

Задача: составить ур-ие, опис все эв. явления

11.02
2010

Осложн. тем, что кроме электр. зарядов и токов

в в-ве наоб. электр. заряды и токи. Они

явл. сильно переменными величинами в

пр-ве и врем.

отсюда

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\rho \vec{v})_{\text{м}} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho_{\text{эл}} \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right.$$

этой с-мы электр. полей
где опис. электр. в в-ве

Пот действ. внеш. полей $\oplus$ и $\ominus$ заряды

движ. в противополож. стор. $\Rightarrow$ возник. дип. мом-т

в ат., магн. мом-т - в рез-те магн. полей,

и возникает поле засчет всего этого -

поле связанных зарядов и токов

Самосогласованная поле - сумма внеш.
, дип., магн. мом-та

полей и полей засчет возник. электр. зарядов и токов

т.о. наши ур-ия надо преобр., чтобы

исчезли эв. явл., связ. со строением в-ва

Введем τ_0 , ~~τ_0~~ $\tau_A \ll \tau_0 \ll T$ — характерное время задержки
 атомарное время — с одного цикла орбиты электрона
 введем размер l_0

$l_A \ll l_0 \ll l$ — характер. размер задержки
 (длина волны изл., в к-ра посылается в-во, либо размер в-ва)

Ввиду рассмотрения физических б-в.
 малый объем V_0 , в к-ром нах. много атомов
 в-во, но в V_0 макроскопич. х-м (в-вем, поле) —
 не изм.

усредню по τ_0 и l_0 , тогда градиент
 самопоглощ. поля исчезает.

Получу ур-ие для макроскопич. полей.

усреднение:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\zeta \vec{E}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau)$$

в интеграле $\vec{E}$ —
 макроскоп. поле

V_0  макр. в-во V_0
 (x, y, z) или так, что опис.
 все точки внутри V_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\zeta \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\zeta \vec{E}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \vec{E} \end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{E}$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}$$

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{B}$$

макр.-м. макроскоп. поле в в-ва —
 называем в-вем, макр. индукцией

усредн. истинные микрополей

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\rho \vec{v})_{\mu}$$

микро(истинные) величины

$$\vec{P}_{\mu} = \vec{P} + \vec{P}_{\text{своб.зар.}}$$

плотн. свобод.зар.

$$(\rho \vec{v})_{\mu} = \text{ср. плотн. микрополей в-ва (ср. в-вем, св-во)}$$

$$(\rho \vec{v})_{\mu} = (\rho \vec{v})_{\text{своб.зар.}} + (\rho \vec{v})_{\text{связ.зар.}}$$

плотн. поля св-во зарядов

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\rho \vec{v})_{\text{своб.зар.}} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho_{\text{своб.зар.}} + 4\pi \rho \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

плотн. поля св-во зар.
 или плотн. поля проводимости

неприводна для описания ЭМ в-ва.

неполная, не знаем $(\rho \vec{v})_{\text{своб.зар.}}$ и ρ .

Воспользуемся логическим представлением:

плотность поперечного тока

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{1}{V_0} \int (\vec{j} \vec{e}_z)_{\perp} dV = \frac{1}{V_0} \sum_{V_0} \vec{e}_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{V_0} \sum \vec{e}_z$$

вект. поперечный - это ср. значение, имеет единицы дин/см в-ва.

$$\vec{P} = \frac{1}{V_0} \sum \vec{d}$$

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

след. с изм. напр-ки. величины - вектора попер.

Рассм. ток намагничивания в-ва

при двук. электроинного слоя возник. соотв. магн. мом-т.

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{v} dV = \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{v} dV$$

$$\vec{m}_0 = \frac{1}{2c} \int dV \vec{r} \times \vec{j}_0$$

$$\vec{j}_0 = j_0 \frac{d\vec{e}}{de}$$

$$dV = \delta S \cdot de$$

тогда: $\vec{m}_0 = \frac{1}{c} \int \underbrace{j_0 \delta S}_{l_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{e}}_{S_0 - \text{плоск.}}$

$$\vec{m}_0 = \frac{i_0 S_0}{c}$$

охватываемая этим контуром



т.о. ток Ампера порожд. соотв. магн. мом-т гирт. слое $\vec{e}$ в ат.

Вклад Амперовых токов в магн. ток, текущ. напр. эту пов-ть



Вклад дает токототт, пересекающ. контур, образующий поверхность.

Плоск. S выбирается любым образом, плоск. амперового тока



по т.л. параллельно магн. мом-ту

ориентирована одинаково по ат. и напр-ки поле.

S - плоск. S выбирается

$$S = S_0 \cos \alpha$$

S_0 - плоск. S , срез с Амперовым током.

Вектор-на образующей



плоск. пересекающ. контур

Найдем число амперовых токов, плоск. S - р-х, пересекающ. контуром L это возникло когда вектор $\vec{e}$ имеет напр. $\vec{e}_z$

$$n \cdot \vec{V} = S_0 \cos \alpha d\vec{e}$$

i - величина амперового тока

i - это ток на единицу длины - это с. ток
 $i = n \oint \vec{S}_0 \cdot d\vec{l} = n c \oint \frac{1}{c} \vec{S}_0 \cdot d\vec{l}$ аналогично, по аналогии
 или $i = n c \oint \vec{S}_0 \cdot d\vec{l}$

Ср. ток i - экв. i объем

$$\vec{M} = \frac{1}{V_0} \sum_{V_0} \vec{m}_0$$

$$\vec{M} = \frac{1}{V_0} N \vec{m} = n \cdot \vec{m}$$

плотн.

тогда $i = c \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = c \int \text{rot} \vec{M} d\vec{S}$
плотн. ток, экв. V
 с $\vec{M}$ ток $\vec{M}$ аналогично

используем Стокса

$$i = \int_S \vec{j}_n \cdot d\vec{S}$$

$n \cdot \vec{M}$ - скаляр. величина

$$\vec{j}_n = c \text{rot} \vec{M}$$

плотн. ток
 на единицу длины

$$(\rho \vec{v})_{\text{век}} = \vec{j}_{\text{век}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot} \vec{M}$$

выразим $\vec{P}_{\text{век}}$ через скалярные величины

Используем непрерывность заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho + \rho_{\text{век}}) + \text{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{век}}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{\text{век}}}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{\text{век}} = 0$$

попр. $\vec{j}_{\text{век}}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{век}} + \text{div} \left\{ \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot} \vec{M} \right\} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t} \rho$

$$\rho_{\text{век}} = -\text{div} \vec{P}$$

плотн. заряда ρ - значит $\rho_{\text{век}}$ - это плотн. намагниченности

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot} \vec{M} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

плотн.

$$\text{rot}(\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

- векторная величина

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$$

↑

называете $\vec{H}$ - магн. поле, но
 это не так! название $\vec{H}$ - $\vec{B}$,
 но $\vec{B}$ называют вектором

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi (-\text{div} \vec{P}) + 4\pi \rho$$

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

называют $\vec{B}$ - магн. поле,
 но

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

она не зависит от $\vec{j}$

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$$

здесь, если $\vec{j}$ $\vec{j}_{\text{век}}$,
 то не $\vec{j}$ $\vec{j}_{\text{век}}$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

поле

где линейный электромагнитный индукцион
поле линейно связано с напряженностью

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

где пропорциональность в-ва

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

где магн. проницаемость

Если поле изм. не слишком быстро,

то для всех точек пространства и для всех точек

$$\vec{D}(t, \vec{z}) = \epsilon(\vec{z}) \vec{E}(t, \vec{z}) \quad \text{независ., изотропн. среда}$$

$$\vec{B}(t, \vec{z}) = \mu(\vec{z}) \vec{H}(t, \vec{z})$$

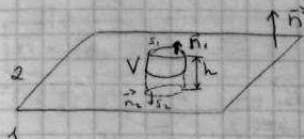
где не слишком быстро изм. поле

$$\vec{D}(t, \vec{z}) = \hat{\epsilon} \vec{E}(t, \vec{z}), \quad \vec{B}(t, \vec{z}) = \hat{\mu} \vec{H}(t, \vec{z})$$

$$D_i(t, \vec{z}) = \hat{\epsilon}_{ij} E_j(t, \vec{z}), \quad B_i(t, \vec{z}) = \hat{\mu}_{ij} H_j(t, \vec{z})$$

Для решения задачи нужны еще граничные условия:

1) Возьмем самое простое ур-ие: $\text{div } \vec{B} = 0$ где нету изм. пр. ур-ия:



направление
нормали всегда из 1 в 2

$$0 = \int_V \text{div } \vec{B} dV = \oint \vec{B} d\vec{S} =$$

$$= \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{B} d\vec{S} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot S_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot S_2 + \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S_{\text{бок}} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n} \cdot S - \vec{B}_1 \cdot \vec{n} \cdot S$$

В-конечна

$$B_{2n} = B_{1n} |_{S_1} \text{ на границе}$$

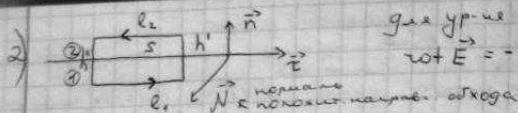
$$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV \rightarrow 4\pi \lim_{h \rightarrow 0} \rho V$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho V = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{k S} k \cdot S = \sigma_s \cdot S$$

плотность поверхностного заряда
на границе раздела 2-х сред

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \sigma_s |_{S_1} \text{ на границе}$$

границ. условия где ур-ие $\text{div } \vec{B} = 0$



$$\int_{\text{vol}} \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{r} \rightarrow \vec{E}_1 \vec{r}_1 l - \vec{E}_2 \vec{r}_2 l + \vec{E}_3 \vec{r}_3 l' - \vec{E}_4 \vec{r}_4 l'' = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{r} l$$

3. Gleich mit n ,
dann folgt
zu (2) die allgemeine
Lösung

$$E_{\text{ext}} = E_{\text{ext}} / s$$

von (2) ist
mit $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$

3) для уравнения $\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

$$\int_{h^1, h^2 \rightarrow 0} \vec{j} d\vec{s} \rightarrow \lim_{h^1, h^2 \rightarrow 0} \vec{j} \cdot \vec{S} = \lim_{h^1, h^2 \rightarrow 0} \frac{j_{\nu}}{h^1 e} h^1 e = \underbrace{j_{\nu}}_{\downarrow} \cdot e = i \vec{\nu} e$$

$$(\vec{H}_1, -\vec{H}_2) \vec{r} \cdot \vec{e} = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{r} \cdot \vec{N} \cdot \vec{e}$$

$$\int (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) (\vec{n} \times \vec{J}) = \frac{4\pi}{c} \vec{i} \vec{J}$$

$$\left\{ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) - \frac{4\pi}{c} i \right\} \vec{n} = 0$$

$$\vec{S}_1 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{L}$$

Гр раздела 2-х сред харесано ^{своя вла} точно нормално
во всех урнх - нормаль

Электростатика (выбрасываем производ. пот)

$$D_{2n} - D_{1n}/5 = 4\pi \phi_s$$

ур-не энтропостатични

$$\text{div} \{ \epsilon(z) \vec{E} \} = 4\pi \rho$$

happy -

$\frac{1}{2}$	E_1	E_2
---------------	-------	-------

Гр. ун. $\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 / s & \text{т.е. поле не имеет сдвигов} \\ E_2 \neq \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - E_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -4\pi G_s & \text{на роб-он} \end{cases}$

18.02

уравнения Максвелла, действующие на заряд, движущийся в ЭМН

$$\vec{F} = \vec{f} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \parallel \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \parallel \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \times \vec{E} \parallel \frac{c}{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{c}{4\pi} \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{j} \times \vec{E}$$

$$\int dV \left\{ \frac{1}{4\pi} \vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} = - \oint_S \vec{S} d\vec{s} - \int \vec{j} \times \vec{E} dV$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

Вектор Пойнтинга - плотность потока энергии, эр. потока.

граничные условия:

$$S_n = S_{n\text{вн}} \parallel S$$

$$E_{\text{вт}} = E_{\text{вн}} \parallel S$$

$$H_{\text{вт}} = H_{\text{вн}} \parallel S$$

в вакууме

т.е. на поверхности раздела границ



вакуум

Слева - вакуум
в эр. поле
ЭМ волн
и вакуум
справа - вакуум

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\int dW \frac{\partial W}{\partial t} ; W - \text{плотн. энергии} - \text{электромагн. энергия и внутр. энергия среды}$$

$$\delta W_E = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \delta \vec{B}$$

$$\delta W_B = \frac{1}{4\pi} \vec{H} \delta \vec{B}$$

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{8\pi} \right)$$

не зависит
параметр среды

$$W_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi}$$

 ϵ_0 - параметр среды, со временем не меняется

$$W_B = \frac{\mu_0 H^2}{8\pi}$$

где μ_0 - магн. постоянная W_E и W_B можно выразить через напряженность и магн. поле не меняется.

Электростатика

При наличии проводников и диэлектриков
осн. задача электростатики (поме не пом с т)
|| ^{или выск.} для этого пом в проводн. = 0 || соот. в пом,
чтобы найти в мод. т в мод. т. у-ва поле
вне проводников, и-рые созд. объединенные
зарядами, и-рые могут быть распред.
в диэлектрике, и поверхностными зарядами
на проводниках.

Некоторые задачи можно решить просто
из грани усл.

диэлектрик - диэл. и

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 & \text{при } E_{1\tau} = E_{2\tau} \big|_S \\ \text{div } \vec{D} = 4\pi\rho & D_{2n} - D_{1n} = 0 \big|_S \end{cases}$$

если граница раздела диэлектрик - проводник, то:

$$E_{\tau} \big|_S = 0 \quad \text{— пом в проводн. = 0; если выск., то и снаружи}$$

$$D_n \big|_S = 4\pi\sigma_s \quad \text{— на пов.-ти проводн. есть своб. зар.}$$

если решено задачу с пом. распред. потенциалов:

$$\Delta U = -4\pi\rho$$

гранич. усл.:

$$U_1 = U_2 \big|_S \quad \text{— непрерывность потенциала}$$

$$E_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = E_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \big|_S$$

гранич. усл.:

$$\varphi \big|_S = \text{const}$$

$$D_n \big|_S = 4\pi\sigma_s$$

$$\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -4\pi\sigma_s$$

теперь можно решать задачи

1) гранич. усл. $\rightarrow D_n = 4\pi\sigma_s$
 $E_{\tau} \big|_S = 0$

или
4) гранич. усл. диэлектрик с диэлектриком выск. фигур. - выск.



выск.



$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \big|_S \quad E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$D_{1n} = D_{2n} \big|_S \quad \epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

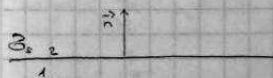
$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

4) Находим пом, создав бесконечно тонкий
проводящий поверхностный

① Бесконечно тонкая пл-та

σ_s - поверхностная зар.

Найти напря-те поле в вакууме



не верно для беск. тонкой пл. поверх.-ти; верно для конечной

$$D_n = 4\pi\sigma_s \quad \text{— из гранич. усл., это на проводнике}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$\text{т.е. } \mathcal{D}_{\text{вн}} - \mathcal{D}_{\text{вн}} = 4\pi \vec{e}_z$$

$$\mathcal{D}_{\text{вн}} = -\mathcal{D}_z$$

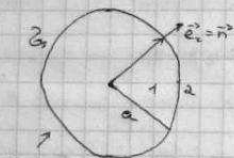
$$2\mathcal{D}_{\text{вн}} = 4\pi \vec{e}_z$$

$$\vec{D} = 2\pi \vec{e}_z \vec{n}$$

$$\varepsilon = 1: \quad \boxed{\vec{E} = 2\pi \vec{e}_z \vec{n}} \quad \text{где вакуумная}$$

конст. диэлектрическая проницаемость

II) Тогда, если диэлектрик тонкий, то можно считать, что он однородный



уменьшился

$$\varepsilon = 1$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$= -\vec{e}_z \frac{d\varphi}{dz} = E(z) \vec{e}_z$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} z E_z = 0$$

$$E_z = \frac{C_1}{z}$$

$$E_z = \frac{C_1}{z}$$

$$z=0: C_1=0$$

$$2) E_{zz} = \frac{C_2}{z^2}$$

$$E_z|_{z=a} = \frac{C_2}{a^2} = 4\pi \vec{e}_z \rightarrow C_2 = 2 \cdot 2\pi a \cdot \vec{e}_z = 2\pi \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2\pi \vec{e}_z}{z} \vec{e}_z}$$

где, если диэлектрик тонкий, то можно считать, что он однородный

III) Условие

$$\varepsilon = 1$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$



$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 E_R = 0, \quad E_R = \frac{C}{R^2}$$

$$1) E_R = \frac{C_1}{R^2}, \quad \text{при } R \rightarrow 0: C_1 = 0$$

$$2) E_R = \frac{C_2}{R^2}$$

находим константу

$$E_R|_{R=a} = \frac{C_2}{a^2} = 4\pi \vec{e}_z$$

$$C_2 = 4\pi a^2 \vec{e}_z = q$$

вакуумная диэлектрическая проницаемость

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{R^2} \vec{e}_R}$$

где, если диэлектрик тонкий, то можно считать, что он однородный

Если у нас есть заряд, то можно считать, что он однородный

но где нет диэлектрика, то можно считать, что он однородный

Рассчитаем электрическое поле в вакууме:

$$q = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

$$\frac{q}{\varphi} = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

определяется расчетом электрического поля

тогда $\frac{q}{\varphi}$ называется электрическим потенциалом

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$[C] = \left[\frac{q}{\varphi} \right] = \left[\frac{q}{\frac{q}{a}} \right] = \text{см} - \text{электрический потенциал}$$

В Гауссовой с-ме ёмкости уединённого проводника измёр. в с-ме.

а на проводнике: $1 \text{ Фарада} = \frac{1 \text{ кулон}}{1 \text{ вольт}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ ГСГс}}{300 \text{ ГСГс}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$

потому заряд в 1 см Ф нм Ф

1 см Ф = $9 \cdot 10^{11} \text{ см.} \rightarrow$ для шарика $10^6 \text{ см.} \text{ :)$



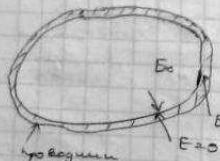
если мы проводящие перемещ. зарядов так, чтобы поле внутри стало 0.

$q_a = \sum_i C_{ab} \varphi_b$ - полн. заряд на нахд. проводнике зависит от потенциалов и потенциалов проводников.

