q \delta(\vec{k}, \omega)$$

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{e}} = -\frac{2q}{v} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\omega \int_{\vec{E}} d^3k \vec{v} \vec{E}(\omega, \vec{E}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} = -i\vec{t}(\omega - \vec{E}\vec{v}) \Big|_{\vec{r}=\vec{v}t}$$

$$= -\frac{q^2}{\pi^2 v} \operatorname{Re} i \int_0^\infty d\omega \int_{\vec{E}} d^3k \cdot \frac{\omega \frac{v^2}{c^2} - \frac{\vec{E}\vec{v}}{c^2 \epsilon(\omega)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon} \delta(\vec{E}\vec{v} - \omega) =$$



$$d^3k = k_\perp dk_\perp dk_\parallel dx \quad \delta(\vec{E}\vec{v} - \omega) = \delta(k_\parallel v - \omega) = \frac{1}{v} \delta(k_\parallel - \frac{\omega}{v}).$$

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad \vec{E}\vec{v} = \omega \text{ just set } \delta\text{-cr.}$$

$$= -\frac{q^2}{\pi^2 v} \operatorname{Re} i \frac{v^2}{c^2} \frac{2\pi}{v} \int_0^\infty d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \int_{k_\perp} \frac{k_\perp dk_\perp}{k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \epsilon(\omega))} =$$

Интегрируем по $k_\perp$ от 0 до $k_{\perp \max}$.

$$= -\frac{q^2}{\pi c^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \ln \left(1 + \frac{\frac{k_m^2 v^2}{\omega^2}}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)}\right) =$$

$$= -\frac{q^2}{\pi c^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \left[i \arg \left(1 + \frac{\frac{k_m^2 v^2}{\omega^2}}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)}\right) + \ln \left| 1 + \frac{\frac{k_m^2 v^2}{\omega^2}}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)} \right| \right]$$

Найдем $\arg$: $1 + \frac{k_m^2 v^2 / \omega^2}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)} = 1 + \frac{k_m^2 v^2 / \omega^2}{1 - \beta^2 (\epsilon' + i\epsilon'')} = 1 + \frac{k_m^2 v^2}{\omega^2} \frac{1 - \beta^2 \epsilon' + i\beta^2 \epsilon''}{(1 - \beta^2 \epsilon')^2 + \beta^4 \epsilon''^2} =$

$$= 1 + \frac{k_m^2 v^2 / \omega^2}{1 - \beta^2 \epsilon'} + i \frac{k_m^2 v^2}{\omega^2} \frac{\beta^2 \epsilon''}{(1 - \beta^2 \epsilon')^2 + \beta^4 \epsilon''^2} \quad \epsilon''(\omega) \geq 0, \omega \geq 0, \text{ но } \epsilon'' \text{ мало}$$

$\arg$ дает вклад тогда, когда реальная часть отрицательна

$$\arg(\dots) = \pi, \text{ при } 1 + \frac{k_m^2 v^2 / \omega^2}{1 - \beta^2 \epsilon'} < 0 \quad \beta^2 \epsilon' - 1 > 0, \quad 1 - \frac{k_m^2 v^2 / \omega^2}{\beta^2 \epsilon' - 1} < 0$$

Т.о. вклад будет, если $0 \leq \beta^2 \epsilon' - 1 < \frac{k_m^2 v^2}{\omega^2} \Rightarrow \beta^2 \epsilon' > 1 \rightarrow \frac{v^2}{c^2} > 1 \frac{v}{v_{\phi}(\omega)} > 1$
у второго пер-ва получаем оценку для $\omega_{\max}$.

$$-\frac{\partial \Sigma}{\partial \vec{e}} \Big|_{\text{геренковское}} = \frac{q^2}{c^2} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon'(\omega)}\right) - \text{интенсивность когерентности излучения В.Э. и СВЧ на единицу длины (интенсивность по всем углам)}$$

При высоких частотах: $\epsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ и упр. УВЗ не выполняется

$$\beta^2 \epsilon'(\omega_{\max}) = 1$$

На осн. УВЗ были построены керенковские сетки быстрых частиц.

$$-\frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon} \Big|_{\text{поверхностный}} = \frac{q^2}{\pi v^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty d\omega \omega \frac{1}{\epsilon' + i\epsilon''} \ln \left| 1 + \frac{k_m^2 v^2 / \omega^2}{1 - \beta^2 \epsilon'} \right| = \frac{k_m^2 v^2}{\omega^2} \gg 1,$$

$$\lim_{\epsilon'' \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon' + i\epsilon''} = \lim_{\epsilon'' \rightarrow 0} \frac{\epsilon' - i\epsilon''}{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} = P \frac{1}{\epsilon'(\omega)} - i\pi \delta[\epsilon'(\omega)]$$

$$= \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \omega \delta[\epsilon'(\omega)] \ln \left(\frac{k_m^2 v^2}{\omega^2} \right) \quad \text{энергия на возбуждение продольных колебаний (\epsilon'(\omega) = 0)}$$

Если $\omega \rightarrow \infty$, то $\epsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \rightarrow 0 \rightarrow \omega = \pm \omega_p$

$$\delta[\epsilon'(\omega)] = \sum_s \frac{\delta(\omega - \omega_s)}{\frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_s}}, \quad \text{где } \omega_s - \text{простые корни ур-е } \epsilon(\omega_s) = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} = 2 \frac{\omega_p^2}{\omega^3} \Big|_{\omega = \omega_p} = \frac{2}{\omega_p}; \quad \text{При } \omega \rightarrow \infty \quad -\frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon} \Big|_{\text{поверх}} = \delta[\epsilon(\omega)] = \frac{\omega_p}{2} \delta(\omega - \omega_p)$$

$$= \frac{q^2 \omega_p^2}{2 v^2} \ln \left(\frac{k_m^2 v^2}{\omega_p^2} \right) = \frac{4\pi N e^2}{m} = \frac{q^2 2\pi N e^2}{m v^2} \ln \left(\frac{k_m^2 m v^2}{4\pi N e^2} \right).$$



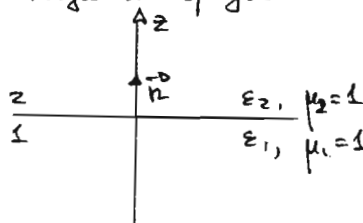
Отражение и преломление волн.

