

Литература:

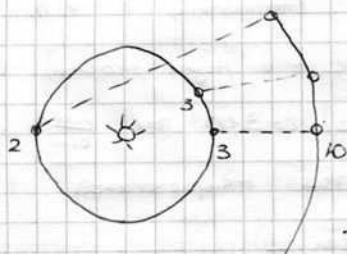
1. Ландау, Лифшиц - Теория поля I
2. — " — — — — — Электродинамика сплошн сред II
3. Лавин - Курс теор физ. Т. 1. I, II
4. Угаров - СТО I
5. Заразкин - Батыгин, Тютюкин. I, II

Электродинамика - наука, изучающая ЭМ поле, взаимодействие ЭМ поля с частицами в вакууме и вещества.

Измерение скорости света:

1. Первый измерил скорость света.

1676г. Максимум затмевания датского юпитера 22 мин.



В то время $d_3 = 292 \text{ млн. км.}$

$t = 22 \text{ мин.}$

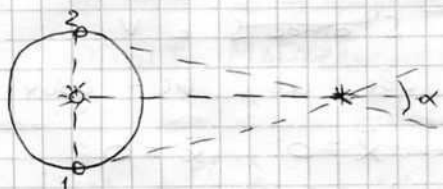
$$\Rightarrow c = \frac{2}{22} \cdot 10^8 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Тогда современными данными

$d_3 = 300 \text{ млн. км.}; t = 16 \text{ мин } 32 \text{ сек.}$

$$\Rightarrow c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

- 1722г. 2. Более точное значение, англ. астроном Брэдли годичный параллакс - можно определить расстояние до звезд

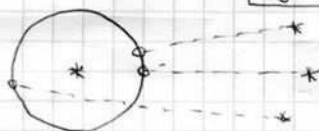
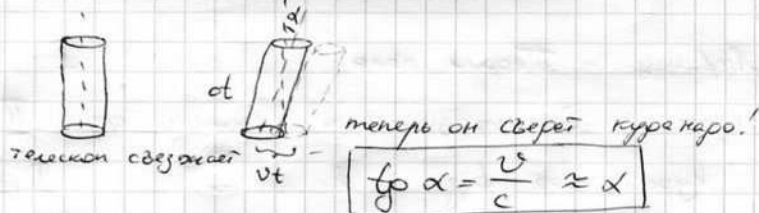


НО, оказалось, что для всех звезд $40,9''$

хА, наблюдения показали, что максимум смещения $40,9''$ было в таком положении



а телескоп то движется!



это явление называется
смерением света, и

никакого отношения к параллаксу не имеет!

$$c = 303 \text{ тыс } \frac{\text{км}}{\text{сек}}$$

а в XIX веке найдены параллакс у ближайшей звезды
"Проксима" 0,75"

1865 г. Максвелл записал ур-я описывающие все из-е
на тот момент это явление

- система диф-х ур-й (линейных) в ч. п.

В систему входила константа с размерностью скорости

$$\Rightarrow \text{измерили экспериментально } c = 310 \text{ тыс } \frac{\text{км}}{\text{сек}}$$

Волны поперечны, колеблется напряженность

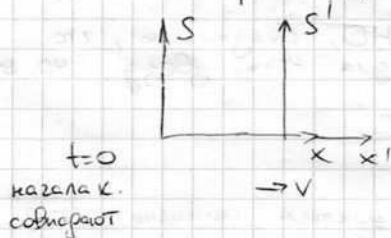
эл. и магн. поля, причем $\perp$

Максвелл решил, что эта скорость и есть скорость света

Согласно принципу относительности Галилея ур-я Максвелла

инвариантны при переходе из одной инерц. сист. в другую

Но если проверить, она! не выполняется!



$$S' \text{ относ } S \text{ с } v$$

где u, c , $u < c$ - двук c const v

$$\ddot{x} = 0, \ddot{x}' = 0$$

$$\dot{x} = \dot{x}' + c,$$

$$c = v$$

$$x = x' + vt + c_1$$

$$\text{при } t=0 \quad x = x' = 0 \quad c_1 = 0 \quad x = x' + vt$$

$y = y'; z = z'$ — поперечные координаты не меняются

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Классический закон} \\ \text{сложения скоростей} \end{array}$$

$$m_a \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial x_a}; \quad U(r_{12}, r_{13}, \dots)$$

для интригованной системы

$$m_a \frac{d^2 x'_a}{dt'^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_a} = \frac{\partial U}{\partial x'_a} \frac{\partial x'_a}{\partial x_a} + \frac{\partial U}{\partial y'_a} \frac{\partial y'_a}{\partial x_a} + \frac{\partial U}{\partial z'_a} \frac{\partial z'_a}{\partial x_a}$$

= 1 $\leftarrow$ посмотрим $\frac{\partial x'_a}{\partial x_a} \stackrel{?}{=} 1$

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= (x'_2 + vt - x'_1 - vt)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = r'^2_{12} \end{aligned}$$

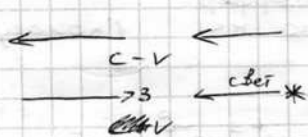
т.е. закон движения инвариантен к трансформации Галилея, пр. отн. Гал. выполн!

$$m_a \frac{d^2 x'_a}{dt'^2} = - \frac{\partial U}{\partial x'_a}$$

долгое время было непонятно, почему же тогда не выполнялось это в ур-х Максвелла.

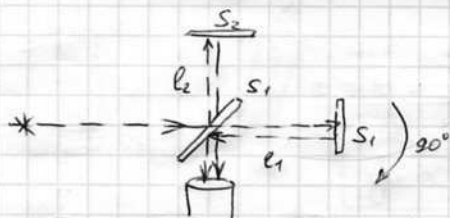
и тут пришел Майкельсон. и сделал ~~хуже~~ права

ОПЫТ МАЙКЕЛЬСОНА



решил, что будет так
но $\frac{v}{c} = 10^{-4}$, а нужно было
мерять $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}$, нужен был

точный прибор! И Майкельсон изобрел —



1) Расположен так, чтобы

$$\frac{l_2}{c} \rightarrow \frac{l_1}{c}$$

 l_1 совпадает
с уровнем Земли2) Повернуть на 90°

1) $t_1 (c+v)$

$$ct_1 = l_1 + vt_1$$

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v}$$

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{l_1 2c}{c^2 - v^2} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



$$ct_2 = 2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2}$$

$$c^2 t_2^2 = 4l_2^2 + v^2 t_2^2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

2) после поворота

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\tau = \Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{l_1 + l_2}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{(l_1 + l_2) v^2}{c^3}$$

$$\tau = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \text{изменение интерфер. картины строю на } 1 \text{ полосу темн.} \rightarrow \text{светлая}$$

$$l_1 + l_2 = \frac{c^2}{v^2} \lambda = 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{+3} \cdot 10^{-8} = 50 \text{ м}$$

$$\text{если } \tau = 0,1 \frac{\lambda}{c} \Rightarrow 5 \text{ м}$$

те заметить можно было бы, но
не было!

при повороте на 90° изменение интерф.
дв картинок не произошло!

движение Земли не влияет на скор. распр света.

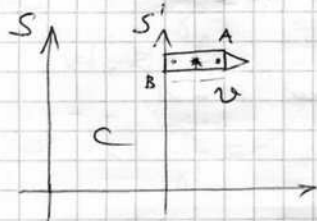
Равномерное и прямолинейное движение коорр
сист. Земли не влияет на распространение света
(величину и направление)

Световые явления должны подчиняться принципу
относительности

Порядительное в механике: скорость распространения взаимодействия
бесконечна,

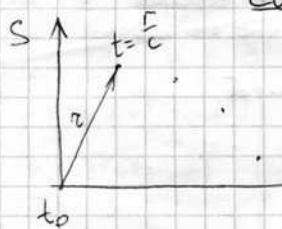
Время абсолютно во всех ИСО.

Пусть есть система S , мы в центре, летит ракета, в ней
два наблюдателя, носители источника света.



Время поларания света из
источника в A и B в системе
 S' - одинаково. А в S - разнито! ?

Синхронизация хода часов



это предположил Пуанкаре

время.

$$x = \gamma(x' + vt')$$

из

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$\gamma vt = \gamma^2(x' + vt') - x' = \gamma^2 vt' + x'(\gamma^2 - 1) \quad \left| \cdot \frac{1}{\gamma v} \right| =$$

$$= \gamma t' + \frac{x'}{v}(\gamma^2 - 1) = \gamma \left\{ t' + \frac{x'}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \right\} =$$

$$= \left\{ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\} = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}}$$

Преобразования Лоренца

1904.

при $c \rightarrow \infty$

преобразования
Галилея

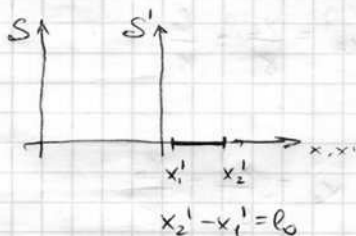
$$x = x' + vt$$

$$t = t'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$



$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

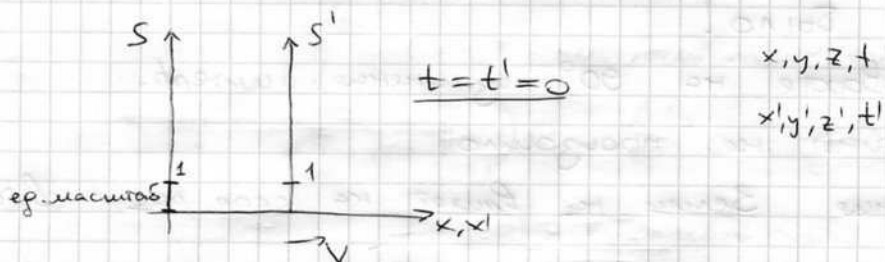
$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2 - x_1 = l$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Постулаты СТО:



1. Связь между координатами и временем, прием линейной, чтобы была однородность и изотропность пространства
2. Скорость движения света посыл валяшка во всех СО; $c = \text{const}$
3. Скорость движения одной СО отн другой посыл $v = \text{const}$.
4. Никакими принципиально выполненными измерениями невозможно отличить одну СО от другой

Рассмотрим событие происх по оси x и x' .

$$y' = 0, z' = 0 \Rightarrow y = 0; z = 0$$

$$\begin{cases} y = \alpha y' + \beta z' \\ z = \gamma y' + \delta z' \end{cases}$$

это характеризует поворот и растяжение (но это неважно)

$$\begin{cases} y = Ay' \\ z = Az' \end{cases}$$

$$1) \quad \begin{aligned} l &= 1 - \text{ер. масштаб} \\ l' &= \frac{1}{A} \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} y' &= 1 & l' &= 1 \\ l &= A \cdot 1 = A \end{aligned}$$

если $A \neq 1$ то это противоречит постулату #4

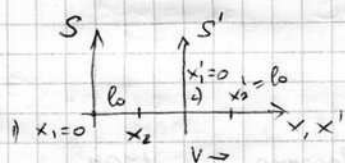
$$\Rightarrow A = 1$$

$$1) x' = 0; x = vt$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$2) x = 0; x' = -vt'$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$



10.09.09.

$$t = t' = 0; x = y = z = 0$$

$$x' = y' = z' = 0$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$\text{Поскольку, } \gamma = \gamma'$$

$$t' = 0: x'_1 = \frac{x_1}{\gamma} = 0; x'_2 = \frac{x_2}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma}$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{l_0}{\gamma}$$

$$t = 0; x_1 = \frac{x'_1}{\gamma} = 0; x_2 = \frac{x'_2}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma}$$

Если бы так было, то можно было бы отменить одну ИСО от другой

$$\Rightarrow \gamma = \gamma'$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$x = \gamma(x' - vt)$$

$$\left. \begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + vt') \\ ct' &= \gamma(ct - vt) \end{aligned} \right\} \Rightarrow ct + t' = \gamma^2 c^2 t t' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$t: x = ct$$

$$t': x' = ct'$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$c \rightarrow \infty$ $t' = t$ то $x = x' + vt$, это есть преобразование Галилея.

т.е. преобр Лоренца не исключ. а обобщ. преобр Гал.

$$1) \Delta t = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad l_1 = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad l_2 = l_{20}$$

$$2) \Delta t' = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \quad l_1 = l_0; \quad l_2 = l_{20} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$\tau = \Delta t' - \Delta t = 0 \Rightarrow$ Майкельсон не наблюдал интерференции

Лоренц 1892 г. $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Физическая 1889 $\nearrow$

Собственное время — время по часам в точке, где происходит событие.

$$\left. \begin{aligned} t_2 &= \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t_1 &= \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \rightarrow t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\tau_{\text{дв}} = \frac{\tau_{\text{покоя}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

— м-мезона.

$$\tau_{\text{покоя}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$$

если бы формула была неверна, то было бы

$$c \cdot \tau_{\text{покоя}} = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ сек} = 6 \cdot 10^4 \text{ см} = 600 \text{ м.}$$

но на самом деле $\approx 20 \text{ км}$

$$\tau_{\text{дв}} = \frac{20 \text{ км}}{c} = \frac{20 \text{ км}}{3 \cdot 10^5 \text{ км/сек}} = \frac{10^2}{3} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ сек} = 3.3 \tau_{\text{покоя}}$$

Одновременно происходят события в S и S'



$$t_2 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Релятивистский закон сложения скоростей.

$$S \quad v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$S' \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'}$$

$$dy = dy'$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

$$dz = dz'$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dt' (1 + \frac{v}{c^2} v'_x)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_x = \frac{dx' + v dt'}{dt' (1 + \frac{v}{c^2} v'_x)} = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt' (1 + \frac{v}{c^2} v'_x)}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}$$

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}$$

$$v_z' = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}$$

$$c \rightarrow \infty \quad (V \ll c, v_x' \ll c)$$

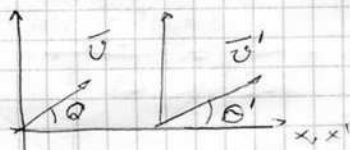
$$\begin{cases} v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$$

$$v_x' = c \quad (v_y' = v_z' = 0)$$

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{V \cdot c}{c^2}} = c \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}} = c$$

$$v_x' = c - \alpha; \quad V = c - \beta$$

$$v_x = \frac{c - \alpha + c - \beta}{1 + \frac{(c - \alpha)(c - \beta)}{c^2}} = \frac{\left(2 - \frac{\alpha + \beta}{c}\right) c}{1 + 1 - \frac{\alpha + \beta}{c} + \frac{\alpha \beta}{c^2}} \Rightarrow v_x < c$$



$$v_x = v \cos \theta$$

$$v_x' = v' \cos \theta'$$

$$v_y = v \sin \theta;$$

$$v_y' = v' \sin \theta'$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \tan \theta = \frac{v_y' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{v_x' + V} = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{v' \cos \theta' + V} =$$

$$\Rightarrow v' = c : \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\frac{V}{c} + \cos \theta'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Дополнительно лемма c T 3P TO.



$$v_x = -c \cos \theta \quad v_x' = -c \cos \theta'$$

$$v_y = -c \sin \theta \quad v_y' = -c \sin \theta'$$

$$\Rightarrow -c \sin \theta = \frac{-c \sin \theta' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta'} \quad v \ll c$$

$$\sin \theta - \sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta'} \sin \theta'$$

$$2 \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \cos \frac{\theta + \theta'}{2} = \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta' - 1\right) \sin \theta'$$

$$(\theta - \theta') \cos \theta' = \frac{v}{c} \cos \theta' \sin \theta'$$

$\Delta \theta$

$$\boxed{\Delta \theta = \frac{v}{c} \sin \theta'}$$

Первый инвариант — скорость света c

Второй инвариант — интервал между двумя событиями

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2}$$

$$s_{12} = s_{12}' = \sqrt{c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2} =$$

$\Delta_{\text{инв}} =$

$$-S^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2$$

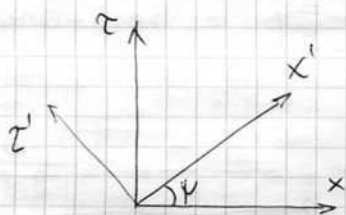
17.09.09.

$$x, y, z, \tau; \quad \tau = ict$$

$$-S^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2$$

Параллельный перенос и поворот н.о. оставляет инвариантным расстояние между двумя точками.

