Электродинамика сплошных сред

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec e = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec h}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec h = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec e}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\rho \vec v)_\mu \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec e = 4\pi\rho_\mu \\ \operatorname{div} \vec h = 0 \end{cases}$$

Ур-ния что описыв. микротоки в вакууме

Возникает поле связанных зарядов и токов

токи очень быстро меняются в пространстве и времени. Нужно преобразовать ур-ния для того что бы не было быстрого изменения.

$\tau_A \ll \tau_0 \ll T$, T - характерное время задачи (изменения источников и т.д.).

$l_A \ll l_0 \ll L$, L - характ. размер задачи (длина волны поля, размеры самого вещества)

V_0 - физически малый объем, но в нем все равно много атомов. На протяжении его размеров не изменяются характеристики тела.

Получим ур-ния для макроскопических полей:

$$\overline{\vec e}(t,\vec r) = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0}\int_{V_0} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \vec e(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau)$$

$$\frac{\partial \overline{\vec e}}{\partial x} = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0}\int_{V_0} d\xi\, d\eta\, d\zeta \frac{\partial}{\partial x}\vec e(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0}\int_{V_0} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \vec e(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\overline{\vec e}$$

$\overline{\operatorname{rot} \vec e} = \operatorname{rot} \overline{\vec e}$, пусть: $\vec E(t,\vec r) \equiv \overline{\vec e}$, $\vec B(t,\vec r) \equiv \overline{\vec h}$

$\vec B$ - вектор магнитной индукции, истинная напряженность микрополя в веществе.

$\overline{\rho}_\mu = \rho + \rho_{св}$, $\rho_{св}$ - плотность связанных зарядов. ρ - внешние заряды что движутся в веществе свободно

$\overline{(\rho\vec v)_\mu} = \rho\vec v + (\rho\vec v)_{связан.}$, $\vec j$ - плотность тока проводимости (-"- связанных зарядов)

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec B = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\rho\vec v)_{связ} + \frac{4\pi}{c}\vec j \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec E = 4\pi\rho_{св} + 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec B = 0 \end{cases}$$

Воспользуемся модельным представлением для получения плотности св. зар и свободных.

Плотность поляризационного тока:

$$\vec j_{пол} = \frac{1}{V_0}\int_{V_0} (\rho\vec v)_{\mu\, связ}\, dV = \frac{1}{V_0}\sum_{V_0} e\vec v = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V_0}\sum_{V_0} e\vec r$$

Вводится величина: Вектор Поляризации - средний дипольный момент в единице ~~веш~~ объема вещества:

$$\boxed{\vec P = \frac{1}{V_0}\sum_{V_0}\vec d}, \Rightarrow \boxed{\vec j_{пол} = \frac{\partial \vec P}{\partial t}} \text{ - плотность тока поляризации.}$$

Плотность тока намагниченности вещества:

При движении возникает собствен. магнитный момент

$\vec m = \frac{1}{2c}\sum e\vec r\times\vec v$ - магн. момент.


- ток Ампера

$$\vec m = \frac{1}{2c}\int_V \rho\,\vec r\times\vec v\, dV$$

$$m_0 = \frac{1}{2c}\int dV\, \vec r\times\vec j_0 \qquad \vec j_0 = j_0\frac{d\vec l}{dl} \qquad dV = \Delta S\cdot dl$$

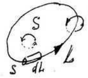
$$m_0 = \frac{1}{c}\underbrace{\int j_0\,\Delta S}_{i}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\oint \vec r\times d\vec l}_{S_0}$$

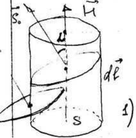
S_0 - площадь охватываемая всем контуром

i - сила тока Ампера

$\boxed{m_0 = \frac{i_0 S_0}{c}}$ Амперов ток порождает Магн. Момент

(3) Амперовые токи, что непересекают площадку 2 раза не вносят вклад в общий ток.