Плоская граница разд. плоские волны, будем рассм. случай когда обе среды прозрачны ($\epsilon''=0$) когда $\mu=\frac{1}{\epsilon}$, то $\epsilon=\epsilon$.

E_1 - падающ. волна $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_1 t)$

отраженная. $\vec{E}'_1 = \vec{E}'_0 \exp i(\vec{k}'_1 \vec{r} - \omega'_1 t)$

преломлен. $\vec{E}_2 = \vec{E}_0'' \exp i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_2 t)$



$$\text{ГЧ: } E_{1z} + E'_{1z} = E_{2z} \Big|_{z=0}$$

$$z=0: E_{0z} e^{i(k_{1x}x + k_{1y}y - \omega_1 t)} + E'_{0z} e^{i(k'_{1x}x + k'_{1y}y - \omega'_1 t)} = E''_{0z} e^{i(k_{2x}x + k_{2y}y - \omega_2 t)}$$

$$x=y=0: E_{0z} e^{-i\omega_1 t} + E'_{0z} e^{-i\omega'_1 t} = E''_{0z} e^{-i\omega_2 t}$$

$$\omega_2 \cdot | a e^{-i\omega_1 t} + b e^{-i\omega'_1 t} = c e^{-i\omega_2 t} \rightarrow \text{прогн. по времени:}$$

$$a\omega_1 e^{-i\omega_1 t} + b\omega'_1 e^{-i\omega'_1 t} = c\omega_2 e^{-i\omega_2 t}$$

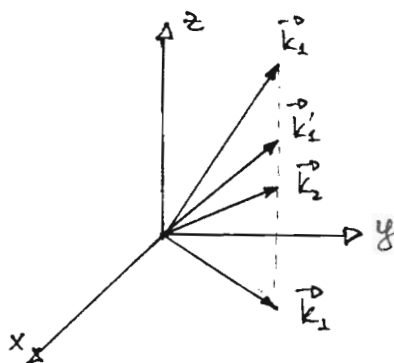
$$a(\omega_1 - \omega_2) e^{-i\omega_1 t} + b(\omega'_1 - \omega_2) e^{-i\omega'_1 t} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{e^{i\omega'_1 t}}{a(\omega_1 - \omega_2)}$$

$$e^{-i(\omega_1 - \omega'_1)t} = -\frac{b}{a} \frac{\omega'_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \quad \text{— выполняется для } \forall \text{ момента времени} \Rightarrow \omega_1 = \omega'_1$$

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 \equiv \omega$$

$$\begin{cases} k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x} \\ k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y} \end{cases} \Rightarrow \vec{k}_{1\perp} = \vec{k}'_{1\perp} = \vec{k}_{2\perp} \text{ — т.е. все волновые вектора лежат в одной пл-сти — пл-сти падения}$$

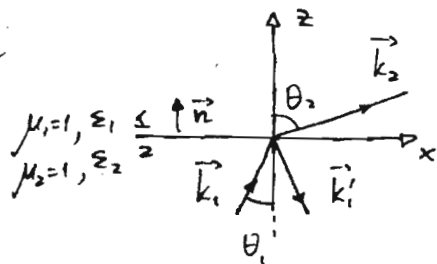
Выберем плоскость падения так чтобы $k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y} = 0$;



$$1) \vec{E}_1 = \vec{e}_y E_0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)} \quad - \text{ падающая волна}$$

$$\vec{E}'_1 = \vec{e}_y E'_0 e^{i(\vec{k}'_1 \vec{r} - \omega t)} \quad - \text{ отраж. волна}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_y E''_0 e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)}$$



запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad E_{1x} + E'_{1x} &= E_{2x} & | \quad z=0 \\ 2. \quad E_{1y} + E'_{1y} &= E_{2y} & | \quad z=0 \\ 3. \quad H_{1x} + H'_{1x} &= H_{2x} & | \quad z=0 \\ 4. \quad H_{1y} + H'_{1y} &= H_{2y} & | \quad z=0 \end{aligned}$$

$$1) E'_{0x} = E''_{0x}$$

$$2) E_0 + E'_{0y} = E''_{0y}$$

и при этом $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \rightarrow \vec{H} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$
т.е. все векторы поперек

$$H_x = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})_x = -\frac{c}{\omega} k_z E_y$$

$$H_y = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})_y = \frac{c}{\omega} (k_z E_x - k_x E_z)$$

Надо угадать что где
вектр + прех волн:

$$\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad k_x E_x + k_z E_z = 0 \quad E_z = -\frac{k_x}{k_z} E_x$$

$$H_y = \frac{c}{\omega} (k_z E_x + \frac{k_x^2}{k_z} E_x) = \frac{c k_z^2}{\omega k_z} E_x$$

$$3) k_{1z} E_0 + k'_{1z} E'_{0y} = k_{2z} E''_{0y}$$

$$4) \frac{k_1^2}{k_{1z}} \cdot 0 + \frac{k_1'^2}{k'_{1z}} E'_{0x} = \frac{k_2^2}{k_{2z}} E''_{0x}$$

Из 1) и 4): $k_1'^2 = k_1^2, \quad k'_{1z} = -k_{1z}$

$$\frac{k_1^2}{k_{1z}} E'_{0x} + \frac{k_2^2}{k_{2z}} E''_{0x} = 0 \rightarrow \left(\frac{k_1^2}{k_{1z}} + \frac{k_2^2}{k_{2z}} \right) E'_{0x} = 0 \rightarrow E'_{0x} = 0,$$

и тогда $E'_{0z} = 0$.