Поворот в пл. $x\tau$



$$x = x' \cos \psi - \tau' \sin \psi$$

$$\tau = x' \sin \psi + \tau' \cos \psi$$

$$x' = 0$$

тогда

$$x = -\tau' \sin \psi$$

$$\tau = \tau' \cos \psi$$

или разделив τ' на τ'

$$\tan \psi = -\frac{x}{\tau} \Rightarrow \tan \psi = -\frac{x}{ict} = \frac{i \vec{x} \cdot \vec{v}}{ct} = i \frac{v}{c}$$

$$\boxed{\tan \psi = i \frac{v}{c}}$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sin \psi = \tan \psi \cos \psi = \frac{i v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

подставляем:

$$\begin{cases} x = \left(x' - \frac{\tau' i v}{c} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \tau = \left(\frac{x' i v}{c} + \tau' \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

перепишем

1) $c t_{12} > l_{12}$ - вещественно

если S_{12} - вещественно, то можно найти такую S , что $l'_{12} = 0$

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \sqrt{c^2 t_{12}'^2} \quad ; \quad t'_{12} = \frac{S_{12}}{c}$$

времени подобный интеграл

2) $c t_{12} < l_{12}$ $S_{12} = i |S_{12}|$ чисто мнимый

можно найти такую S_{12} , что события происходят одновременно

$$S_{12} = i |S_{12}| = \sqrt{-l_{12}^2} \quad l'_{12} = |S_{12}|$$

пространственно подобный интеграл

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \sqrt{c^2 t_{12}'^2} = c t_0$$

$$t_0 = \frac{S}{c}$$

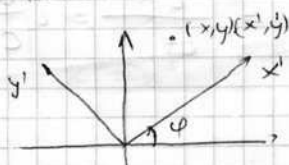
$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{b}' \\ T_{ik} &= B_{ik} \end{aligned}$$

Как же записать все законы природы?

$$a = b \quad ; \quad a' = b'$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad ; \quad \vec{a}' = \vec{b}'$$

$$T_{ik} = B_{ik} \rightarrow T'_{ik} = B'_{ik}$$



$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k$$

$$x_i = (x, y, z)$$

Компоненты векторов преобразуются при обратном

$$m \ddot{x}_i = F_i$$

$$m \alpha_{ik} \ddot{x}'_k = \text{dim } F'_m$$

$$m \alpha_{ik} (\ddot{x}'_k - F'_k) = 0 \rightarrow m \ddot{x}'_k = F'_k$$

инвариантно от поворота в силу изотропии пространства

$$r = \rho t$$

x, y, z, t 4^x мерное пространство

$$1) x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0, z_1$$

$$2) x, y, z, z$$

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$T^{ik} = \frac{T^{ik} + T^{ki}}{2} + \frac{T^{ik} - T^{ki}}{2}$$

Закон сохранения энергии

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\}$$

$$= c^2 dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$$ds = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

$$ds^2 = dx^0{}^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

метрический тензор
пространства.

$$ds^2 = dx_i dx^i$$

$$dx_i = g_{ik} dx^k$$

связь между координатами и контравариантами

$$dx_0 = g_{0k} dx^k = g_{00} dx^0 = dx^0$$

$$dx_1 = g_{1k} dx^k = g_{11} dx^1 = -dx^1$$

$$dx_2 = -dx^2$$

$$dx_3 = -dx^3$$

$$A_0 = A^0$$

$$A_1 = -A^1$$

$$\vec{A} \rightarrow A^i$$

$$ds^2 = dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3$$

$$A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = A^2$$

Полный физический 4-мерный вектор $u^i = \frac{dx^i}{ds}$

4-мерный вектор скорости

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dx^0}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{v^1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

получили преобразования Лоренца, а это значит, что преобр. Лоренца соответствует повороту!

В современной литературе вводят

$$x^0 = ct; \quad x^1 = x; \quad x^2 = y; \quad x^3 = z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = \frac{x^{1'} + v x^{0'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x^0 = \frac{x^{0'} + \frac{v}{c} x^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x^2 = x^{2'} \\ x^3 = x^{3'} \end{array} \right.$$

При повороте в какой то плоскости компоненты векторов меняются одинаковым образом.

Нужно ввести 4-мерные векторы и тензоры.

4-мерным вектором A^i называется совокупность 4х величин, которые при преобр Лоренца (или повороте) изменяются так же, как и коорд (дифференц)

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'k}} A^{i'k}$$

Def Контравариантный 4-мерный вектор — уменьшающийся. Вот так ←

$$\cancel{A^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично определен контравариантный тензор 2-го ранга

$$\cancel{T}^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} T^{mn}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k}} \rightarrow \boxed{A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k}$$

обрезает ковариантный 4-мерный вектор
— ковариант. (кр. лор)

Но поскольку преобразован 4-мерный тензор, чтобы ^{нр} ковариантный вектор.

$$\cancel{A^i} = \cancel{\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}} A$$

Ковариантный 4-мерный тензор 2-го порядка

это 16 величин

$$T_{ik} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T'_{mn}$$

$$T^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} T'^m_k$$

Принцип тензорисльности Величины

$$A^i = T^{(i,k)} \cdot B_k$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} A'^m = T^{(i,k)} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} B'_n \quad \left| \frac{\partial x'^e}{\partial x^i} \right.$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^e}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^e}{\partial x'^m} = \delta_m^e$$

$$A'^e = \frac{\partial x'^e}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T^{(i,k)} B'_n = T'^{en} B'_n$$

$$T'^{en} = \frac{\partial x'^e}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T^{ik}$$

$$A^i B_i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} A'^m \right) \left(\frac{\partial x'^n}{\partial x^i} B'_n \right) = A'^n B'_n = A'^n B'_n - A'^i B'_i$$

δ_m^n

$$T^i_i = T'^i_i$$

$$A^i = \delta^i_k A^k$$

— симметричный тензор 2-го ранга
(по признаку тензорисльности)

$$\delta^i_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^i_k \neq T^k_i$$

Воп только для

симметричный тензор

$$S^{ik} = S^{ki}$$

10 независимых комп. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

антисимметр

$$A^{ik} = -A^{ki}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

= 6 нез комп

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}$$

$$u_i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$u^i u_i = u^0 u_0 + u^\alpha u_\alpha = (u^0)^2 - (u^\alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1.$$

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2}$$

если мы переходим к $s \rightarrow \tau_0$

$$u_i \frac{du^i}{ds} + u^i \frac{du_i}{ds} = 0$$

$$A^i B_i = A^i g_{ik} B^k = B^k g_{ki} A^i = B^k A_k = A_i B^i$$

$$2u_i \frac{du^i}{ds} = 2u_i w^i = 0$$

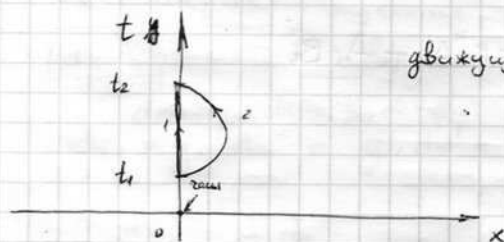
Построение квантовой механики.

Для каждой мех сист суц. интеграл, назыв. действием, который имеет минимальное значение для действительной траектории

$$S = -\alpha \int_a^b dS \quad \alpha > 0$$

$$a(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$$

$b(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ мировая точка, — где событие произошло при движении мировой точки обрзается мировой линией.



движение точки отсюда

$$dt_0 = \frac{dS}{c}$$

$$\int dt_0 = \frac{1}{c} \int dS$$

тогда $\int dS$ при движ. прямой /1/ наибольшее

но тогда ↑ линия значит минимиз.

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \text{при } v \ll c \quad L = -\alpha c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = -\alpha c +$$

$$+ \frac{\alpha v^2}{2c} = L_{\text{кин}} \text{ при } \alpha = mc$$

$$\bar{p} = \frac{\partial L}{\partial v} ; \quad \frac{\partial L}{\partial v} = -mc^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-2 \frac{v}{c^2}\right) = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\bar{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ при } v \ll c \quad \bar{p}_{\text{кин}} = m\bar{v}$$

$$\bar{\epsilon} = p\bar{v} - L = \bar{v} \frac{dL}{d\bar{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{глубина}$$

$$v=0; \quad \epsilon = mc^2 \quad \text{покояющаяся частица}$$

масса покоя.

классиз $F \sim a$ с коэф пропор масса.

$$\bar{v} = \bar{v}_0 \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\bar{v}_0 \bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\bar{v}_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 v(t) \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\bar{v}_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\bar{v}_0 \frac{\frac{dv}{dt} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + v \frac{+2v}{c^2} \frac{dv}{dt}}{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{m\bar{v}_0 \frac{dv}{dt}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{m}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\epsilon^2}{c^2} = \frac{m^2 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2 + \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2 + p^2.$$

Энерг Вир через импульс - ф-я Теллера

24.09.09

Релятивистское ур-е Г-Я.

$$p^i p_i = p^0 p_0 + p^\alpha p_\alpha = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 =$$

$$= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

$$\vec{p} = \text{grad } S \quad E = - \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\left| (\text{grad } S)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + m^2 c^2 = 0 \right|$$

но ~~по~~ классич следой это предельный случай релятивистского

$$v \ll c \quad E = E_{\text{кл}} + mc^2$$

$$- \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\partial S_{\text{кл}}}{\partial t} + mc^2$$

$$S = S_{\text{кл}} - mc^2 t$$

$$(\text{grad } S_{\text{кл}})^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S_{\text{кл}}}{\partial t} - mc^2 \right)^2 + m^2 c^2 = (\text{grad } S_{\text{кл}})^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S_{\text{кл}}}{\partial t} \right)^2 -$$

$$- 2mc^2 \frac{\partial S_{\text{кл}}}{\partial t} + \cancel{m^2 c^4} + \cancel{m^2 c^2} = (\text{grad } S_{\text{кл}})^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S_{\text{кл}}}{\partial t} \right)^2 + 2m \frac{\partial S_{\text{кл}}}{\partial t} \xrightarrow{c \rightarrow \infty}$$

$$\rightarrow (\text{grad } S_{\text{кл}})^2 + 2m \frac{\partial S_{\text{кл}}}{\partial t} = 0$$

Рассмотрим замкнутую механич систему, характери- массой M и импульсом $\vec{P}$.

В релятив механике нет закона сохр массы

$$Mc^2 = \sum_a \left(\frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} + U \right)$$

энергия и импульс сохр.

$$M \neq \sum m_a$$

$$Mc^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} + U.$$

$M \geq m_1 + m_2$ - условие самопроизвольного распада

$M < m_1 + m_2$ - распад быть не может т.к не будет выполн 3-й сохр энергии

$$\Delta m = \sum_a m_a - M \quad \text{— дефект масс.}$$

$$- \Delta m c^2 \quad \text{— энергия связи.}$$

$$A^i = A^0 = \frac{A^{10} + \frac{v}{c} A^{1d}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$A^2 = A'^2$$

$$A^3 = A^{13}$$

$$A' = \frac{A'^2 + \frac{v}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p^0 = \frac{p'^0 + \frac{v}{c} p'^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{e}{c} = \frac{\frac{e'}{c} + \frac{v}{c} p'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + v p'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$P_x = \frac{P'_x + \frac{v}{c^2} \epsilon'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p' = \frac{p'^1 + \frac{v}{c} p'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p_y = p'_y$$

$$p_z = p_z$$

заста встречается кварцит ветреных курчаво и купульсо

$$p_i' p_i = m c u_i' \cdot m c u_i = m^2 c^2 (u_i' u_i) = 1 = m^2 c^2$$

знает квадрат четырехмерного импульса частицы

$$= m^2 c^2, \text{ где } c - \text{ скор. света}$$

$$p^2 = m^2 c^2$$

$$\vec{p} = \text{grad } S$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

как получить уре Г-Я в класс Виз

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{p^2}{2m} = - \frac{\partial S_{kin}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2m} (\text{grads})^2 + \frac{\partial S_{\text{Ku}}}{\partial t} = 0$$

Ур-е Г-я в класс. мехонны

$$2) \quad m_1, \epsilon_1, \vec{p}_1 \rightarrow M$$

После столкновения образуется новая частица, если столкновение было упругим, то она распадется потом

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a$$

$$E = \sum_a \epsilon_a \text{ если не взаимодействует}$$

$$\vec{V} = \frac{c^2 \vec{P}}{E}$$

$$\vec{V}_{ц.м.} = \frac{c^2 \sum_a \vec{p}_a}{\sum_a \epsilon_a}$$

$$\vec{V}_{ц.м.} = \frac{c^2 \vec{p}_1}{\epsilon_1 + m_2 c^2}$$

центрируем

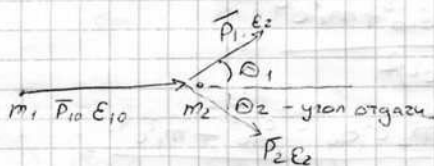
$$M^2 c^4 = E^2 - c^2 P^2 = (\epsilon_1 + m_2 c^2)^2 - c^2 (\epsilon_1^2 - m_1^2 c^4) =$$

$$c^2 p_1^2 = \epsilon_1^2 - m_1^2 c^4$$

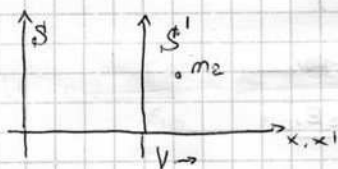
$$= \cancel{\epsilon_1^2} + 2\epsilon_1 m_2 c^4 + m_2^2 c^4 + \cancel{\epsilon_1^2} + m_1^2 c^4$$

$$M^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 \epsilon_1$$

3) Упругое столкновение двух частиц.
Вн. сист. не меняется.



$$\epsilon_1, \epsilon_2, \theta_1, \theta_2 - ?$$



до столкновения $\epsilon'_{20} = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

$$p'_{20x} = -\frac{m_2 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\epsilon'_{10} + \epsilon'_{20} = \epsilon'_1 + \epsilon'_2$$

$$\vec{p}'_0 = 0; \quad \vec{p}'_1 = 0$$

$$p'_{10} = p'_{20}, \quad p'_1 = p'_2$$

$$p_{10}'^2 = p_1'^2$$

$$p_{10}' = p_{20}' = p_{10}' < p_{20}'$$

$$\begin{aligned} & c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_{10}'^2} + c\sqrt{m_2^2 c^2 + p_{10}'^2} = \\ & = c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_1'^2} + c\sqrt{m_2^2 c^2 + p_2'^2} \end{aligned}$$

д) Пусть частица распадается симметрично на 2 с энергиями E_1 и E_2 . Пусть E_1 и E_2 .

$$Mc^2 = E_1 + E_2, \text{ если известно что } m_1 + m_2$$

до распада частица покоилась $P_0^x = 0$

$$\text{после распада } \vec{P} = 0; \quad p_1^2 = p_2^2$$

$$cp_1^2 = cp_2^2$$

$$\text{т.к. } E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$E_1^2 - m_1^2 c^4 = E_2^2 - m_2^2 c^4$$

$$(E_1 - E_2)(E_1 + E_2) = (m_1^2 - m_2^2) c^4$$

$$\begin{aligned} & \frac{Mc^2}{E_1 - E_2} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} c^2 \\ & \text{но по условию } E_1 + E_2 = Mc^2 \end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + M^2}{2M} c^2$$

$$E_2 = \frac{m_2^2 - m_1^2 + M^2}{2M} c^2$$

а теперь посмотрим, как это выглядит в 4-х мерном пространстве

$$P^i = P_1^i + P_2^i$$

$$P_i = P_{1i} + P_{2i}$$

$$\begin{aligned} P^i P_i &= (P_1^i + P_2^i)(P_{1i} + P_{2i}) = P_1^i P_{1i} + P_1^i P_{2i} + P_{2i} P_1^i + P_2^i P_{2i} = \\ &= P_1^i P_{1i} + 2 P_1^i P_{2i} + P_2^i P_{2i} \end{aligned}$$

клевывает
4-х мерный импульс
1 частицы

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1^i P_{2i}$$

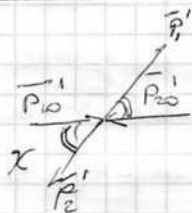
$$P^i - P_1^i = P_2^i \xrightarrow{?} M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2 P_1^i P_{2i} = m_2^2 c^2$$

$$P^i \left(\frac{Mc^2}{c}, 0 \right)$$

$$P^0 P_0 + P^d P_{1d}$$

$$M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2 = 2 \frac{Mc^2}{c} \frac{E_1}{c}$$

получили то же



$$\begin{cases} \mathcal{E}'_{10} = \mathcal{E}'_1 \\ \mathcal{E}'_{20} = \mathcal{E}'_2 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}'_2 + V p'_{2x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\mathcal{E}'_{20} + V(-p'_2 \cos \chi)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - V \frac{m_2 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \cos \chi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{-m_2 c^2 - m_2 c^2 \frac{V^2}{c^2} \cos \chi}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{m_2 c^2 \left[1 - \frac{V^2}{c^2} + \frac{V^2}{c^2} (1 - \cos \chi) \right]}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$\mathcal{E}_2 = m_2 c^2 + m_2 c^2 \frac{\frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} (1 - \cos \chi)$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} - m_2 c^2 \frac{\frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} (1 - \cos \chi)$$

$$V = \frac{c^2 p_{10}}{\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2}$$

$$\frac{V^2}{c^2} = \frac{c^2 p_{10}^2}{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)^2} = \frac{\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4}{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)^2}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{V^2}{c^2} &= \frac{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)^2 - \mathcal{E}_{10}^2 + m_1^2 c^4}{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)^2} = \\ &= \frac{\cancel{\mathcal{E}_{10}^2} + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 \mathcal{E}_{10} - \cancel{\mathcal{E}_{10}^2} + m_1^2 c^4}{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)^2} = \\ &= \frac{m_2^2 c^4 + m_1^2 c^4 + 2m_2 \mathcal{E}_{10}}{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)^2} \\ &= c^2 \frac{m_2^2 c^2 + m_1^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_{10}}{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4}{(m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_{10}) c^2}$$

$$\mathcal{E}_2 = m_2 c^2 + \frac{m_2 (\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_{10}} (1 - \cos \chi)$$

полезно заметить

$$\chi = \pi \quad E_{1min} = E_{10} - \frac{2m_2(E_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 E_{10}} = \delta E$$

$$E_{1min} = m_1 c^2 + (E_{10} - m_1 c^2) \frac{2m_2(E_{10} - m_1 c^2)(E_{10} + m_1 c^2)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 E_{10}}$$

$$= m_1 c^2 + (E_{10} - m_1 c^2) \frac{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 E_{10} - 2m_2(E_{10} + m_1 c^2)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 E_{10}}$$

$$= \frac{E_{1min} - m_1 c^2}{E_{10} - m_1 c^2} = \frac{(m_1 - m_2)^2 c^2}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 E_{10}}$$