Элементарные магниты по теореме Лармора во внешнем магнитном поле ориентируются одинаковым образом.

1) $S = S_0 \cos L$, S_0 - площадка создаваемая токами Ампера.

$n \cdot S_0 \cos L \, dl = n \cdot V_0$ n - к-во токов в объеме

$i = n \oint \vec S_0 i_0 d\vec l = n \oint \frac{i_0 S_0}{c} \cdot c \cdot d\vec l =$

Средний магнитный момент в единице объема — вектор намагниченности: N - к-во объемов.

$\boxed{\vec M = \frac{1}{V_0} \sum_{V_0} \vec m}$ $\vec M = \frac{1}{V_0} N \cdot \vec m = n \cdot \vec m$

$i = c \oint \vec M d\vec l = c \int_S \text{rot}\, \vec M d\vec S$

$i = \int_S j_{намагн} \cdot d\vec S \Rightarrow \boxed{j_{намагн} = c\, \text{rot}\, \vec M}$

$\vec M$ и $\vec P$ - макроскопич. величины, что измер. на опытах

$$\boxed{(\rho \vec v)_{связ} \equiv \vec j_{связ} = \frac{\partial \vec P}{\partial t} + c\, \text{rot}\, \vec M}$$

$\frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec v)_\mu = 0$. $\frac{\partial}{\partial t}(\rho + \rho_{св}) + \text{div}(\vec j + \vec j_{св}) = 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\, \vec j = 0$ - свободные заряды и токи.

$\frac{\partial \rho_{св}}{\partial t} + \text{div}\, \vec j_{св} = 0$. $\to \frac{\partial}{\partial t} \rho_{связ} + \text{div}\left\{\frac{\partial \vec P}{\partial t} + c\, \text{rot}\, \vec M\right\} = 0$.

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{связ} + \text{div}\, \vec P) = 0$. $\boxed{\rho_{связ} = -\text{div}\, \vec P}$

Если нет связанных зарядов, то нет поляризации.

Теперь перепишем наши уравнения:

$$\text{rot}\, \vec B = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial \vec P}{\partial t} + c\, \text{rot}\, \vec M\right) + \frac{4\pi}{c}\vec j$$

$$\text{rot}(\vec B - 4\pi \vec M) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec E + 4\pi \vec P) + \frac{4\pi}{c}\vec j$$

Вводим в рассмотрение величину $\boxed{\vec D = \vec E + 4\pi \vec P}$ - индукцию электрическ. поля

$\boxed{\vec B = \vec H + 4\pi \vec M}$ - индукция магнитного поля

$\text{div}\, \vec E = 4\pi(-\text{div}\, \vec P) + 4\pi\rho$.

$$\boxed{\begin{cases} \text{rot}\, \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \\ \text{rot}\, \vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div}\, \vec D = 4\pi\rho \\ \text{div}\, \vec B = 0 \end{cases}}$$

Для линейной электродинамики индукции линейно связаны с напряженностями.

$\boxed{\vec D = \varepsilon_0 \vec E}$, $\boxed{\vec B = \mu_0 \vec H}$ ε_0, μ_0 - диэлектрическая и магнитная проницаемости.

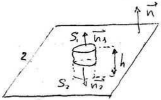
$\vec D(t, \vec r) = \varepsilon(\vec r) \vec E(t, \vec r)$
$\vec B(t, \vec r) = \mu(\vec r) \vec H(t, \vec r)$ - для неизменяющейся во времени сред.