$a=b \rightarrow$ ёмкость

$a \neq b$ - коэффициент электростатической индукции

Электростатическая зашита

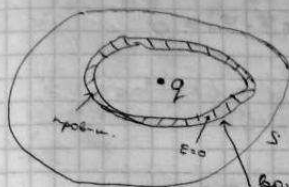


$\bullet q$ - приводит к появл. зар. на внутр. пов-ти проводника

$E=0$ - внут. гр-н уст.

электростатич. поле не выйдет на заряды внутри проводника.

если наоборот:



внутр. заряд на внутр. проводнике.

по тл Гаусса: $\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q$

возникает заряд на внутр. поверхности

т.е. шарик - отриц.

Электростатич. зашита работает только в одну сторону

Найдём электростатич. энергию об-един. зар.

и проводников

$U = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \vec{D} dV$ - интегр. по всему объёму проводника

$\ominus - \frac{1}{8\pi} \int \vec{D} \text{grad} \varphi dV = - \frac{1}{8\pi} \int \{ \text{div}(\varphi \vec{D}) - \varphi \text{div} \vec{D} \} dV =$

$= \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV - \frac{1}{8\pi} \oint \varphi \vec{D} d\vec{S} \ominus$

т.к. интегр. по объёму вне проводников, то зашита не работает. состоит из двух углов и суммы по поверхности проводников.

$\ominus - \frac{1}{8\pi} \sum_a \oint \varphi \vec{D}_a d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{8\pi} \sum_a \oint \varphi_a \vec{D}_a d\vec{S}$

$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \sum_a \oint \varphi_a \vec{D}_a d\vec{S}$

красивая ф-ла, но бесполезная т.к. надо знать заряд, потенциал, размер, форму...

но с т.зр. теории справедлива.

$$\rho = 0$$

$$u = \frac{1}{2} \oint_a q_a \varphi_a = \frac{1}{2} \oint_a C_{ab} \varphi_a \varphi_b > 0$$

$$C_{aa} > 0$$

$$C_{aa} \cdot C_{bb} > C_{ab}^2$$

Диск есть проб.



$$q_a = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} > 0 \Rightarrow \text{все } q_a < 0$$



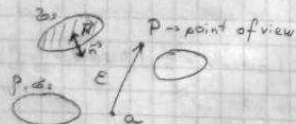
$$\text{с отриц. зарядом, } q_a = \oint_a C_{ab} \varphi_b =$$

$$= C_{ba} \varphi_a < 0$$

$$\boxed{C_{ab} < 0 \text{ ато}}$$

Решим задачу:

1) отр. заряды. В любой точке вне проб. но зад. потенциал и объемн. заряды



Решено при н.м. 2-ой формулы Грина:

Если есть 2 функции φ и ψ

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S \{ \varphi \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \varphi \} dS$$

$$\int_V \left\{ \varphi \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta \varphi \right\} dV = -4\pi \varphi_P + 4\pi \int \frac{\rho}{R} dV$$

"4\pi \delta(r)" "4\pi \rho" "volume"

$$\oint_S \varphi \text{grad } \psi d\vec{S} = - \oint_{S_a} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = - \oint_{S_a} \varphi_a \oint_{S_a} \text{grad } \psi d\vec{S} =$$

"N ds = -n ds"

$$= - \oint_a \varphi_a \int \frac{\Delta \psi}{\Delta R} dV = 0$$

нормаль наруж.
интегрирую по внутренней поверхности, нормаль $\vec{n}$ наружу $\Rightarrow$ интегрирую по внешней проб.-е. Тогда $\Delta R = 0$

2) рассм. более общего случая

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho = 0 \text{ проб.-е.}$$

гравитация нулевы сн. притяг. раз.

$$\int_V \left\{ \varphi \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta \varphi \right\} dV = -4\pi \varphi_P + \frac{4\pi}{\epsilon} \int \frac{\rho}{R} dV$$

$$\oint_S \varphi \text{grad } \psi d\vec{S} = - \oint_a \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \oint_a \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} dS =$$

$$= \frac{4\pi}{\epsilon} \oint_a \varphi \frac{\partial \psi}{\partial R} dS$$

$$\boxed{\varphi_P = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho}{R} dV + \frac{1}{\epsilon} \oint_a \varphi \frac{\partial \psi}{\partial R} dS}$$

хорошо, когда поверхность проб.-ов одност. с.м.м.з.м.м. в общ. случае это не так. трудно.

Получается 1-е единственное решение электростатич. задачи

задача гута. гранич. уб. зап. Тогда макс. или мин. при, если много задач постав. кажд. проб.-е, мы до конца кажд. проб.-е

9-60

поверхности, которая имеет 2 части.
 $\vec{E}_1, \varphi_1, \vec{D}_1, \vec{E}_2, \varphi_2, \vec{D}_2$

$\vec{E}' = \vec{E}_2 - \vec{E}_1, \varphi' = \varphi_2 - \varphi_1, \vec{D}' = \vec{D}_2 - \vec{D}_1$
 тогда и поверхность ~~где~~ назовем переменную - разность потенциалов
 переменная задана

$$\text{div} \vec{D}_1 = 4\pi p, \text{div} \vec{D}_2 = 4\pi p \rightarrow \text{div} \vec{D}' = 0$$

задача:

$$\oint \vec{E}' \vec{D}' dV = \varepsilon \int E' dV = - \int \vec{D}' \text{grad} \varphi' dV =$$

$$= - \int dV \{ \text{div} (\varphi' \vec{D}') - \varphi' \text{div} \vec{D}' \} =$$

$$= - \oint \varphi' \vec{D}' d\vec{S} = \sum_a \oint_{S_a} \varphi' \vec{D}'_n dS = \sum_a \varphi_a \oint_{S_a} (\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) dS_a$$

$$= \sum_a (\varphi_{2a} - \varphi_{1a}) 4\pi (q_2 - q_1) = 0.$$

тогда:

1) $\varphi_{2a} = \varphi_{1a} = \varphi_a$

2) $q_{2a} = q_{1a} = q_a$

т.е. q.

$$\varepsilon > 0 \rightarrow \vec{E}' = 0$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1$$

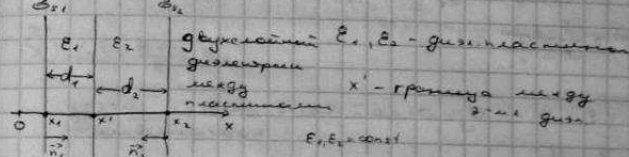
Конденсатор

25.02

1) плоскости - 11 проводящих, на них U_0 разность потенциалов
 на расстоянии x (крайние эллипсы)

Рассм. углерод. нитри. нитри.

2) диэлектрик проводящий на н.



Емкость конденсатора $C = \frac{q}{|U_2 - U_1|}$ $\frac{q}{\text{разн. пот. между обкладками}}$

C - постоянная величина

В случае симметричного конденсатора, все величины зависят только от x .

$$\text{div} \vec{D} = 0$$

$$\varphi(x), \vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\vec{e}_x \frac{d\varphi}{dx} = E(x) \vec{e}_x$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \text{const}$$

исп. граничные условия:

1) $D_1|_{x=x_1} = 4\pi \vec{D}_{11}$

$$\vec{D}_1 = 4\pi \vec{D}_{11}, \vec{E}_1 = 4\pi \vec{D}_{11} \vec{n}$$

2) $D_{2n}|_{x=x_2} = 4\pi \vec{D}_{22}$, тогда $D_2 = 4\pi \vec{D}_{22} \vec{n}_2 = 4\pi \vec{D}_{22} \vec{n}$

3) $D_{1n} = D_{2n}|_{x=x_2} = 4\pi \vec{D}_{22} = 4\pi \vec{D}_{11} \rightarrow \vec{D}_{22} = -\vec{D}_{11}$

$$\vec{D}_{11} + \vec{D}_{22} = 0$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} = \frac{4\pi \vec{D}_1}{\epsilon_1} \vec{n}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} = \frac{4\pi \vec{D}_2}{\epsilon_2} \vec{n}$$

$$U_2 - U_1 = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{z} = - \int_1^2 E_1 dx - \int_1^2 E_2 dx =$$

$$= - 4\pi \vec{D}_1 \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right), \quad q = \vec{D}_1 S$$

$$C = \frac{S}{4\pi \epsilon_1 \frac{d_1}{\epsilon_1}}$$

$E_1 = E_2 = E$ - одинаковая величина между
расчетами

$$d = d_1 + d_2$$

тогда $C_E = \frac{\epsilon S}{4\pi d} = \epsilon \cdot C_{\text{ваку}}$

2) Углеродистый конденсатор



группа величин по
сп. с попереч. размерами
тогда применяете кр. зарядов

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad \text{и в } 1-\text{ой, и во 2-ой}$$

→ нет зарядов, зарядов

$$U = U(z)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } U = -\vec{e}_z \frac{dU}{dz} = E(z) \vec{e}_z$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z E_z) = 0 \quad E_z = \frac{C_1}{z}$$

$$D_{1n} = 4\pi \vec{D}_1$$

$$D_1(z) = 4\pi \vec{D}_1$$

$$D_2 = 4\pi \vec{D}_2$$

$$D_{1n}|_{z=z_1} = 4\pi \vec{D}_1$$

$$D_1(z)|_{z=z_1} = 4\pi \vec{D}_1, \quad \vec{D}_1 = 4\pi \vec{D}_1 \vec{e}_z$$

$$D_1(z) = \frac{C_1}{z} = 4\pi \vec{D}_1, \quad z = z_1: \frac{C_1}{z_1} = 4\pi \vec{D}_1$$

$$C_1 = 2 \cdot 2\pi z_1 \cdot \vec{D}_1 = 2\vec{D}_1$$

дел. заряд на окружность

$$\vec{D}_1(z) = \frac{2\vec{D}_1}{z} \vec{e}_z$$

$$D_2 = \frac{C_2}{z}, \quad \vec{D}_2 = \frac{C_2}{z} \vec{n}$$

$$D_{2n}|_{z=z_2} = -D_{2n}|_{z=z_1} = -\frac{C_2}{z_2} = 4\pi \vec{D}_1$$

$$C_2 = -2 \cdot 2\pi z_2 \cdot \vec{D}_1 = -2\vec{D}_1$$

тогда $\vec{D}_2 = -\frac{2\vec{D}_1}{z} \vec{n}$

$$D_{1n} = D_{2n}|_{z=z_1}$$

$$z_2 = -z_1$$

$$z_1 = z_2$$

$$z_2 = -z_1$$

симметрично

тогда z_1 и z_2 плоск. конденс., заряды на
расчетных равны по велич. и противоположны

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} = \frac{2\vec{D}_1}{\epsilon_1 z} \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} = \frac{2\vec{D}_1}{\epsilon_2 z} \vec{e}_z$$

$$U_2 - U_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{z} = -2\vec{D}_1 \left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} + \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{z} \right) =$$

$$= -2\vec{D}_1 \left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{z_2}{z_1} \right]$$

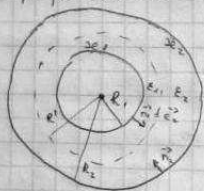
$$C_1 = \frac{Q}{2\pi \epsilon_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$$

$$C_{1\epsilon} = \frac{\epsilon}{2\pi \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} = \epsilon C_{1\text{vac}}$$

$$C_{\text{he}} = h C_{1\epsilon}$$

б) Сперва рассчитаем конденсатор



$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$\varphi = \varphi(R), \quad \vec{E} = \vec{E}(R)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 D(R)) = 0$$

$$D(R) = \frac{C}{R^2}$$

$$\vec{D}_1 = \frac{C_1}{R^2} \vec{e}_R, \quad \vec{D}_2 = \frac{C_2}{R^2} (-\vec{e}_R)$$

$$D_{2n} \Big|_{R=R_2} = \frac{C_1}{R^2} \Big|_{R=R_2} = 4\pi \epsilon_1 C_1 = 4\pi R_2^2 \epsilon_1 q_1$$

$$D_{1n} \Big|_{R=R_1} = -\frac{C_2}{R^2} \Big|_{R=R_1} = 4\pi \epsilon_2 q_2$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Big|_{R=R_1} \quad C_2 = -q_2$$

$$q_1 = -q_2 = q$$

$$\vec{D}_1 = \frac{q}{R^2} \vec{e}_R \quad (R_1 \leq R \leq R')$$

$$\vec{D}_2 = \frac{q}{R^2} \vec{e}_R \quad (R' \leq R \leq R_2)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} = \frac{q}{\epsilon_1 R^2} \vec{e}_R$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} = \frac{q}{\epsilon_2 R^2} \vec{e}_R$$

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{R} = -q \left(\frac{1}{\epsilon_1} \int_{R_1}^{R'} \frac{dR}{R^2} + \frac{1}{\epsilon_2} \int_{R'}^{R_2} \frac{dR}{R^2} \right) = \\ &= -q \left[\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

if $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$, then

$$C = \frac{\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \epsilon C_{\text{vac}}$$

Задача.

Найти силу, действующую на заряд q внутри со стороны внешнего электрического поля.

$\vec{E}(\vec{z})$
 $-q$ $+q$
 $\vec{z}$ $\vec{z}'$
 $\vec{f} = q \vec{E}(\vec{z}') - q \vec{E}(\vec{z}) = q \{ \vec{E}(\vec{z}) + (\vec{z}' - \vec{z}) \cdot \text{grad} \vec{E}(\vec{z}) + \dots \}$
 $\approx (\vec{z}' - \vec{z}) \cdot \text{grad} \vec{E}(\vec{z})$

сп. дип. момент $\vec{p}$ равен

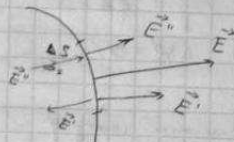
$$\vec{p} = \sum q \vec{z}$$

$$\vec{f} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E} = \frac{q-1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \text{grad}) \vec{E}$$

$$\vec{Q} = \vec{E} + 4\pi \vec{p}$$

$$\vec{f} = \vec{f} = \frac{q-1}{8\pi} \text{grad} E^2$$

Найти силу, действующую на заряд q внутри проводника.



поле внутри равно нулю $\vec{E}' + \vec{E}'' = 0$ в случае электростатического поля.

справа $|\vec{E}'| = |\vec{E}''|$

$$\vec{E}' + \vec{E}'' = 4\pi \vec{z}_s$$

$$\vec{E}'' = 2\pi \vec{z}_s \cdot \vec{n}$$

$$\Delta \vec{f} = \vec{z}_s \cdot \Delta \vec{S} \cdot \vec{E}''$$

$$\vec{F} = \frac{q \vec{f}}{\Delta S} = \vec{z}_s \cdot 2\pi \vec{z}_s \cdot \vec{n} = -\frac{E^2}{8\pi} \vec{n}$$

Метод изображений

проводящая плоскость при $z > 0$



$$\Delta \varphi = -\frac{q}{\epsilon R}$$

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon R} + \varphi'$$

$$\Delta \varphi' = 0$$

так, чтобы был эквипотенциал

при $z > 0$: $k \neq 0$, тогда решение, удовлетв. уравн.

$$\varphi' = \frac{q'}{\epsilon R'}$$

$$\varphi \Big|_{z=0} = 0$$

$$\frac{q}{\epsilon R} + \frac{q'}{\epsilon R'} \Big|_{R=R'} = 0$$

$$q' = -q$$

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon R} - \frac{q}{\epsilon R'}$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = \frac{q \vec{R}}{\epsilon R^3} - \frac{q \vec{R}'}{\epsilon R'^3}$$

$$\vec{F} = q \left(-\frac{q \vec{R}'}{\epsilon R'^3} \right) \Big|_{R'=2d, \vec{n}} = -\frac{q^2}{\epsilon (2d)^2} \vec{n}$$

$$q' = \int \epsilon_0 ds$$

$$Q_n = 4\pi \epsilon_0 \Big|_{z=0}$$

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{1}{4\pi} Q_n = \frac{\epsilon}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{E} \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{\epsilon}{4\pi} \vec{n} \cdot \left(\frac{q \vec{R}}{\epsilon R^3} - \frac{q \vec{R}'}{\epsilon R'^3} \right) \Big|_{R=R'} = \frac{q}{4\pi} \left\{ -\frac{d}{R^3} - \frac{d}{R^3} \right\} = \\ &= -\frac{q d}{2\pi R^3} \end{aligned}$$

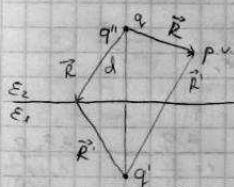


$$\begin{aligned} ds &= dx \cdot r \cdot dr \\ R &= \sqrt{r^2 + d^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q' = \int_s \frac{q d}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} dx \cdot r \cdot dr =$$

$$= -q d \int \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} = -q d \int \frac{x dx}{x^3} = -q d \int \frac{dx}{x^2} = q d \left[0 - \frac{1}{d} \right] = q$$

условия задачи:



$$z > 0: \Delta \varphi_2 = -\frac{q}{\epsilon} \delta(\vec{r})$$

$$z < 0: \Delta \varphi_1 = 0$$

$$Q_n - Q_{in} = 4\pi \epsilon_0 \leftarrow \text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$Q_{\text{св}} = P_n - P_{in} \quad P_{\text{св}} = -\text{div} \vec{P}$$

на границе есть
своб. заряд

$$\varphi_2 = \frac{q}{\epsilon_2 R} + \varphi'$$

$$\Delta \varphi' = 0$$

$$\varphi' = \frac{q'}{\epsilon_2 R'}, R' \neq 0$$

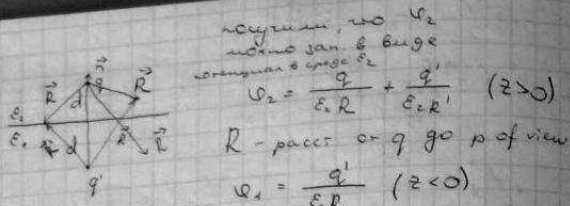
$$\varphi_1 = \frac{q''}{\epsilon_1 R} - \text{нама решение, удовлетв. уравн. Лапласа}$$

прим. гранич. условия: 1) $z=0: \varphi_1 = \varphi_2$

2) $z=0: D_n = D_{n1} \epsilon_1 \vec{n} \text{ grad} \varphi_1 = \epsilon_2 \vec{n} \text{ grad} \varphi_2$

$$\frac{q}{\epsilon_1 R} + \frac{q'}{\epsilon_2 R'} = \frac{q''}{\epsilon_2 R} \Big|_{R=R'}$$