В пределе волн

$$E''_{0x} = 0, \quad E''_{0z} = 0.$$

Т.о. можно
записать:

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_y E_0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}'_1 = \vec{e}_y E'_0 e^{i(\vec{k}'_1 \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_y E''_0 e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)}$$

$$2) E_0 + E'_0 = E''_0$$

$$3) E_0 + E'_0 = \frac{k_{2z}}{k_{1z}} E''_0$$

откуда

$$E''_0 = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z}} E_0 \quad E'_0 = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}} E_0$$

$$k_{1z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1, \quad k_{2z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_1}$$

$$E'_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_1}} E_0; \quad E''_0 = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_1}} E_0;$$

Рассм. сл. когда k_{2z} - действ. ($k_{2z}^2 > 0$)

$$\begin{aligned} E'_0 &= \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_1}} E_0 = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2} - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2} - \sin^2 \theta_1}} E_0 = \\ &= \frac{\cos \theta_1 - \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \cos \theta_2} E_0 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} E_0; \quad E''_0 = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} E_0. \end{aligned}$$

2) $\vec{E}$ лежит в нл-сти падения. $\Rightarrow \vec{H}$ имеет одну сост. пер. волн.

$$\vec{H}_1 = \vec{e}_y H_0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)}$$

показать тоже что $\vec{H}'_1$ и $\vec{H}'_2 \perp$ нл-сти пад.

$$\vec{H}'_1 = \vec{e}_y H'_0 e^{i(\vec{k}'_1 \vec{r} - \omega t)}$$

граничные условия.

$$\vec{H}_2 = \vec{e}_y H''_0 e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)}$$

$$H_{1y} + H'_{1y} = H_{2y} \rightarrow H_0 + H'_0 = H''_0$$

$$E_{1x} + E'_{1x} = E_{2x} \quad H_0 - H'_0 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{k_{2z}}{k_{1z}} H''_0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \vec{E} = -\frac{c}{\omega \epsilon} \vec{k} \times \vec{H};$$

$$E_x = \frac{c}{\omega} k_z H_y; \quad \frac{k_{1z}}{\epsilon_1}$$

$$H''_0 = \frac{2\epsilon_2 k_{1z}}{\epsilon_1 k_{1z} + \epsilon_2 k_{2z}} H_0$$

$$H'_0 = \frac{\epsilon_2 k_{1z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}} H_0$$

$$H'_0 = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 - \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}} H_0 ; H''_0 = \frac{2 \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}} H_0$$

Рассм. случай когда $k_{zz}^2 > 0$:

$$H'_0 = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta_1}} H_0 = \frac{\cos \theta_1 - \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \cos \theta_2} H_0 = \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2} H_0 =$$

$$= \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} H_0 = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} H_0 ; H''_0 = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} H_0$$

Котанг. отр $R = \frac{-\bar{S}_{1z}}{\bar{S}_{1z}}$

$$\bar{S}_{1z} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H})_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}^* \times \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \right\}$$

$$= \frac{c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} \left\{ \vec{k} |\vec{E}|^2 - \vec{E} (\vec{k} \vec{E}^*) \right\}_z = \frac{c^2}{8\pi\omega} |\vec{E}|^2 \operatorname{Re} k_z$$

I. $R_{\perp}$
($\vec{E} \perp$ на-сти на-гнетя)

$$R_{\perp} = \frac{\frac{c^2}{8\pi\omega} k_{1z} |\vec{E}'_0|^2}{\frac{c^2}{8\pi\omega} k_{1z} |\vec{E}_0|^2} = \left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2$$

где отр. и наг.
волны Re можно
отбросить.

II. $R_{\parallel}$ $R_{\parallel} = \left| \frac{H'_0}{H_0} \right|^2$ получить формулу.

$$R_{\perp} = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}} \right|^2, k_{zz}^2 > 0 \quad R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_1)}$$

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 - \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}} \right|^2 \quad R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)}$$

1) $\theta_1 = 0 \quad R_{\perp} = R_{\parallel} = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right|^2$

2) $\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad R_{\perp} = R_{\parallel} = 1$

$$R_{11} = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2) \cos^2(\theta_1 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} = R_{\perp} \frac{\cos^2(\theta_1 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \leq R_{\perp}$$

Общие случаи. I. $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$: $R_{11} = 0$, $R_{\perp} \neq 0$.

В этом случае
одна из углов $\theta_1 = \theta_p$ $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_p$ $\frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_2} = \frac{\sin \theta_p}{\cos \theta_p} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

$\tan \theta_p = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ - так определяется
угол полной поляризации. (угол Брюстера)

II. $\bar{S}_{22} \sim \operatorname{Re} k_{22}$, $k_{22} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}$,

1) $\epsilon_2 \geq \epsilon_1$ (ног корней +-ые вещественна)

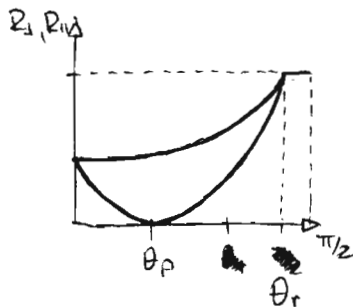
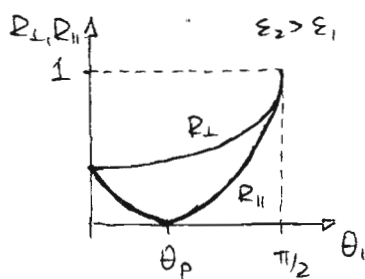
2) $\epsilon_2 < \epsilon_1$ (..... и.д. -ые $k_{22} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta}$

при угле $\theta_1 = \theta_r$: $\sin \theta_r = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$: $k_{22} = 0$

θ_r - предельный угол полного внутр. отражения.