$\vec D(t, \vec r) = \hat\varepsilon \vec E(t, \vec r)$ $\vec B(t, \vec r) = \hat\mu \vec H(\vec r, t)$

Если анизотропия: $D_i(t, \vec r) = \hat\varepsilon_{ij} E_j(t, \vec r)$, $B_i(t, \vec r) = \hat\mu_{ij} H_j(t, \vec r)$

Так как мы имеем дело с ограниченными объектами то нужно записать граничные условия:

5 {Граничные условия}



1) $0 \doteq \int_V \mathrm{div}\,\vec B\, dV = \oint \vec B\, d\vec S =$

$= \int_{S_1} \vec B\, d\vec S + \int_{S_2} \vec B\, d\vec S + \int_{S_{бок}} \vec B\, d\vec S \xrightarrow[h\to 0]{}$

$\to \vec B_1 \vec n_1 S_1 + \vec B_2 \vec n_2 S_2 + \vec B S h =$

$= \vec B_2 n S - \vec B_1 n S$. На границе раздела $\boxed{B_{2n} = B_{1n}}\Big|_S$

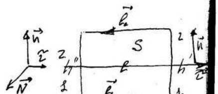
Нормальная составляющ. вектора $\vec B$ — непрерывна

2) $\oint \vec D\, d\vec S = 4\pi \int \rho\, dV \xrightarrow[h\to 0]{} 4\pi \lim_{h\to 0} \rho \cdot V$.

$\lim_{h\to 0} \rho V = \lim \frac{\Delta e}{h\cdot S} h\cdot S = \sigma_S \cdot S$

σ_S — плотность поверхностного заряда на границе раздела

$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_S\big|_S}$



3) $\int_S \mathrm{rot}\,\vec E\, d\vec S = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec B\, d\vec S$

по теореме Стокса:

$\oint_l \vec E\, d\vec \tau = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec B\, d\vec S$

$\oint_L \vec E\, d\vec\tau \xrightarrow[h',h''\to 0]{} \vec E_1\vec\tau l - \vec E_2 \vec\tau l + \overline{E} n \overset{\to 0}{h'} - \overline{E} n \overset{\to 0}{h''} = (\vec E_1 - \vec E_2)\vec\tau \vec n$

$\int \vec B\, d\vec S \xrightarrow[h',h''\to 0]{} \overline{B_1} h' l_1 = 0$. $\boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}\big|_S}$

Тангенциальная составл. электр. поля непрерывна

4) $\oint \vec H\, d\vec l = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\int \vec D\, d\vec S + \frac{4\pi}{c}\int \vec j\, d\vec S$

$\int \vec j\, d\vec S \xrightarrow[h,h'\to 0]{} \lim \vec j\cdot \vec s = \lim \frac{J_N}{h' l} h' l = i_N\cdot l = \vec i \vec N l$

6

$(\vec H_1 - \vec H_2)\vec\tau l = \frac{4\pi}{c}\vec i \vec N l$, $\vec\tau = \vec n\times\vec N$

$(\vec H_1-\vec H_2)(\vec n\times\vec N) = \frac{4\pi}{c}\vec i\vec N$

$((\vec H_1-\vec H_2)\times\vec n)\vec N = \frac{4\pi}{c}\vec i\vec N \to \boxed{\vec n\times(\vec H_2-\vec H_1) = \frac{4\pi}{c}\vec i}$

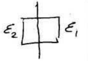
$\{\vec n\times(\vec H_2-\vec H_1) - \frac{4\pi}{c}\vec i\}\vec N = 0$. $\{H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i\}$

На границе раздела при наличии поверхностных токов происходит разрыв между тангенциальными составляющ.

Электростатика:

$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec E = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec D = 4\pi\rho \end{cases}$ $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $D_{2n} - D_{1n}\big|_S = 4\pi\sigma_S$, $\vec E = -\mathrm{grad}\,\varphi$.

$\mathrm{div}\{\varepsilon(r)\vec E\} = 4\pi\rho$, при $\varepsilon = Const$, $\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$



Тогда гран. усл: $\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi_2\big|_S \\ &\varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -4\pi\sigma_S\big|_S \end{aligned}\right\}$

Сила действующая на заряд движущийся в ЭМП. 18.0

$\vec F = \overline{f} = q\vec e + \frac{q}{c}\vec v\vec h = q\vec E + \frac{q}{c}\vec v\times\vec B$.