0403



решение задачи:

$$1) \vec{V}_2 = \vec{V}_1|_{z=0} \quad q + q' = q''$$

$$2) \vec{D}_{in} = \vec{D}_{in}|_{z=0} \quad \epsilon_1 \vec{n} \cdot \text{grad} \vec{V}_2 = \epsilon_2 \vec{n} \cdot \text{grad} \vec{V}_1|_{z=0}$$

$$\epsilon_1 \vec{n} \cdot \left(-\frac{q}{\epsilon_1 R^2} \frac{\vec{R}}{R} - \frac{q'}{\epsilon_2 R'^2} \frac{\vec{R}'}{R'} \right) = \epsilon_2 \vec{n} \cdot \left(-\frac{q''}{\epsilon_2 R^2} \frac{\vec{R}}{R} \right)|_{z=0}$$

$$\frac{qd}{R^3} - \frac{q'd}{R^3} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{q'd}{R^3}$$

$$\begin{cases} q - q' = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} q'' \\ q + q' = q'' \end{cases} \quad q'' = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$2q = q'' \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \rightarrow q'' = \frac{2q}{1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{2\epsilon_2 q}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$q' = q \left(\frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - 1 \right) q$$

$$\boxed{q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q}$$

$$\boxed{q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q}$$

$$\vec{V}_2 = \frac{q}{\epsilon_1 R} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q}{\epsilon_2 R'} \quad , \quad z > 0$$

$$\vec{V}_1 = \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q}{R} \quad , \quad z < 0$$

если $\epsilon_1 \rightarrow \infty$, то $\vec{V}_2 = \frac{q}{\epsilon_2 R} - \frac{q}{\epsilon_2 R'}$

тогда $\vec{V}_1 = 0$

это потенциал
задачи.найти $\vec{E}$, $\vec{E}'$ на поверхности $z=0$

$$\vec{F} = q \vec{E}'|_{z=0} = q \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q \vec{R}'}{R'^3} \quad \textcircled{=}$$

$$\vec{E}' = -\text{grad} \vec{V}'$$

$$\vec{V}' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q}{\epsilon_2 R'}$$

$$\textcircled{=} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q^2}{\epsilon_2 (2d)^2} \vec{n}$$

$$\epsilon_1 \rightarrow \infty: \quad \vec{F} = -\frac{q^2}{\epsilon_2 (2d)^2} \vec{n}$$

Потенциал можно считать
на поверхности $z=0$

$$\vec{D}_{out} = \vec{P}_{in} - \vec{P}_{in}|_{z=0} = \frac{\epsilon_1 - 1}{4\pi} \vec{E}_{in} - \frac{\epsilon_2 - 1}{4\pi} \vec{E}_{in}|_{z=0} =$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

то $\vec{D}$ не имеет разрыва $\vec{D}_{in} = \vec{D}_{out}$

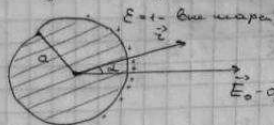
$$= \frac{\epsilon_1 - 1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_1} \vec{D}_{in} - \frac{\epsilon_2 - 1}{4\pi \epsilon_2} \vec{D}_{in}|_{z=0} =$$

$$= \frac{\vec{D}_{in}}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_1} - 1 + \frac{1}{\epsilon_2} \right)|_{z=0} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{\vec{D}_{in}}{4\pi}|_{z=0}$$

получаем:
if $\epsilon_1 = \epsilon_2$
то $\vec{D}_{in} = \vec{D}_{out}$
на поверхности $z=0$

Заг

Проводящий шар радиуса a
нах. во внеш. пол. и однород. п.п.
(таким образом). Каков будет пол. вне шара?



E_0 - однород. п.п., поддерживается внешними

на пов-ти шара пол. и поверхн. заряд, к-рые прив.
к тому, что пол. внутри шара = 0

где известно $\Phi(a) = 0$
 $q = 0$

$z > a: \Delta \Phi = 0$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi' = -(\vec{E}_0 \vec{z}) + \Phi'$$

потенц. однород. пол.

$\Delta \Phi' = 0$ - ур-ие Лап.

Найдем Φ' , удовл. ур-ию Лап. и на сф. радиуса a

1) $\Phi'(\infty) = 0$

2) $\Phi_0 + \Phi'|_{z=a} = 0$

Решить ур-ие Лап., к-рое на сф. радиуса a

напр.: $\frac{A}{z}; (\vec{A} \nabla) \frac{1}{z}; A_1 B_2 \frac{\partial^2 \cos \theta}{\partial x_1 \partial x_2}$

решение ур-ие Лап. $\Delta \Phi' = 0$

и-рое на сф. радиуса a

наше решение должно удовл. еще и гранич. усл.

выбираем такое решение: $\Phi' = A(\vec{E}_0 \nabla) \frac{1}{z} =$
 $= -(\vec{E}_0 \vec{z}) \cdot \frac{A}{z^3}$ $A = -a^3$

каково наше выр. решение удовл. 2-му гр.у.

$$\Phi_0 + \Phi'|_{z=a} = -(\vec{E}_0 \vec{z}) \left(1 + \frac{A}{z^3}\right) \Big|_{z=a} = 0$$

$$\Phi = -(\vec{E}_0 \vec{z}) \left(1 - \frac{a^3}{z^3}\right)$$

$$\Phi' = a^3 \frac{\vec{E}_0 \vec{z}}{z^3} = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{E}_0 \vec{z}}{z^3} = V \frac{\vec{p} \vec{z}}{z^3}$$

$\vec{p}$ - дипольный момент шара

$$\vec{p} = \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{E}_0$$

Найдем поверхн. заряд.

$$\sigma_0 = \frac{Q_n}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi} \vec{n} \text{grad} \Phi \Big|_{z=a} = -\frac{1}{4\pi} \vec{n} (\vec{E}_0 \vec{z}) \text{grad} \frac{a^3}{z^3} \Big|_{z=a} =$$

$$= \frac{3}{4\pi} \vec{E}_0 \vec{n} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \alpha$$

поверхност. заряд завис. от угла α

при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \cos \alpha \geq 0$

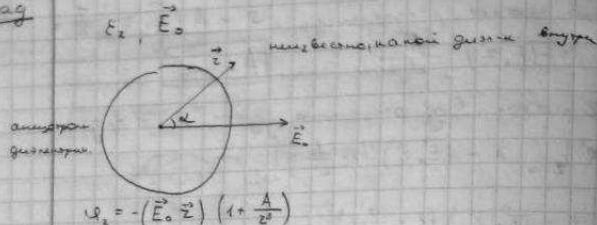
при $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \cos \alpha \leq 0$

если проинтегрируем по пов-ти сферы,

поверхн. заряд = 0.



Заг



$$\varphi_2 = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{z}) \left(1 + \frac{A}{a^3}\right)$$

$$\Delta \varphi_2 = 0$$

$$0 = \text{div} \vec{D} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ik} E_k = -\epsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$$

пу: $\varphi_1 = \varphi_2|_{z=a}$

решаем задачу, используя ТЗ электростат.

$$\varphi_1 = -B(\vec{E}_0 \cdot \vec{z})$$

$$\varphi_2 = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{z}) \left(1 + \frac{A}{a^3}\right)$$

$$\varphi_1 = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{z}) \left(1 + \frac{A}{a^3}\right) \quad \text{при } z=a \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

найдем константы A

$$D_{1n} = D_{2n}|_{z=a}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 \left(1 + \frac{A}{a^3}\right) \cdot (\vec{E}_0 \cdot \vec{z}) \frac{\partial A z^2}{\partial z^3} = \vec{E}_0 - A \frac{3(\vec{E}_0 \cdot \vec{z}) \vec{z} - z^2 \vec{E}_0}{z^5}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \left(1 + \frac{A}{a^3}\right)$$

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{D}_2|_{z=a} \rightarrow \vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \epsilon_1 (\vec{n} \cdot \vec{E}_0) \left(1 - \frac{2A}{a^3}\right)$$

$$\vec{n} \cdot \left\{ \vec{D}_1 - \epsilon_1 \vec{E}_0 \left(1 - \frac{2A}{a^3}\right) \right\} \Big|_{z=a} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{D}_1 = \epsilon_1 \left(1 - \frac{2A}{a^3}\right) \vec{E}_0 \\ \vec{E}_1 = \left(1 + \frac{A}{a^3}\right) \vec{E}_0 \end{cases} + 2\epsilon_1$$

найдем: $\vec{D}_1 + 2\epsilon_1 \vec{E}_1 = 3\epsilon_1 \vec{E}_0$

Условие: $\frac{1}{3}(\vec{D}_1 + 2\epsilon_1 \vec{E}_1) = \epsilon_2 \vec{E}_0$

$\vec{E}_1$ - уменьш. $\frac{1}{2}(\vec{D}_1 + \epsilon_1 \vec{E}_1) = \epsilon_1 \vec{E}_0$

$\vec{E}_1$ - увелич. $\vec{E}_{1r} = \vec{E}_0$

используем условие $\vec{D} = \vec{E}_0$

Заг Внутренне-электростатический заряд

$$\vec{D}_1 + 2\epsilon_1 \vec{E}_1 = 3\epsilon_1 \vec{E}_0$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1; \quad \vec{E}_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_1} \vec{E}_0$$

$$1 + \frac{A}{a^3} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_1}$$

$$A = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_1} a^3$$

бл. найдем все тогда
элементарно



С пьезоэлектрической др

у п-р
материала
на поверхности
(объемный)
у материала
состоит из
материала
на поверхности

гидроэлектрический → у материала
состоит из гидроэлектрического
материала

$$\vec{p} = \epsilon \vec{E}$$

ϵ - коэффициент - коэффициент пьезоэлектрической др

Изменение др - из-за изменения др - из-за изменения др

$$\vec{d} = \epsilon \vec{E} \quad \text{др - из-за изменения др}$$

$$\vec{p} = \epsilon \vec{d} = \epsilon^2 \vec{E}$$

$$L = n \cdot \vec{p} \quad \text{не зависит от температуры}$$

Пьезоэлектрический

$$\begin{cases} U = -\vec{d} \cdot \vec{E} & \text{минимум энергии, когда } \vec{d} \parallel \vec{E} \\ \vec{K}_E = \vec{d} \times \vec{E} \end{cases}$$

материал является гидроэлектрическим материалом

В результате в равновесии ориентированные

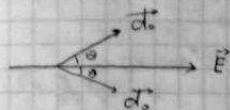
др - из-за изменения др - из-за изменения др

определяется др - из-за изменения др

др - из-за изменения др - из-за изменения др

$$dw = c e^{-\frac{u}{kT}} dO$$

$$1 = \int dw = c \int e^{-\frac{u}{kT}} dO$$



$$\vec{d}_1 = 0, \vec{d}_2 = 0$$

$$d_1 = d_0 c e^{-\frac{u}{kT}} \cos \theta dO$$

$$\text{усреднено: } u = -\frac{\vec{E} \cdot \vec{d}_0}{kT} = -\frac{E d_0}{kT} \cos \theta$$

$$\frac{E d_0}{kT} = \chi_E$$

$$\vec{d}_0 = d_0 \frac{\int e^{\chi_E \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int e^{\chi_E \cos \theta} \sin \theta d\theta}$$

$$d_0 = \int e^{\chi_E \cos \theta} \sin \theta d\theta = \int_0^\pi e^{\chi_E \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{2}{\chi_E} \sinh \chi_E$$

$$\int e^{\chi_E \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\partial}{\partial \chi_E} \int_0^\pi e^{\chi_E \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{\partial}{\partial \chi_E} (2 \sinh \chi_E) = 2 \cosh \chi_E$$

$$L(x) = c \tanh x - \frac{1}{x}$$

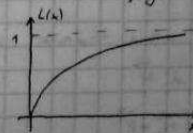
Ланжевена

на основании разложения
Ланжевена
в ряд

$$x \ll 1: L(x) = \frac{x}{3}$$

$$x \gg 1: L(x) = 1$$

$$L'(x) \Big|_{x \ll 1} = \frac{1}{3}$$



$$\vec{d}_0 = d_0 L(\chi_0) \quad \chi_0 \ll 1$$

$$P = n d_0 L(\chi_0)$$

$$P = n d_0 \frac{d_0 E}{3 k T} = \frac{n d_0^2}{3 k T} E$$

$$\chi = \frac{n d_0^2}{3 k T}$$

$$\epsilon = 1 + \frac{4 \pi n d_0^2}{3 k T}$$

$$E > \frac{k T}{d_0} = \frac{1,67 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{см}} \cdot 300 \text{ K}}{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-8}} \approx 10^9 \text{ эрг/см} \approx 3 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{см}}$$

$$E \sim \frac{U}{R}$$

$$\text{эрг/см} = \frac{500}{1} \frac{\text{В}}{\text{см}}$$

1103 Рассв. магнитность в-ва с намагниченн.
т.п.

Магнитность определяет направление
вектора намагниченности

Матн в-ва: парамагнетики, ферромагнетики,
в-ва, не подв. электр. мат. мат.-мат.-диэлектрики

Мы знаем, что матн. мат.-мат.-во в-ва.

мат. мат. харак. энергии

$$u = \vec{m} \cdot \vec{H}$$

$$\vec{K}_m = \vec{m} \times \vec{H}$$



m_0 - собствен. магнитный момент

$$\frac{m_0}{m_1} = 0$$

$$m_1 \neq 0$$

$$dW = c e^{-\frac{u}{kT}} dU$$

$$-\frac{u}{kT} = \frac{mH}{kT} \cos \theta$$

$$\chi_m = \frac{m_0 H}{k T}$$

$$\bar{m}_m = m_0 L(\chi_m) \quad M = n m_0 L(\chi_m)$$

$$M = n m_0 \frac{\chi_m}{3} = \frac{n m_0^2 H}{3 k T}$$

$$M = \chi H,$$

$$\chi = \frac{n m_0^2}{3 k T}$$

Закон Кюри

$$\chi_m = \frac{n d_0^2}{3 k T} - \text{Закон Кюри-Дюбей}$$

пределах случая $\chi_m \gg 1$ $M = n m_0$ - случай насыщения

$$\text{обычно } \chi \ll 1 \sim 10^{-2}, 10^{-3}$$



Дипольное поле

Исходим из ур-ия моментов

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K} \quad \begin{matrix} \text{момент инерции} \\ \text{момент импульса} \end{matrix}$$

или в эквивалентной форме

$$\vec{H} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \vec{R} \cdot \vec{p} \right\} = \vec{H} \cdot \vec{R} \times \vec{F} = \vec{H} \cdot \vec{R} \times \left\{ q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right\} \quad \text{по правилу дифференцирования}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{\vec{R}}{R} E(R) \quad \text{— электрическое поле, в котором находится}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} \quad \text{— скорость движения заряда}$$

$$\begin{aligned} \odot \vec{H} \cdot \vec{R} \times \left\{ \frac{\vec{R}}{R} E(R) + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right\} &= \\ &= \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \vec{R} \times (\vec{v} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} \times (\vec{v} \times \vec{H}) &= \vec{v} (\vec{R} \cdot \vec{H}) - \vec{H} (\vec{v} \cdot \vec{R}) = \frac{1}{2} \vec{v} (\vec{R} \cdot \vec{H}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{R} (\vec{R} \cdot \vec{H}) - \\ &- \frac{1}{2} \vec{R} (\vec{v} \cdot \vec{H}) - \frac{1}{2} \vec{H} \frac{dR^2}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{R} \times \vec{v}) \times \vec{H} + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \vec{R} (\vec{R} \cdot \vec{H}) - \frac{1}{2} \vec{H} (\vec{R} \cdot \vec{R}) \right\} \end{aligned}$$

переносим в левую часть

$$\frac{d}{dt} \left\{ \vec{M} + \frac{1}{2c} \vec{H} \times \vec{R} \times (\vec{R} \cdot \vec{H}) \right\} = \vec{M} \times \vec{H}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \vec{H} \times \vec{R} \times \vec{v}$$

применение и упрощение описано в
лекции 1, но все равно в атомных
системах применимо следующее

$$\frac{q}{m} = \frac{e}{m} = \text{const} \quad \left. \begin{matrix} v \ll c \end{matrix} \right\} \text{гравитационно-гравитационное}$$

Тогда при усреднении такого ур-ия
по времени, величина, зависящая
от времени, в среднем, обращается в нуль.

Нельзя этого делать, т.к. есть погрешности
в определении времени. Нельзя делать
усреднение.

Пусть эл. поле $\vec{E} = 0$.

Заряд не движется, но в магнитном поле

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \vec{R} \times \vec{p} - \frac{1}{2} \vec{R} \times \vec{p} \right\} = \vec{M} \times \vec{H}$$

$$\vec{M} = \frac{e}{2mc} \vec{M}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \vec{R} \times \vec{p} \right\} = \vec{M} \times \frac{e\vec{H}}{2mc}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M} \times \vec{\omega}_L$$

$$\vec{\omega}_L = \frac{e\vec{H}}{mc}$$

гиромагнетонная частота

$$\vec{M} = \frac{1}{2} m \vec{R} \times \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \vec{M}_L + \frac{1}{2} \vec{R} \times \vec{p} \right\} = \left(\vec{R} \times \vec{H} \right)_L$$

$$-\frac{1}{2c} \sum \frac{3H}{m} m \{ R_x R_p - R^2 \mathcal{D}_{xp} \} =$$

$$= \sum m (R^2 \mathcal{D}_{xp} - R_x R_p) \mathcal{D}_{xp}^{(1)} = \mathcal{L}_{xp} \mathcal{D}_{xp}^{(1)}$$

$\mathcal{L}_{xp}$ - тензор моментов импульса с осью x

Движение симметрично $\Rightarrow$ можно усреднить уравн.