Если $\theta_1 > \theta_r$: $k_{22} = i |k_{22}|$ - и в этом месте отсутствует поток энергии.
в этом случае.

$$R_{\perp}, R_{11} \sim \left| \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} \right|^2 = 1.$$



Рассм. в коор-те волновода плоскую идеальную проводящую поверхность.

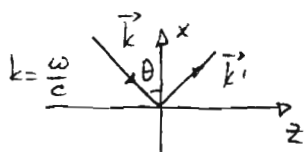
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i \frac{\omega}{c} \cos \theta x} e^{-i \omega (t - \frac{z}{c} \sin \theta)}$$

$$v_\phi = \frac{c}{\sin \theta} > c$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i \frac{\omega}{c} \sin \theta x} e^{-i \omega (t + \frac{z}{c} \cos \theta)}$$

$$v_\phi = \frac{c}{\cos \theta} > c$$

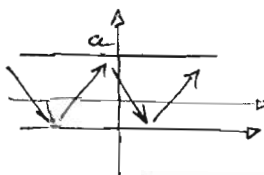


неограниченные плоские волны

гранич. условия: $E_z + E'_z \Big|_{x=0} = 0$; $E_{0z} e^{i \frac{\omega}{c} z \sin \theta} + E'_{0z} e^{i \frac{\omega}{c} z \sin \theta'} = 0$

$$E_{z \text{ рез}} = E_{0z} e^{-i \omega (t - \frac{z}{c} \sin \theta)} \left\{ e^{-i \frac{\omega}{c} \cos \theta x} - e^{i \frac{\omega}{c} \cos \theta x} \right\} =$$

$$= -2i E_{0z} \sin(\frac{\omega}{c} \cos \theta \cdot x) e^{-i \omega (t - \frac{z}{c} \sin \theta)}$$



на второй границе тоже должно быть нулю

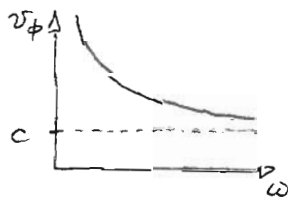
$$\sin(\frac{\omega}{c} \cos \theta \cdot a) = 0$$

$$\cos \theta = \frac{n\pi c}{\omega a} \leq 1 \quad \cos \theta = \frac{\omega_{\text{пр}}}{\omega} \quad \omega_{\text{пр}} = \frac{n\pi c}{a} \quad \omega \geq \omega_{\text{пр}}$$

$$v_\phi = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{пр}}^2}{\omega^2}}}$$

$$\omega = \omega_{\text{пр}}: v_\phi \rightarrow \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty: v_\phi \rightarrow c$$



$$E_{z \text{ рез}} = -2i E_{0z} \sin(\frac{n\pi}{a} x) \exp i(k_3 z - \omega t) \quad k_3 = \frac{\omega}{v_\phi}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$E_z = E(x) e^{i(k_3 z - \omega t)}$$

$$k_3 = \frac{\omega}{v_\phi}, \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad k_1^2 = k^2 - k_3^2$$

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + (\frac{\omega^2}{c^2} - k_3^2) E(x) = 0$$

$$E(x) = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x$$

$$E(x) \Big|_{x=0} = 0$$

$$x=0 \quad B=0$$

$$x=a \quad \sin k_1 a = 0 \quad k_1 a = \pi n$$

$$E_z = A \sin(\frac{n\pi}{a} x) e^{i(k_3 z - \omega t)}; \quad k_3^2 = k^2 - k_1^2, \quad k_{\text{пр}} = k_1 \quad (k^2 \geq k_1^2)$$

$$\frac{\omega^2}{v_\phi^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{\text{пр}}^2}{c^2} \quad v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{пр}}^2}{\omega^2}}}$$

$$\frac{\omega_{\text{пр}}}{c} = \frac{n\pi}{a} \quad \omega_{\text{пр}} = \frac{n\pi c}{a}$$

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} \quad \lambda_{\text{г.р.}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{г.р.}}} \quad v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{г.р.}}^2}}} \quad \lambda \leq \lambda_{\text{г.р.}} = \frac{2a}{n}$$

Распространение э.м. волн в трубе произвольного сечения.



$$E, H \sim e^{-i\omega t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i k \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i k \vec{E}$$

Решение будем искать в виде $\vec{E}(t, \vec{r}) = (\vec{E}_1 + \vec{e}_z E_z) e^{i(k_3 z - \omega t)}$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \left\{ (\vec{E}_1 + \vec{e}_z E_z) e^{i(k_3 z - \omega t)} \right\} = e^{i(k_3 z - \omega t)} \left\{ i k_3 \vec{e}_z \times (\vec{E}_1 + \vec{e}_z E_z) + \nabla_1 \times \vec{E}_1 + \nabla_1 E_z \times \vec{e}_z \right\} =$$

$$= i k (\vec{H}_1 + \vec{e}_z H_z) e^{i(k_3 z - \omega t)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_1 \times \vec{E}_1 = \vec{e}_z i k H_z \\ \vec{H}_1 = \frac{1}{i k} \nabla_1 E_z \times \vec{e}_z + \frac{k_3}{k} \vec{e}_z \times \vec{E}_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \nabla_1 \times \vec{H}_1 = -\vec{e}_z i k E_z \\ \vec{E}_1 = -\frac{1}{i k} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z - \frac{k_3}{k} \vec{e}_z \times \vec{H}_1 \end{array} \right.$$