1.10.09

$$\frac{T_{1min}}{T_{10}} = \frac{(m_1 - m_2)^2 c^2}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 E_{10}}$$

1) $v \ll c$ $E_{10} \approx m_1 c^2$

$$\frac{T_{1min}}{T_{10}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

2) $v \rightarrow c$: $E_{10} \rightarrow \infty$ $\frac{T_{1min}}{T_{10}} \rightarrow 0$

$$T_{1min} = E_{1min} - m_1 c^2 = \frac{(m_1 - m_2)^2 c^2 E_{10}}{2m_2 E_{10}}$$

$$E_{1min} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2} c^2$$

$$\frac{\delta E_{max}}{E_{10}} = \frac{2m_2(E_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{(m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 E_{10})E_{10}}$$

1) $m_1 > m_2$

1a) $v \ll c$, $E_{10} \approx m_1 c^2 + \frac{m_1 v^2}{2}$

$$\frac{\delta E_{max}}{E_{10}} \approx \frac{2m_2 \frac{m_1 v^2}{2}}{m_1^2 c^2 m_1 c^2} \approx \frac{m_2}{m_1} \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

1b) $v \rightarrow c$: $\frac{\delta E_{max}}{E_{10}} \approx \frac{2m_2 E_{10}}{m_1^2 c^2 + 2m_2 E_{10}} = \frac{1}{1 + \frac{m_1^2 c^2}{2m_2 E_{10}}} \approx 1$

т.е. при $E_{10} > \frac{m_1^2}{m_2} c^2$

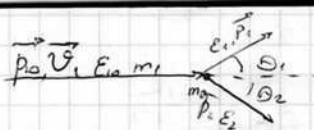
2) $m_1 < m_2$

2a) $v \ll c$ $E_{10} \approx m_1 c^2 + \frac{m_1 v^2}{2}$

$$\frac{\delta E_{max}}{E_{10}} \approx \frac{2m_2 \frac{m_1 v^2}{2}}{m_2^2 c^2 m_1 c^2} \approx \frac{m_1}{m_2} \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

т.е. если первая величина
то можно получить много м

2b) $v \rightarrow c$: $\frac{\delta E_{max}}{E_{10}} \approx \frac{2m_2 E_{10}}{m_2^2 c^2 + 2m_2 E_{10}} = \frac{1}{1 + \frac{m_2 c^2}{2m_1 E_{10}}} \approx 1$ при $E_{10} > m_2 c^2$



$$p_0^i + p_{20}^i = p_1^i + p_2^i$$

$$p_{20}^i = 0$$

$$p_{10}^i + p_{20}^i = p_1^i + p_2^i$$

$$p_{10}^i + p_{20}^i - p_1^i = p_2^i \quad 12$$

$$(p_{10}^i + p_{20}^i - p_1^i)(p_{10}^i + p_{20}^i - p_1^i) = p_2^i p_{2i}$$

$$p_{10}^i p_{10i} + p_{20}^i p_{20i} - p_1^i p_{1i} + p_{20}^i p_{10i} + p_{20}^i p_{20i} - p_{20}^i p_{1i} -$$

$$- p_1^i p_{10i} - p_1^i p_{20i} + p_1^i p_{1i} = p_2^i p_{2i}$$

$$p_{10}^2 + p_{20}^2 + p_1^2 + 2 p_{10}^i p_{20i} - 2 p_{10}^i p_{1i} - 2 p_{20}^i p_{1i} = p_2^2$$

$$m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + m_1^2 c^2 + 2 \left(\frac{E_{10}}{c} \frac{m_2 c^2}{c} - \vec{p}_{10} \vec{p}_{20} \right) - 2 \left(\frac{E_{10}}{c} \frac{E_1}{c} - \vec{p}_{10} \vec{p}_1 \right) -$$

$$- 2 \frac{m_2 c^2}{c} \frac{E_1}{c} = m_2^2 c^2$$

$$m_1^2 c^2 + E_{10} m_2 - \frac{E_{10} E_1}{c^2} + p_{10} p_1 \cos \theta_1 - m_2 E_1 = 0$$

мы

$$\cos \theta_1 = \frac{m_2 E_1 c^2 + E_{10} E_1 - E_{10} m_2 c^2 - m_1^2 c^4}{p_{10} p_1 c^2}$$

из этой формулы
можно получить
формулу для угла
Коллинса

$$p_{10}^i + p_{20}^i - p_2^i = p_1^i$$

$$m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 \frac{E_{10}}{c} \frac{m_2 c^2}{c} - 2 \frac{E_{10}}{c} \frac{E_2}{c} + 2 p_{10} p_2 \cos \theta_2 -$$

$$- 2 \frac{m_2 c^2}{c} \frac{E_2}{c} = m_1^2 c^2$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{c^2 p_{10} p_2} \left\{ E_2 (E_{10} + m_2 c^2) - m_2 c^2 (m_2 c^2 + E_{10}) \right\} = \frac{(E_{10} + m_2 c^2)(E_2 - m_2 c^2)}{c^2 p_{10} p_2}$$

Если $m_1 > m_2$, то θ_1 имеет max значение

$$\sin \theta_{1, \max} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\cos \theta_1 = f(E_1)$$

сначала роста! следовательно, уменьш!

Момент импульса релятивистского движения сохраняется при ее движении

$$m \neq 0; \quad m_2 = m; \quad \theta_+ = \theta$$

$$\cos \theta = \frac{E_0 E_1 + E_1 mc^2 - E_0 mc^2}{\frac{c^2 p_0 p_1}{E_0 E_1}} = \frac{1 + \frac{mc^2}{E_0} - \frac{mc^2}{E_1}}{1}$$

$$\frac{mc^2}{E_1} = \frac{mc^2}{E_0} + 1 - \cos \theta = \frac{mc^2}{E_0} \left[1 + \frac{E_0}{mc^2} (1 - \cos \theta) \right]$$

$$E_1 = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{h \omega_0}{mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

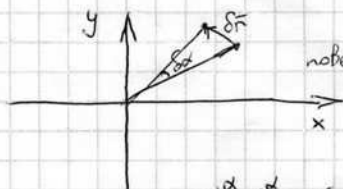
$$\frac{h \omega_0}{mc^2} = \frac{h}{mc} \frac{\omega_0}{2\pi c}$$

$$\lambda_0 = c T_0 = c \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\frac{h}{2\pi c} = \lambda \quad \text{комптона длина волны}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\lambda}{\lambda_0} (1 - \cos \theta)}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$$



поворот

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{x} \times \vec{z}$$

$$\vec{z}_1 = \delta \vec{z} \times \vec{z}$$

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + (\delta \vec{r})^{\alpha} = x^{\alpha} + \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \delta x^{\beta} x^{\gamma}$$

$$= x^{\alpha} + \delta \Omega^{\alpha\beta} x^{\beta}; \quad \delta \Omega^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta\gamma} \delta x^{\gamma} = -\delta \Omega^{\beta\alpha}$$

$$x'^{\alpha} x'^{\alpha} = (x^{\alpha})^2 + 2 \delta \Omega^{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} + \sim (\delta \Omega)^2$$

$$z'^2 = z^2 - \text{необходимо чтобы}$$

$$x'^i = x^i + \delta \Omega^{ik} x_k$$

Антисим. сим. только тогда

пишем с символом лево-инвариантности

$$x'^i x'_i = x^i x_i \rightarrow \delta \Omega^{i\kappa} = -\delta \Omega^{\kappa i}$$

в изаб. Величин

в плоскостей: $x^0 x^1, x^0 x^2, x^0 x^3, x^1 x^2, x^1 x^3, x^2 x^3$

$$\delta x^i = \delta \Omega^{i\kappa} x_\kappa$$

используем δS от величин по системе где ее рождают

$$\delta S = -\sum p_i^a \delta x^i / a = -\delta \Omega^{i\kappa} \sum p_i x_\kappa / b$$

$$p_i x_\kappa = \underbrace{\frac{p_i x_\kappa + p_\kappa x_i}{2}}_S + \underbrace{\frac{p_i x_\kappa - p_\kappa x_i}{2}}_A \quad \leftarrow 0$$

$$\sum (p_i x_\kappa - p_\kappa x_i) \Big|_a = \sum (p_i x_\kappa - p_\kappa x_i) \Big|_b$$

$$M^{i\kappa} \equiv \sum (x^i p^\kappa - x^\kappa p^i)$$

$$M^{00} = M^{11} = M^{22} = M^{33} = 0$$

$$M^{\alpha\beta} = \sum (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha) = \sum \frac{e^{\alpha\beta\gamma} e^{\delta\mu\nu} x^\mu p^\nu}{\delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\nu} - \delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\mu}} = e^{\alpha\beta\gamma} \sum (\vec{z} \times \vec{p})^\gamma =$$

$$= e^{\alpha\beta\gamma} M^\gamma$$

$$M^{12} = M_z$$

$$M^{13} = -M_y$$

$$M^{14} = M_x$$

$$M^{0\alpha} = \sum (x^0 p^\alpha - x^\alpha p^0) = \sum (ct p^\alpha - x^\alpha \frac{E}{c}) = \overrightarrow{\text{const}}$$

$$\frac{\sum E \vec{r}}{\sum E} - \frac{c^2 \sum \vec{p}}{\sum E} \cdot t = \overrightarrow{\text{const}}$$

$$\frac{c^2 \sum \vec{p}}{\sum E} = \vec{V}_D$$

$$\frac{\sum E \vec{r}}{\sum E} = \vec{R}_D$$

$$\vec{R}_D - \vec{V}_D t = \text{const}$$

Заряд в электромагнитном поле.

Абсолютно твердое тело - не деформируется. В рел. движении по рлд

Считается что ^{нечет.} частицы точечные.

Взаимодействие частицы с э.м. полем характеризуется зарядом частицы, само поле характ. 4-х мерным потенциалом A_i

Для заряда в э.м. поле действие состоит из двух слагаемых

$$S = \underbrace{S_m}_{\text{сама частица}} + \underbrace{S_{mf}}_{\text{взаимодейств}} = -mc \int dS - \frac{e}{c} \int A_i dx^i$$

$$S = \int_a^b \left\{ -mc dS - \frac{e}{c} A_i dx^i \right\} \quad A_i(\varphi, \vec{A})$$

$$A^0(\varphi)$$

$A^\alpha \rightarrow \vec{A}$ векторный потенциал ЭМП.

$$A_i = (\varphi, -\vec{A})$$

08.10.09
оп!

Измерение кинетич. энергии заряда тран. ЭМ полюс.

$$dE_k = dV m^2 c^4 + c^2 p^2 = \frac{c^2 2\vec{p} d\vec{p}}{2\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}} = \frac{c^2 \vec{p}}{E_k} d\vec{p} = \vec{v} d\vec{p}$$

испытание поле
сила пер скорости $\rightarrow$ не происходит работы без зр.

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \{ e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} \} = e \vec{v} \vec{E}$$

В классич механике при замене $t \rightarrow -t$ velocity прохого
то же поле в оф направлении

В релятив

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}$$

$$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{H} \rightarrow -\vec{H} \text{ нужно поменять}$$

$$\psi \rightarrow -\psi$$

$$\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$$

Электростат поле сферы с точностью до постоянных

Величин потенциала.

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_0 = \text{const}$$

$$\psi = \psi' + \psi_0 = \text{const}$$

действ

$$S_{fm} = - \frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i = - \frac{e}{c} \int_a^b A'_i dx^i + (-\frac{e}{c}) \int_a^b \frac{\partial \psi}{\partial x^i} dx^i \Rightarrow$$

градиентное преобразование, при нем уровни должны не изменяться

проув ϕ -но

$$\delta S_m = \delta S'_m \neq S'_m - \frac{e}{c} \int_a^b \Rightarrow \text{уровень движения не меняется}$$

$$i = \alpha: A' = A - \text{grad } f$$

$$i = 0: \varphi = \varphi' + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\vec{E} = \vec{E}'; \quad \vec{H} = \vec{H}'$$

С учетом градиентного преобразования можно сказать что $\varphi = 0$, но с $\vec{A}$ так сделать нельзя т.к. градиентом выделим лишь одну координату.

Постоянное э/м поле

Может описываться кез-ли от времени потенциалом.

$\vec{A}, \varphi$ - не зав от t .

$$\begin{cases} \vec{E} = -\text{grad } \varphi \\ \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \end{cases}$$

$$\vec{A} = \vec{A}' + \text{grad } f(\vec{r})$$

$$\vec{H} = \vec{H}'$$

Векторный потенциал координатив с точностью до град произв ф-ии.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

энергия системы не меняется

энергия совпадает с ф-ей Ланжюана

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi$$

полная энергия не изменяется

полн. потенц кин

Постоянное однородное э/м поле

$$d\varphi = -\vec{E}_0 d\vec{r}$$

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H}_0 \times \vec{r}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{H}_0 \times \vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{H}_0 (\nabla \cdot \vec{r}) - (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \vec{r}) = \vec{H}_0$$

$$\vec{H}_0 \uparrow z$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H}_0 \times \vec{r}$$

$$A'_x = -y H_0; \quad A'_y = 0; \quad A'_z = 0$$

$$(\text{rot } \vec{A}')_x = (\nabla \times \vec{A}')_x = \frac{\partial A'_z}{\partial y} - \frac{\partial A'_y}{\partial z} = 0$$

$$(\text{rot } \vec{A}')_y = (\nabla \times \vec{A}')_y = \frac{\partial}{\partial z} A'_x - \frac{\partial A'_z}{\partial x} = 0$$

$$(\text{rot } \vec{A}')_z = (\nabla \times \vec{A}')_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y} = H_0$$

$$H_z = H_0$$

$$\vec{H}_0 = \vec{e}_z H_0$$

$$A_x = A'_x + \frac{\partial f}{\partial x} : \left(-\frac{1}{2} y H_0 = -y H_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$A_y = A'_y + \frac{\partial f}{\partial y} : \left(\frac{1}{2} x H_0 = \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$A_z = 0 = A'_z + \frac{\partial f}{\partial z} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow f = f(x, y)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2} x y H_0 + f_1(x)$$

$$\frac{1}{2} y H_0 = \frac{1}{2} y H_0 + \frac{df_1}{dx}$$

$$\frac{df_1}{dx} = 0 \Rightarrow f_1 = \text{const}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2} x y H_0$$

3 основные задачи.

1) Движение заряда в постоянном и однородном эл. поле

$$\vec{H} = 0$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}$$



Выберем ось x направл. к $\vec{E}$

в нач. момент времени

$$t=0 \quad x=0 \quad y=0 \quad z=0$$

$$\vec{p}_0(0, p_0)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = eE; \quad p_x = eEt$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \Rightarrow p_y = p_{y0}$$

$$\frac{dp_z}{dt} = 0; \quad p_z = 0$$

$$\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{E_k}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{E_k} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{c^2 p_0}{E_k} \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_c = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 [(eEt)^2 + p_{0y}^2]} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

$$X(z) = \int \frac{c^2 eEt dt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \int \frac{\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} d \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \int \frac{\eta d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \sqrt{1 + \eta^2} + \text{const} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\right)^2} - 1 \right) \quad \text{3-й график}$$

$$y = \frac{c^2 p_0}{eE} \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\right)^2}} = \frac{c^2 p_0}{eE} \int \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} = \frac{cp_0}{eE} \text{arsh} \eta =$$

$$= \frac{cp_0}{eE} \text{Arsh} \left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} \right) \Rightarrow \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} = \text{sh} \left(\frac{eE}{cp_0} y \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left[\sqrt{1 + \text{sh}^2 \left(\frac{eEy}{cp_0} \right)} - 1 \right] =$$

$$\text{3-й график} \Rightarrow x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left(\text{ch} \frac{eEy}{cp_0} - 1 \right)$$

траектория - т.н. центральная линия

$$v \ll c, p_0 = mv_0$$

$$\frac{eE}{cp_0} y = \frac{eEy}{cmv_0}$$

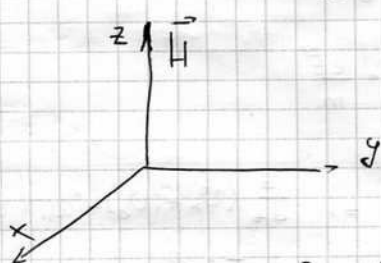
используем ch разложение в ряд
 $c \rightarrow \infty$

$$x = \frac{\mathcal{E}_0 = mc^2}{eE} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{eEy}{cmv_0} \right)^2 - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{eE y^2}{mv_0^2} = \frac{1}{2} \frac{eE y^2}{mv_0^2} \rightarrow \text{парабола пропор } y^2.$$

2) движение частицы в постоянном однородном магнитном поле

$\vec{H} \neq 0$ E_0 $\vec{H} = \vec{e}_z H$



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

Воск. поле, это в магн. поле
или поперек зрения $\Rightarrow$ кинет. конст.

$$\vec{p} = \epsilon_K \frac{\vec{v}}{c^2}$$

обозначим $\omega_H = \frac{eH}{mc^2}$ (циклотронная частота)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e c H}{\epsilon_K} \vec{v} \times \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \omega_H v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega_H v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} + \\ x \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ y \end{matrix}$$