$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t} & \Big|\cdot\vec H \\ \mathrm{rot}\,\vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j & \Big|\cdot\vec E \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec D = 4\pi\rho \\ \mathrm{div}\,\vec B = 0 \end{cases}$

$\frac{1}{c}\vec E\frac{\partial\vec D}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec H\frac{\partial\vec B}{\partial t} = \vec E\,\mathrm{rot}\,\vec H - \vec H\,\mathrm{rot}\,\vec E - \frac{4\pi}{c}\vec j\vec E \;\Big|\cdot\frac{c}{4\pi}$

$\frac{1}{4\pi}\left(\vec E\frac{\partial\vec D}{\partial t} + \vec H\frac{\partial\vec B}{\partial t}\right) = -\frac{c}{4\pi}\mathrm{div}(\vec E\times\vec H) - \vec j\vec E$.

Проинтегрируем по объему V:

$\int dV\left\{\frac{1}{4\pi}\vec E\frac{\partial\vec D}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\vec H\frac{\partial\vec B}{\partial t}\right\} = -\underbrace{\oint_S \vec S\, d\vec S} - \int \vec j\vec E\, dV$

поток вектора $\vec S$ через замкнутую область

7 $\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}\times\vec{H}}$ — плотность потока энергии ЭМП через единичную площадку

Вектор пойнтинга

Вакуум $S_n = S_{n\,вак}\big|_s$

$E_{1\tau} = E_{2\tau}\big|_s$, $H_{1\tau} = H_{2\tau}\big|_s$ — нет поверхностных токов на поверхности диэлектрика

Изменение ЭМП и внутренней энергии среды.

$$\frac{1}{4\pi}\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

В общем случае невозможно разделить плотность энергии магнитной среды и электрической среды.

$\boxed{\delta W_E = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\,\delta\vec{D}}$ ЭП. $\boxed{\delta W_B = \frac{1}{4\pi}\vec{H}\,\delta\vec{B}}$ — изменение плотности энергии МП.

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\,\varepsilon(\vec{r})\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\frac{E^2}{8\pi} \Rightarrow W_E = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{8\pi}$$

$W_B = \frac{\mu_0 H^2}{8\pi}$ при постоянных ЭП и МП

Основная задача электростатики при наличии диэлектриков и проводников.

В случае электростатики в проводниках поле должно равняться нулю.

Нужно найти распределение зарядов в каждой точке пространства вне проводников и поверхностное распределение зарядов

$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = 0. \\ \operatorname{div}\mathcal{D} = 4\pi\rho \end{cases}$ 1) $E_{1\tau} = E_{2\tau}\big|_s$ — диэл-диэл: $\mathcal{D}_{2n} - \mathcal{D}_{1n} = 0\big|_s$ — нет свободного заряда на границе.

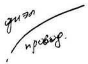
2) Если диэл-проводник: $E_\tau\big|_s = 0$. — поле внутри проводника

$\mathcal{D}_n\big|_s = 4\pi\sigma_s$ — свободные заряды

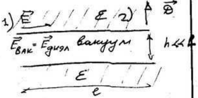
$\Delta\varphi = -4\pi\rho$ — ρ — плотность объемного заряда в диэлектр. 8

1) Диэл - диэл $\varphi_1 = \varphi_2\big|_s$, $\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_s$

2) Диэл - проводн. $\varphi\big|_s = Const$ $\mathcal{D}_n\big|_s - 4\pi\sigma_s$ $\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -4\pi\sigma_s\Big|_s$



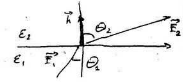
$\to \mathcal{D}_n = 4\pi\sigma_s$ $E_\tau\big|_s = 0$.