$k \rightarrow -k$
 $H \leftrightarrow E$

$$\vec{E}_1 = \frac{i}{k} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z - \frac{k_3}{k} \vec{e}_z \times \left\{ \frac{1}{i k} \nabla_1 E_z \times \vec{e}_z + \frac{k_3}{k} \vec{e}_z \times \vec{E}_1 \right\} =$$

$$= \frac{i}{k} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z + \frac{i k_3}{k^2} \nabla_1 E_z + \frac{k_3^2}{k^2} \vec{E}_1$$

$$\vec{E}_1 \left(1 - \frac{k_3^2}{k^2} \right) = \frac{i k_3}{k^2} \nabla_1 E_z + \frac{i}{k} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z ; \quad k^2 - k_3^2 = k_1^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1 = \frac{i k_3}{k_1^2} \nabla_1 E_z + \frac{i k}{k_1^2} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z \\ k \rightarrow -k, \vec{E} \leftrightarrow \vec{H} \\ \vec{H}_1 = \frac{i k_3}{k_1^2} \nabla_1 H_z - \frac{i k}{k_1^2} \nabla_1 E_z \times \vec{e}_z \end{array} \right.$$

$$\nabla_1 \times \vec{H}_1 = \nabla_1 \times \left\{ \frac{ik_3}{k_1^2} \nabla_1 H_2 - \frac{ik}{k_1^2} \nabla_1 E_z \times \vec{e}_z \right\} = \vec{e}_z \frac{ik}{k_1^2} \Delta_1 E_z = -\vec{e}_z ik E_z \quad 87$$

$$\begin{cases} \Delta_1 E_z + k_1^2 E_z = 0 & ; \quad k \rightarrow -k \quad \Delta_1 H_z + k_1^2 H_z = 0 \\ E_z|_L = 0 & \vec{E} \rightarrow \vec{H} \end{cases}$$

$$0 = \vec{e}_z \vec{E}_1|_L = \frac{ik_3}{k_1^2} \vec{e}_z \nabla_1 E_z + \frac{ik}{k_1^2} (\nabla_1 H_z \times \vec{e}_z) \vec{e}_z =$$

$$= \frac{ik_3}{k_1^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_L + \frac{ik}{k_1^2} \vec{n} \cdot \nabla_1 H_z \Big|_L$$

$$\begin{cases} \Delta_1 H_z + k_1^2 H_z = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_L = 0 \end{cases}$$

Можно проверить (голова) $\vec{n} \cdot \vec{H}_1|_L = 0$

Может ли распространяться в этой трубе TEM-волна ($E_z=0, H_z=0$)
Необход. условие: $\underline{k_1=0}$: $k_3=k$: $v_\phi = c$

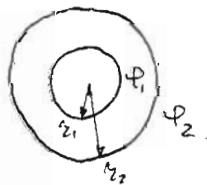
$$\nabla_1 \times \vec{E}_1 = 0 \rightarrow \vec{E}_1 = -\nabla_1 \phi, \quad \vec{e}_z \vec{E}_1|_L = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_L = 0$$

$$\nabla_1 \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad \begin{cases} \Delta_1 \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_L = 0 \end{cases}$$

Решение этой задачи в одномерной области $\phi = \text{const}$
т.е. $\vec{E}_1 = 0, \vec{H}_1 = 0$

Т.е. TEM не могут распространяться в одномер. системах.

Рассмотрим двумерную область (кабель)



$$\Delta_1 \phi = 0, \quad \phi(z)$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{d\phi}{dz} \right) = 0 \quad \frac{d\phi}{dz} = \frac{C_1}{z} \quad (\text{в одномер. од } \exists \text{ т-ко } z=0)$$

$$\phi = C_1 \ln\left(\frac{z}{r_1}\right) + C_2 \quad z=r_1, \phi=\phi_1 \quad C_2 = \phi_1$$

$$z=r_2, \phi_2 = C_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + \phi_1 \quad C_1 = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla_1 \phi = -\vec{e}_r \frac{d\phi}{dz} = -\vec{e}_r \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{z}$$

Эта волна расп.
если, тогда $\phi_2 \neq \phi_1$

$$\begin{array}{l}
 \nabla_{\perp} \times \vec{H}_1 = 0 \quad \vec{H}_1 = \nabla_{\perp} \psi \\
 \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1 = 0 \quad \begin{cases} \Delta_{\perp} \psi = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_L = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

в однородн. обл. решение
 $\psi = \text{const.}$
 $\vec{H}_1 = 0, \vec{E}_1 = -\vec{e}_z \times \vec{H}_1 = 0.$

Второй тип волн.

Е-волна (ТН-волна), $E_z \neq 0, H_z = 0.$

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} E_z + k^2 E_z = 0 \\ E_z|_L = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{ik_3}{k^2} \nabla_{\perp} E_z \\ \vec{H}_1 &= -\frac{ik}{k^2} \nabla_{\perp} E_z \times \vec{e}_z \end{aligned}$$

Третий тип волн

Н-волна (ТЕ-волна) $H_z \neq 0, E_z = 0$

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} H_z + k^2 H_z = 0 \\ \left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_L = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{ik}{k^2} \nabla_{\perp} H_z \times \vec{e}_z \\ \vec{H}_1 &= \frac{ik_3}{k^2} \nabla_{\perp} H_z \end{aligned}$$

$$k_3^2 = k^2 - k_{\perp}^2 \rightarrow \frac{\omega^2}{v_{\phi}^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{zp}^2}{c^2} \quad v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{zp}^2}{\omega^2}}}$$

$k_{\perp}$ - фиксировано оно
 зависит от граничной.

$$2k_3 dk_3 = 2k dk \quad \frac{dk}{dk_3} = \frac{k_3}{k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk_3} = c \frac{k_3}{k} = c \frac{\omega/v_{\phi}}{\omega/c} \quad v_{zp} = \frac{c^2}{v_{\phi}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Когда } \omega = \omega_{zp}: v_{zp} = 0 \\
 \omega \rightarrow \infty: v_{zp} = c
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Когда } \omega = \omega_{zp}: v_{zp} = 0 \\ \omega \rightarrow \infty: v_{zp} = c \end{aligned}} \right\} v_{zp} \leq c.$$

Нужно рассчитать глубину резкости через нее или
 максимальная мощность.