Усреднение по времени τ , $\tau_0 \ll \tau \ll \frac{1}{\Omega^2}$

Средним уравн. по оси x

$$\frac{d}{dt} (\bar{M}_x + \sum m \bar{x} \bar{z} \Omega^{(1)}) = -\Omega^{(1)} \bar{M}_y$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{M}_y + \sum m \bar{y} \bar{z} \Omega^{(1)}) = \Omega^{(1)} \bar{M}_x$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{M}_z + \sum m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \Omega^{(1)}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \{ \bar{M}_x - \mathcal{L}_{xp} \Omega^{(1)} \} = (\vec{\Omega}^{(1)} \times \vec{M})_x$$

$$\bar{x} = \bar{x}, \bar{z} = 0$$

$$\bar{z} = \text{const.}$$

$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = 0$$

$$\bar{y} \bar{z} = \bar{z} \bar{y} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{M}_x}{dt} = -\Omega^{(1)} \bar{M}_y \\ \frac{d\bar{M}_y}{dt} = \Omega^{(1)} \bar{M}_x \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{M}_x + i \bar{M}_y) = i \Omega^{(1)} (\bar{M}_x + i \bar{M}_y)$$

$$\begin{cases} \bar{M}_x = M_{0z} \cos(\Omega^{(1)} t + \alpha_0) \\ \bar{M}_y = M_{0z} \sin(\Omega^{(1)} t + \alpha_0) \end{cases}$$

гидромагнетизм: $M_{0z} = 0$

$$\bar{M}_z = \sum m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \Omega^{(1)} = M_{0z}$$

$$\bar{M}_z = \sum m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \Omega^{(1)} \frac{e}{2mc}$$

$\frac{e}{2mc}$ - перомагнитное взаимодействие

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \bar{r}^2_{\text{Бор}} \approx r_B^2$$

$$\frac{1}{3} \bar{x}^2 = \frac{1}{3} \bar{y}^2 = \frac{1}{3} \bar{z}^2$$

$$\vec{\Omega}^{(1)} = \frac{e\vec{H}}{2mc} = \vec{e}_z \Omega^{(1)}$$

$$\bar{M}_z \vec{e}_z = -\frac{e\vec{H}}{2mc} \cdot \frac{e}{2mc} \cdot \frac{m}{3} \cdot \frac{4}{3} \bar{r}^2_{\text{Бор}} \cdot \vec{e}_z = -\frac{ze^2 \bar{r}^2_{\text{Бор}}}{6mc^2} \vec{H}$$

$$\vec{M} = n \vec{m} = \chi \vec{H}$$

$$\chi_{\text{гидр}} = -\frac{nze^2 \bar{r}^2_{\text{Бор}}}{6mc^2}$$

магнитная восприимчивость гидромагнетизма

у парамагнетиков гольна без гидромагнетизма

составляющая

$$m_{\text{пара}} = \frac{e}{2mc} M \sim \frac{e\hbar}{2mc}$$

$$M = \hbar \sqrt{L(L+1)}$$

$$m_{\text{пара}} = \frac{e}{2mc} M \sim \frac{e\hbar}{2mc}$$

$$m_{\text{гидр}} = \frac{ze^2 \bar{r}^2_{\text{Бор}}}{6mc^2} H$$

$$\frac{m_{\text{пара}}}{m_{\text{гидр}}} \approx \frac{e\hbar}{2mc} \frac{6mc^2}{ze^2 \bar{r}^2_{\text{Бор}}} \frac{1}{\hbar} \approx \frac{1}{\bar{r}^2_{\text{Бор}}} \approx 3.47 \frac{1}{10^{-16} \text{ м}^2} \approx \frac{10^8}{\text{м}^2}$$

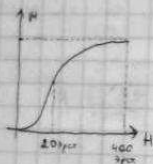
Ферромагнетизм

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$$

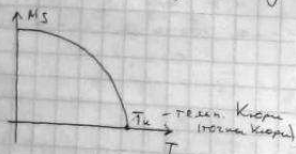
$$\vec{B} = \mu(H) \vec{H} \quad \text{индукция линейно зависит от внешнего маг. поля}$$

$$\mu(H)$$

$$\chi = \frac{M}{H}$$

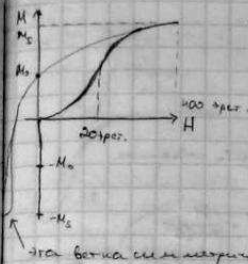


Визуал. молекулярное поле внутри ферромагнет. состоит из магн. соседних атомов.

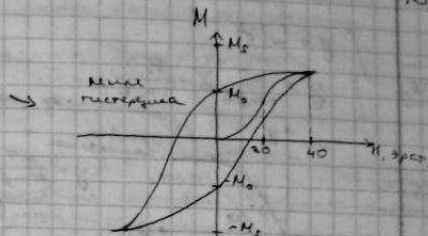


$$T > T_K$$

$$\chi = \frac{C}{T - T_K} \quad \text{з-н Кюри-Вейсса}$$



M_0 - остаточная намагн.



18.03

$$dW = \frac{\vec{H} d\vec{B}}{4\pi}$$

$$d\vec{B} = 4\pi d\vec{M}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$$

$$A = \omega V \int \vec{H} d\vec{M}$$

интегрирование по объему и по площади

- сфер. тела, выделенное из тела ферромагнет. в магн. поле $\vec{H}_{\text{эфф}} = \vec{H} + \frac{6M}{V}$

значит, $H_{\text{эфф}}$ - M - намагниченность

$$b \sim 10^4$$

получается, что если χ ввести сюда

$$\chi = \frac{m_0 H_{\text{эфф}}}{kT} = \frac{m_0 (H + bM)}{kT}$$

тогда намагниченность определяется ф-ей

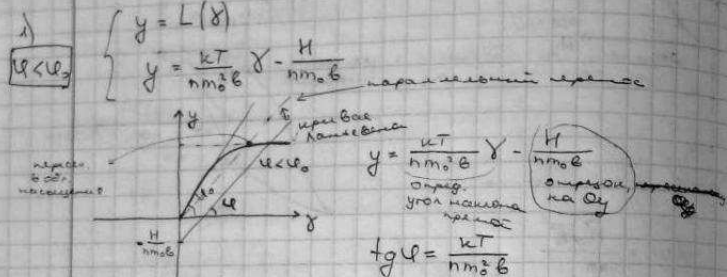
$$M = n m_0 L(\chi)$$

получим

$$\frac{kT}{m_0} \chi = H + bM \quad \left| \cdot \frac{1}{n m_0} \right|$$

$$\text{удобно ввести отношение} \quad \chi = \frac{M}{n m_0} = L(\chi)$$

получим: $y = \frac{kT}{nm_0^2 \epsilon} \gamma - \frac{H}{nm_0 \epsilon}$



касательная к кривой Ланж. — угол φ_0 .

$\varphi_0 > \varphi$, следовательно $\parallel$ перенос

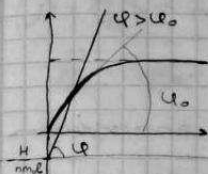
$M_s = nm_0 L(\gamma) \parallel 6M_s \gg H; \gamma = \frac{m_0(6M_s)}{kT}$

$M_s = nm_0 L\left(\frac{m_0 6M_s}{kT}\right)$



$\varphi < \varphi_0 \rightarrow$ в-во в ферромагнитном состоянии

2) $\varphi > \varphi_0$



кривая Ланж. т. пер. зависит от величины маг. поля, а угол — от темп.

прямая пересекает кр. Ланж. при малых γ

$\gamma < 1$

$y = \frac{1}{3} \gamma$

находимся в начале кривой Ланжевена $\Rightarrow$ параметризуем.

$\tan \varphi_0 = \frac{kT_k}{nm_0^2 \epsilon} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_k = \frac{nm_0^2 \epsilon}{3k}$

прямая $y = \frac{kT}{nm_0^2 \epsilon} \cdot 3\gamma - \frac{H}{nm_0 \epsilon}$

$y = \frac{T}{T_k} \gamma - \frac{H}{nm_0 \epsilon}$

$\gamma \left(\frac{T}{T_k} - 1 \right) = \frac{H}{nm_0 \epsilon}$ или $\gamma = \frac{T_k}{(T - T_k) nm_0 \epsilon} H$

$\frac{M}{nm_0} = \frac{nm_0^2 \epsilon}{3k} \frac{H}{nm_0 \epsilon} \frac{1}{(T - T_k)}$

$M = \frac{nm_0^2}{3k(T - T_k)} H = \chi H$

χ — магн. восприимчивость диамагнитная, находим, в параметризованном состоянии

$\chi = \frac{nm_0^2}{3k(T - T_k)}$

здесь $T > T_k$ — т. пер. от T_k где намагнит. т. пер. от 0

$M = 1 + \chi$ - где ферромагн. не родится.

M - намагниченность

в ферромагн. состоянии домены антиферромагн. ориентир. разн. напр. обр. друг. от. др.

Ферром. - все в одном напр.

Для диам. и парамагн. сир. силы, действ. на ед. V в-ва со стор. прилож. магн. поле.

если рассм. ат. во внешн. магн. поле, следовательно
то магн. момент атома:

$$\vec{f} = -\text{grad } U, \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{H}$$

$$\vec{f} = \text{grad } (\vec{m} \cdot \vec{H})$$

микроном, истинная магн. поле

$$\vec{f} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{m} \times \text{rot } \vec{B}$$

- где, действ. на магн. момент одного ат.

сила, действ. на м.м. ед. V в-ва:

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{M} \times \text{rot } \vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \rightarrow \vec{M} = \frac{\mu-1}{4\pi} \vec{H} = \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \vec{B}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \{ (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{B} \} = \frac{\mu-1}{8\pi\mu} \text{grad } B^2 = \vec{F}$$

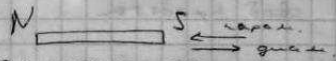
сила действ. на парамагнетики (парамагн., Сил)
($\mu-1$) > 0 - где парамагн.

$$\vec{M} = \frac{\mu-1}{4\pi} \vec{H} = \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \vec{B} = \frac{\chi}{\mu} \vec{B}$$

$\chi > 0$ - где парамагн.

$$\chi \sim 10^{-5} - 10^{-4}$$

где диамагнетизм (всплыв. - Вил)
 $\chi < 0 \sim 10^{-4} - 10^{-6}$



своб. магнет. поле
любой полюс притяг. парамагн.,
а диамагнетики - выталки.

Пост. ток. в проводниках.

в-варов. ток:

- ион
- электронов
- электронов

ионные свобод. электроны

важно, з-н Ома - ток проводимости ~

напряж. прилож. поле

Для электронного газа, удельная проводимость
в металлах. ионы считаются неподвиж.
е-ны перемещ.

покажем, что для такой модели справедлив з-н Ома

$$\vec{E} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{характер. сфер.} \\ \vec{H} = 0 \end{array} \right. \quad \vec{v} = 0 - \text{ср. знан. скор. элект. в PE}$$

тогда $\vec{u}$ — нек. элект. дрейфовая темп. дрейфовая

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E}$$

$\vec{u}$ — направленная скор-ть элект. подг.
примен. эл. п.

системе $\vec{u}$:

$$\vec{u} \approx \frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

τ — время свобод. пробега

Ср. скор-ть элект. занимаем как:

$$\vec{u} = \frac{e\tau}{2m} \vec{E}$$

н. з. с. с. м.
модель

$$\vec{j} = en \vec{u} = \frac{ne^2\tau}{2m} \vec{E}$$

плот.
зарядки

обычно микрон. темп. дрейфу элект. проб. $\tau = \frac{l}{|\vec{u} + \vec{u}|}$

темповая скор-ть элект. дрейфу $v \gg \vec{u}$, тогда

$$\tau = \frac{l}{v}$$

$$\text{тогда } \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{2m} \vec{E} = \beta \vec{E}$$

β — Ома в единицах проводимости

$$\vec{j} = \beta \vec{E}$$

$$\beta = \frac{ne^2 l}{2m v}$$

где β — обычн. резист.

где Pe — дрейфа элект. проб. $\downarrow$, а $\uparrow$

где $\vec{u}$ — дрейфовая (вектор. рез.) — он состоит классический
при T — макс. ~ 10 темп. град.
от T — при дрейфовая темп. дрейфа элект. проб.

$$\text{матрица } \begin{pmatrix} l(T) \\ v(T) \end{pmatrix}$$

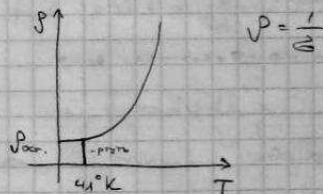
сущ. темп. Дрейфа где проводимости

где $l(T)$

$$T_0 \quad \text{if } T > T_0, \text{ то } l \sim \frac{1}{T}, \text{ тогда } v \sim \frac{1}{T}$$

$$\text{if } T < T_0, \text{ то } l \sim \frac{1}{T^2}, \quad v \sim \frac{1}{T^2}$$

1911г. — Опирались сверхпроводимости



темповая темп. где H_g — сфер. резист. падает до 0

1967г. — н. н. Бардин, Купер, Шмидт —
высокотемп. сверхпроводимости, $T_c \sim 40K$

$$\text{матрица } \begin{cases} \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{внутри проб-ле, макс.} \\ \text{в сверхпроводимости, макс.} \end{array}$$

тем. резист. падает до нуля по пов-ти. Это значит,

отр. из темп. уст. темп. дрейфу.

$$\text{темп. уст.: } \vec{H} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_z = \frac{4\pi}{c} \vec{I} \Big|_z \quad \text{в сверхпроводимости темп. дрейфу. Если дрейфу}$$

где сверхпроводящий. сост.

$$H_{cp} \sim (T - T_{cp})$$

if $T = T_{cp}$, то ток перх. в обн. сост.
 $T < T_{cp}$ - сверхпровод
 $T > T_{cp}$ - обн.

Полупроводники

В полупров. есть зона энергии, когда

заряд перх. из непроводящего состояния

в проводящее

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta}{kT}} \rightarrow \text{энергия активации}$$

Эксперимент

Диэлектрики

проводящие * - не, при наложении э.п.

взр. гл.ч. ноль

коэфф-т диэлектрической индукции

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}$$

когда ток в диэлектрике

$$\vec{j} = \sum q_i n_i \vec{u}_i = \sum q_i n_i \frac{1}{\epsilon} \vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E} \quad \text{Г - проводимость диэлектрика}$$

Рассм. обн. поле, в к-ром течет ток

ток вызывает гл.ч. заряды.



но ток течет, это означает, что заряды не равны, и есть заряды

это значит, что ρ не является const.

$$\rho = \text{const}$$

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{div} \vec{j} = 0$$

$$\text{т.к. } \vec{j} = \sigma \vec{E}, \text{ то } \text{div}(\sigma \vec{E}) = \sigma \text{div} \vec{E} = 0 \quad \text{т.е. } \text{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{где } \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

когда где-то в поле есть заряды, то $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\text{if } \sigma = \text{const} \rightarrow \frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} \rightarrow \oint \vec{j} d\vec{l} = \sigma \oint \vec{E} d\vec{l} =$$

$$= -\sigma \oint \text{grad} \varphi d\vec{l} = 0 \quad \text{т.к. } \oint \text{grad} \varphi d\vec{l} = 0$$

$$\text{вектор. т.е. } \oint \text{rot} \text{grad} \varphi d\vec{s} = 0 \quad \text{это не нуль, это}$$

но ток не может течь, потому что заряды не равны

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}}) \quad \text{значит, ток течет, если есть}$$

второе - поле, к-е, с током, равно ток течет, потому что заряды не равны

Заменим с-мы ур-ий, когда ток течет, ур-ие Максвелла не может быть:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{E} = -\text{grad} \varphi \end{cases} \quad \text{div} \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}})$$

грани. условие для этих грани:

на грани раздела 2-х сред
 $\rightarrow$ проб-проб:

$$\text{а) } \text{div } \vec{j} = 0$$

$$\text{г) } \vec{j}_n = \vec{j}_n|_s$$

$$\text{г) } \vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$E_n = E_n|_s$$

если на гр. разг. ср. сдв. отст, то $\vec{j} = \varepsilon \vec{E}$,

$$\text{тогда } \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dz}|_s$$

заменим уст. грани:



норм. сдв. $(u_1 \sin \theta_1 = u_2 \sin \theta_2)$

$$j \cos \theta_1 = j \cos \theta_2|_s$$

из 2-го ур-ия $\rightarrow$ эквив. сдв.:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} j \sin \theta_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} j \sin \theta_2|_s$$

разделим 2-е ур-ие на 1-е:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

связь углов преломления

если разг. электростат. поле при

норм. разг.

$$\Delta \varphi = 0$$

в проб-ке электростат. н. пол.
 из ур-ия Лап.

из интер-ре Т-состав. следует интер-ре непрерывн.

$$\varphi_1 = \varphi_2|_s$$

$\rightarrow$ это условие:

из $\text{div}(\vec{E}) = 0 \rightarrow$ экв. непрерыв-но норм. состав. н. пол.

$$\varepsilon_1 E_n = \varepsilon_2 E_n|_s \quad \leftarrow \text{логично} \quad E = -\text{grad } \varphi$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_s$$

границ. условие

$$\varphi_1 = \varphi_2|_s$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_s$$

следует
 норм. разг.

если $\rho = 0$, то $\Delta \varphi = 0$ в проб-ке электростат. поле

$$\varphi_1 = \varphi_2|_s$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_s \quad \text{электростатика!}$$

25.03 замкнутой объём. с-н Ома & электр. поле

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{cr})$$

σ - проводимость б-ла

с-н Дирака - Ландау

каждо электроны, бегут в эг. V б эг. б эг. $W = \frac{mv^2}{2}$

$$u = \frac{e\hbar}{m} (\vec{E} + \vec{E}_{cr}) \rightarrow \text{логично было:}$$

nW
неизвестно

nW - энергия, которую с-н имеют в эг. б эг.

$$q = \frac{nW}{\tau} = \frac{n}{\tau} \cdot \frac{m e^2 \hbar^2}{2 m^2} (\vec{E} + \vec{E}_{cr})^2 = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{cr})^2 = \frac{j^2}{\sigma}$$

Можно найти энергию, бегут в эг. б эг.

во всем объёме проводника

$$Q = \int q dV = \int \frac{j^2}{\sigma} dV = \int \vec{j} (\vec{E} + \vec{E}_{cr}) dV = \int \vec{j} \vec{E}_{cr} dV - \int \vec{j} \text{grad} \varphi dV = \int \vec{j} \vec{E}_{cr} dV - \int \{ \text{div} (\varphi \vec{j}) - \varphi \text{div} \vec{j} \} dV = \int \vec{j} \vec{E}_{cr} dV - \oint \varphi \vec{j} dS$$



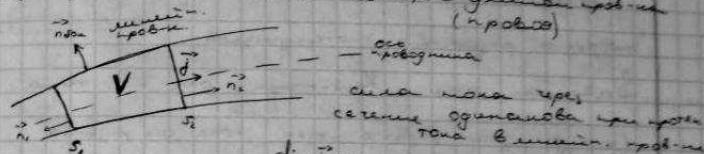
$$j_n = 0$$

тогда бегут-то не могут

$$Q = \int_V \vec{j} \vec{E}_{cr} dV \quad \text{каждо электроны, бегут в эг. б эг. б эг.}$$

Меняем направление проводника - меняем.