$\vec{\mathcal{D}}_{вак} = \vec{E}_{вак} = \vec{\mathcal{D}}_{диэл\,\varepsilon}$

$E_{1\tau} = E_{2\tau}\big|_s$: $E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2$

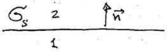
$\mathcal{D}_{2n} = \mathcal{D}_{1n}\big|_s$ $\varepsilon_1 E_1\cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2\cos\theta_2$



$$\boxed{\frac{tg\,\theta_1}{tg\,\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Найдем поле равномерно заряженных бесконечно плотных заряженых поверхностей

1)

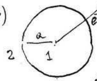


$\operatorname{div}\vec{\mathcal{D}} = 0$ $\mathcal{D}_{2n} - \mathcal{D}_{1n} = 4\pi\sigma_s$

$\mathcal{D}_{1n} = -\mathcal{D}_{2n} \to 2\mathcal{D}_{2n} = 4\pi\sigma_s$ $\boxed{\vec{\mathcal{D}} = 2\pi\sigma_s\vec{n}}$

$\varepsilon = 1$ $\vec{E} = 2\pi\sigma_s\vec{n}$

2)



$\varepsilon = 1$ $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ — нет объемных зарядов

$\varphi(\cancel{\ }) \neq \varphi(z)$, $\cancel{\ }\varphi \neq \varphi(L)$, $\varphi = \varphi(r)$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} \equiv E(r)\vec{e}_r$$

В цилиндр. системе координат $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r E_r = 0$.

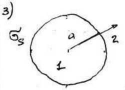
$E_r = \frac{C}{r}$ 1) $E_{1r} = \frac{C_1}{r}$ $r = 0$, $C_1 = 0$. $\boxed{E_{1r} = 0}$

2) $E_{2r} = \frac{C_2}{r}$ $\quad E_n\big|_{r=a} = \frac{C_2}{a} = 4\pi\sigma_s$

$C_2 = 2\cdot 2\pi a\sigma_s = 2\varkappa$ - заряд на единицу длины

$\boxed{\vec E_2 = \frac{2\varkappa}{r}\vec e_r}$ - напряженность поля вне цилиндра

3) $\varepsilon = 1$ Сферическая система:



$\operatorname{div}\vec E = 0.$

$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}R^2E_R = 0 \qquad E_R = \frac{C}{R^2}$

а) $E_{1R} = \frac{C_1}{R^2}$ при $R\to 0$ $C_1 = 0$ $\boxed{E_{1R} = 0}$

б) $E_{2R} = \frac{C_2}{R^2} \qquad E_2\big|_{R=a} = \frac{C_2}{a^2} = 4\pi\sigma_s \qquad C_2 = 4\pi a^2\sigma_s = q_\Sigma$ - полный заряд

$\boxed{\vec E = \frac{q_\Sigma}{R^2}\vec e_R}$ снаружи сферы поле точечного заряда.

Полный заряд на проводнике $q_\Sigma = \oint\sigma_s dS$

$q_\Sigma = -\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$ - проводник в вакууме

$\boxed{\frac{q_\Sigma}{\varphi} = -\frac{1}{4\pi}\oint\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \equiv C}$ - емкость уединенного проводника

определяется геометрией самого проводника

$[C] = \left[\frac{q}{\varphi}\right] = \left[\frac{q_\Sigma}{q_\Sigma/a}\right] = см$ - в Гаусовой системе емкость в см.

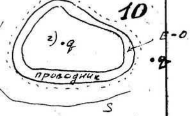
На практике: $1 фарада = \frac{1\ Кулон}{1\ Вольт} = \frac{3\cdot10^9\ СГСq}{1/300\ СГСφ} = 9\cdot10^{11}$ см

$1 пкф = 9\cdot10^{-1}$ см ≈ 1 см

Полный заряд на проводнике $q_a = \sum_b C_{ab}\varphi_b$

$a\neq b$ - коэффиц. электростатической индукции

[Электростатическая защита]



Влияние электростатических полей нету внутри объема, если заряд снаружи

Если заряд внутри

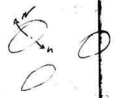
То по теореме Гауса $\oint\vec E d\vec S = 4\pi q$.
то есть снаружи поле не равно нулю $\vec E \neq 0$.