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)_z = \frac{c}{8\pi} \left\{ \text{Re} [(\vec{E}_1 + \vec{e}_z E_z) \times (\frac{1}{k} \vec{H}_1 + \vec{e}_z H_z)]_z \right\}$$

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E}_{\perp} \times \vec{H}_{\perp}^*)_z$$

Рассмотрим поток э-г попер. сечения волноводов где E-волн.

$$\Pi_E = \int \vec{S}_z^E ds = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int \frac{ik_3}{k_1^2} \nabla_\perp E_z \times \frac{ik}{k^2} (\nabla_\perp E_z^* \times \vec{e}_z) ds =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \frac{kk_3}{k_1^4} \operatorname{Re} \int |\nabla_\perp E_z|^2 ds$$

где
H-волн

$$\Pi_H = \frac{c}{8\pi} \frac{kk_3}{k_1^4} \operatorname{Re} \int |\nabla_\perp H_z|^2 ds$$

Рассм. $\int |\nabla_\perp f|^2 ds = \int (\vec{e}_z \times \nabla_\perp f^*) \cdot (\vec{e}_z \times \nabla_\perp f) ds =$

$$= \int d\vec{s} \times \nabla_\perp f^* (\vec{e}_z \times \nabla_\perp f) - \int d\vec{s} \vec{f}^* \times \nabla_\perp (\vec{e}_z \times \nabla_\perp f) \quad d\vec{s} = \vec{e}_z ds$$

$$= \oint d\ell \vec{e} f^* (\vec{e}_z \times \nabla_\perp f) - \int ds f^* (\vec{e}_z \times \nabla_\perp) (\vec{e}_z \times \nabla_\perp f) =$$

$$= \oint d\ell f^* (\vec{e}_z \times \vec{e}_z) \nabla_\perp f - \int ds f^* \Delta_\perp f =$$

$$= \oint d\ell f^* \frac{\partial f}{\partial n} + k_1^2 \int |f|^2 ds$$

E-волна $f = E_z - f|_L = 0$
H-волна $f = H_z - \partial f / \partial n|_L = 0$ } $\Rightarrow$ 1-ый $\int = 0$ по условию.

$$\Pi_E = \frac{c}{8\pi} \frac{kk_3}{k_1^2} \int |E_z|^2 ds \quad \Pi_H = \frac{c}{8\pi} \frac{kk_3}{k_1^2} \int |H_z|^2 ds$$

$$\Delta_\perp E_z + k_1^2 E_z = 0$$

$$E_z|_L = 0$$

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + k_1^2 E_z = 0 \quad E_z(r, \varphi) = R(z) \Phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{R} z \frac{d}{dz} z \frac{dR}{dz} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k_1^2 z^2 = 0$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi_1 \cos m\varphi + \Phi_2 \sin m\varphi$$

m-целое в силу
непрерывности
по φ .

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z \frac{dR}{dz} + (k_1^2 - \frac{m^2}{z^2}) R(z) = 0$$

$$R(z) = R_1 J_m(k_1 z) + R_2 N_m(k_1 z), \quad R_2 = 0 \text{ т.к. при } x \rightarrow 0$$

$$E_z(r, \varphi) = E_{0z} J_m(k_1 r) \cos m\varphi$$

$N_m \rightarrow -\infty$

$$E_z(r, t, \varphi) = E_{0z} J_m(kr) \cos m\varphi e^{i(k_z z - \omega t)}$$

ГУ: $z=a: E_z=0: J_m(k, a)=0 \quad k, a = \alpha_{mn}$ n -ый корень ф-ции Бесс. m -ого порядка

$$k_z^2 = k^2 - k_r^2, \quad k_z \geq 0 \text{ (поперечная не угат)}$$

$$k_z = \frac{\omega}{v_{zp}}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$\omega_{zp} = \frac{c \alpha_{mn}}{a}$$

$$\lambda_{zp} = \frac{2\pi c}{\omega_{zp}} = \frac{2\pi c \cdot a}{c \alpha_{mn}} = \frac{2\pi \cdot a}{\alpha_{mn}}$$

при разных m и n - разн. типы E -волн.

$$\lambda_{zp(\max)} = \frac{2\pi}{\alpha_{01}} \cdot a = 2,61 \cdot a$$

$$\alpha_{01} = 2,405$$

$$H_z = 0, \quad \vec{E}_\perp = \frac{i k_z}{k_r^2} \nabla_\perp E_z = \frac{i k_z}{k_r^2} (\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}) E_z$$

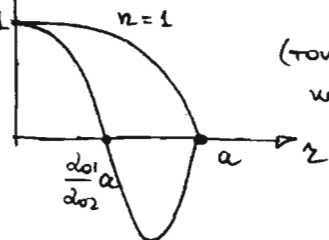
$$\vec{H}_\perp$$

Аксиально симметр. E -волна, зав-сть топографии E_z от номера корня ср-ции Бесселя.