поверхность с-н не по с-н с границей проводника (провод)



$$\text{div} \vec{j} = 0$$

$$0 = \int \text{div} \vec{j} dV = \oint \vec{j} dS = \int \vec{j} dS + \int \vec{j} dS + \int \vec{j} dS = - \int_{S_1} j_n dS + \int_{S_2} j_n dS + \int_{S_{\text{вн}}} j_n dS = I_2 - I_1 \Rightarrow I_1 = I_2$$

$$\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$$

Объём с-н Ома & интерпретация

поверхность с-н проводника не имеет:

$$\oint \frac{d\vec{E}}{2} d\vec{l} = \int (\vec{E} + \vec{E}_{cr}) d\vec{l} = \int (-\text{grad} \varphi) d\vec{l} + \int \vec{E}_{cr} d\vec{l}$$

каждо электроны & поверхность с-н не имеет

$$\oint R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{cr}$$

$$R_{12} = \int \frac{d\varphi}{ds}$$

E_{cr} - это эг

на границе 1-2 $\vec{E}_{cr} = 0$, но не обязательно эг.

если пров-н однородн. и сечение не искр., то

$$l = \frac{E}{ES} = \rho \frac{l}{S}, \text{ где } \rho - \text{удельное сопротивление}$$

$$Z = \frac{1}{j}$$

если не уст. поле $E_{\text{н}} \neq 0$, то поле

поддерживается разностью потенциалов

Заменим контур Кирхгофа где искр. поля!

(используем закон Гаусса о потоке поля где разность

потенциалов)

потенциал разности потенциалов



$$0 = \oint \vec{d}V \cdot \vec{j} dV = \oint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \sum I_i$$

поток вектора тока
через поверхность

$$\sum I_i = 0$$

- 1-ый закон Кирхгофа



Возьмем контур
1-2-3

применим обобщенный 1-ый закон Кирхгофа

$$\oint R_{12} = U_1 - U_2 + E_{12}$$

и используем 2-ой закон Кирхгофа

$$\sum R_{12} = \sum E_{12}$$

- 2-ой закон Кирхгофа

Расчет эффекта Холла

напряженность



Возмущающее поле создает на проводнике разность потенциалов

$$\vec{f} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} = \frac{1}{cn} \frac{en\vec{v}}{c} \times \vec{H}$$

$$= \frac{1}{cn} \vec{j} \times \vec{H}$$

он созд. искр. поле, которое будет вытеснено разностью потенциалов

$$e\vec{E} + \vec{f} = 0$$

напр-но поле $\vec{E}$ орп. на $\vec{H}$ $\vec{E} = -\frac{\vec{f}}{e} = -\frac{1}{cen} \vec{j} \times \vec{H}$

$$d\varphi = -\vec{E} d\vec{z}$$

$$\int d\varphi = -\int \vec{E} d\vec{z}; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{cen} \int j H dx = R j H a$$

$$R = \frac{1}{cen}$$

- Холловская постоянная

Итак: если взять медную

пластину $a = 1 \text{ см}$ и высотой $h = 1 \text{ мм}$ (Ан)

то при $j = 10 \text{ А}$ $H = 10^4 \text{ Гс}$

$$\text{тогда } \Delta U = 7 \text{ мВ}$$

Большая разность потенциалов, если в проводнике ток.

мат. и при пост-опр. ур. член:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

гран. условия: $H_{12} = H_{21}|_S$ на г. пог
 $B_{12} = B_{21}|_S$

используя эти уравнения можно нач. вент. и т.
но также сущ. уравнения для вент. параметров

$$\vec{B} = \omega + \vec{A}$$

$$\vec{v} + \left(\frac{1}{u} \vec{v} + \vec{A} \right) = \frac{u \vec{H}}{c} = \vec{B} \quad \text{выра. } \vec{v} + \vec{H} \text{ гомоген на } \frac{u}{c}$$

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} (\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$\text{div } \vec{A} = 0$ - potencial que conhecemos, carga

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi k}{c} \vec{j}$$

- урне где вектор
потенциала в
однородной среде.

$$\left\{ \begin{aligned} A_{1z} &= A_{2z} \Big|_S \\ \frac{1}{\mu_1} (\operatorname{rot} \vec{A}_1)_z &= \frac{1}{\mu_2} (\operatorname{rot} \vec{A}_2)_z \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} &\text{однородная среда} \\ &\text{— для неодн. среды,} \\ &\quad \text{а иначе} \\ &\quad \text{символам} \end{aligned}$$

если раса. Базисной обан Бас. средн.

V_2 тогда решение ур-ня будет

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{j}}{r} dV$$

Р-рассет от 21-го июля 1940 года.

$$\underline{\underline{\vec{B}}} = \frac{\mu}{c} \int \nabla \times \frac{\vec{j}}{R} dV = \frac{\mu}{c} \int \nabla \frac{1}{R} \cdot \vec{j} dV$$

Кусок мой летит в огонь мой,
а величина его зависит от длины нити.

среда в одном напр. север, а в поперечном - север-
запад. Тогда заглава у-ран.

$$\vec{j} = \vec{e}_z \int (x, y) \cdot \mu(x, y)$$

Предлагая во вторн. номеру. А

имеет вид такой же, как и лев. гон

$$\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y)$$

$$\omega + \vec{A} = \nabla \times \vec{e}_z A(x, y)$$

$$\nabla A \times \vec{e}_2$$

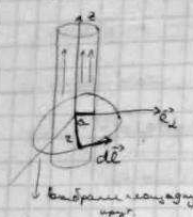
$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \nabla \times \left(\frac{\nabla A(x,y)}{\mu(x,y)} \times \vec{e}_z \right) =$$

$$\operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} A(x, y)}{u(x, y)} = -\frac{45}{c} j(x, y)$$

cpa a og n o p n
 y - o n d - g r a d
 $\Delta A(t) = - \frac{e^2 \hbar}{c} d(t, y)$
 cpa a og n o p n

Пр Матр. поле, созд. линейн.

ант. сущ. ток



$$\vec{j} = \vec{e}_z j(z)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

рассм. поле при $z \gg a$

$$\vec{J} = \int \vec{j} dS$$

$$d\vec{S} = \vec{e}_z z dz$$

$$\int \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J$$

$$\int \vec{H}(z) \vec{e}_\phi z d\alpha = 2\pi H_\phi(z) z = \frac{4\pi}{c} J$$

$$H_\phi = \frac{2J}{cz}$$

Пр рассм. расчетной сущности - матр.

поле, создав. линейными проводниками с током.

$$\int \vec{j} dV$$

если проб.-н. линейн., то

$$dV = dl \cdot dS$$

$$\int \vec{j} dV = \int dS \int \vec{j} dl = \gamma \int d\vec{l}$$

γ - сила тока в сечении

когда то все интегрируем сразу замкнув:

$$\int \vec{j} dV \rightarrow \int d\vec{l}$$



$$\vec{j} = j \frac{d\vec{l}}{dl}$$

когда

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{c} \oint \frac{d\vec{l}}{R}$$

$$\text{матр. поле } \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\oint \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \text{ то}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

з-н Био-Савара

когда линейно ток, не надо

исать гран. условия, потому что ток равен проб. $\rightarrow 0$, т.е. нам границы не нужны.

где линейн. ток проводником

может быть в ферромагн., диэлектрике, металле.

μ - матр. проводн. в нем ср.

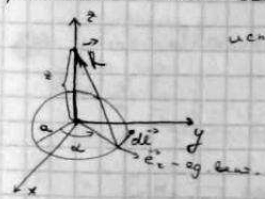
матр. проводн. самого в-ва у нас в

в сущ. тока.

Найдем напряж. матр. поле, созд.

проводн. на оси, создав. н-но сток тока

исп. з-н Био-Савара:



$$\vec{R} = \vec{e}_z z - \vec{e}_\rho a$$

$$d\vec{l} = \vec{e}_\phi a d\alpha$$

$$d\vec{l} \times \vec{R} = d\alpha a \vec{e}_\phi \times (\vec{e}_z z - \vec{e}_\rho a) = -\vec{e}_\rho a^2 d\alpha$$

$$= d\alpha a \{ z \vec{e}_z + a \vec{e}_\rho \}$$

$$R^2 = a^2 + z^2$$

$$\vec{H} = \frac{d}{dz} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ z \int_0^{2\pi} \vec{e}_z dz + a \int_0^{2\pi} \vec{e}_z dz \right\} \odot$$



генерация вектора магн. в плоскости x-y.

$$\vec{e}_z = \vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \sin \alpha$$

$$\odot \frac{2\pi a^2 J}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

поле на оси

$$\text{if } z \gg a, \text{ то } H \sim \frac{a^2}{z^3}$$

$$\text{при } z \rightarrow 0, \text{ то } H \sim \frac{a^2}{a^3}$$

магн. поле очень сильно убывает с расстоянием.

Магн. поле определяется на расстояниях порядка

длины провода, т.е.

H много меньше на расстояниях от 0 до 2a
магн. поле много больше на расстояниях до длины провод.

Рассм. с-м. магн. поля

1.04

$$\vec{B} = \frac{1}{2\pi} \int \vec{H} \times \vec{r} dV$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

но величина зависит от выбора

вектора магн. поля и вектора магн. поля.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{A} \times \vec{H}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \cdot (\mu_0 \vec{H} + \vec{A} \times \vec{H}) dV = \frac{1}{8\pi} \int dV \left\{ -\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) \right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int \left\{ -\text{div} (\vec{H} \times \vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{H} \right\} dV$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \cdot \vec{H} dV$$

энергия магн. поля можно

$$\text{вычислить в виде } W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \cdot \vec{J} dV$$

применяется интегр. формула по объему проводников с током

причем Магн. - единичная.

$$\vec{B} = \sum_a \vec{B}_a$$

магн. поле, созд. а-ым проводом с током

$$\vec{H} = \sum_a \vec{H}_a \rightarrow \text{тогда в ф-ле для энергии}$$

$$W = \sum_a W_{aa} + \sum_{a \neq b} W_{ab}, \text{ где } W_{aa} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H}_a \cdot \vec{B}_a dV$$

$$\text{if } a \neq b \quad K_a B_b = K_b H_a = B_a H_b \quad \text{тогда } W_{ab} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H}_a \cdot \vec{B}_b dV =$$

или можно написать так:

$$W_{aa} = \frac{1}{2c^2} \int \vec{A}_a \vec{j}_a dV_a$$

$$W_{ab} = \frac{1}{c^2} \int \vec{A}_a \vec{j}_b dV_a$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi c^2} \int \frac{\vec{j}}{R} dV$$

$$\vec{j} \sim \vec{j} \vec{e}$$

сила тока — универсальна
но ее проявляет $j dS$

$$W_{aa} = \frac{\mu}{2c^2} L_{aa} I_a^2, \text{ т.е. } W_{aa} \sim L_{aa}^2 \text{ про-квардрату}$$

коэфф-т пропорц. —
коэфф. самоиндукции.

$$W_{ab} = \frac{\mu}{c^2} L_{ab} I_a I_b$$

коэфф-т взаимной индукции
этот 2-й проводников

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_a L_{aa} I_a^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{a \neq b} L_{ab} I_a I_b =$$

$$= \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} I_a I_b > 0$$

где квадратичн. и линейн. $\mu > 0$, но мало $\mu \sim 1$

тогда, если $\mu > 0$, то $W > 0$ —
положит. энергия

всё квадратичн. и линейн. > 0

$$L_{aa} > 0$$

$$L_{aa} L_{bb} > L_{ab}^2$$

0 коэфф-т L_{aa} и L_{bb}

$$W_{aa} = \frac{1}{2c^2} \int \frac{\vec{j}_a \vec{j}_a}{R} dV_a dV_a$$

— очень сложная гр-на,
т.к. мод. поучит. распр. зап. по V

$$W_{ab} = \frac{\mu}{c^2} \int \frac{\vec{j}_a \vec{j}_b}{R_{ab}} dV_a dV_b$$

на границе наших проводов

$$\vec{j}_a dV_a \rightarrow I_a d\vec{l}_a$$

в рамках системы, взаимног. 2-х проводников

$$W_{ab} = \frac{\mu}{c^2} L_a L_b \iint \frac{d\vec{l}_a d\vec{l}_b}{R_{ab}}$$

$$L_{ab} = \mu \iint \frac{d\vec{l}_a d\vec{l}_b}{R_{ab}}$$

геом. х-хар. распр. —
зависит от формы и положения проводников

Задача о взаимн.

коэфф-т самоиндукции линейн. проводников

84

сложная, но мы ее решим:

$$\text{энергия } W = W_1 + W_2$$

$$W_2 \gg W_1$$

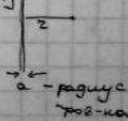
3-й проводник —
на проводе

т.е. поле внутри проводника не имеет

$$\text{тогда } W_{22} = \frac{\mu}{4\pi} \int \vec{H} dV_2 = \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{c} \right)^2 \int \frac{I^2}{2} dV_2 = \frac{\mu I^2}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\vec{H} = \frac{2\pi}{c^2} I \vec{e}_\phi$$

на проводе $> R$ или $< R$ (внутри...)

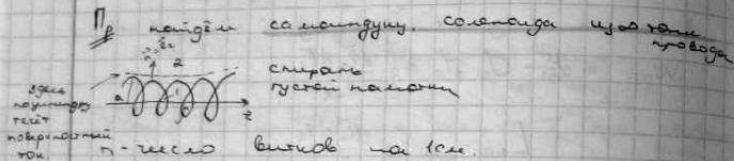


$$W_{el} = \frac{1}{2\epsilon_0} L^2$$

$$L \approx 2\mu \ln \frac{e}{a}$$

$$L \approx 2\mu \ln \frac{e}{a}$$

коэфф-т
самодуговой
линии провод



$$n \gg 1$$

мож. пер. и вихровые поля

$$\vec{E} = n \nabla \varphi$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{сферическая волна}$$

$$\vec{E}_z = \frac{1}{z} \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

$$\vec{E}_z = \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

$$\vec{E}_z = \frac{1}{z}$$

если симметричные по д.
то от д. магн. поле не зависит,
при уравнивании симметрии
зависит от магн. и от элект.

$$H_z = C_1$$

$$H_z = \frac{C_2}{z}$$

$$H_z = \frac{C_1}{z}$$

$$\nabla \vec{H} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z H_z)$$

$$\text{в среде } \epsilon: H_z = C_1$$

полюсу $C_2 = 0$, тогда не нарушается поле

$$\text{тогда } H_z = 0$$

$$C_3 = 0: H_z = 0$$

$$\text{во 2-ой области: } C_1 = 0: H_z = 0,$$

H_z и H_z не зависят от z

$$H_z = \frac{C_2}{z}$$

$$H_z = \frac{C_1}{z}$$

$$\text{исп. граничные условия: } \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{I} \Big|_{z=a}$$

$$\vec{n} = \vec{e}_z \quad \vec{e}_z \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi n d}{c} \vec{e}_z \Big|_{z=a}$$

$$\vec{e}_z: (\vec{e}_z \times \vec{e}_z) (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi n d}{c} \Big|_{z=a}$$

$$\vec{e}_z (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi n d}{c}$$

$$C_1 = \frac{4\pi n d}{c}$$

$$z \text{ - состав. во 2-ой области } = 0$$

$$\text{а в 1-ой } C_1$$

$$H_{1z} = \frac{4\pi n d}{c}$$

$$\vec{e}_z: (\vec{e}_z \times \vec{e}_z) (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \Big|_{z=a}$$

$$H_{2z} - H_{1z} = 0 \Big|_{z=a} \rightarrow \frac{C_2}{a} = 0 \quad C_2 = 0$$

$$H_{2z} = 0$$

$$H_{1z} = H_{2z} \Big|_{z=a}$$

$$H_{1z} = \frac{C_1}{a}$$

$$\text{тогда } C_1 = 0$$

поэтому: отменно от 0 поле H_1

$$\begin{cases} \vec{H}_1 = \frac{4\pi n d}{c} \vec{e}_2 \\ \vec{H}_2 = 0 \end{cases}$$

можно найти коэфф-т самодукиции

$$W_1 = \frac{\mu}{8\pi} \int \left(\frac{4\pi n d}{c} \right)^2 dV_1 = \frac{\mu \pi^2}{8\pi} \frac{16 n^2 d^2}{c^2} \pi a^2 = \frac{\mu^2}{2c^2} \cdot 4\pi n^2 a^2 d^2 = \frac{\mu^2}{2c^2} L$$

коэфф-т самодукиции такого соленоида:

$$L_1 = 4\pi^2 \mu n^2 a^2 \quad L_k = 2\pi \mu n a l$$

если длина соленоида l

то можно выраз. L пер. гр. проводя l

$$L = 2\pi a n l$$

Таким образом интересно ф-лу:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu}{4\pi c} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV_2 \approx \frac{\mu}{4\pi c} \sum_a \int_a \vec{A} \cdot \vec{j} d\vec{a} = \\ &= \frac{\mu}{4\pi c} \sum_a \int_a \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{j}}_B d\vec{a} = \frac{\mu}{4\pi c} \sum_a \int_a P_a = \\ &= \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} L_{ab} j_a j_b \end{aligned}$$

$$P_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} j_b + P_{a, \text{вн}}$$

Переменные во времени поле

35

и поле, распр. в средах.

Поведение перем. ΔM н. связ. с величиной частоты поле и св-вами среда.

Рассм. поле и ток в массивных

провод-ках в квазистационарном случае.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$



1) Вне проводника $\vec{j} = 0$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$|\text{rot } \vec{E}| \sim \frac{E}{l}$$

$$|\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}| \sim \frac{\mu \omega}{c} H$$

$$E \sim \frac{\mu \omega^2}{c} H \rightarrow E \ll H$$

$$\lambda \sim \frac{c}{\omega} \gg l$$

условие квазистационарности:

$$\omega \ll \frac{c}{l}$$

$$|\text{rot } \vec{H}| \sim \frac{H}{l}$$

$$|\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}| \sim \frac{\epsilon \omega}{c} E \sim \frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} c H$$

$$\frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} c H$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_0 = 0 \\ \text{rot } \vec{H}_0 = 0 \end{cases} \quad \text{— надо решить такую систему уравнений исл. пр. у. где поле поле внутри проб.$$

2) в случае квазистат. эл. и в проб.

ε, μ такие же, как и в пост. проб-ке

перодич. поле $T \gg T_{\text{св.ч.}}$

$$\omega \ll \frac{1}{T_{\text{св.ч.}}}$$

и в этом случае
формирование
проводимости,
сл. проводимости,
зависит от др. св-т. проб.