$v_z = v_{0z}$; $z = v_{0z} t + z_0$

$$\frac{d}{dt} (v_x + i v_y) = -i \omega_H (v_x + i v_y)$$

$$v_x + i v_y = a e^{-i \omega_H t} \quad a = |a| e^{-i \alpha}$$

$$v_x = |a| \cos(\omega_H t + \alpha)$$

$$v_y = -|a| \sin(\omega_H t + \alpha)$$

$$v_x^2 + v_y^2 = a^2 = v_{0\perp}^2$$

кин. эн. не мен., m -поле искривл. траект.

$$x = \frac{v_{0\perp}}{\omega_H} \sin(\omega_H t + \alpha) + x_0$$

$$y = \frac{v_{0\perp}}{\omega_H} \cos(\omega_H t + \alpha) + y_0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_{0\perp}}{\omega_H} \right)^2$$

$$\boxed{r_L = \frac{v_{0\perp}}{\omega_H} \text{ — радиус Лармора}}$$

В пл. $\perp H$ заряд вращается по
Ларморовскому радиусу

частица движется по винтовой линии

$$\omega_H = \frac{e c H}{\epsilon_K} \text{ — циклотронная частота}$$

частоты

$$\frac{e c H}{m c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{e H}{m c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v \ll c \quad \omega_H = \frac{e H}{m c}$$

$$|a| > \left| \frac{cE_y}{H} \right|$$



$$|a| < \left| \frac{cE_y}{H} \right|$$



Winklung

$$\begin{cases} x = \frac{cE_y}{H\omega_H} (\omega_H t - \sin \omega_H t) \\ y = \frac{cE_y}{H\omega_H} (1 - \cos \omega_H t) \end{cases}$$

$$\delta S = \int_a^b (-mc \delta s - \frac{e}{c} A_i \delta x^i)$$

$$\delta s = U_i \delta x^i = U_i dx^i$$

$$\delta S = \int_a^b (-mc \delta s - \frac{e}{c} A_i \delta x^i - \frac{e}{c} dx^i \delta A_i)$$

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k$$

$$\delta S = \int_a^b \left(-mc U_i dx^i - \frac{e}{c} A_i dx^i - \frac{e}{c} dx^i \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k \right) =$$

$$= \frac{dA_i}{dx^k} \delta x^k$$

$$= \int_a^b \left\{ -d \left[(mc U_i + \frac{e}{c} A_i) \delta x^i \right] + \delta x^i \left(mc \frac{dU_i}{ds} + \frac{e}{c} \frac{dA_i}{ds} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{ds} \right) \right\} ds =$$

$$= - \left(mc U_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b \left\{ mc \frac{dU_i}{ds} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right) \frac{dx^k}{ds} \right\} \delta x^i ds$$

$$\delta x^i \Big|_a^b = 0$$

4. Kapitel Chapter

$$\delta S = 0$$

$$mc \frac{dU_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} U^k$$

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad F_{ik} = -F_{ki}$$

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

$$F_{0x} = \frac{\partial A_x}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^x} = -\frac{\partial A_x}{\partial x^x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^x} = -E_x$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi$$

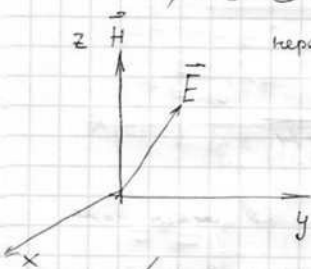
$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = - \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right) = -e^{\alpha\beta\gamma} e^{\sigma\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\nu = -e^{\alpha\beta\gamma} (\nabla \times \vec{A})^\gamma =$$

$$= -e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma$$

15.10.09

3) Движение э в равн и б магн поле

нелинейное движение



$$m \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}; \quad \vec{H} = e_z H$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega_H \vec{v} \times \vec{e}_z + \frac{e\vec{E}}{m}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_H v_y$$

+ $\times e$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (v_x + i v_y) + i \omega_H (v_x + i v_y) =$$

$$= i \frac{e E_y}{m} \quad \text{но в векторе прог. гр.}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_H v_x + \frac{e E_y}{m}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e E_z}{m}$$

$$v_z = \frac{e E_z}{m} t + v_{0z}$$

$$z = \frac{e E_z}{2m} t^2 + v_{0z} t$$

$$v_z \ll c$$

$$v_x + i v_y = a e^{-i \omega_H t} + \frac{c E_y}{H}$$

$$v_x = a \cos \omega_H t + \frac{c E_y}{H}$$

$$v_y = -a \sin \omega_H t$$

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\omega_H}$$

$$\overline{v_x} = \frac{c E_y}{H}$$

$$\overline{v_y} = 0$$

$$\overline{v_x} \ll c \quad \frac{E_y}{H} \ll 1$$

$$\overline{v_x} = v_{gr} \quad \text{— дрейфовая скорость, скорость электр. дрейфа}$$

$$v_{gr} = c \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{H^2}$$

не зависит ни от массы частицы ни от заряда и

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\omega_H} \sin \omega_H t + \frac{c E_y}{H} t, \\ y = \frac{a}{\omega_H} (\cos \omega_H t - 1) \end{cases}$$

$$x|_{t=0} = 0$$

параметрическое ур-е

траектории заряда

$$y|_{t=0} = 0$$

— траектория

тип взаимодействия зависит от того, как преобразуется

поле и потенциал а В зависит

$$\delta S = - (mc \psi_i + \frac{e}{c} A_i) \delta x^i$$

$$mc \psi_i + \frac{e}{c} A_i = - \frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv P_i$$

$$P^i = p^i + \frac{e}{c} A^i$$

$$i = \cancel{x}$$

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

$$i=0$$

$$P^0 = p^0 + \frac{e}{c} A^0 = \frac{E_k}{c} + \frac{e}{c} \varphi = \frac{E_k + e\varphi}{c}$$

полная энергия
частицы на с.

$$P_i - \frac{e}{c} A_i = p_i$$

$$P_i - \frac{e}{c} A_i = p_i$$

$$(P_i - \frac{e}{c} A_i)(P_i - \frac{e}{c} A_i) = m^2 c^2$$

$$g^{ik} (P_i - \frac{e}{c} A_i)(P_k - \frac{e}{c} A_k) - m^2 c^2 = 0$$

$$A_i = g_{ik} A^k$$

$$g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l$$

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}$$

Упре Г-Я в 4-мерн
буге!

$$A_i = g_{ik} A^k$$

$$A^i(\varphi, \vec{A})$$

$$A^0 = \frac{A^0 + \frac{V}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \rightarrow \varphi = \frac{\varphi + \frac{V}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$A^1 = \frac{A^1 + \frac{V}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \rightarrow A_x = \frac{A^1 + \frac{V}{c} \varphi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$A^2 = A^{12}; A^3 = A^{13}$$

$$E_x = F^{10} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1m}} \frac{\partial x^0}{\partial x^n} F^{mn} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1m}} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x^{10}} F^{1m0} + \frac{\partial x^0}{\partial x^{11}} F^{1m1} \right) \neq$$

$$= \frac{\partial x^0}{\partial x^{10}} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{10}} F^{100} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{11}} F^{110} \right) + \frac{\partial x^0}{\partial x^{12}} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{10}} F^{101} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{11}} F^{111} \right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} F^{120} + \frac{V^2/c^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} F^{101} = F^{10} = E'_x$$

$$E_x = E'_x$$

$$x^0 = \frac{x^0 + \frac{V}{c} x^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$x^1 = \frac{x^1 + \frac{V}{c} x^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

F-тензор электромагнитного поля

$$F^{0\alpha} = -E^\alpha$$

$$F^{\alpha\beta} = -e^{\alpha\beta\gamma} H_\gamma$$

$$F_1^{13} = -e^{132} H^2 = +H_y$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{t}=0: \quad mc \frac{dt}{ds} = \frac{e}{c} F^{0\alpha} u_\alpha$$

$$mc \frac{dt}{c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} dt} =$$

$$\boxed{mcu^i = p^i}$$

$$\boxed{\frac{dp^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k}$$

инвариант относительно преобразований Лоренца
3-х компонентное!

$$\dot{t}=0, \quad p^0 = \frac{E_c}{c} \quad \frac{d}{c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} dt} \frac{E_c}{e} = \frac{e}{e} \left(+E_x \frac{v^x}{c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = e \vec{v} \times \vec{E}} \quad \text{3-я компонента энергии}$$

$$\dot{t} \neq 0: \quad \frac{dp^\alpha}{ds} = \frac{e}{c} F^{\alpha k} u_k = \frac{e}{c} (F^{\alpha 0} u_0 + F^{\alpha \beta} u_\beta)$$

$$\frac{d}{c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} dt} p^\alpha = \frac{e}{c} \left(E^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - e^{\alpha\beta\gamma} H_\gamma \left(-\frac{v^\beta}{c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \right) =$$

$$= eE^\alpha + \frac{e}{c} (\vec{v} \times \vec{H})^\alpha$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k \quad | \quad \times u_i$$

$$mc u_i \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_i u_k \Rightarrow \equiv 0 \quad \text{Значит только 3-е уравнение независимое}$$

$$E_z = -\frac{v}{c} \frac{H_y'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{v}{c} H_y'$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H}}$$

поля перпенд. $\vec{V}$ др. силовым

22.10.09

$$\begin{aligned} \vec{E}'=0 &\rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H} \quad \left(\begin{array}{l} \text{если выбрано} \\ V \perp E, V \perp H \end{array} \right) \quad \frac{v}{c} = \frac{E}{H} \\ \vec{H}'=0 &\rightarrow \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E} \quad \rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{H}{E} \end{aligned}$$

Комп. эм. поля образуют 4-мерный тензор F^{ik} .

$$\boxed{F_{ik} \cdot F^{ik} = 2(H^2 - E^2)}$$

Вычислить дома, обязательно!

4-мерный антисимм. тензор

$e^{iklm} \cdot F_{ik} F_{lm}$ — это отношение инвариантно к повороту (простр. Лор.

$$e^{iklm} \cdot F_{ik} F_{lm} = e^{oklm} F_{ok} F_{lm} + e^{xklm} F_{xk} F_{lm} = e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} +$$

суммируем по i, k, l, m. Так здесь 0 получается по 0

$e^{\alpha\beta\gamma\delta} = e^{\alpha\beta\gamma\delta}$

символ Леви-Чивиты

$$+ e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} =$$

т.к. тут мы не можем быть 0

теперь суммируем по i, k, l, m

$$= e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} =$$

$$= 2 e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + 2 e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \equiv$$

$$= \begin{cases} F_{\alpha\beta} = -F^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta} \\ e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\beta\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma\delta} (-e^{\beta\gamma\mu\nu} H^{\mu\nu}) = -2\delta^{\alpha\mu} H^{\mu} = -2H^{\alpha} \end{cases}$$

симв. Кронекера

$$\equiv 4E^{\alpha} H^{\alpha} - 4E^{\gamma} H^{\gamma} = -8(\vec{E} \vec{H})$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1 = H^2 - E^2 \\ \mathcal{I}_2 = \vec{E} \vec{H} \end{cases} \quad 2 \text{ инварианта, но отн. к поворотам}$$

покажем, что единственные и независимые

рассмотрим комплексный вектор $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$

$$F_x = E_x + iH_x = E_x' + iH_x' = F_x'$$

$$F_y = E_y + iH_y = \frac{E_y' + \frac{v}{c} H_z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + i \frac{H_y' - \frac{v}{c} E_z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_y' + iH_y'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - i \frac{v}{c} \frac{H_z' - iE_z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$H_x = F^{32} = F^{132} = H_x'$$

$$E_y = F^{20} = \frac{F^{120} + \frac{v}{c} F^{121}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_y' + \frac{v}{c} H_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_z = F^{30} = \frac{F^{130} + \frac{v}{c} F^{131}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_z' - \frac{v}{c} H_y'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\cancel{E_y = \frac{E_y' + \frac{v}{c} H_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\cancel{E_z = \frac{E_z' - \frac{v}{c} H_y'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$H_y = F^{13} = \frac{F^{113} + \frac{v}{c} F^{103}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{H_y' - \frac{v}{c} E_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_x = E_x' \quad H_x = H_x'$$

прогнозы для неинерциальной

$$E_y = \frac{E_y' + \frac{v}{c} H_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad H_y = \frac{H_y' - \frac{v}{c} E_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_z = \frac{E_z' - \frac{v}{c} H_y'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad H_z = \frac{H_z' + \frac{v}{c} E_y'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{v}{c} \ll 1 \\ E_x = E_x' \\ E_y = E_y' + \frac{v}{c} H_z' \\ E_z = E_z' - \frac{v}{c} H_y' \end{aligned} \right\} \vec{E} = \vec{E}' - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H}'$$

$$\vec{H} = \vec{H}' + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}'$$

$$\vec{H}' = 0$$

$$\vec{E}' \neq 0 \quad H_x = 0; H_y = -\frac{v}{c} \frac{E_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{v}{c} E_z$$

$$H_z = \frac{v}{c} \frac{E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c} E_y$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}$$

$$D \quad \vec{E}' = 0 \quad \vec{H} \neq 0$$

$$E_x = E_x' = 0$$

$$E_y = \frac{v}{c} \frac{H_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c} H_z$$

$$\times (E_z' + iH_z') = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} F_y' - i \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} F_z'$$

$$F_z = E_z + iH_z = \frac{E_z' - \frac{v}{c} Hy'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + i \frac{H_z' + \frac{v}{c} Ey'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{E_z' + iH_z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} (Ey' + iHy') = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} F_z' + \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} F_y' \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \psi}}, \quad \tan \psi = i \frac{v}{c}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \sin \psi &= \tan \psi \cos \psi = \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = F_x' \\ F_y = F_y' \cos \psi - F_z' \sin \psi \\ F_z = F_y' \sin \psi + F_z' \cos \psi \end{cases}$$

поворот на ψ в комп. плоск. (y, z)

При повороте квадрат вектора не меняется

$$F^2 = F'^2$$

$$F^2 = E^2 - H^2 + 2i(\vec{E} \vec{H})$$

$$E^2 - H^2 = E'^2 - H'^2$$

$$\vec{E} \vec{H} = \vec{E}' \vec{H}'$$

Если $H > E$ или наоборот то это соотнош. сохраняется во всех группах ИСО

Так же сохраняется и угол тупой $\rightarrow$ тупой, острый $\rightarrow$ острый если $\vec{E} \vec{H} = 0$ то и в других ИСО тоже

$$H^2 - E^2 = H_0^2 - E_0^2$$

если мы имеем с-м, где $\vec{E}$ и $\vec{H} \parallel$, то $\vec{E} \vec{H} = E_0 H_0$

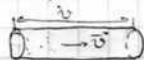
Запишем закон сохранения заряда (непрерывности)



$$e \rightarrow \frac{de}{dt}$$

это мы рассмотрим вход-выход зарядов

рассмотрим такой единичный объем



т.е. в единицу времени вышло весь заряд
который в этом объеме.

$$\oint_V \rho \vec{v} dV \rightarrow \oint_V \rho \vec{v} dV$$

количество заряда протекающего через 1^ю поверхность

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad \text{— плотность тока}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

S — поверхность

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \operatorname{div} \vec{j} = 0}$$

уравнение непрерывности

или

закон сохранения заряда

было изв. по Максвеллу

Мы знаем и закон Био-Савара

$$\oint_L \vec{H} d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I$$

или ток равен силе

силе тока

для пост тока

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \text{— означает, что силовые линии}$$

постоянного тока замкнуты.

а для переменного ток! $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

плотность тока
смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

а для переменных токов тоже закон Био-Савара

$$\oint_L \vec{H} d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\oint_L \left[\vec{e}_0 + \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] d\vec{s}$$

$$\boxed{\vec{e}_0 + \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}}$$

1^я ур 2^я часть ур Максвелла

Уравнения Максвелла.

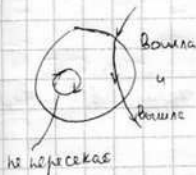
3^е мерный вид.

1) В природе нет магн. зарядов.

$\Delta \Phi = \vec{H} d\vec{S} = 1$ — можно подобрать такой элемент dS , что $\Delta \Phi = 1$
 тогда говорят, что через dS проходит 1 силовая линия
 поток магн. поля через dS

тогда $\Phi = \int \vec{H} d\vec{S}$ — полное число силов. линий

рассеи замкну поверхность S



$$\Phi = \oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0 \quad \text{из Т.н. Гаусса}$$

$$0 = \oint_S \vec{H} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{H} dV$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{H} = 0}$$

2^е уравнение 1^й парн ур^я Максвелл
 в диф. форме

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q \quad \text{— Т.н. Гаусса в электродинамике}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \int_V \rho dV$$

плот. заряда

$$\int_V \operatorname{div} (\vec{E} - 4\pi \rho) dV = 0$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho}$$

→ запись в дифер. форме это есть в циркулянт
 эл. заряды

2^е уравнение 2^й парн ур^я Максвелл

3-и ЭМ индукции Фарадея

$$\operatorname{grad} \phi = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

изменение потока
 в эр. вращении
 сила действ. на эр. заряд со стороны эл. поля

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \int \vec{H} d\vec{S}$$

по Т.н. Стокса

$$\oint_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \int \vec{H} d\vec{S} = 0$$

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) d\vec{S} = 0$$

Запись в диф. форме 3-и эм индукции Фарадея

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

1^е уравн 1^й парн ур^я Максвелл

$$I \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases}$$

СИСТЕМА

УРАВНЕНИЙ

$$II \begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$$

МАКСВЕЛЛА.