$$m=0 \quad E_z(z) = E_{0z} J_0(kr) \quad k, a = \alpha_{0n}$$

$$E_z \quad \uparrow \quad J_0(kr) \quad 1) n=1 \quad J_0(\alpha_{01} \frac{r}{a}) \quad 2) n=2 \quad J_0(\alpha_{02} \frac{r}{a})$$

$$\frac{E_z}{E_{0z}} \quad \uparrow \quad 1$$



(топография поле по радиусу)

$$\alpha_{02} \frac{r}{a} = \alpha_{01} \frac{r}{a} \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}} \quad \text{коэф. Дито} = 1.$$

$$\text{при } r = \frac{\alpha_{01}}{\alpha_{02}} a < a$$

Этот особый характер. Взаимодействием АМВ с частицами надо понять $v_f \approx$ скорости частиц (взв. время)
Тогда частица всегда находилась в ускоряющей фазе
Т.е. кучиной т.н. "медленные" волны

$$\text{В вакууме } \text{rot } \vec{E} = i k \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = -i k \vec{E}$$

$$\epsilon > 1, \mu > 1 \quad \text{rot } \vec{E} = i k \mu \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = -i k \epsilon \vec{E}$$

Формальный переход: $E \rightarrow \sqrt{\epsilon} E$; $H \rightarrow \sqrt{\mu} H$; $k \rightarrow \sqrt{\epsilon \mu} k$;

$$k_3^2 = k^2 - k_1^2; \quad k_3^2 = \epsilon \mu k^2 - k_1^2$$

$$k_3 = \frac{\omega}{v_\phi}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad k_1 = k_{zp}; \quad k_3 = \frac{\omega}{v_\phi}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad k_1 = k_{zp}.$$

k_1 определяется только границами.

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{zp}^2}{\omega^2}}}; \quad v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu - \frac{\omega_{zp}^2}{\omega^2}}}; \quad \epsilon \mu - \frac{\omega_{zp}^2}{\omega^2} > 1 \Rightarrow v_\phi < c$$
$$\mu = 1 \quad \frac{\omega_{zp}^2}{\omega^2} < \epsilon - 1$$

$$\omega > \frac{\omega_{zp}}{\sqrt{\epsilon - 1}}$$

Волновод излучающий
диэлектриком с узким каналом
по оси.

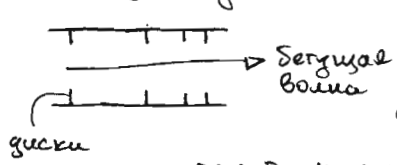


вска

Не эррест.- заряды накапливаются
на диэлектрике.

Покроем диэлектрик внутри тонким проводящим
слоем металла толщиной $\ll$ скин-слою

Волновод Хендана.



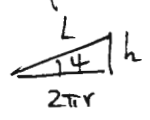
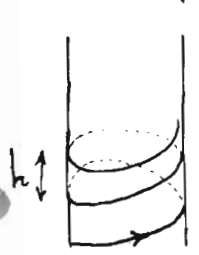
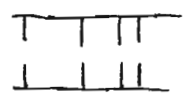
м-ду дисками - стояние

взаимодействие $\Rightarrow v_\phi < c$, $v_\phi \uparrow$ с расст.
расст. м-ду дисками $\Rightarrow$ чл условия синхрониз.

В.Х. эррестивен как ускоритель при $\beta = \frac{v}{c} > 0,5$

Спиральный волновод.
эррф. при $\beta < 0,5$

Волновод
Владимирского



Л-оборот
матрицы на м-сте)

$$t: \quad v_\phi t = h$$
$$c \cdot t = L$$

$$\sin \varphi = \frac{h}{L} = \frac{v_\phi}{c} < 1.$$

7/М колебания в полых резонаторах. Собственные частоты колебаний прямоугольного резонатора.

Внутри вакуума:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= ik \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} &= -ik \vec{E}\end{aligned}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$E, H \propto e^{-i\omega t}$$

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0$$

$$E_z|_S = 0$$

$$\int |\vec{H}|^2 dV = \frac{1}{k^2} \int (\nabla \times \vec{E}^*) \cdot (\nabla \times \vec{E}) dV =$$

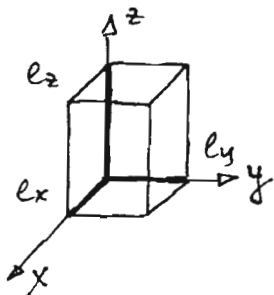
$$= \frac{1}{k^2} \int dV \nabla \times \vec{E}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{k^2} \int dV (\vec{E}^* \times \nabla) \cdot (\nabla \times \vec{E}) =$$

$$\int dV \nabla = \oint \vec{S} = \frac{1}{k^2} \oint_S d\vec{S} \times \vec{E}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{k^2} \int dV \vec{E}^* \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{E}))$$

$$\oint d\vec{S} = \oint \vec{n} ds$$

$$\vec{n} \times \vec{E}^* = \vec{E}_\tau \Rightarrow \frac{1}{k^2} \oint_S ds (\vec{n} \times \vec{E}^*) \cdot \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{k^2} \int dV \vec{E}^* \cdot (\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}) = -k^2 \vec{E}$$

$$\int |\vec{H}|^2 dV = \int dV |\vec{E}|^2 - \text{где } V \text{ конфигурация}$$



$$\Delta E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0 \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0$$

$$E_x(x, y, z) = E_{xx}(x) E_{xy}(y) E_{xz}(z)$$

$$\frac{1}{E_{xx}} \frac{d^2 E_{xx}}{dx^2} + \frac{1}{E_{xy}} \frac{d^2 E_{xy}}{dy^2} + \frac{1}{E_{xz}} \frac{d^2 E_{xz}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (*)$$

$$E_x|_{y=0, l_y} = 0 : E_{xy}|_{y=0, l_y} = 0, \quad E_{xz}|_{z=0, l_z} = 0$$

$$\frac{1}{E_{xy}} \frac{d^2 E_{xy}}{dy^2} = -p_y^2 \quad E_{xy}(y) = E_{1y} \sin p_y y + E_{2y} \cos p_y y$$