тогда ε, μ — такие же, как и в пост. проб-ке и полев.

$$3) \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right| \ll \frac{4\pi}{c} |\vec{J}|$$

$$\varepsilon \omega E \ll 4\pi \beta E$$

$$\boxed{\omega \ll \frac{4\pi \beta}{\varepsilon}}$$

тогда поле будет опис. системой уравн:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{E}$$

$$\vec{j} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

$$\text{rot } \frac{1}{\varepsilon} \vec{j} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \left| \frac{4\pi}{c} \right|$$

~~или~~

$$\boxed{\text{rot} \left(\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \vec{H} \right) = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

если имели точно однородную среду $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \text{const.}$
если граница раздана ε_1 и ε_2 , то $\mu \approx 1$

получим ур-е:

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi \beta}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1} (\text{rot } \vec{H}_1)_z = \frac{1}{\varepsilon_2} (\text{rot } \vec{H}_2)_z \\ H_{1n} = H_{2n} \end{cases} \quad \left|_s \right.$$

→ надо еще
это гранич.
усл-е где $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$

$\mu \approx 1$, среда безграничная, $\varepsilon = \text{const.}$

тогда ур-е такое же, но гранич. усл-е:

$$H_{1z} = H_{2z}, \quad H_{1n} = H_{2n} \rightarrow \vec{H}_1 = \vec{H}_2 \quad \left|_s \right. \quad \text{— где } \mu \approx 1$$

Заг.

Пусть есть проб-ка во внеш. пост.

магн. поле, т.е. при $t < 0$ это поле внутри

проб-ки есть $\vec{H}_0(\vec{r})$ $t > 0$: H' (внеш. поле)

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = \vec{H}_m(\vec{r}) e^{-\delta_m t}$$

$$\Delta H_m(\vec{r}) = -\frac{4\pi \beta}{c^2} H_m(\vec{r}); \quad \text{решаем по}$$

доказано, что δ_m — веществен. и положительн., т.е.

все H_m одр. ортогональны с-му ф-ции.

При $\mu = 1$ восп. ур-е

$$\left[dV \vec{H}_m \right] \cdot \frac{4\pi}{c^2} \delta_m \vec{H}_m = \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \vec{H} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c^2} \chi_2 \int dV |\vec{H}_m|^2 &= \int dV \vec{H}_m^* \left(\nabla \cdot \left(\frac{\omega \vec{H}_m}{\omega} \right) \right) = \\ &= \int dV \nabla \cdot \left(\vec{H}_m \times \frac{\omega \vec{H}_m}{\omega} \right) = - \int dV \left\{ \nabla \cdot \left(\vec{H}_m \times \frac{\omega \vec{H}_m}{\omega} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \omega \vec{H}_m^* \times \frac{\omega \vec{H}_m}{\omega} \right\} = \\ &= - \oint_S \left(\vec{H}_m^* \times \frac{\omega \vec{H}_m}{\omega} \right) d\vec{S} = \int dV \frac{|\omega \vec{H}_m|^2}{\omega} \end{aligned}$$

на пром. непрерывно
брани

$$\vec{H}(t, \vec{z}) = \vec{H}_m(\vec{z}) e^{-\delta_m t}$$

подставим в $\Delta \vec{H} = \frac{4\pi \epsilon}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$\Delta \vec{H}_m = - \frac{4\pi \epsilon}{c^2} \delta_m \vec{H}_m$$

докажем, что δ_m - действит. и положит.

$\vec{H}_m$ соот. однород. урав. с-мат. с-в. с-мат. ур.

$\vec{H}_m$ одр. ортонорм. с-мат. ф-ции

имеет знат. поле разл. в раз. по ортонорм.

с-мат. ф-ции

$$t < 0: \vec{H}_0(\vec{z}) = \sum c_m \vec{H}_m(\vec{z})$$

$$t > 0: \vec{H}(t, \vec{z}) = \sum_m c_m \vec{H}_m(\vec{z}) e^{-\delta_m t}$$

наименьш. δ_m характ. убывание
поле в е раз.

пусть δ_1 - наименьш. из всех δ_m знат.

вдл. время τ , пер. к-рое поле исчезло

тогда орн. или $\tau = \frac{1}{\delta_1}$ - время исчез. поле
в пробке,

это можно оценить по порядку величины
группы с-в.

$$|\Delta \vec{H}| \sim \frac{H}{\epsilon^2}$$

$$\delta_1 \approx \frac{c^2}{4\pi \epsilon \rho^2}$$

$$\left| \frac{4\pi \epsilon}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right| \sim \frac{4\pi \epsilon}{c^2} \delta_1 H$$

$$\tau \approx \frac{4\pi \epsilon \rho^2}{c^2}$$

п. 26

2-й шаг задачи: Пол в массивн. пров.
массивн. проводник вна во внеш. перем.
маш. поле частоты ω .

Какая глубина проник. поле в пров.-н?
Какая частота?

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\epsilon}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{уравн. теплопроводности по сдвигу}$$

$$\vec{H}_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \quad \text{коэфф. тем. проводимости}$$

известно, что поле,
за вр. t проник. в тело на расст. $\delta \sim \sqrt{\chi t}$

$$\text{в нашем случ. } \chi = \frac{c^2}{4\pi\epsilon}$$

$$\text{тогда } \delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\epsilon} t}$$

$$t = T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{период}$$

$$\text{тогда } \delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{\delta \sim \frac{c}{\sqrt{2\epsilon\omega}}} \quad \text{глубина проникн. поле за } T$$

случаи:

1) $\delta \gg l$ - проник. на всю глубину
низкочастотное поле,
 $H \sim \omega^2$,
апп.

$$|\Delta \vec{H}| \sim \frac{H}{c^2}$$

$$\Delta \vec{H} = -i \frac{4\pi\epsilon\omega}{c^2} \vec{H}$$

$$|-i \frac{4\pi\epsilon\omega}{c^2} \vec{H}| \sim \frac{H}{c^2} \sim \frac{H}{\delta^2}$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases} \quad \text{или перенесем в виде}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}_{\text{const.}}$$

т.е. поле имеет const. вид.
апп. доказ. п. не знаем, от

время входит только в раз. между телом.

опр.
эл. н.:

$$\text{rot } \vec{H}_{\text{ст}} = \frac{4\pi\epsilon}{c} \vec{E} \quad \text{не можем опр. } \vec{E} \text{ из этого ур.}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \vec{H} \\ \text{div } \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{это ур-е для опр. эл. поле в пров.-н}$$

при проникн. маш. п. в в-во во в-н.

индукц. эл. н., к-рые привод. к появл.

индукц. токов $P_{\text{инд}}$ - токн. проводимости,

вместе с тепл. процесс. нагревание пров.-н

2) 2-й случай

$$\delta \ll l \quad (\delta \gg l_{\text{свч}} \text{ - больше длины свч. пров.-н})$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\epsilon}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{к этому случаю}$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon\omega}{c^2}}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

тогда $k = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0\omega}{c^2} i} = \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0\omega}{c^2}} (1+i) = \frac{1+i}{\delta}$

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\epsilon_0\omega}}$$

$\delta \ll l$, тогда можно считать, что ω большое и поле внутри проб-ка возбуждено прох. - малая глубина скин-слоя.

Тогда проб-ки ведёт себе по отн. к внеш. полю как сверхпроводник.

поле внутри сверхпроб-ки = 0

из гранич. условий следует, что внеш. поле $\vec{H}_0 \cdot \vec{n}|_s = 0$ - норм. сост. external

нормальная составляющая экранируется.

так тогда только по пов-ти

$\vec{H}_{\text{ext}} \neq 0$ - тангенц. сост.

$\vec{H}_0 = e^{-i\omega t}$ - тангенциальное поле на границе

$\vec{n}$

все велич. завис. только от z

1/2 // // // // //

от x и y завис. не имеет

внутри.

тогда из $\text{div} \vec{H} = 0$ получим
внутри проб-ки $\vec{H} = \vec{H}(z)$

$$\frac{dH_z}{dz} = 0$$

тогда $H_z = \text{const}$, но на границе $H_z|_s = 0$, поэтому $H_z = 0$. - во всей толще проб-ки

внутри проб-ки магн. п. может иметь только z -состав.

Легко найдём реш. ур-ня:

$$\frac{d^2 \vec{H}(z)}{dz^2} + k^2 \vec{H} = 0.$$

решение: $H_z(z) = \vec{H}_0 e^{ikz} = \vec{H}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$
внутри проб-ки на границе

if $k > 0 \rightarrow$ поле в глубину проб-ки убывает

if $k < 0 \rightarrow$ поле в глуб. проб-ки перерастает

при $z = \delta$ поле убывает в 2 раза.

δ - глубина проникн. поля в проб-ку

Слой толщиной δ наз. скин-слоем

Найдём теперь э. поле:

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \text{rot} \vec{H} = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} ik \vec{e}_z \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2\pi\epsilon_0\omega}}{c} (1-i) \vec{H} \times \vec{e}_z = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\epsilon_0}} (1-i) \vec{H} \times \vec{e}_z$$

значит поле по всей толщ. проб-ки

Если проб-е не плоский, то эта ф-ла справедл. на границе.

$$\vec{E}_z = \frac{1}{2} (\vec{H}_0 \times \vec{R})_z - \text{гран. усл. для танг. составляющей}$$

гранит. условие Леонтовича

ξ - поверхностный импеданс проб-ки

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} (1-i) - \text{комплексная величина}$$

if $\vec{H}_0$ - вектор, вобран с. м.у. криво, чтобы Oy перп. по $\vec{H}_0$



тогда $H_y = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$

из $\vec{H}(z,t) = \vec{H}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$ $\uparrow$ Ре часть

$$E_x = H_0 \sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4})$$

из $\vec{E} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} (1-i) H \times \vec{e}_z \quad \uparrow$ Ре часть

$$1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

т.е. в массивн. проб-ке сферическая, найд. сдвиг фаз между э. и магн. н.

$$j\mu = \sigma E_x - \text{тоже } P_{\text{уко}}$$

Вопрос о выделении тепла в проб-ке под действием токов $P_{\text{уко}}$:

$$Q = \int \frac{j^2}{\sigma} dV$$

темно-то то, что диссипируется в проб-ке чтобы это найти, надо подх. удерживать кривоизогнуто

$$\text{тогда } Q = \int \frac{j^2}{\sigma} dV = \int \sigma \vec{E}^2 dV \sim \omega^2 \text{ нужно}$$

φ тепло, выдел. в проб-ке под дейст-в. токов $P_{\text{уко}}$

где излучается поле

а магн. поле $\sim \omega$ - вем. где нужно

высокоочастот. поле

колебл. часть исчезает при удерживании

Кроме того, что проинтегрировано

$$Q = \oint S d\vec{S} \quad d\vec{S} = \vec{n} dS = \vec{e}_z dS$$

$\uparrow$ норм. по направлению

магн. поле проб-ки с нормалью $\vec{n}$

$$d\vec{S} = \vec{n} dS = \vec{e}_z dS$$

$$\vec{S}_z = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H})_z = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(1-i) \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} ((\vec{H} \times \vec{e}_z) \cdot \vec{H})$$

$\vec{e}_z \cdot (\vec{H} \times \vec{H}) = 0$
век. ф-лем где $\vec{H}(z,t)$ и $\vec{E}$ выт. из проб-ки

$$\Rightarrow \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} |\vec{H}|^2$$

$$Q = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \int_{z=0} |\vec{H}_0|^2 dS \sim \sqrt{\omega} \quad \varphi\text{-на}$$

Результат

нужно только поле на поверхности проб-ки где нагр. тепло

т.е. внеш. поле не входит в проб-ку сир. тепло, выдел. в ней.

φ -на применима где набл. поле

$$\text{т.е. } Q \sim \sqrt{\omega}$$

при этом $\text{сдв} = \text{сдв} - \text{эфецт. т.е. малая часть}$

$$Q = \frac{\omega^2}{16\pi} \int |H_0|^2 ds$$

Квазиэлектронное явление в цепи
проводника

если электроны в л. провод, то

$$\text{вектор } \vec{D} = R \vec{J}$$

Если ток имеет угол ϕ к t , то

$$\varepsilon(t) = R J(t) - \text{напряженность электрич. поля}$$

Циклическая зависимость от времени не приводит к изменению $\vec{D}$ и $\vec{E}$ в цепи

37 $\omega \rightarrow J(t) = \hat{z}^{-1} \varepsilon(t)$
мгновенная зависимость

$$\text{или переписать так: } \varepsilon(t) = \hat{z} J(t)$$

где переписан, так как, очевидно, ε и J имеют одну и ту же фазу

если переписать в комплексной форме по времени

$$J(t) = J_0 e^{-i\omega t}$$

тогда очевидно, что на эту форму gehen так:

$$\varepsilon(\omega) = \hat{z}(\omega) \cdot J(\omega)$$

$\hat{z}(\omega)$ наз. комплексной импедансом проводника или импеданс

$$\hat{z}(0) = R - \text{одиничная часть}$$

расчет скорости $\vec{J}$ в цепи в электрич. поле

$$\vec{J} = c (\vec{E} + \vec{E} \times \vec{v})$$

$$\frac{\vec{J}}{c} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \psi + \vec{E} \times \vec{v}$$

если ток в замкнутой цепи, то $\oint \vec{J} d\vec{l} = 0$

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A} d\vec{l} + \oint \vec{E} \times \vec{v} d\vec{l}$$

где $\oint \vec{A} d\vec{l} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi$

$$\text{тогда } \varepsilon = J R + \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

ток в цепи проводника не имеет

$$\text{потому что в цепи ток равен нулю } \Phi = \frac{1}{c} L J$$

$$J \cdot \varepsilon = \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} + J R - \text{в цепи ток равен нулю}$$

$$\varepsilon J = R J^2 + \frac{d}{dt} \frac{L J^2}{2c^2} - \text{зависимость от времени}$$

$$A = \int J \vec{E} \cdot dV = \int J \vec{E} \cdot d\vec{l} = J \varepsilon$$

работа по движению на коротком проводнике - перемена энергии

$$\text{вектор } \vec{J} = \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} + J R$$

$$J(t) = J_0 e^{-i\omega t}$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$$

тогда $\varepsilon = (R - \frac{L\omega^2}{c^2}) J$

$$Z(\omega) = R - \frac{i\omega L}{c^2}$$

о.в.в.и. не пойдут по цепи

Заменим цепь на:

$$j(t) = Re \left(\frac{\epsilon_0 e^{-i\omega t}}{Z(\omega)} \right) = Re \frac{\epsilon_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{c^4}} e^{-i\alpha}}$$



$$\tan \alpha = \frac{\omega L}{c^2 R}$$

$$\text{тогда } j(t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{c^4}}} \cos(\omega t - \alpha)$$

V. движение заряженных corp-а

до $t < 0$: $E = E_0$

$t > 0$: $E = 0$

В $t=0$ э.в.в. включается

ток течет не сразу.

$$\epsilon_0 = R j_0$$

$$\frac{L}{c^2} \frac{dj}{dt} + jR = 0$$

отсюда $j = j_0 e^{-\frac{R}{L} t}$

$$\text{при } R=0 \quad j = j_0$$

ток $= 0$ перед $t = \frac{L}{R c^2}$ момент, ушедший в поле

в а.в.и. проб-ки э.в.и. как $E_a = R a j_0 \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$

не по. а.в.и. в.в.и. не по. а.в.и. $\Phi = \frac{1}{c} \int L a j_0$

$$\Phi = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

расчет цепи

$$\Phi_{e \rightarrow 0} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \sum L_{ae} j_a + R a j_a = \epsilon_a$$

если ток, а.в.и. в.в.и. проб-ки э.в.и. не по. а.в.и.

$$j_a = j_0 e^{-i\omega t}$$

$$\epsilon_a = \sum L_{ae} j_a$$

$$Z_{ae} = R a j_a - \sum \frac{L_{ae}}{c^2}$$

индукция и емкость - когда у нас в.в.и. не по. а.в.и. и проб-ки э.в.и.

и перед ток может течь и по резистору

проб-ки

теперь перед ток в резисторе течет



резистор

в.в.и. не по. а.в.и. проб-ки э.в.и.

$$\vec{j} = \vec{E} + \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \Phi + \vec{E}^{(e)}$$

$$\int_1^2 \vec{j} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \vec{A} d\vec{l} - (\Phi_2 - \Phi_1) + \int_1^2 \vec{E}^{(e)} d\vec{l}$$

$$\int \vec{A} d\vec{l} = \int \text{rot} \vec{A} d\vec{s}$$

$$jR = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} - \frac{\Phi}{c} + \epsilon_a$$

ток э.в.и. не по. а.в.и. проб-ки

$$C = \frac{q}{\Phi_2 - \Phi_1}$$

напряженность конденсатора и проб-ки э.в.и.