Эти уравнения инвариантны по отношению к преобразу Лоренца

Получим уравнения для потенциалов

$$\text{из II: } \text{rot rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$= \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = \text{div} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) = 4\pi\rho$$

$$\Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = -4\pi\rho$$

используем по потенциалам условия

$$1) \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

условие Лоренца для потенциалов
лоренцовская калибровка потенциалов

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

неоднородн волн уравнение

$$2) \text{div } \vec{A} = 0$$

кулоновская калибровка потенциалов

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \Delta \varphi = -4\pi\rho \end{cases}$$

Рассмотрим закон сохранения энергии ЭМ. поля

рассмотрим элементную систему состоящую из зарядов и ЭМ поля

тогда я знаю как изл энерг сист

$$\frac{dE_k}{dt} = e \vec{v} \vec{E}$$

$$\frac{d}{dt} \sum E_k = \sum_a e_a \vec{v}_a(t) \vec{E}(t, \vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)}$$

$$\frac{d}{dt} \sum \varepsilon_k - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = 0$$

Восн сист гр Максвелла

$$(2-2) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Rightarrow$$

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot (\text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \equiv$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} &= \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \\ &= \left\{ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right\} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\equiv -\frac{c}{4\pi} \left\{ -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{c} \frac{\partial H^2}{\partial t} \right\} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E^2}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \frac{c}{4\pi} \text{div} (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum \varepsilon_k + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = -\frac{c}{4\pi} \int \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) dV$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \sum \varepsilon_k + \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = - \oint_S \vec{S} d\vec{S}}$$

где: $w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$ — плотность потока энергии ЭМ поля. ВЕКТОР ПОИНТИНГА.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})$$

$V_{\infty}; S_{\infty}$

$$\int_{S_{\infty}} \vec{S} d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\sum \varepsilon_k + \int_{V_{\infty}} w dV \right) = 0}$$

з-н сохр. энергии в замкн сист.

$$w_E = \frac{E^2}{8\pi};$$

$$w_H = \frac{H^2}{8\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = - \oint_S \vec{S} d\vec{S}$$

Закон сохр. импульса.

Замкн. система зарядов и ЭМ поля.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}, \quad \rho(t, \vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)).$$

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p} = \sum_a \left\{ e_a \vec{E}(t, \vec{r}) / \vec{r} = \vec{r}_a(t) + \frac{e_a}{c} \vec{v}(t) \times \vec{H}(t, \vec{r}) / \vec{r} = \vec{r}_a(t) \right\}$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \sum_a e_a \vec{v}_a(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) = \rho(t, \vec{r}) \vec{v}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p} = \int \left\{ \rho(t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) + \frac{1}{c} \vec{j}(t, \vec{r}) \times \vec{H}(t, \vec{r}) \right\} dV = 0$$

изменение в единицу времени импульса элр.



$$\rho(x) = e_0 \delta(x - x_0) \quad e_0 = \int \rho dx$$

$$\rho(x) =$$

$$\rho(x, y, z) = e_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) = e_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1$$

гелмгольца

ее свойства ...

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

интеграл Фурье

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\rho(t, \vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) = \sum_a e_a$$

$$\text{где } \rho(t, \vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t))$$

$$\frac{d}{dt} \sum e_a = \sum e_a \vec{v}_a(t) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) / \vec{r} - \vec{r}_a(t) = \int \rho(t, \vec{r}) \vec{v}(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) dV =$$

$$= \int \vec{j}(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) dV$$

$$\frac{d}{dt} \sum e_a - \int \vec{j}(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) dV = 0$$

$$- \int \vec{j}(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) dV$$

изменение энергии ЭМ поля в пр. времени во всем V

изменение плотности энергии ЭМ поля

$$- \int \vec{j}(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) dV$$

заменим ρ и $\vec{j}$ — полевыми значениями.

$$\rho \vec{E} = \left\{ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \right\} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$+ \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{4\pi c} - \frac{1}{4\pi} \int_V dV \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} - \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H} \right\} = 0$$

добавлено для симм.

$$\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} = \vec{E} (\nabla \vec{E}) = (\nabla \vec{E}) \vec{E} = (\nabla \vec{E}) \vec{E} - (\vec{E} \nabla) \vec{E}$$

$$\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} = (\nabla \vec{E}) \vec{E} - \{ (\vec{E} \nabla) \vec{E} + \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} \} = (\nabla \vec{E}) \vec{E} - \nabla \frac{E^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{4\pi c} = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV \left\{ -(\nabla \vec{E}) \vec{E} - (\nabla \vec{H}) \vec{H} + \nabla \frac{E^2 + H^2}{2} \right\}$$

$$\frac{d}{dt} \sum p_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \frac{(\vec{E} \times \vec{H})_\alpha}{4\pi c} = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ -E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \delta_{\alpha\beta} \frac{E^2 + H^2}{2} \right\}$$

$$= - \oint_S T_{\alpha\beta} dS_\beta$$

маленькая

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{E^2 + H^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right\}$$

ТЕНЗОР
напряжений
МАКСВЕЛЛА.

$$\vec{p}^{(p)} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

Большая, вектор Пойнтинга
— импульс эмп.

описывает
силы

$$\frac{d}{dt} \sum p_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \int_V p_\alpha^{(p)} dV = - \oint_S T_{\alpha\beta} n_\beta ds$$

$$S \rightarrow S_\infty$$

$$V \rightarrow V_\infty \quad \frac{d}{dt} \left(\sum p_\alpha + \int p_\alpha^{(p)} dV \right) = 0$$

$$\vec{p}_\alpha = 0$$

изм. мом. или эти п. это
— сила

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_\alpha^{(p)} dV = - \oint_S T_{\alpha\beta} n_\beta ds$$

$$f_\alpha = T_{\alpha\beta} n_\beta$$

сила трения $f_{mp} = T_{\alpha\beta} f_\alpha n_\beta$

$$\text{давление, света} \quad d = n_\alpha f_\alpha = T_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$$

$$T_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = W \quad \text{— плотность энергии.}$$

Система уравнений Максвелла

В 4-мерном виде

От одинаковы во всех СО.

1-я пара уравнений Максвелла.

$$\boxed{e^{ik\alpha m} \frac{\partial F_{\alpha m}}{\partial x^k} = 0} \quad \begin{matrix} \text{запись} \\ \text{1-го} \\ \text{пары} \end{matrix} \quad F_{\beta\delta} = F^{\beta\delta} = -e^{\beta\gamma\eta\mu} H^{\mu}$$

$$i=0: e^{0\alpha\beta\gamma} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \cancel{e^{0\alpha\beta\gamma}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{e^{\alpha\beta\gamma\eta} e^{\eta\mu} H^\mu}{2\delta^{\eta\mu}} = -2 \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^\alpha} = -2 \operatorname{div} \vec{H}$$

$$\begin{aligned} i=d: e^{\alpha\beta\gamma\eta} \frac{\partial F_{\alpha\eta}}{\partial x^\alpha} + e^{\alpha\beta\eta\mu} \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} &= e^{\alpha\beta\gamma\eta} \frac{\partial F_{\alpha\eta}}{\partial x^\alpha} + e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} + \\ &+ e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} = -e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} + 2e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} = \\ &= -e^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(-e^{\beta\delta\eta\mu} \frac{\partial H^\mu}{\partial x^\alpha} \right) = -e^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(-e^{\beta\delta\eta\mu} \frac{\partial H^\mu}{\partial x^\alpha} \right) + 2e^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial E^\delta}{\partial x^\beta} = \end{aligned}$$

$$= 2 \frac{\partial H}{\partial t} + 2(\nabla \times \vec{E})^\alpha = 0$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}}$$

$$\begin{aligned} e^{ik\alpha m} \frac{\partial F_{\alpha m}}{\partial x^k} &= \frac{1}{3} e^{ik\alpha m k} \frac{\partial F_{mk}}{\partial x^l} + \frac{1}{3} e^{ik\alpha l} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^m} + \frac{1}{3} e^{ik\alpha m} \frac{\partial F_{em}}{\partial x^k} \\ &= \frac{1}{3} e^{ik\alpha m} \left(\frac{\partial F_{em}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ml}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^m} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial F_{em}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ml}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^m} = 0}$$

$$l \neq m \neq k$$

2-я пара уравнений Максвелла.

метод вариации:

$$S = S_m + S_{mf} + S_f; \quad S_m = \int -mc \, dS, \quad S_{mf} = \int -\frac{e}{c} A_i dx^i$$

$$S_{mf} = -\frac{1}{c} \int dV \rho A_i dx^i = -\frac{1}{c} \int A_i \left(\rho \frac{dx^i}{dt} \right) dV dt$$

но кризи тензорная форма это 4-мерный вектор.

дома показать, что это инвариант.

$$\rho = \sum_a e_a \delta^3(\vec{r})$$

$$\rho \frac{dx_i}{dt} = j^i$$

$$j^0 = \rho \frac{dx^0}{dt} = c\rho$$

$$j^x = \rho \frac{dx^x}{dt} = \rho v^x$$

$$j^i(c\rho, \vec{j})$$

$$j_0 = \frac{j_0' + \frac{v}{c} j_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4-мерный вектор плотности тока.

$$\rho = \frac{\rho' + \frac{v}{c^2} j_x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad j_x = \frac{j_x' + v\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$j_y = j_y'$$

$$j_z = j_z'$$

$$S_{mf} = -\frac{1}{c} \int A_i \vec{j} dV dt = -\frac{1}{c^2} \int A_i \cdot j^i d\Omega$$

$$d\Omega = dV dx^0 = dx^1 dx^2 dx^3 dx^0$$

ур-я Максвелла линейны по полю, а при варьировании степени повышается $\Rightarrow$ под интегралом должны быть квадратичными, причем 4-мерные скаляры.

таких гвд: $S_1 = F_{ik} F^{ik}$

$$S_2 = e^{iklm} F_{ik} F_{lm}$$

(2) можно записать в виде 4-мерной гравитации

а она оказывается при варьировании гравитации

$$e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = e^{iklm} F_{ik} \left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \right) = e^{iklm} F_{ik} \frac{\partial A_m}{\partial x^l} - e^{iklm} F_{ik} \frac{\partial A_l}{\partial x^m}$$

$$= 2 e^{iklm} F_{ik} \frac{\partial A_m}{\partial x^l} = 2 e^{iklm} \frac{\partial A_m}{\partial x^l} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) =$$

$$e^{iklm} \frac{\partial A_m}{\partial x^l}$$

$$= 4 e^{iklm} \frac{\partial A_m}{\partial x^l} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(4 e^{iklm} \frac{\partial A_m}{\partial x^l} A_k \right)$$

$$- 4 e^{iklm} A_k \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^l \partial x^i}$$

4-мерн гвд.

т.к симм по индексам



$$S_1 = a \int F_{ik} F^{ik} dV dt$$

$$F_{ik} F^{ik} = 2(H^2 - E^2) \sim - \left(\frac{dA}{dt} \right)^2$$

$$a = - \frac{1}{16\pi}$$

а - должен быть отриц.

т.к только тогда будет минимум

$$\Rightarrow \delta S = -\frac{1}{4\pi c} \int d\Omega \left\{ \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{4\pi}{c} j^i \right\} \delta A_i = 0$$

за потребуем, что выражение в скобках — ноль.

$$\boxed{\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i} \quad *$$

это выражение при переходе в 3-мерный вид
нам даст вторую пару ур-н Максвелла:

$$i=0: \frac{\partial F^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j^0$$

$$F^{0\alpha} = -E^\alpha; \quad j^0 = c\rho$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho} \quad 2^{\text{е}} - \text{II}$$

$$i=\alpha: \frac{\partial F^{\alpha k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

$$\frac{\partial F^{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E^\alpha + \frac{\partial}{\partial x^\beta} (-e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma) = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E^\alpha}{\partial t} - (\nabla \times \vec{H})^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}} \quad 1^{\text{е}} - \text{II}$$

$\Rightarrow$ Уравнения Максвелла имеют одинаковый вид во всех ИСО.

возьмем дивергенцию левой и правой части $\uparrow *$

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}}_S \underbrace{F^{ik}}_A = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^i}{\partial x^i}$$

симм x антисимм = 0

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0}$$

$$\dot{S}_f = -\frac{1}{16\pi} \int_2 (H^2 - E^2) dv dt = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dv dt = \underline{26.11.09.}$$

$$= \int L_f dt$$

$$L_f = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV$$

$\frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2)$ — плотность f -ш Лагранжа для ЭМП.

$$S_{mf} = -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega$$

$$\dot{S}_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega$$

необходимо проварьировать действие, движение частиц будет считать заданным



варьирование будет производиться между двумя моментами времени

$$\delta S = -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int \delta (F_{ik} F^{ik}) d\Omega$$

δA_i — вариация произвольна, поэтому при положении

δS равным нулю получим соотношение

$$\delta (F_{ik} F^{ik}) = F_{ik} \delta F^{ik} + F^{ik} \delta F_{ik} = 2 F^{ik} \delta F_{ik} = 2 F^{ik} \delta \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right)$$

перепишем $k \leftrightarrow i$

$$= -4 F^{ik} \delta \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \text{поменяем местами} = -4 F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i =$$

$$= -4 \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) + 4 \delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}$$

получим

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi c} \int d\Omega \left\{ \frac{4\pi}{c} j^i \delta A_i + \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i - \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) \right\} \equiv$$

под интегралом стоит 4^x мерная дивергенция, значит 0. Check

$$\int \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) dv dt = \int \frac{\partial}{\partial t} (F^{i0} \delta A_i) dv dt + \int \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (F^{i\alpha} \delta A_i) dv dt$$

$$= \frac{1}{c} \int dv (F^{i0} \delta A_i) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int dt \oint_{S_{\infty}} F^{i\alpha} \delta A_i dS_\alpha$$

= 0 т.к $\delta A_i|_{t_1}^{t_2} = 0$
Вариация на краях обращается в ноль

0, т.к на бесконечности поле ноль

трехмерная дивергенция

трехмерной бесконечной

Электростатика.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$$

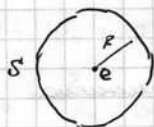
$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho$$

$$\text{при } \rho=0 : \Delta \varphi = 0$$

потенциал не имеет экстремумов
(для этого нужно чтобы перв производ = 0, а второе
илим один знак - не выполняется)

Рассмотрим поле создаваемое одиночным точечным зарядом.



$\varphi = \varphi(R)$ зависит лишь от расст.

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{e}_R \frac{d\varphi}{dR} = \vec{e}_R E(R)$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV$$

единичный вектор $\frac{\vec{R}}{R}$

элемент поверхности

$$d\vec{S} = \vec{e}_R R^2 d\Omega$$

$$dV = dS dR$$

рельефа φ -ия
 $\rho = e \delta(\vec{R})$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV$$

$$\oint_S E(R) \underbrace{\vec{e}_R \cdot \vec{e}_R}_1 R^2 d\Omega = 4\pi e$$

$$E(R) R^2 \cdot 4\pi = 4\pi e$$

$$E(R) = \frac{e}{R^2}$$

$$\vec{E} = \frac{e \vec{R}}{R^3}$$

$$\varphi = \frac{e}{R}$$

система зарядов — выполняется принцип суперпозиции.

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV$$

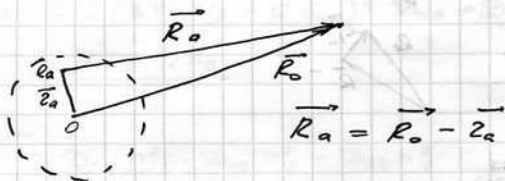
$$\text{при этом, } \rho = \sum_a e_a \delta(\vec{R} - \vec{R}_a)$$

$$\varphi = \frac{e}{R}, \quad \rho = e \delta(\vec{R})$$

Важная формула:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\vec{R})$$

$R \gg a$



$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$

$$f(\vec{R}_0 - \vec{r}) = f(R_0) - (\vec{r} \cdot \nabla) f(R_0) + \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots$$

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|}$$

$$\varphi = \sum e \left\{ \frac{1}{R_0} - (\vec{r} \cdot \nabla) \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R_0} + \dots \right\}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

$$\varphi_0 = \frac{\sum e}{R_0} \text{ — полный заряд}$$

$$\sum e \vec{r} = \vec{d} \quad \left. \begin{array}{l} \text{дипольный момент} \\ \vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0} \end{array} \right\}$$

$$\varphi_1 = - \sum e \left(\vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{R_0} \right) = - \vec{d} \cdot \nabla \frac{1}{R_0} = \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{d}}{R_0^3} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}}{R_0^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{1}{6} \sum e (3 x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R_0}$$

нулевая добавка

Квадратный момент системы зарядов.

$$\Delta_{\alpha\beta} = \sum e (3 x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

независимых компонент

$$\Delta_{\alpha\alpha} = 0$$

не 6, а 5

Рассмотрим подробнее φ_1 , он же —

дипольный потенциал.