$$E_{xy}(0) = 0 \Rightarrow E_2 = 0$$

$$y = l_y \quad \sin p_y l_y = 0$$

$$p_y = \frac{n_y \pi}{l_y}$$

$$p_z = \frac{n_z \pi}{l_z}$$

Аналогично находим

$$E_{xz} = E_{1z} \sin p_z z$$

$$E_x(x, y, z) = E_{xx}(x) \sin p_y y \sin p_z z$$

$$\Delta E_y + \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

$$E_y|_{\substack{x=0, e_x=0 \\ z=0, e_z}}; E_y(x, y, z) = E_{yy}(y) \sin p_x x \sin p_z z; p_x = \frac{n_x \pi}{e_x}$$

$$\Delta E_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0;$$

$$E_z|_{\substack{x=0, e_x=0 \\ y=0, e_y}};$$

$$E_z(x, y, z) = E_{zz}(z) \sin p_x x \sin p_y y$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0; \frac{1}{\sin p_x x} \cdot \frac{dE_{xx}}{dx} + \frac{1}{\sin p_y y} \cdot \frac{dE_{yy}}{dy} + \frac{1}{\sin p_z z} \cdot \frac{dE_{zz}}{dz} = 0;$$

$$E_{xx}(x) = E_{0x} \cos p_x x; E_{yy}(y) = E_{0y} \cos p_y y; E_{zz}(z) = E_{0z} \cos p_z z$$

$$(*) : -p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0; \frac{\omega}{c} = \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{e_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{e_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{e_z}\right)^2}$$

$$p_x E_{0x} + p_y E_{0y} + p_z E_{0z} = 0$$

1) $p_x, p_y, p_z \neq 0$ задаются независимыми $E_{0x}, E_{0y} \Rightarrow E_{0z}$ 2-й ких.

Тогда в той сист. м.д. 2 волны с одной и той же ω -той

2) $p_z = 0, p_x \neq 0, p_y \neq 0$ - нет вырождения.

3) $p_x = 0, p_y = 0, p_z = 0$ - не $\exists$ никаких колеб.

$$\omega_{\min} = \omega_{110} = c \sqrt{\left(\frac{\pi}{e_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{e_y}\right)^2}, \text{ при } n_z = 0.$$

Геометрическая оптика.

$$\lambda \rightarrow 0 \quad (\lambda \ll L \text{ размер поперечности}) \quad f(\vec{r}, t) = a(t, \vec{r}) e^{i\psi(t, \vec{r})}$$

$$\lambda \ll x \ll L \quad \psi(t, \vec{r}) = \psi_0 + \vec{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$t \ll T$ (хар-ное время
увеличения параметров
среды)

$$f(\vec{r}, t) = f_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)}$$

$$\begin{cases} \vec{k} = \nabla \psi \\ \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} n(\vec{r}) \vec{r}, \quad \underline{x=0}$$

$$(\nabla \psi)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\vec{r}, t) \quad \text{упр-е Гюйгенса}$$

Стан. среда : $\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c} \psi_1(\vec{r}) : (\nabla \psi_1)^2 = n^2(\vec{r})$
 $n(\vec{r})$: знае ψ_1 находим $\vec{k}$

Оптика механическая аналогия :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}, \quad \varepsilon = -\frac{\partial S}{\partial t} \\ \vec{r} &= \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}}, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \vec{r} &= \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}, \quad \vec{k} = -\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}, \quad \varepsilon = -\frac{\partial S}{\partial t} \\ \vec{r} = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}}, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \end{array} \right\} \rightarrow$$

Принцип Ферма. : оптическая длина пути $\int_A^B \vec{k} d\vec{r}$

$$\delta \int_A^B \vec{k} d\vec{r} = 0$$

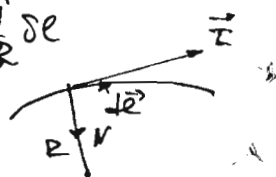
$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} n(\vec{r}) \vec{r} \quad d\vec{r} = \vec{r} d\ell$$

$$\delta \int_A^B n d\ell = \int_A^B (\delta n d\ell + n \delta d\ell) = 0 \quad \delta n(\vec{r}) = \frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} = \nabla n \cdot \delta \vec{r}$$

$$\delta d\ell = \delta(\vec{r} d\ell) = \delta \vec{r} \cdot d\vec{r} + \vec{r} \delta d\ell \quad \delta \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\ell} \delta \ell = \frac{\vec{N}}{R} \delta \ell$$

$$d\vec{r} = \vec{r} d\ell$$

откуда $\delta \vec{r} d\vec{r} = 0$



$$0 = \int_A^B (\nabla n \delta \vec{z} d\ell + n \vec{\tau} \delta d\vec{z}) = \int_A^B (\nabla n \delta \vec{z} d\ell + d(n \vec{\tau} \delta \vec{z}) - \delta \vec{z} d(n \vec{\tau})) =$$

$$= n \vec{\tau} \delta \vec{z} \Big|_A^B + \int_A^B \left\{ \nabla n - n \frac{d\vec{\tau}}{d\ell} - \vec{\tau} (\vec{\tau} \nabla n) \right\} \delta \vec{z} d\ell$$

$$d(n \vec{\tau}) = n \frac{d\vec{\tau}}{d\ell} d\ell + \vec{\tau} \frac{dn}{d\ell} d\ell = n \frac{d\vec{\tau}}{d\ell} d\ell + \vec{\tau} (\vec{\tau} \nabla n) d\ell$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\ell} = \frac{1}{n} \left\{ \nabla n - \vec{\tau} (\vec{\tau} \nabla n) \right\}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\ell} \cdot \vec{N} : \quad \frac{1}{R} = \frac{\vec{N} \nabla n}{n} > 0 \Rightarrow \vec{N} \nabla n > 0$$



лучь искривляется в сторону
увеличения показателя
преломления.