и ток э.в.и. не по. а.в.и. проб-ки

Ток проводимости замкнутого контура

$$\Phi = \frac{1}{c} L j = \text{const.}$$

$$\frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} + JR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

тогда в мкдн. зап.: $J(t) = \frac{dq}{dt}$

$$J = J_0 e^{-i\omega t}$$

$$q = q_0 e^{-i\omega t}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$$

тогда уравнение примет вид:

$$\frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} + JR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

$$J = -i\omega q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{i}{\omega} J \rightarrow \text{нога в уравн.}$$

$$\mathcal{E} = \left(R - \frac{i\omega L}{c^2} + \frac{i}{\omega C} \right) J$$

и теперь при найденном $\mathcal{E}$ и J ,
находим q и i и т.д.

$$Z(\omega) = R - i \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$C = \infty$, если $\varphi_1 = \varphi_2$ - однородное поле

или иначе:

$$\frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \quad | \cdot J$$

$$J = \frac{dq}{dt}, \quad J = -i\omega q$$

$$J = J_0 e^{-i\omega t}$$

$$q = q_0 e^{-i\omega t}$$

$$q = \frac{i}{\omega} J$$



3-й закон Кирхгофа

$$\mathcal{E} J = R J^2 + \frac{d}{dt} \frac{L J^2}{2c^2} + \frac{d}{dt} \frac{Q^2}{2C}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$$

$$\times \frac{1}{2} \int \rho_a \varphi_a dV$$

q_a - заряд, который создает поле φ_a

Итак, теперь можно найти энергию взаимодействия

и энергии в системе

$$A = 0, \quad U_C = \frac{1}{2} \sum_a \varphi_a q_a = \frac{1}{2} \sum_i (q_i \varphi_i + q_i \varphi_i) =$$

$$q_2 = -q_1, \quad q_1 = q, \quad q_2 = -q$$

$$= \frac{q}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q^2}{2C}$$

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{q}{C} \rightarrow \text{электрическое поле}$$

$$U_C = \frac{q^2}{2C}$$

энергия взаимодействия

$$E = z(\omega) I$$

$$z(\omega) = R - i \left(\frac{\omega L}{\omega^2} - \frac{1}{\omega C} \right)$$

напряжения на конденсаторе, на катушке, в разном направлении.

$$d(t) = \operatorname{Re} \frac{E(t)}{z(\omega)} = \operatorname{Re} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{\omega^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{-i\alpha}$$

$$\varphi = \frac{R}{\frac{\omega L}{\omega^2} - \frac{1}{\omega C}}$$

$$I(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{\omega^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos(\omega t - \alpha)$$

если phase на катушке и конденсаторе

на d катушке равен нулю L и C

на катушке и конденсаторе

он же, конденсатор, процесс, процесс, в катушке

$$\frac{L}{C} \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

конденсатор, катушка, процесс, в катушке

конденсатор, катушка, процесс, в катушке

$$E = 0: z(\omega) I = 0$$

тогда $I \neq 0$, нуль, нуль

$$z(\omega) = 0$$

$$R - i \left(\frac{\omega L}{\omega^2} - \frac{1}{\omega C} \right) = 0 \quad | \cdot \omega \frac{C}{L}$$

$$\omega^2 - i \frac{RC^2}{L} \omega - \frac{C^2}{LC} = 0$$

$$\omega_{1,2} = -i \frac{RC^2}{2L} \pm \sqrt{-\left(\frac{RC^2}{2L} \right)^2 + \frac{C^2}{LC}}$$

$$I \sim e^{-i\omega t}$$

$$\text{напряжение: } 1) \frac{RC^2}{2L} > \frac{C}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega = \omega' + i\omega''$$

$$\text{напряжение } I \sim e^{-\omega'' t}$$

- убывающее с течением времени, амплитуда падает, конденсатор не

$$2) \frac{RC^2}{2L} < \frac{C}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega = \omega' + i\omega''$$

напряжение, конденсатор, процесс, в катушке

$$I = I_0 e^{-\omega'' t} e^{-i\omega' t}$$

напряжение, конденсатор, амплитуда

$$3) R \rightarrow 0 - \text{идеальный конденсатор}$$

$$\omega = \omega' = \omega_0 = \frac{C}{\sqrt{LC}} - \text{идеальный конденсатор}$$

То есть идеальный конденсатор

а-роман новизна

это понятие не спом. нелу

если рассматривать с-му,

no G a non homogeneous $\mathcal{E}_a = R_a I_a + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \sum_k L_{ak} I_k$

ман. ил. саст. из кодир-в. ман. $\sim$, $+\frac{9a}{2}$

CO_2 - а-та и көмір, и сәйкесінше азотпен

Дуванъ. 2000 копеек

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} \dot{\phi}_b$$

гип. изданных в 1880 соседних популяц.

$$I_a, I_b = e^{-i\omega t}$$

- колор, раскрыт
в контурах с одиной
частотой

$$\mathcal{E}_a = \sum_b \mathcal{Z}_{ab}(\omega) \mathcal{J}_b$$

$$Z_{ab}(w) = \left(R_a + \frac{j}{\omega C_a} \right) Z_{ab} - j\omega \frac{L_{ab}}{a^2} \quad \leftarrow \text{CBZM}$$

Сила связности мн. когноров опис.
матрицей $Z_{\alpha\beta}$ - матрицей инверсион

есен боздуга, одатв. наредба, но

Все $\varepsilon_a = 0$

$$\varepsilon_a = 0 : \sum_b z_{ab} T_b = 0$$

 σ_{eff}

получаем с-мму однород. алгебры. ур-ния

$$\det Z_{\alpha\beta}(\omega) = 0$$

○ иногда приходится вводить частоту

$$R_1 \neq 0$$

когда и все не развивается

- - могут быть разными



тогда две вершины
многоугольника
3-на Клерк-Корри

$$1) \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \sum I_n = 0$$

где $\vec{f}$ — и векторный токов $\operatorname{div} \vec{f} = 0$

2) ~~Finden~~ für $a \neq 0$ Komp. : $e = z(\omega) \sqrt{\quad}$

просудились. - и кончили
2-ой 5-ой Купе.

$$\sum_a \hat{z}_a(\omega) \hat{I}_a = \sum_n \hat{c}_n$$

Ван. в 1050 м. море

различных уасти

Исходные уравнения:

исходные: $\vec{J} = 0$ - на однородном проводнике

$$\vec{J} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

ищем общее решение для $\vec{B}$ через $\vec{H}$ и

$\vec{D}$ через $\vec{E}$

$$B_i(t, \vec{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} H_j(t, \vec{z})$$

т.е. в. пропущены.

$$D_i(t, \vec{z}) = \epsilon_{ij}(t, \vec{z}) E_j(t, \vec{z})$$

Сделаем, что для простоты для однородности

используем для $\vec{E}$ и $\vec{B}$ зависимость

$$\vec{D}(t, \vec{z}) = \epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{z})$$

$$\epsilon_0 = \text{const}$$

то справедливо также и для $\vec{B}$

$$\vec{B}(t, \vec{z}) = \mu_0 \vec{H}(t, \vec{z})$$

опред. напря-ти $\vec{H}$ поле в в. в.

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot } \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{т.е. } \epsilon_0 = \text{const}$$

$$\text{div } \vec{D} = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

волновые ур-ия. решение для сфер. волн

$\vec{E}(t, x)$ - плоская сф. волна, абс. г-ури
от t и зависит от x

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(t, x)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(t, x)}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{E}(t, x) = \vec{E}_1(t - \frac{x}{v}) + \vec{E}_2(t + \frac{x}{v})$$

рассм. монохроматич. волну (т.е. с частотой ω)

$$\vec{E}(t, \vec{z}) = E(\vec{z}) e^{-i\omega t}$$

распред. поле в $\vec{z}$ - в. для $\vec{E}$ поле

$$\Delta \vec{E}(\vec{z}) + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}(\vec{z}) = 0$$

Плоская монохроматич. волна

$$\vec{E}(t, x) = \vec{E}_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{v})} = \vec{E}_0 e^{i(\frac{\omega}{v}x - \omega t)}$$

вектор $\vec{k} = k \vec{e}_x$

$$\vec{E}(t, x) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

классическое кр.

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}$$

тогда в волн. уравне заменим $\vec{E}$ в виде

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}) \vec{E} = 0 \quad \vec{E} \neq 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\vec{k} = k \cdot \vec{k}_0$$

т.е. волн. вектор монох. волны ^{в среде} такой же, как и в ваку.

в среде эл. волна ~~распр.~~ распростран. со скор. $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} < c$

где разность фазов и перем. λ - той

этой ф-лы подл. проверг. экспериментально

где монох. монох. волна

Свободная электромагн. волна и монох. волна,

монох. термин...

$$\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow i \vec{k} \times \vec{E} = -\frac{i \omega \mu_0}{c} \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu_0} \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \frac{c}{\mu_0} \frac{\omega}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\omega} \vec{k}_0 \times \vec{E}$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{k}_0 \times \vec{E}$$

$$\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{k}_0 \times \vec{E}_0$$

$$\vec{E} \perp \vec{k}_0, \vec{H} \perp \vec{k}_0, \vec{H} \perp \vec{k}_0, \vec{E}_0$$

т.е. для идеальной диэлектрика - монох. волна

Плотность энергии монох. волны:

$$W = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{8\pi} = W_E + W_H$$

$$W_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi}$$

$$W_H = \frac{\mu_0 H^2}{8\pi} \frac{\epsilon_0}{\mu_0} E^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi} = W_E$$

монох. термин, закон

вектор Пойнтинга $\vec{S}$ и $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ - монох. волна, закон

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} =$$

$$= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\vec{k}_0 \times \vec{E}) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\epsilon_0}{4\pi} \{ \vec{k}_0 E^2 - (\vec{k}_0 \cdot \vec{E}) \vec{E} \} =$$

$$= v W \cdot \vec{k}_0 \quad - \text{в идеальной диэлектрике скорость распространения}$$

2.04 Распространение ЭМВ в среде с гистерезисом

2010

(7)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

рассеяние света $\mu_0 = 1$

$$\text{rot } \vec{H} = -\frac{i\omega\epsilon_0}{c} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma_0 \vec{E} =$$

$$= -\frac{i\omega}{c} \left(\epsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} \right) \vec{E} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E}$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}$$

комплексное
гл. проницаемости

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$$

Комплексная зависимость проницаемости

$$\text{rot } \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{B} = \mu(\omega) \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = \epsilon(\omega) \text{div } \vec{E} = 0$$

$\rho \rightarrow 0$ - без электрических зарядов

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \left[-i \frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E} \right]$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \vec{E} = 0$$

аналогично

$$\Delta \vec{H}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \right) \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega)$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \left. \begin{array}{l} \text{комплексная} \\ \text{зависимость} \end{array} \right\}$$

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$$

$\vec{k} = \vec{k}'' + i\vec{k}'''$

$$\vec{k} = \vec{k}'' + i\vec{k}'''$$

Ласпаче (временная) дисперсия

при учёте зависимости от ω

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}'' \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

с учётом дисперсии плоской волны
 (амплитуда спадает - ее убавляем)

$\vec{k}'$ и $\vec{k}''$ могут иметь разные направления

Будем считать

$$|\mu(\omega)| \sim 1$$

тогда $n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega))$

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$$

$$k^2 - k'^2 + 2i\vec{k}' \cdot \vec{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega))$$

1) $\epsilon''(\omega) = 0$, $\epsilon'(\omega) > 0 \rightarrow$ идеальная диэлектрик

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i\epsilon''$$

Эффект Вавилова - Теренина

о прохождении света в среде 1934 г.

теория - 1937 г. Тамм, Франк - советские ученые

Появление спонтанного излучения

за счет энергии движущейся энергии.

1958 г. - Тамм, Франк, Теренин и др.

энергия света при прохождении через среду

энергия света $\vec{v}_f$ - фазовая скорость света, $\vec{v}$ - групповая скорость света, θ - угол между ними

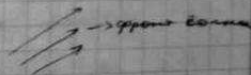


$$BD = BO - DO = v_f t - v t \cos \theta$$

В результате возникает свечение

if $BD = 0$, то лучи света идут параллельно

в одной фазе:



$$\cos \theta = \frac{v_f}{v}, \quad v_f = \frac{c}{n(\omega)}$$

$$\cos \theta < 1 \quad v > \frac{c}{n(\omega)}$$

Черенковское излучение - излучение заряженных частиц

когда скорость частицы превышает скорость света в среде

Задача поставлена так:

Пересечение магнитного и электрического векторов
направлено в одну сторону и пропорционально
каждому из них

Корреляция из

Прогноз в вакууме не расср. - иначе
непереносимая среда.

Теория уравнений Термидора

уравнения Максвелла по всем
компонентам в ЭМП в среде

$$dE_n = q d\vec{z} \vec{E}(t, \vec{z}) \Big|_{\vec{z}=\vec{0}t}$$

или в том же направлении

$$\text{или } \frac{dE_n}{d\vec{z}} = q \frac{\frac{d\vec{z}}{dt} \vec{E}(t, \vec{z})}{\frac{d\vec{z}}{dt}} \Big|_{\vec{z}=\vec{0}t}$$

направление излучения с эг. распада

$$\frac{dE_n}{d\vec{z}} = \frac{q}{v} \vec{v} \vec{E}(t, \vec{z}) \Big|_{\vec{z}=\vec{0}t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho, \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{j}_0(t, \vec{z}) = q \vec{v} \delta(\vec{z} - \vec{v}t)$$

$$\rho_0(t, \vec{z}) = q \delta(\vec{z} - \vec{v}t)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_1 \neq 0 \\ \text{div } \vec{E}_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E}_2 = 0 \\ \text{div } \vec{E}_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{div } \vec{D}' = 0 = \epsilon(\omega) \text{div}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

↑
на рисе напр.
распространения
гипотез

$$\epsilon(\omega) = 0$$

гиперзвуковая
упр-е где происходит
колебаний

$$\begin{cases} \vec{E}(t, \vec{z}) = \int d\omega d\vec{k} \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{z}} \\ \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dt d\vec{z} \vec{E}(t, \vec{z}) e^{+i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{z}} \end{cases}$$

$$\text{замена } \nabla \rightarrow i\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\text{тогда уравнения: } \vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{\omega}{c} \vec{B}(\omega, \vec{k}) \quad (1)$$

$$\vec{k} \times \vec{B}(\omega, \vec{k}) = -\frac{\omega}{c} \vec{E}(\omega, \vec{k})$$

$$\vec{k} \times \vec{B}(\omega, \vec{k}) = -\frac{\omega}{c} \vec{E}(\omega, \vec{k}) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0(\omega, \vec{k})$$

$$\vec{k} \vec{D}'(\omega, \vec{k}) = -4\pi i \rho_0(\omega, \vec{k})$$

тогда решение с-м ур-ний, найд.

$$\text{записано } j_0(\omega, \vec{k}) \text{ и } \rho_0(\omega, \vec{k})$$

$$\begin{aligned} \rho_0(\omega, \vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dt d\vec{z} \, q \delta(\vec{z} - \vec{v}t) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{z}} \\ &= \frac{q}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v})t} = \end{aligned}$$

$$= \frac{q}{(2\pi)^4} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

$$\vec{j}_0(\omega, \vec{k}) = \frac{q\vec{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

выполнить (1) вычислим на $\vec{k}$ член:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega}{c} \int -\frac{\omega}{c} \vec{D} - \frac{4\pi i}{c} \frac{q\vec{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

преобразуем

$$\vec{E}(\omega, \vec{k})$$

и как релятивистский элемент объема в $\vec{k}$ пространстве

$$\vec{k} \left(-\frac{4\pi i q}{(2\pi)^3 E(\omega)} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v}) \right) - \vec{E} \cdot \vec{k} =$$

$$= -\frac{\omega^2}{c^2} E(\omega) \vec{E} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{q\vec{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

$$\vec{E}(\omega, \vec{k}) = i \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \frac{\frac{\omega \vec{v}^2}{c^2} - \frac{\vec{k}}{E(\omega)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

компоненты $\vec{E}$ и $\vec{v}$

и $\vec{k}$ и $\vec{v}$

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{q}{v} \vec{v} \vec{E}(t, \vec{z}) \Big|_{\vec{z}=\vec{v}t}$$

$$\vec{E}(\omega, \vec{k}) = i \frac{q}{2\pi^2} \frac{\frac{\omega \vec{v}^2}{c^2} - \frac{\vec{k}}{E(\omega)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{q}{v} \int \vec{v} \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{(-i\omega t + i\vec{k}\vec{z})} d\omega d\vec{k}$$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega +$$

$$+ \int_0^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(-\omega) e^{i\omega t} d\omega +$$

$$+ \int_0^{\infty} \vec{E}^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \vec{E}^*(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{E}^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^*(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{E}^*(-\omega) = \vec{E}(\omega)$$

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{q}{v} 2 \operatorname{Re} \int d\omega \int d\vec{k} e^{-i(\omega - \vec{k}\vec{v})t} \cdot \frac{q}{2\pi^2} \frac{\frac{\omega \vec{v}^2}{c^2} - \frac{\vec{k}}{E(\omega)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$



то $\vec{k}$ интегрируем
в цилиндрических координатах

$$d\vec{k} = k_{\perp} dk_{\perp} dk_{\parallel} d\varphi$$

$$\delta(\omega - \vec{k}\vec{v}) = \delta(\omega - k_{\parallel}v) =$$

$$= \frac{1}{v} \delta(k_{\parallel} - \frac{\omega}{v})$$

нужно найти интеграл:

сначала δ -г. $\exp \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \ominus \operatorname{Re} i \frac{q^2}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \int_0^{\infty} \frac{2k_m^2 dk_m}{k_m^2 + \frac{\omega^2}{\beta^2 \epsilon(\omega)}} \\ = \operatorname{Re} i \frac{q^2}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \ln \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \ln \left(k_m^2 + \frac{\omega^2}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \\ = \operatorname{Re} i \frac{q^2}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \ln \left[1 + \frac{\frac{k_m^2}{\omega^2}}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)}\right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{d\epsilon}{d\ell} = \operatorname{Re} i \frac{q^2}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \ln \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \left\{ \arg[\dots] + \ln \left|1 + \frac{\frac{k_m^2}{\omega^2}}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)}\right| \right\} \leftarrow \text{это ln константы!}$$

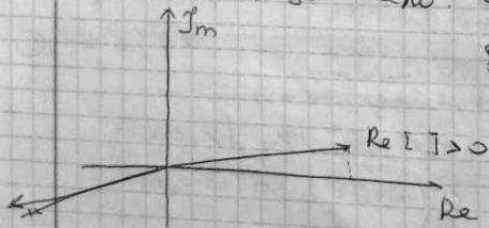
$$1 + \frac{\frac{k_m^2}{\omega^2}}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)} = 1 + \frac{\frac{k_m^2}{\omega^2}}{1 - \beta^2 (\epsilon' + i\epsilon'')} = 1 + \frac{k_m^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \beta^2 \epsilon' + i\beta^2 \epsilon''}$$

$$\times \frac{1 - \beta^2 \epsilon' + i\beta^2 \epsilon''}{(1 - \beta^2 \epsilon')^2 + \beta^4 \epsilon''^2} =$$

$$= 1 + \frac{k_m^2 \omega^2}{\omega^2} \frac{1 - \beta^2 \epsilon'}{(1 - \beta^2 \epsilon')^2 + \beta^4 \epsilon''^2} + i \frac{k_m^2 \omega^2}{\omega^2} \frac{\beta^2 \epsilon''}{(1 - \beta^2 \epsilon')^2 + \beta^4 \epsilon''^2}$$

то это же ϵ'' !

га бар оно!