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$

$$\vec{d} = \sum e \vec{r}$$



перенос начала системы координат

$$\vec{d} = \sum e \vec{r}' + \vec{d} \sum e = \vec{d}' + \vec{d} \sum e$$

$$1) \sum e \neq 0 \quad \vec{d} = \frac{\vec{d}}{\sum e} \rightarrow \vec{d}' = 0$$

$$2) \sum e = 0 \quad \vec{d} = \vec{d}'$$

$$\vec{d} = \sum e^+ \vec{r}^+ - \sum e^- \vec{r}^- = \vec{R}^+ \sum e^+ - \vec{R}^- \sum e^-$$

$$\vec{R}^+ = \frac{\sum e^+ \vec{r}^+}{\sum e^+}$$

$$\vec{R}^- = \frac{\sum e^- \vec{r}^-}{\sum e^-}$$

радиус — вектор центра полн. зарядов

Учим энергию поля системы неподвиж. зарядов

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \operatorname{grad} \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \{ \operatorname{div}(\vec{E} \varphi) - \varphi \operatorname{div} \vec{E} \} dV =$$
$$= -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} \vec{E} \varphi d\vec{s} + \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$$

$\downarrow$
на ∞ поля нет

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a$$

Возьмем для точечного заряда

$$U_1 = \frac{1}{2} e \varphi = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R} \Big|_{R=0} = \infty \Rightarrow \text{бред}$$

следовательно классик электродинамика не применима на малых расстояниях

из-за того, что считаем раз. частицу точечной

а посчитаем неточечный, учтем это
— классический радиус заряда
 R_0 — размер гает; $\frac{e^2}{R_0} = mc^2$

$$R_0 = \frac{e^2}{mc^2}$$

$$R_e = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см} - \text{границы применимости}$$

но, есть комптоновская длина волны.

$$\frac{\lambda}{R_0} = \frac{h}{mc} \frac{mc^2}{e^2} = \frac{hc}{e^2} = \frac{1}{137}$$

т.е. нужно аккуратно пользоваться

$$\varphi_a = \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}}$$

энергия взаимодействия

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

для двух зарядов —

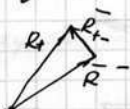
$$U' = \frac{1}{2} \frac{e_1 e_2}{R_{12}} + \frac{1}{2} \frac{e_2 e_1}{R_{21}} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}$$

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$

$$\Sigma e^+ = \Sigma e^- \equiv q : \vec{d} = q (\vec{R}^+ - \vec{R}^-) = q \vec{R}_+$$

$$+e \leftarrow \vec{e} = -e$$

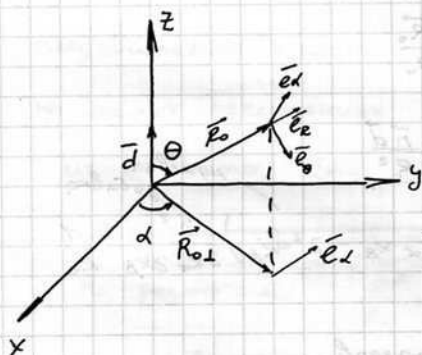
$$\vec{d} = e \vec{e}$$



Напряженность поля $\vec{E} = - \text{grad} \varphi = - \nabla \left(\frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{d}}{R_0^3} \right)$ гипотеза $\vec{d}$ — е по концы точки наблюдения

$$= - \frac{1}{R_0^3} \nabla (\vec{R}_0 \cdot \vec{d}) - (\vec{R}_0 \cdot \vec{d}) \nabla \frac{1}{R_0^3} = - \frac{\vec{d}}{R_0^3} - (\vec{R}_0 \cdot \vec{d}) \left(- \frac{3}{R_0^4} \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right) =$$

$$\vec{E} = \frac{3 (\vec{d} \cdot \vec{R}_0) \vec{R}_0 - R_0^2 \vec{d}}{R_0^5} = \frac{3 (\vec{n} \cdot \vec{d}) \vec{n} - \vec{d}}{R_0^3}$$



$$\vec{E} = \vec{e}_R \vec{E}_R + \vec{e}_\theta \vec{E}_\theta + \vec{e}_\phi \vec{E}_\phi$$

$$\vec{E} = \frac{3 (\vec{e}_R \cdot \vec{d}) \vec{e}_R - \vec{d}}{R_0^3}$$

$$\vec{E}_\phi = \vec{E} \cdot \vec{e}_\phi = 0$$

$$\vec{E}_R = \vec{E} \cdot \vec{e}_R = \frac{3 \cos \theta - \cos \theta}{R_0^3} d =$$

$$= \frac{2 \cos \theta}{R_0^3} d$$

$$\vec{E}_\theta = \vec{E} \cdot \vec{e}_\theta = - \frac{d \sin \theta}{R_0^3} = \frac{\sin \theta}{R_0^3} d$$

Итак гипотеза аксиального симметричного (не забываем om yua d)

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \Delta x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R_0}$$

Проверить гипотезу, что $\Delta x_\beta = \Delta'_\beta$ если $\Sigma e = 0; \vec{d} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{1}{R_0} = - \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} R_0 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta} R_0 = \frac{x_\beta}{R_0} \right\} = - \frac{x_\beta}{R_0^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R_0} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{x_\beta}{R_0^3} = - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3} + \frac{3 x_\alpha x_\beta}{R_0^5}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta x_\beta x_\alpha x_\beta}{R_0^5} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x_\beta \eta_\alpha \eta_\beta}{R_0^5}$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}); \quad D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}; \quad D_{\alpha\alpha} = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}$$

$$\varphi_2 = \frac{D_{xx} n_x^2 + D_{yy} n_y^2 + D_{zz} n_z^2}{2R_0^3}$$

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

если тензор обладает симметрией выше 2^{го} порядка, то для него существуют одна незав. величина

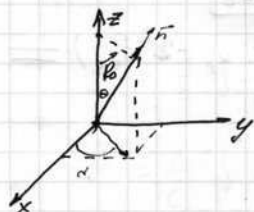


$$\frac{2\pi}{n}$$

$$n = 1, 2, 3$$

n - величина порядка симметрии

if $n \geq 2$ ($n \geq 3$), тогда можно выбрать систему координат, где все векторы $\perp$ к оси симметрии



$$\varphi_2 = \frac{1}{2R_0^3} \left[n_z^2 - \frac{1}{2} (n_x^2 + n_y^2) \right] =$$

$$= \frac{1}{4R_0^3} [2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta] =$$

$$= \frac{1}{4R_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{2R_0^2} P_2(\cos \theta)$$

Полинорм Лежандра.

тензор квадрупольного момента равен 0, если симметричное расположение системы зарядов

$$D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dV =$$

Вспомогательная сфера. сфера $\rho = \rho(r)$

$$= \int d\Omega \rho r^4 \int d\Omega [3 \overline{n_\alpha n_\beta} - \delta_{\alpha\beta}] = 4\pi \int dr \rho(r) r^4 \int d\Omega [3 \overline{n_\alpha n_\beta} - \delta_{\alpha\beta}]$$

$$= 4\pi \int dr \rho(r) r^4 (3 \overline{n_\alpha n_\beta} - \delta_{\alpha\beta}) = 0$$

$\overline{n_\alpha n_\beta}$ = интеграл симметричный тензор по Ω от углов

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = a \delta_{\alpha\beta}$$

полагая $\alpha = \beta$

и симметризуем

$$\overline{n^2} = 1$$

$$1 = a \cdot 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}$$

Рассмотрим с-ну зарядов в внешнем

электростат поле

Расси потенц. энергию системы зарядов в

большом внешнем поле

$$U = \sum_a e_a \varphi(\vec{r}_a) - \text{пот. эн.}$$

пусть φ слабо меняется на расст. от системы зарядов

$$U = \sum_a e_a \varphi(\vec{r}_a) = \sum e \{ \varphi(0) + \vec{r} \cdot (\nabla \varphi)_{\vec{r}=0} + \frac{1}{6} x_\alpha x_\beta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_{\vec{r}=0} + \dots \}$$

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim x \frac{\varphi}{a} \ll \varphi$$

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

$$U^{(0)} = U_0 \sum e$$

$$U^{(1)} (\nabla \varphi)_0 \cdot \vec{r} = - \vec{r} \cdot \vec{E}_0$$

потенц. энергия диполя во в. поле

$$U^{(1)} = - \vec{r} \cdot \vec{E}_0$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0 \sum e x_\alpha x_\beta = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0 \frac{1}{3} \sum e (3 x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) =$$

палладин $\Delta \varphi_0$ - в пределах зарядной системы зарядов.

$$= \frac{1}{6} \Delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0$$

$$\vec{F} = \sum e_a \vec{E}(\vec{r}_a) = \sum e_a (\vec{E}_0 + (\vec{r}_a \cdot \nabla) \vec{E} + \dots)$$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} + \dots \quad \vec{F}^{(2)} = (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{E}_0$$

$$1) e_1, e_2: U = e_1 \varphi_2 = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}$$

$$2) e_1, \vec{d}_2: a) U = e_1 \varphi_2 = e_1 \frac{\vec{d}_2 \cdot \vec{r}_1}{R^3}$$

$$b) U = - \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{R^3}$$

$$3) \vec{d}_1, \vec{d}_2: U = - \vec{d}_1 \cdot \vec{E}_2 = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 - 3 (\vec{d}_1 \cdot \vec{r})(\vec{r} \cdot \vec{d}_2)}{R^3}$$

$L_E = \vec{E} \cdot \vec{d}$ ϕ -из Лагранжа, опис. вл. поле на диполь

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt = \frac{\vec{E}(1) - \vec{E}(0)}{T} \text{ при } T \rightarrow \infty \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}; \text{div } \vec{A} = 0$$

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\Delta \psi = -4\pi \rho$$

$$\psi = \int \frac{\rho}{r} dV$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV$$

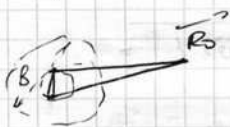
$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sum_a \frac{e_a \vec{v}_a}{R_a}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV \right) = \frac{1}{c} \int \nabla \frac{1}{c} \times \vec{j} dV = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{R^3} dV$$

На следующем этапе:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}), \quad D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}; \quad D_{\alpha\alpha} = 0$$



$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sum_a \frac{e_a \vec{v}_a}{R_a} = \frac{1}{c} \sum \frac{e \vec{v}}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} =$$

$$= \frac{1}{c} \sum e \vec{v} \left(\frac{1}{R_0} - \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \dots \right) =$$

$$= \frac{e e \vec{v}}{c R_0} + \frac{1}{c R_0^3} \sum e \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{R})$$

$$|\vec{R}_0| \rightarrow \infty$$

$$\frac{\sum e \vec{v}}{c R} = \frac{d}{dt} \frac{\sum e \vec{r}}{c R_0} = 0$$

$$\vec{U}(\vec{r}\vec{R}_0) = \frac{1}{2}\vec{U}(\vec{r}\vec{R}_0) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{r}(\vec{r}\vec{R}_0) - \frac{1}{2}\vec{r}(\vec{r}\vec{R}_0) =$$

$$= (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{R}_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{r}(\vec{r}\vec{R}_0)$$

$$\vec{U}(\vec{r}\vec{R}_0) = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{R}_0$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e \vec{r} \times \vec{v} \quad \text{— магнитный момент}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2c R_0^3} \sum e (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{R}_0 = \frac{\vec{m} \times \vec{R}_0}{R_0^3}$$

$$U_d = \frac{d\vec{R}_0}{R_0^3}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \frac{\vec{m} \times \vec{R}_0}{R_0^3} = -(\vec{m} \times \vec{R}_0) \times \nabla \frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3} \nabla \times (\vec{m} \times \vec{R}_0) =$$

$$= -\frac{3\vec{R}_0}{R_0^3} \times (\vec{m} \times \vec{R}_0) + \frac{1}{R_0^3} \{ \vec{m} (\nabla \cdot \vec{R}_0) - (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{R}_0 \} =$$

$$= -\frac{3}{R_0^5} \{ \vec{m} R_0^2 - \vec{R}_0 (\vec{m} \cdot \vec{R}_0) \} + \frac{3\vec{m} - \vec{m}}{R_0^3} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R}_0) \vec{R}_0 - R_0^2 \vec{m}}{R_0^5}$$

$$= \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R}_0) \vec{R}_0 - R_0^2 \vec{m}}{R_0^5} = \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{m}) \vec{n} - \vec{m}}{R_0^3}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{R}_0}{R}$$

система зарядов во внешнем магн. поле.

сила д'Альва и системы зарядов

$$F = \sum \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} = \frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} = 0$$

момент силы:

$$\vec{K}_H = \sum \frac{e}{c} \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{H}) = \frac{1}{c} \sum e \{ \vec{v} (\vec{r} \cdot \vec{H}) - \vec{H} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sum e (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{H} = \vec{m} \times \vec{H}$$

$$\vec{K}_e = \sum e \vec{r} \times \vec{E}_0 = \vec{d} \times \vec{E}_0$$

$$A = \frac{e}{2} \vec{H} \times \vec{r}$$

$$L_H = \sum \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} = \sum \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \frac{1}{2} (\vec{H} \times \vec{r}) = \frac{1}{2c} \sum e (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{H} = \vec{m} \cdot \vec{H}$$

Теорема Лармора

Рассм. перем. систему зарядов с осн. отн. $\frac{v}{c}$ для всех зр. абс. движущую в инерт. системе отсчета во внешн. слаб. постоянном и однородном эл. п.

тогда

и имеем центр. сил. поле

$$L = \sum_{\text{в л.б. сист. отсчета}} \frac{m v^2}{2} + \sum \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - U'$$

перейдем в вращ. сист. координат

$$\frac{e}{m} \vec{\Omega} : \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$$L = \sum \frac{m v^2}{2} + \sum \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - U = \frac{1}{2} \sum m (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + \sum \frac{e}{c} (\vec{H} \times \vec{r}) \vec{v} - U' = \sum \frac{m v'^2}{2} + \sum m (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \vec{v}' + \sum \frac{e}{c} (\vec{H} \times \vec{r}) \vec{v}' =$$

подст. вместо $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r}$

$$= \sum \frac{m v'^2}{2} + \sum m \left[(\vec{\Omega} + \frac{e}{2mc} \vec{H}) \times \vec{r} \right] \vec{v} - U'$$

$$\boxed{\vec{\Omega} = -\frac{e}{2mc} \vec{H}}$$

эта связь одинакова для всех зарядов

Ларморова частота

Утверждено перем. сист. зарядов с осн. отн. $\frac{v}{c}$ в слаб. поле однород. магн. поле и эквивалентно той же сист. зарядов в отсутстви магнитного поля — гравитационном эл. п.

$$\frac{e}{m} = \dots \quad \text{всес.}$$

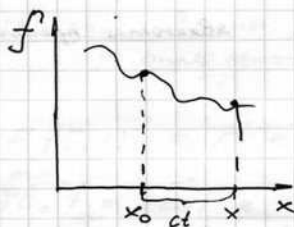
$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{1}{2c} \sum \frac{e}{m} \cdot m (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{e}{2mc} \sum \vec{r} \times \vec{p} = \frac{e}{2mc} \vec{H}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} = 0$$

$$f(x, z) = f_1(x) + f_2(z)$$

$$f(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$



$$t=0: f_1 = f_1\left(-\frac{x_0}{c}\right)$$

$$t: f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) = f_1\left(t - \frac{x - x_0 + x_0}{c}\right) = f_1\left(t - \frac{x - x_0}{c} - \frac{x_0}{c}\right)$$

$$x = x_0 + ct$$

Волна бегущая вдоль оси x со ск c

f_2 - в обратном направлении.

$$0 = \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{из волн ур } \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const} \text{ а этого не может быть}$$

из этого следует что продольную волн нужно положить 0

$$A_x = 0 \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}\left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{1}{c} \vec{A}'$$

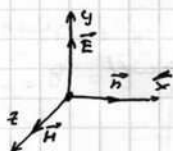
$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \vec{A}\left(t - \frac{x}{c}\right) =$$

$$= \vec{e}_x \times \frac{\partial \vec{A}\left(t - \frac{x}{c}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \vec{e}_x \times \vec{A}' = \vec{e}_x \times \vec{E}$$

ер вект в напр распр. волны

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}$$

$$\Downarrow \\ H = E$$



триа взаимноперп. векторов.

$\Rightarrow$ поперечная волна
 $\vec{n}$ - напр распространения

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}$$

03.12.09. Электромагнитные волны.

$$\rho=0 \quad \vec{j}=0$$

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

Для эл. поля

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho$$

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dv$$

$$\rho=0 \Rightarrow \varphi=0 \quad \text{поле нем}$$

Для магн. поля

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV$$

$$\vec{j}=0 \Rightarrow \vec{A}=0$$

магн поле тоже нем.

и наоборот $\vec{A}$: $\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = -4\pi\rho \Rightarrow \varphi=0$

В том пространстве где отсутствуют заряды и токи:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \end{cases}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right); \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

уравнение Аппамбера

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} : \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Плоская элмв волна - все величины зависят от одной коорд и времени

$$f(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$$

$$\xi = t - \frac{x}{c} \quad \eta = t + \frac{x}{c}$$

$$t = \frac{1}{2} (\eta + \xi) \quad x = \frac{c}{2} (\eta - \xi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) f$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (n \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = c n \vec{P}$$

групповая скорость - скорость переноса энергии

$$\vec{P}_{gr} = \frac{\vec{S}}{c} = \frac{w}{c} \vec{n} \quad w = c n$$

Плоская монохроматическая волна

Монохром. волна, если все ее ^{описывающ} волновые величины являются простыми

периодическими функциями времени

$$f \sim \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\Delta f(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} f(\vec{r}) = 0 \quad - \text{уравн. распро. поля в пространстве}$$

А плоская монохром. волна

$$f \sim \cos[\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha]$$

$$\vec{A}(t, x) = \text{Re} \vec{A}_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

$$1) x=0, t: A \sim e^{-i\omega t}$$

$$x=0, t+\tau: A \sim e^{-i\omega(t+\tau)}$$

совпадает, если $\omega\tau = 2\pi n, n=1, 2, \dots$

$$n=1: \omega T = 2\pi; \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad \text{Период волны.}$$

$$2) x; t=0: A \sim e^{i\frac{\omega}{c}x}$$

$$x+l; t=0: A \sim e^{i\frac{\omega}{c}(x+l)}$$

$$\frac{\omega}{c} l = 2\pi n, \quad n=1, 2, \dots$$

$$n=1: \frac{\omega}{c} \lambda = 2\pi$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \text{Re} \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$-k^2 \vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} \neq 0 \quad \text{или} \quad \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Дисперсионное уравнение

$$\vec{A} = A_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\kappa \vec{A}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}$$

$$\text{div } \vec{E} = i\vec{k} \text{div } \vec{A} = i\kappa \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{H} = i\vec{k} \vec{H} = 0$$

Поляризация волны. (плоской — описывает плоскость

монохромической) в которой летит вектор $\vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re } \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$|\vec{E}_0|^2 = |\vec{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$$

$$\vec{E} = \vec{B}_1 + i\vec{B}_2$$

$$\vec{E}_0^2 = B_1^2 - B_2^2 + 2iB_1B_2 = |\vec{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$$

$$E_0^2 = \vec{B}^2 e^{-2i\alpha} = |\vec{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$$

$$\vec{B}^2 = |\vec{E}_0|^2$$

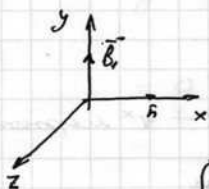
$$\vec{B} = B_1 + iB_2$$

$$\vec{B}_1 \perp \vec{B}_2$$

$$\vec{B}^2 = B_1^2 - B_2^2 + 2iB_1B_2$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ (\vec{B}_1 + i\vec{B}_2) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha)} \}$$

$$\vec{B}_1 \perp \vec{B}_2$$



$$E_y = +B_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$$

$$E_z = \pm B_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$$

$$\frac{E_y^2}{B_1^2} + \frac{E_z^2}{B_2^2} = 1$$

$$\vec{r} = 0; \alpha = 0$$

+ → правовинтовая поляризация

=> эллипт. поляризация.

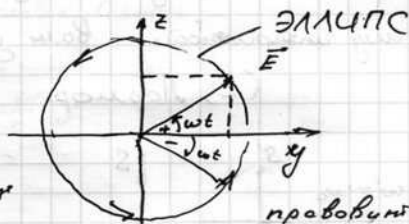
теперь пусть $B_1 = B_2 = B$

$$\frac{E_y^2}{B^2} + \frac{E_z^2}{B^2} = 1$$

— круговая поляризация

волна попер по кругу

если $B_1 = 0$ или $B_2 = 0$ → линейная поляризация



правовинт. эллипт. поляризация.

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

$$1) \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{v}{c} \ll 1: \omega \approx \omega_0 (1 + \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$1a) 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}: \omega > \omega_0$$

$$1b) \frac{\pi}{2} < \theta < \pi: \omega < \omega_0$$

$$2) \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{\theta} \frac{v^2}{c^2}\right) \text{ Лармор (2) . Пров по гв звёзд}$$

Электромагнитное поле движущихся зарядов.

$$\text{наполняем: } \begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho \end{cases}$$

т.е. то, что оно в 4х мерном мире.

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

$$g^{im} g^{kn} \frac{\partial F_{mn}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

$$g^{im} g^{kn} \frac{\partial F_{mn}}{\partial x^k} = g^{im} g^{kn} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_n}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^n} \right) =$$

$$= g^{im} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial A^k}{\partial x^m} - g^{kn} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial A^i}{\partial x^n} = -g^{kn} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^n} A^i$$

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \text{ — условие Лоренца}$$

$$- \left(g^{mn} \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} \right) A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

□

Частное решение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \text{de}(t) \delta(\vec{R}) \text{de}(t) \delta(\vec{R})$$

$$\text{где } \vec{R} \text{ — вектор: } 1) \vec{R} \neq 0 \rightarrow 0$$

$$2) \vec{R} \rightarrow 0$$

нужно решить + учесть поправки

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \varphi(\vec{R}, t)$$



Эффект Доплера

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$k^i (k^0, \vec{k}) \quad k^0 = \frac{\omega}{c}; \quad \vec{k}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i k_i x^i} = E_0 e^{-i (\frac{\omega}{c} x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} = E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0$$

Д'Аламбертиан.

$$-g^{mn} \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} A^i = 0$$

$$\left[-g^{00} \frac{\partial^2}{\partial x^0^2} + g^{\alpha\alpha} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2} \right] A^i = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{i^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{j^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{k^2}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] A^i = 0$$

$$\square A_i = 0$$

$$-g^{mn} \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} A^i = 0$$

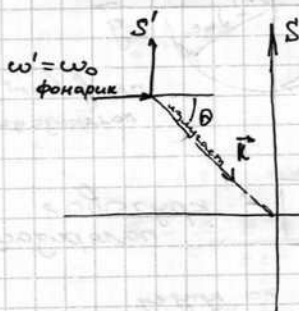
$$A^i = A_0^i e^{-i k_i x^i}$$

$$-g^{mn} \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} A^i = 0 \Rightarrow A^i = A_0^i e^{-i k_i x^i}$$

$$\boxed{k_i x^i = k'_i x'^i} \text{ инвариант.}$$

по предположению тензор. величин k_i — 4-х мерный вектор
в силу инвариантности волн ур-я и ее решения.

(с) Лармор



$$k^i (k^0, \vec{k})$$

частота излучения в разных ИСО разная!

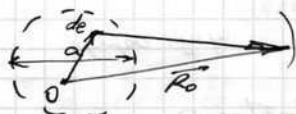
$\omega' = \omega_0$ — там где покоится

$$k^{i0} = k^0 - \frac{v}{c} k^1$$

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \frac{\omega}{c} \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \int \frac{P_t - \frac{e}{c}}{R} dV + \varphi_0 \\ \vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_t - \frac{e}{c} \vec{n}}{R} dV + \vec{A}_0 \end{array} \right. \quad \text{л.н.т.}$$

Улучшение зарядов на больших расст от размеров системы



$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{z} \rightarrow |\vec{R} - \vec{z}| = \sqrt{R_0^2 - 2\vec{z}\vec{R}_0} = R_0 \sqrt{1 - 2\frac{\vec{z}\vec{R}_0}{R_0^2}}$$

$$\textcircled{1} R_0 \gg z$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c R_0} \int \left(\vec{j}_t - \frac{e}{c} \vec{n} \right) dV = R_0 \sqrt{1 - 2\frac{\vec{z}\vec{R}_0}{R_0^2}} = R_0 - \vec{n}\vec{r}$$

$$\varphi = \frac{1}{R} \int P_t - \frac{e}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}}{c} dV \approx R_0 - \vec{n}\vec{r}$$

На каком расстоянии можно считать сферическую волну плоской

$$R: \frac{x(t - \frac{R}{c})}{R}$$

$$\lambda = cT$$

$$R + \lambda: \frac{x(t - \frac{R + \lambda}{c})}{R + \lambda} = \frac{x(t - \frac{R}{c})}{R + \lambda}$$

$$[R \gg \lambda] \quad \text{т.е. амплитуда не меняется}$$

$\Rightarrow$ плоская волна

$$\textcircled{2} R_0 \gg \lambda$$

$$\vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{A} \times \vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{c} (\vec{A} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

обратно пропорц R_0

плотность потока энергии

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n}$$

дифференц энергии излучения

$$dI = \vec{S} d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = \vec{n} dS = \vec{n} R_0^2 d\Omega$$

т.е. сфер поверхн ради

судьба
05.12.

8:30
9:15
9:20
10:05
10:15
11:00
11:05
11:50

используем закон сохранения энергии

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi d\varphi(t) \delta(\vec{R})$$

$$1) R \neq 0: \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R\varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad | \cdot R$$

$$R\varphi = \chi$$

$$\frac{\partial^2 \chi(t, R)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

$$\chi(t, R) = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right)$$

выберем это

$$\chi(t, R) = \chi\left(t - \frac{R}{c}\right)$$

$$\varphi = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}$$

2) $R \rightarrow 0$

используем закон сохранения энергии

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right| \gg \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \Rightarrow \text{можно пренебречь } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\Delta \varphi = -4\pi d\varphi(t) \delta(\vec{R})$$

$$\varphi = \frac{d\varphi(t)}{R}$$

$$\varphi(t, R) = \frac{d\varphi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}$$

- формула эквивалентности

$$d\varphi = \rho dV$$

выберем нач. со.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV'$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

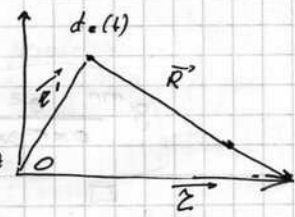
используем эквивалентность

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV' + \vec{A}_0$$

или так

Эквивалентность потенциалов - поле системы зарядов

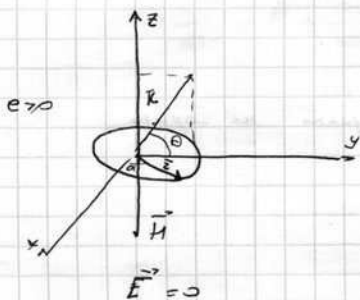
по Гауссу по закону



Излучаемое им излучение в лоб со?

$$d\vec{p} = \frac{d\vec{p}' + \frac{\vec{v}}{c^2} d\epsilon'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d\epsilon'}{dt} = \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d\epsilon}{dt} \Rightarrow \text{излучает, т.е. на большой скорости}$$



$$I = \frac{2q^2 v^2 H^2}{3m^2 c^5 (1 - \frac{v^2}{c^2})} \sim \rho^2$$

$d = \omega_H t$ — циклическая частота

$$\frac{dI/d\theta}{d\theta/d\theta=0} = \frac{4+3 \frac{v^2}{c^2}}{8(1 - \frac{v^2}{c^2})^{5/2}}$$

$$v \ll c: \theta = \frac{1}{2}$$

$$v \sim c: \theta \rightarrow \infty$$

излучение в осн сопр в плоскости фронта

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Потенциалы

Излучения

Потенциал излучения на расстоянии

создана излучением в плоскости фронта

$$L = \sum_a L_a; \quad L_a = -m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} + \frac{e_a}{c} \vec{v}_a \vec{A} - e_a \varphi$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}t - \frac{c}{R} dV}{R}; \quad \varphi = \int \frac{\rho t - \frac{R}{c} dV}{R}$$

переходим к заряду

$$v_0 \ll c$$

$$\varphi = \int \frac{1}{R} \left(\rho t - \frac{R}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{6} \frac{R^3}{c^3} \frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3} + \dots \right) dV =$$

$$= \int \frac{\rho}{R} dV - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho R dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho R^2 dV - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \rho R^3 dV$$

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 R^2 d\Omega$$

интен. изм. не зависит от расстояния
но $t - \frac{R}{c}$ есть, $R \uparrow$ задержка

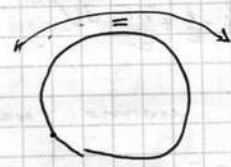
Период излучения

T — период зарядов. изменяет чуж. образ

$$\frac{\vec{p}}{c} \sim \frac{Q}{c} \ll T \Rightarrow \text{можно выбросить и все функции не мн}$$

$$a \ll cT$$

$$a \ll \lambda$$

б) $\lambda \gg a$  $\omega \ll c$
скор. зарядов
нерелятив. с-ма зарядов

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j}_e dV. \quad t' = t - \frac{R_0}{c}$$

можно перейти от интеграла к упрощ.

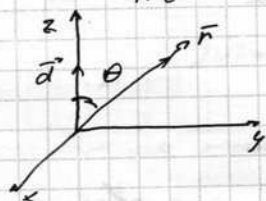
$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \sum e \vec{v}_e = \frac{1}{cR_0} \sum e \vec{e} = \frac{\vec{d}}{cR_0} \text{ дип. момент}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 R_0} \vec{d} \times \vec{n}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R_0} (\vec{d} \times \vec{n}) \times \vec{n} \quad \text{дипольное излучение}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R_0} (\vec{d} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^2} (\vec{d} \times \vec{n})^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^2} \vec{d}^2 \sin^2 \theta d\Omega$$



$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^2} \vec{d}^2 \sin^2 \theta$$

угловое распредел. изм.

Полная индукс.

$$I \approx \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{d}}^2 \quad I = \frac{2e^2 \dot{\vec{v}}^2}{3c^3} \equiv \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

Замкнутой системы зарядов не излучает

$$\dot{\vec{d}} = \sum e \dot{\vec{r}} = \frac{\sum e \dot{\vec{r}}}{\sum e} \sum e = \dot{\vec{R}} \sum e$$

для замкнутой системы $\dot{\vec{d}} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{d}} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \frac{1}{cR_0} \int \vec{j} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dV = \frac{1}{cR_0} \int dV \left\{ \vec{j}_{t'} + \frac{\vec{r}}{c} \frac{\partial \vec{j}_{t'}}{\partial t'} + \dots \right\} = \\ &= \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \int (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{j}_{t'} dV = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \sum e (\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} \\ &= \text{т.е. уже зависит от времени} \end{aligned}$$

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{1}{2} \vec{v}(\vec{r}, \vec{n}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(\vec{r}, \vec{n}) - \frac{1}{2} \vec{r}(\vec{r}, \vec{n}) -$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{n} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{r}(\vec{r}, \vec{n}) -$$

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \vec{r}(\vec{r}, \vec{n}) + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{n} -$$

$$\vec{A}' = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{6c^2 R_0} \sum e \{ 3\vec{r}^2 (\vec{n} \cdot \vec{n}) - 2\vec{r}^2 \vec{n} \} + \frac{1}{cR_0} \vec{m} \times \vec{n}$$

$$\text{Для } \eta_{\mu\nu} = \sum e (3x_\mu x_\nu - r^2 \delta_{\mu\nu}) \quad \eta_{\mu\nu} = \sum e (3x_\mu (\vec{n} \cdot \vec{r}) - r^2 \delta_{\mu\nu})$$

$$\vec{A}' = \frac{1}{cR_0} \left\{ \dot{\vec{d}} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{d}} + \vec{m} \times \vec{n} \right\} - \text{нерелятивистическая}$$

$$\vec{H}' = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ \dot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + (\vec{m} \times \vec{n}) \times \vec{n} \right\}$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \times \vec{n} + \frac{1}{6c} (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \times \vec{n} - \ddot{\vec{m}} \times \vec{n} \right\}$$

$$I = \frac{1}{4\pi c^3} \int \left\{ \left(\dot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + (\vec{m} \times \vec{n}) \times \vec{n} \right)^2 d\Omega \right\}$$

$$= \frac{1}{c^3} \cdot \overline{(\dot{\vec{d}} \times \vec{n})^2} + \frac{1}{36c^2} \overline{(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2} + \overline{(\vec{m} \times \vec{n})^2} +$$

$$+ \frac{1}{3c} \overline{(\dot{\vec{d}} \times \vec{n}) (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})} - \ddot{\vec{m}} (\dot{\vec{d}} \times \vec{n}) - \frac{1}{3c} \ddot{\vec{m}} \cdot \overline{(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{\mu\nu} = 2\alpha \\ \eta_{\mu\nu} = 0 \end{array} \right.$$

$$\eta_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$$

2. ~~misal~~

$$\begin{aligned} \overline{\ddot{\vec{m}} (\ddot{\vec{D}} \times \ddot{\vec{n}})} &= \overline{\ddot{m}_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ddot{D}_\beta \ddot{n}_\gamma} \\ &= \overline{\ddot{m}_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ddot{D}_{\beta\mu} \overbrace{\ddot{n}_\mu \ddot{n}_\gamma}^{\frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma}}} = \frac{1}{3} \overline{\ddot{m}_\alpha \underbrace{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}}_A \underbrace{\ddot{D}_{\beta\gamma}}_B} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\ddot{\vec{d}} \times \ddot{\vec{n}})^2} &= \overline{\ddot{\vec{d}}^2 - (\ddot{\vec{n}} \cdot \ddot{\vec{d}})^2} = \overline{\ddot{\vec{d}}^2} - \overline{\ddot{\vec{d}} \cdot \ddot{\vec{d}} \ddot{\vec{n}} \cdot \ddot{\vec{n}}} \\ &= \frac{2}{3} \overline{\ddot{\vec{d}}^2} \quad \frac{1}{3} \delta_{\alpha\alpha} \end{aligned}$$

$$I = \frac{2}{3c^3} \overline{\ddot{\vec{d}}^2} + \frac{2}{3c^3} \overline{\ddot{\vec{m}}^2}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\ddot{\vec{D}} \times \ddot{\vec{n}})^2} &= \overline{\ddot{\vec{D}}^2 - (\ddot{\vec{n}} \cdot \ddot{\vec{D}})^2} \\ &= \overline{\ddot{\vec{D}}^2} = \overline{\ddot{D}_\alpha \ddot{D}_\alpha} = \overline{\ddot{D}_{\alpha\mu} \ddot{D}_{\alpha\nu} \overbrace{\ddot{n}_\mu \ddot{n}_\nu}^{\frac{1}{3} \delta_{\mu\nu}}} \\ &= \frac{1}{3} \overline{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2} \end{aligned}$$

$$\overline{(\ddot{\vec{n}} \cdot \ddot{\vec{D}})^2} = \overline{\ddot{n}_\alpha \ddot{D}_\alpha \ddot{n}_\beta \ddot{D}_\beta} = \overline{\ddot{D}_{\alpha\mu} \ddot{D}_{\beta\nu} \overbrace{\ddot{n}_\alpha \ddot{n}_\beta \ddot{n}_\mu \ddot{n}_\nu}^{\frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu}}}$$

$$\overline{\ddot{n}_\alpha \ddot{n}_\beta \ddot{n}_\mu \ddot{n}_\nu} = \delta \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}$$

$$\begin{aligned} \{ \alpha=\beta, \mu=\nu \} \Rightarrow 1 &= \delta (\delta_{\alpha\alpha} \delta_{\mu\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\alpha\mu}) = 15\delta \\ &\quad \delta_{\alpha\mu} \delta_{\mu\alpha} \\ &\quad \delta_{\alpha\alpha} = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{15}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\ddot{\vec{n}} \cdot \ddot{\vec{D}})^2} &= \frac{1}{15} \overline{\ddot{D}_{\alpha\mu} \ddot{D}_{\beta\nu} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu})} \\ &= \frac{1}{15} (\overline{\ddot{D}_{\alpha\mu}^2} + \overline{\ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\beta\alpha}}) = \frac{2}{15} \overline{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2} \end{aligned}$$

$$\overline{(\ddot{\vec{D}} \times \ddot{\vec{n}})^2} = \frac{1}{3} \overline{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2} - \frac{2}{15} \overline{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2} = \frac{1}{5} \overline{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}$$

$$I = \frac{2}{3c^3} \overline{\ddot{\vec{d}}^2} + \frac{2}{3c^3} \overline{\ddot{\vec{m}}^2} + \frac{\overline{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}}{180c^5}$$

> 180c^5

> 2 \frac{U^2}{c^2} \overline{\ddot{\vec{d}}^2}

Нерелятивистская система зарядов

Вспом. произв. пары

$$\frac{e}{m} = \text{Const}$$

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \vec{M}$$

$$\ddot{\vec{m}} \sim \ddot{\vec{M}} = 0$$

$\vec{e}_1$

$\vec{e}_2$

m_1

m_2

$$v \ll c : \quad \vec{m} \sim \vec{M} \\ \ddot{\vec{m}} = 0$$

Релятивистская

если движется один заряд — то потенциалы Леонара — Векерта.