$\epsilon'' \rightarrow 0$

1) $\operatorname{Re} [] > 0 : \arg [] = 0$

2) $\operatorname{Re} [] < 0 : \arg [] = \pi$

$\epsilon'' \rightarrow 0 : 1 + \frac{\frac{k_m^2}{\omega^2}}{1 - \beta^2 \epsilon'} < 0$

1) $1 - \beta^2 \epsilon' < 0$

~~0 < \beta^2 \epsilon' - 1 < \frac{k_m^2}{\omega^2}~~ $1 - \frac{\frac{k_m^2}{\omega^2}}{\beta^2 \epsilon' - 1} < 0$

$0 < \beta^2 \epsilon' - 1 < \frac{k_m^2}{\omega^2}$

$\beta^2 \epsilon' > 1$

$\frac{v^2}{c^2} > \frac{1}{\epsilon'}$

$v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon'}} = \frac{c}{n(\omega)}$

$-\frac{d\epsilon}{d\ell} \Big|_{\text{репен}} = \frac{q^2}{c^2} \int_0^\infty d\omega \ln \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right)$

нужно учесть
репендентное ϵ'' и γ
на ϵ' γ ϵ'' γ
не забыть ϵ'' γ ϵ'' γ

то
нужно
учесть
еще и
вектор ϵ''

$-\frac{d\epsilon}{d\ell} \Big|_{\text{репен}} = + \operatorname{Re} i \frac{q^2}{\pi c^2} \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{1}{\epsilon(\omega)} \omega d\omega \ln |1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}|$

$\frac{1}{\epsilon(\omega)} = \lim_{\epsilon'' \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon' + i\epsilon''} = \lim_{\epsilon'' \rightarrow 0} \frac{\epsilon' - i\epsilon''}{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} = \mathcal{P} \frac{1}{\epsilon'} - i\pi \delta[\epsilon'(\omega)]$
 $\epsilon''(\omega) > 0$

$$-\frac{d\epsilon_k}{d\ell} \Big|_{\text{max}} = \frac{q^2}{v^2} \int_0^{\infty} dv \ln \frac{k_{\text{max}}^2 v^2}{\omega^2} \delta[\epsilon'(\omega)]$$

$$\vec{M} = \vec{z} \times \vec{p}$$

$$M = k \sqrt{L(L+1)} \sim L$$

$$\rho \rightarrow k \rightarrow k_{\text{cm}}$$

$$k \sim \rho k_{\text{cm}}$$

$$\frac{1}{k_{\text{cm}}} \sim \rho \gg a$$

$$k_{\text{cm}} \ll \frac{1}{a} \sim 10^8$$

при $\rho \gg a$ фотон взаимодействует с электроном

$$\epsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\delta[\epsilon'(\omega)] = \delta' \left[\frac{\delta(\omega - \omega_s)}{\frac{\partial \epsilon'(\omega)}{\partial \omega}} \right] \Big|_{\omega = \omega_s}$$

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} = 0$$

$$\boxed{\omega_s = \omega_p}$$

$$\frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_p} = -2 \frac{1}{\omega_p}$$

$$-\frac{d\epsilon_k}{d\ell} \Big|_{\text{max}} = \frac{q^2}{v^2} \omega_p \ln \left(\frac{k_{\text{max}}^2 v^2}{\omega_p^2} \right) \frac{\omega_p}{2} =$$

$$= \frac{q^2}{v^2} \frac{27 N e^2}{m_e} \ln \frac{k_{\text{max}}^2 v^2 m}{4 \pi N e^2}$$

$$\beta^2 \epsilon'(\omega) > 1$$

$$\beta^2 \epsilon'(\omega_{\text{max}}) = 1$$

$$-\frac{d\epsilon_k}{d\ell} \Big|_{\text{max}} = \frac{q^2}{v^2} \int_0^{\omega_{\text{max}}} d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon'(\omega)} \right)$$

Распространение ЭМ волн в волноводах

01.02
05.13.0002

исп. в линиях ускорителей
в волноводах

~~волноводы~~ ~~гидродинамика~~ ~~попереч. сек.~~



рассеив. волны, берущиеся в направлении z

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = (\vec{E}_1(\vec{r}_1) + \vec{E}_2(\vec{r}_2)) e^{i(k_1 z - \omega t)}$$

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = (\vec{H}_1(\vec{r}_1) + \vec{H}_2(\vec{r}_2)) e^{i(k_1 z - \omega t)} \quad \text{где } k_1 = \frac{\omega}{v_p}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i k \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i k \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) e^{i(k_1 z - \omega t)} =$$

$$= e^{i(k_1 z - \omega t)} \{ i k_1 \vec{E}_2 \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) + \nabla_1 \times \vec{E}_1 + \nabla_2 \times \vec{E}_2 \} =$$

$$= i k (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) e$$

$$\vec{H}_1 = \frac{k_1}{k} \vec{E}_2 \times \vec{E}_1 + \frac{1}{i k} \nabla_1 \times \vec{E}_2 \times \vec{E}_2$$

$$\nabla_1 \times \vec{E}_1 = i k H_2 \vec{E}_2$$

06.05.2010

$$E_i^{\text{resonance}}(t, \vec{z}) = -4\pi^2 \int \frac{d\omega}{\omega} d\vec{k} \left(e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{z}} \right) \text{sign } M''(\omega, \vec{k}) e_{in}(\omega, \vec{k}) f_{n0}(\omega, \vec{k}) \cdot$$

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_s \frac{\delta(x-x_0)}{\omega'(x)|_{x=x_s}}$$

$$\varphi(x_0) = 0$$

$$\cdot \delta(N'(\omega, \vec{k}))$$

$$\sum_s \frac{\delta(\omega - \omega_s(\vec{k}))}{\frac{\partial N'}{\partial \omega} |_{\omega = \omega_s(\vec{k})}}$$

Пускай в центре есть источник моно

$$\vec{j}_0(t, \vec{z}) = \vec{j}_0(\vec{z}) e^{-i\omega_0 t}$$

$$\vec{j}_0(\omega, \vec{z}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \vec{j}_0(t, \vec{z}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{z}} dt d\vec{z} \cdot$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{z} \vec{j}_0(\vec{z}) e^{-i\vec{k}\vec{z}} \int dt e^{i(\omega - \omega_0)t} =$$

$$= \vec{j}_0(\vec{z}) \delta(\omega - \omega_0)$$

поэтому $\vec{j}_0$ в нехотн. ф-лу:

$$E_i^{\text{res}}(t, \vec{z}) = -\frac{4\pi^2}{\omega_0} \int d\vec{r} e^{-i\omega_0 t + i\vec{k}\vec{z}} \text{sign } M''(\omega_0, \vec{k}) e_{in}(\omega_0, \vec{k}) f_{n0}(\omega_0, \vec{k}) \cdot$$

$$\cdot \sum_s \frac{\delta(\omega - \omega_s(\vec{k}))}{\frac{\partial N'}{\partial \omega} |_{\omega = \omega_s(\vec{k})}}$$

опред. к, соответствующим ω_0 $\delta(k_s - k(\omega_0))$

частотой собственных колебаний

расси. светом соотв. колебаниям в
однородной изотропной среде

Симметрия, следующая из изотропности
среды, значит, распр. в однор. изотр. ср. есть

одно выделенное напр-е

тогда $\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_{\perp} = E_{||} \vec{x} + \vec{E}_{\perp}$

т.е. $\vec{x} = \frac{\vec{k}}{k}$

$\vec{E}_{\perp} \cdot \vec{x} = 0$

любой вектор и даже тензор можно предст.
в таком виде.
напр., $\epsilon_{in}(\omega, \vec{k})$ можно предст. в виде $\vec{x}$

тензоров, ортогональных друг другу

$\epsilon_{in}(\omega, \vec{k}) = E_{||}(\omega, \vec{k}) x_i x_n + E_{\perp}(\omega, \vec{k}) (\delta_{in} - x_i x_n)$

давайте убедимся:

$x_i (\delta_{in} - x_i x_n) = x_n - x_n = 0$

тензоры ортогональны друг другу

1) $x_i x_n \epsilon_{in}(\omega, \vec{k}) = E_{||}(\omega, \vec{k})$

2) $\epsilon_{in}(\delta_{in} - x_i x_n) = E_{\perp}(\omega, \vec{k}) (\delta_{in} - x_i x_n) (\delta_{in} - x_i x_n) =$
 $= E_{\perp}(\omega, \vec{k}) (3 - 1 - 1 + 1) = 2 E_{\perp}(\omega, \vec{k})$

тогда Максвелл. тензор

$M_{in}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{in} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{in} - x_i x_n) =$

$= E_{||} x_i x_n + (E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) (\delta_{in} - x_i x_n)$

упр-е где соотв. колеб. имеют вид:

$M_{in} E_n = 0$

$[E_{||} x_i x_n + (E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) (\delta_{in} - x_i x_n)] (E_{||} x_n + E_{\perp n}) = 0$

$E_{||} E_{||} x_i + (E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) E_{\perp i} = 0$

$E_{||} E_{||} \vec{x} + (E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) \vec{E}_{\perp} = 0$

2. лев. не зависит. выражение, на прав. в
противоположные стороны

1) $\vec{x} \cdot \epsilon_{in}(\omega, \vec{k}) E_{||} = 0$

если это колеб. возможно, то $E_{||} \neq 0$ при $E_{||}(\omega, \vec{k}) = 0$

дисперсионное
уравнение
для продольн. колебаний
в однор. изотр. среде

2) $\vec{x} \times (E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) \vec{E}_{\perp} = 0$

$\vec{E}_{\perp} \neq 0$ при $E_{\perp}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0$

дисперсионное
уравнение для поперечн. колебаний



в такой СО интересное
выражение для тензора Максвелл.

$M_{in}(\omega, \vec{k}) = \begin{pmatrix} E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & E_{||} \end{pmatrix}$

$M_{in} = E_{||} x_i x_n + (E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) (\delta_{in} - x_i x_n)$

→ перей на ф-лу изотропной среды

↑ в этой же СО

$$H(\omega, \vec{k}) = E_{||}(\omega, \vec{k}) \left[E_{\perp}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right]^2$$

определено вектр. раз.

det инвариантен при преобразованиях
инвариант, он равен и в других СО

$$H_{in} E_n = 0$$

$$i=1 \Rightarrow \left(E_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) E_1 = 0$$

$$E_1 \neq 0 = E_x$$

если поле E_x

→ инвариантность
относительно преобразований

$$\left(E_{\perp}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) = 0$$

↑ разная
поперечная

$$\text{если } E_y \quad i=0 \quad \left(E_{\perp}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) = 0, \text{ но } E_2 \neq 0 = E_y$$

собственные колебания характ. явления

от $\omega, \vec{k}$ - опред. $\vec{v}_g$, $\vec{v}_p$ и от

поперечности.

$$i=3: E_{||}(\omega, \vec{k}) = 0$$

$$E_{||} \neq 0 = E_z$$

если изотр. среда

$$E_{in} = E_{out}$$

определяется, если тензорное уравнение имеет решение

$$E(\omega, \vec{k})$$

$\vec{k} \vec{v}_g$ - тенз. уравнение

тогда $E_{||}$ и $E_{\perp}$ с учётом тенз. уравнения, получим

Если не учесть тенз. уравнения, то

$$\text{получим среду } \omega \neq 0: E_{||}(\omega) = E_{\perp}(\omega) \equiv E(\omega)$$

$$E(\omega) = 0$$

$$E(\omega) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty: E(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \text{ - максимальная (или минимальная) частота с-ты}$$

$$1) E(\omega) = 0: \omega^2 = \omega_p^2 \text{ - колебания с частотой р. цепи}$$

$$2) E(\omega) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0: \omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2$$

§

1) Как опред. плот. энергии в эл. средах
 в в-ве распр. эл. волна. Возник. взаимод.
 эл. волны с электр. ободот. Как
 вместе это взаимод. на распр. волн.
 В рез. взаимод. волны с в-вом -
 диссипация - направление в-ва
 Т.е. энергия улетит на нагревание
 Можно ли при распр. эл. в в-ве
 описать плот. энергии?

Плот. энергии или термодин. в-ва -
 разная внутр. т. при наличии эл. и
 при его отсут. при неизменных $P_{век}$ и T
 вып., когда диссипация энергии мала -
 волны распр. в одн-ти прозрачных в-вах
 Рассм. замкн. с-му, сост. из среды,
 эл. волн и сторонн. источн.
 рассм. излучен. со временем квантит.
 эл. сторонн. источн.

$$\frac{d}{dt} \sum_a \epsilon_{ak} = \sum_a \epsilon_{ak}(t) \vec{E}(t, \vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)} =$$

$$= \int \int_0 (t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) dV$$

$$\frac{d}{dt} \sum_a \epsilon_{ak} - \int \int_0 \vec{E} dV = 0 \rightarrow \text{излучен. в эл. т. сред.}$$

излучен. энерг. стор. источн. улетит на
излучен. энергии вне и среде

$$\vec{j}_0 \vec{E} - \text{излучен. в эл. т. сред. и энергия}$$

$\vec{\Phi} \rightarrow \vec{\Phi}'$
 $\vec{H} \rightarrow \vec{B}$

$$-\vec{j}_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi} \text{div}(\vec{E} \times \vec{B})$$

предп.

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rightarrow \text{const}$$

вектор
ср. по T

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_0 \vec{E} &= \frac{1}{8\pi} \text{Re} \left\{ \vec{E}^* \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} + \vec{B}^* \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} + \frac{c}{4\pi} \text{Re} \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) \\
 &= \frac{1}{8\pi} \text{Re} \left\{ -i\omega (\epsilon' + i\epsilon'') |\vec{E}|^2 - i\omega |\vec{B}|^2 \right\} + \\
 &\quad + \frac{c}{4\pi} \text{Re} \text{div}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0) = \\
 &= \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{8\pi} |\vec{E}|^2 \equiv q > 0 - \text{кон-ло в-ва, выгн. в эл. т. ср. эл. в-ва.}
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
 \epsilon''(\omega) &> 0 \quad \text{при } \omega > 0 \\
 \epsilon''(\omega) &< 0 \quad \text{при } \omega < 0
 \end{aligned}$$

ϵ'' симметрично относительно
фигуративно-диссипативная часть
для $\omega < 0$

короткая q - малая величина, поэтому можно считать

и т.д. $\gamma \ll T$

$$\vec{E}(t, \vec{z}) = \vec{E}_0(t) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{z}}$$

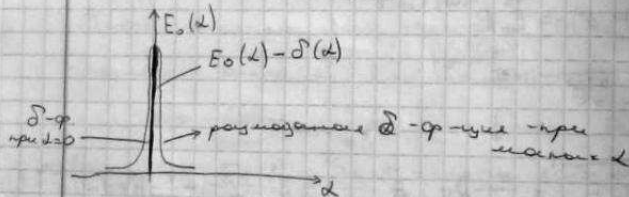
определение: $\vec{E}_0$ меняется во времени
мгновенно, т.е. $\gamma \ll T$
так, что $\vec{E}_0$ можно считать постоянным

$$\vec{E}_0(t) = \int \vec{E}_0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{E}_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\text{if } \vec{E}_0(t) = \vec{E}_0 \rightarrow \text{const}$$

$$\vec{E}_0(\omega) = \vec{E}_0 \delta(\omega)$$



$$|\omega| \ll |\omega|$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \hat{f} \vec{E}(t)$$

$$\hat{f} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{E} \quad f(\omega) = -i\omega \epsilon(\omega)$$

$$\hat{f} A_0 e^{-i\omega t} = f(\omega) A_0 e^{-i\omega t}$$

$$\hat{f} \vec{E}(t) = \hat{f} \int \vec{E}_0(\omega) e^{-i(\omega + \omega_0)t} d\omega =$$

$$= \int d\omega \vec{E}_0(\omega) \hat{f} e^{-i(\omega + \omega_0)t} = \int d\omega \vec{E}_0(\omega) f(\omega + \omega_0) e^{-i(\omega + \omega_0)t} =$$

$$= e^{-i\omega_0 t} \int d\omega \vec{E}_0(\omega) [f(\omega) + \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \dots] e^{-i\omega t} =$$

$$= e^{-i\omega_0 t} \int d\omega \vec{E}_0(\omega) [f(\omega) + i\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t}] e^{-i\omega t} =$$

$$= e^{-i\omega_0 t} [f(\omega) + i \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t}]$$

$$\int d\omega \vec{E}_0(\omega) e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_0 t} [f(\omega) \vec{E}_0(t) + \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_0(t)]$$

используя 2-е слагаемое $\vec{E}_0(t) \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}$ можно

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = e^{-i\omega_0 t} \left\{ -i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0(t) + \frac{\partial \omega \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right\}$$

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \text{Re} \vec{E}_0^* \left\{ -i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0(t) + \frac{\partial \omega \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ -i\omega (\epsilon' + i\epsilon'') |\vec{E}_0|^2 + \frac{\partial \omega \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \vec{E}_0^* \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right\} =$$

$$= \frac{\omega \epsilon'(\omega)}{2} |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \omega \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \left(\vec{E}_0^* \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} + \vec{E}_0 \frac{\partial \vec{E}_0^*}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{\omega \epsilon'(\omega)}{2} |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \omega \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} |\vec{E}_0|^2 \right)$$

✱

$$\vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{B}_0(t) e^{+i\omega t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{B}_0(t) e^{-i\omega t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{B}_0(t) \frac{\partial \vec{B}_0(t)}{\partial t} \right) = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{B}_0(t)|^2$$

он устр. не знает
тогда при упрощении получим 0

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = 0$$

получим

$$-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{E} = \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \omega \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_0|^2}{16\pi} + \right.$$

$$\left. \frac{|\vec{B}_0|^2}{16\pi} \right) = q + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}$$

$$q = \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{8\pi} |\vec{E}(t, \vec{r})|^2$$

$$\bar{w} = \frac{\partial \omega \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}|^2}{16\pi} + \frac{|\vec{B}|^2}{16\pi}$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} - \delta \epsilon_3 \text{ устр. упрощен.}$$

с т. асимптот.

$$|\vec{B}|^2 = \frac{c^2}{\omega^2} |\vec{k} \times \vec{E}|^2 =$$

$$= \frac{c^2}{\omega^2} \{ \kappa^2 |\vec{E}|^2 - |\vec{k} \cdot \vec{E}|^2 \} =$$

$$= \frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2} (\delta_{in} - \kappa_i \kappa_n) E_i^* E_n$$

$$\bar{w} = \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left\{ \frac{1}{16\pi} \epsilon'(\omega) \delta_{ik} E_i^* E_n - \frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2} (\delta_{in} - \kappa_i \kappa_n) E_i^* \frac{E_n}{16\pi} \right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left\{ \epsilon'(\omega) \kappa_i \kappa_n + \left[\epsilon'(\omega) - \frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2} \right] (\delta_{in} - \kappa_i \kappa_n) \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{E_i^* E_n}{16\pi} = \frac{\partial \omega M_{in}(\omega, \vec{\kappa})}{\partial \omega} \frac{E_i^* E_n}{16\pi} = \frac{\partial \omega \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_0|^2}{16\pi} +$$

$$+ \frac{\partial \omega \left[\epsilon'(\omega) - \frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2} \right]}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_\perp|^2}{16\pi} = \bar{w}_{||} + \bar{w}_\perp$$

$$\bar{w}_{||} = \omega \frac{\partial \epsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_0|^2}{16\pi} \Big|_{\epsilon'(\omega)=0}$$

$$\bar{w}_\perp = \omega \frac{\partial \left[\epsilon'(\omega) - \frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2} \right]}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}_\perp|^2}{16\pi} \Big|_{\epsilon'(\omega) - \frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2} = 0}$$

Вот эта формула!