Можно перейти в мгновенно сопутствующую систему отсчета — {быстро движущаяся}

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt'} = I' = \frac{e e^2}{3c^3} \dot{\vec{v}}^2$$

$$\vec{V} = \vec{v}$$

пр. Лоренца

$$d\mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}' + \vec{v} d\vec{p}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

интеграл по волнам

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}^{(f)} = - \oint T_{\alpha\beta} n_\beta dS$$

пл. сфер. пов. $dS = R_0^2 d\Omega$
радиус R_0

$$T_{\alpha\beta} n_\beta = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_\alpha (\vec{n} \cdot \vec{E}) - H_\alpha (\vec{n} \cdot \vec{H}) + \frac{E^2 + H^2}{2} n_\alpha \right\}$$

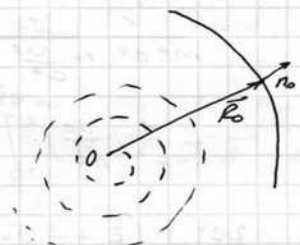
$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}^{(f)} = - \overbrace{H^2 n_\alpha}^{\text{усреднение}}$$

волновая зона $\Rightarrow$ плоская волна
в силу поперечности плоской волны
т.к. $E = H$

при дип. изл.

$$H = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}^{(f)} = - \frac{1}{c^4} \overbrace{(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 n_\alpha}^{\text{т.к. нечетное число } n} = 0$$



⇒ при гипотезе излучения нет.

В сопутствующей системе.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{d\mathcal{E}'}{dt'}$$

т.е. $I = I'$ интенсивность в сопутств. системе = в лобор. со

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}'}{dt'} = I' = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2$$

Вспомогательные формулы для 2-го четырех-мерного вектора ускорения

в произв. системе $\frac{d\mathbf{u}^i}{ds} \frac{du_i}{ds} = - \frac{\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2}{c^4 (1 - \frac{v^2}{c^2})^3}$ получили на практике

$$\vec{v}' = 0$$

$$\frac{du^i}{ds'} \frac{du_i}{ds'} = - \frac{\dot{v}^2}{c^4}$$

скаляр. во всех со. отсчетов.

$$\Rightarrow I = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \frac{2e^2 c}{3} \frac{du^i}{ds'} \frac{du_i}{ds'} = - \frac{2e^2 c}{3} \frac{du^i}{ds} \frac{du_i}{ds} =$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^3}$$

выразим через зарядные токи и эл. поле.

$$ds = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

$$m c u^i = p^i$$

$$\frac{du^i}{ds} \frac{du_i}{ds} = \frac{1}{m^2 c^2} \frac{1}{c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})} \left(\frac{dp^i}{dt} \frac{dp_i}{dt} \right) =$$

$$= \frac{1}{m^2 c^4} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\left(\frac{dp^0}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \right] = - \frac{1}{m^2 c^4} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[(e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H})^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)^2 \right] = - \frac{e^2}{m^2 c^4} \frac{(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H})^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$I = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \frac{(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H})^2 + \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \int \frac{(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H})^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

потери энергии на излучение в ускорителе

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{j} dV$$

$v \ll c$

1) без учета скоростей $\sim \frac{v^2}{c^2} : \varphi = \int \frac{\rho}{R} dV = \sum \frac{q_k}{R_k} ; \vec{A} = 0$

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{k \neq a} \frac{q_k e_n}{R_{ak}}$$

2) если учесть скорости $\sim \frac{v^2}{c^2}$ то ϕ -я
логарифма замещается

3) если $\sim \frac{v^3}{c^3}$ то тогда ϕ -я логарифма не входит

Перейдем к нормированному:

$$\varphi(\vec{r}) = - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial}{\partial t^3} \int R^2 \rho dV$$

$$\vec{A}^{(2)} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{j} dV$$

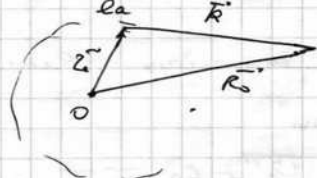
$$\varphi' = \varphi^{(3)} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$f = - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R^2 \rho dV$$

выраженное через потенциал

$$\vec{A}' = \vec{A}^{(2)} + \text{grad} f$$

$$\vec{A}' = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \vec{v} - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \vec{R} \rho dV = - \frac{\ddot{\vec{d}}}{c^2} - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e(\vec{R} - \vec{r})$$



$$\vec{A}' = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \vec{v} - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \vec{R} \rho dV = - \frac{\ddot{\vec{d}}}{c^2} - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e(\vec{R} - \vec{r})$$

$$= \sum e(\vec{R} - \vec{r}) = - \frac{\ddot{\vec{d}}}{c^2} + \frac{\ddot{\vec{d}}}{3c^2} = - \frac{2}{3c^2} \ddot{\vec{d}}$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = 0$$

$$\vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{d}}$$

$$\vec{j} = e \vec{E} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\vec{d}}$$

$$\sum \vec{j} \cdot \vec{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{d}} \cdot \sum e \vec{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{d}} \cdot \dot{\vec{d}} = \frac{d}{dt} \frac{2}{3c^3} \dot{\vec{d}} \cdot \dot{\vec{d}} = 0$$

$$\boxed{\sum \vec{f} \vec{v} = -\frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}^2}$$

→ тогда ускорен. → сила торможения

"Сила инерционного излучения"

можем считать движение неограниченно долго

$$\vec{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}}$$

$$\vec{F} = 0: m \ddot{\vec{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}}$$

Самма,
излучение микр.
и бм в атом.
шмков.

$$2) \left| \frac{2e^4}{3m^2c^4} \vec{E} \times \vec{H} \right| \ll |e\vec{E}|$$

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}$$

$$\omega_H \ll \frac{mc^3}{e^2} / \hbar$$

$$\frac{\hbar \omega_H}{mc^2} \ll \frac{\hbar c}{e^2} = 137 \quad \text{пост. тонкой}$$

$$\frac{\hbar}{mc} \cdot \frac{\omega_H}{c}$$

12.12.09

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t}$$

$$\vec{w} = w_0 e^{-\gamma t}$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \quad - \quad \text{Время жизни атома}$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} H^2 R^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} E^2 R^2 d\Omega$$

$$\vec{E} \sim (\vec{d} \times \vec{n}) \times \vec{n} \sim \ddot{\vec{d}}$$

$$\vec{d} = e\vec{x}$$

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t}, \quad t > 0$$

$$\overline{I}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) B(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega') e^{i\omega' t} d\omega'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' B(\omega') \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i(\omega + \omega')t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) \delta(-\omega) \quad \Longleftrightarrow$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A(t) = A^*(t) \\ A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ A(t) - A^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A^*(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \boxed{A(\omega) = A^*(-\omega)} \end{array} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) B^*(\omega) = \int_{-\infty}^0 d\omega A(\omega) B^*(\omega) +$$

$$+ \int_0^{\infty} d\omega A(\omega) B^*(\omega) = \omega \rightarrow -\omega =$$

$$= \int_0^{\infty} A(\omega) B^*(\omega) d\omega + \int_0^{\infty} A^*(\omega) B(\omega) d\omega$$

$$\overline{I}(t) = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} A(\omega) B^*(\omega) d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(\omega) d\omega$$

$$I(\omega) \sim |\vec{E}(\omega)|^2$$

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(t) e^{i\omega t} dt \quad \textcircled{2}$$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{E}(w) = \frac{\vec{E}_0}{2\pi} \int_0^\infty e^{-i(w_0 - w - i\frac{\gamma}{2})t} dt =$$

$$= \frac{\vec{E}_0}{2\pi} \frac{1}{i(w_0 - w - i\frac{\gamma}{2})}$$

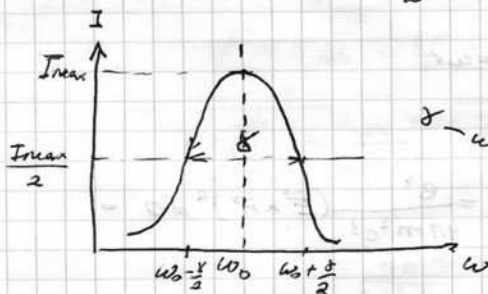
$$I(w) = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(w - w_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$\int_0^\infty I(w) dw = I_0$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$$

голова функции

$$\delta(w - w_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(w - w_0)x} dx$$



если $w - w_0 = \pm \frac{\gamma}{2}$

$$\Rightarrow \frac{I_{max}}{2}$$

γ — ширина спектра в газотриодах или $t = \frac{1}{\gamma}$

$$\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$\Delta \lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2} \Delta \omega =$$

$$\frac{2\pi c}{\omega_0^2} \gamma = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2 = \frac{4\pi}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{3} r_0$$

— ширина спектра линии

— естественная ширина

Рассеяние ЭМВ атомами

Характеристики диф. сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{dI}{I}$$

$$I = \left| \frac{3\pi r_0}{\text{сек}} \right|$$

$$S_0 = \left| \frac{3\pi r_0}{\text{сек}} \right|$$

$$d\sigma = | \text{см}^2 |$$

~~св~~ на свет. вол. ~~распростран.~~

∴ Рассеяние плоск. монохром. волны на
своб. зар. частицах

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)$$

$v \ll c$

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

$$|\vec{E}| = |\vec{H}| \quad \nearrow \quad v \ll c$$

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{r}} \approx e \vec{E}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \vec{E}$$

$$|\vec{k} \vec{r}| \approx \frac{\omega}{c} v t = \frac{v}{c} \omega t \ll \omega t$$

$$\ddot{\vec{r}} = e \ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m} \vec{E}$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\vec{r}} \times \vec{n})^2 d\Omega = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} (\vec{E} \times \vec{n})^2 d\Omega =$$

$$\vec{E} \times \vec{n} = E \sin \theta$$

$$= \frac{c E^2}{4\pi} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega$$

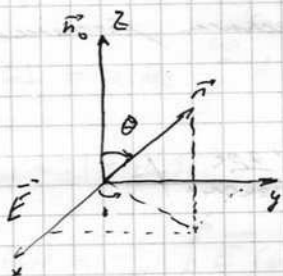
$$\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n}_0 ; \quad S = \frac{c E^2}{4\pi}$$

$$d\Omega = \sin^2 \theta d\theta d\phi$$

симм-рия от пол. осн

$$S = \frac{8\pi}{3} S_0 \quad - \text{Поллсон}$$

Поллсоновское рассеяние



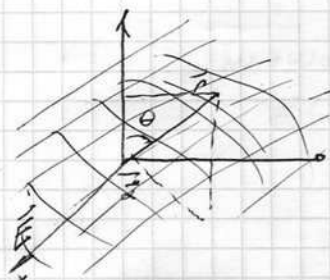
$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E \cos \theta$$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E \sin \theta \cos \phi$$

$$\cos \theta = \sin \theta \cos \phi$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi$$

$$d\Omega = \sin^2 \theta d\theta d\phi$$



$$d\sigma_0 = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) d\vartheta$$

$$\bar{f} = \sigma \bar{W}_0$$

$$\frac{dp^{(1)}}{dt} = \frac{\bar{f}}{c} = \sigma \bar{W}_0$$

$$\bar{f} = \sigma \bar{W}_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \bar{W}_0$$

$$\bar{f} = \frac{2e^4}{3mc^3} \bar{\dot{E}}^2 + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \bar{E} \times \bar{H} =$$

$$= \frac{2e^4}{3m^2c^4} \bar{E}^2 \bar{n}_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\bar{E}^2}{4\pi} = \sigma \bar{W}_0$$

Рассеяние плоской монохроматической волны
заряженной осциллятором.

с учетом лучистого торможения

Уравнение: $m \ddot{\vec{r}} = -k \vec{r} + e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Сила Лоренца и возбуд

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} + \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$$

$$(\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2) \vec{r}_0 = \frac{e}{m} \vec{E}_0$$

$$\vec{z}(t) = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

$$\ddot{\vec{z}} = - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \frac{e^2}{m} \vec{E}$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} e^4$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\vec{z}}^2 \sin^2 \theta d\theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) = A_0 e^{-i\omega t} \\ B(t) = B_0 e^{-i\omega t} \end{array} \right.$$

$$\frac{A(t) B(t)}{\text{Re} A(t) \text{Re} B(t)} = \frac{1}{4} (A + A^*)(B + B^*) = \frac{1}{4} (A_0 e^{-i\omega t} + A_0^* e^{i\omega t}) \times$$

$$\times (B_0 e^{-i\omega t} + B_0^* e^{i\omega t}) =$$

$$= \frac{1}{4} (A_0 B_0 e^{-2i\omega t} + A_0 B_0^* + A_0^* B_0 + A_0^* B_0^* e^{2i\omega t})$$

$$= dI = \frac{1}{8\pi c^3} |\ddot{\vec{z}}|^2 \sin^2 \theta d\theta$$

$$dI = \frac{|E|^2 e^4}{8\pi c^3 m^2} \frac{\omega^4 \sin^2 \theta d\theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} = \frac{c|E|^2}{8\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta d\theta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$\vec{S} = \vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n}_0$$

$$S_0 = \frac{c}{8\pi} |E|^2$$

$$dS = S_0^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta d\theta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$



плоскость огул фазу
+ конст. фаз

реальные волновые оле гомогенн волна

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(t, \vec{r}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_0 t)}$$

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t}$$

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = \omega_0^2 \frac{\omega^4}{\omega^4} \sin^2 \theta d\theta, \text{ } \omega \gg \omega_0 \\ \Rightarrow \text{Перебежное расцен} \\ = \omega_0^2 \sin^2 \theta d\theta - \text{Токианова} \\ \omega_0 \ll \omega \\ \Rightarrow \\ = \omega_0^2 \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} \right) \sin^2 \theta d\theta \\ \text{резонансное расцен} \end{array} \right.$$

степень использования энергии поля

$$\tau = \frac{1}{|\omega + \omega_0|} \quad \Delta t \gg \tau$$

$$\vec{E}(\omega) = E_0 \delta(\omega - \omega_0)$$

Шаблон: Страница) Тема

- 1) Электродинамика, история.
- 3) Опыт Майкельсона, интерферометр.
- 7) Постулаты СТО.
- 10) Релятивистский закон сложения скоростей.
- 12) Аберации света с точки зрения Т0.
- 18) Принцип тензорности величины.
- 20) Построение квантовой механики.
- 31) Заряд в электромагнитном поле.
- 34) Движение заряда в постоянном и однородном эл поле.
- 36) Движение частицы в постоянном однородном магн поле.
- 38) Движение и в эл и в магн поле.
- 45) Уравнение Максвелла
- 50) Система уравнений Максвелла в 4х метром виде
- 54) Электростатика.
- 55) Квадрупольный момент системы зарядов.
- 56) Энергия взаимодействия.
- 59) Система зарядов во внешнем электростат поле.
- 62) Теорема Лармора.
- 64) Электромагнитные волны.
- 65) Плоская монохроматическая волна.
- 66) Поляризация волн.
- 67) Эл-магн поле движущихся зарядов.
- 68) Эффект Доплера
- 71) Торможение излучением.
- 75) Нерелятивистская система зарядов.
- 80) Рассеяние ЭМВ частицами.
- 81) Рассеяние плоск монохром волны на своб заряд част.