Найдем электростатическую энергию создаваемую системой объемных зарядов и поверхностных

$U = \frac{1}{8\pi}\int_V\vec E\vec D dV = -\frac{1}{8\pi}\int_V\vec D\operatorname{grad}\varphi\, dV = \cancel{-\frac{1}{8\pi}\int}$

$= -\frac{1}{8\pi}\int_V\{\operatorname{div}(\varphi\vec D) - \varphi\underbrace{\operatorname{div}\vec D}_{4\pi\rho}\} = \frac12\int\rho\varphi dV - \frac{1}{8\pi}\oint\varphi\vec D d\vec S =$

$= -\frac{1}{8\pi}\sum_a\oint_{S_a}\varphi \underbrace{D_N}_{=-n} dS = \frac12\int\rho\varphi dV + \frac{1}{8\pi}\sum_a\varphi_a\oint_{S_a}4\pi\sigma_s dS =$



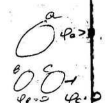
$\boxed{U = \frac12\int\rho\varphi dV + \frac12\sum_a q_a\varphi_a}$

Если $\rho = 0$ $\quad U = \frac12\sum_a q_a\varphi_a = \frac12\sum_{a,b}C_{ab}\varphi_a\varphi_b \geq 0.$

$C_{aa}\geq 0 \quad C_{aa}C_{bb}\geq C_{ab}^2$ - коэфиц. емкости все „+".

$q_b = -\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\geq 0 \Rightarrow q_b < 0.$

$q_b = \sum_d C_{bd}\varphi_d = C_{ba}\varphi_a < 0 \Rightarrow C_{ab} < 0 \quad a\neq b$



Коэф электростатич. индукции „-".

11 Определить потенциал в любой точке вне проводника по заданном поверхностном и объемном распределении. ЗАДАЧА

Определим это по II-ой ф-ле Грина

$$\boxed{\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dV = \oint_S \{\underbrace{\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi}_{1} - \underbrace{\psi\,\mathrm{grad}\,\varphi}_{2}\}\,d\vec{S}}$$

Пусть $\varphi = \varphi$, $\psi = \frac{1}{R}$.

$$\int_V \{\varphi\Delta\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\Delta\varphi\}\,dV = \Big\|\ \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},\ \Delta\frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{R})\ \Big\| =$$

$$= -4\pi\varphi_P + \frac{4\pi}{\varepsilon}\int \frac{\rho}{R}\,dV$$

(1) $$\oint_{S_\infty + \sum_a S_a} \varphi\,\mathrm{grad}\,\psi\,d\vec{S} = \Big\|\ \vec{N}dS = -\vec{n}\,d\vec{S} = d\vec{S}\ \Big\| = \sum_a \oint_{S_a} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS =$$

$$= -\sum_a \varphi_a \oint_{S_a} \mathrm{grad}\,\psi\,d\vec{S} = -\sum_a \varphi_a \int_{V_a} \Delta\psi\,dV = 0.$$

$\| \Delta\psi = \Delta\frac{1}{R}$ - лапласиан$\|$ $R \neq 0 \Rightarrow \Delta\frac{1}{R} = 0 \|$

(2) $$\oint_S \psi\,\mathrm{grad}\,\varphi\,d\vec{S} = -\sum_a \oint_{S_a} \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = \sum_a \oint_{S_a} \frac{1}{R}\frac{4\pi\sigma_s}{\varepsilon}\,dS =$$

$$= \frac{4\pi}{\varepsilon}\sum_a \oint_{S_a} \frac{\sigma_s}{R}\,dS$$

$$\boxed{\varphi_P = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho}{R}\,dV + \frac{1}{\varepsilon}\sum_a \oint_{S_a} \frac{\sigma_s}{R}\,dS}$$

потенциал от объемных зарядов. потенциал создав. заряженой поверхностью каждого проводн.

Теорема единственности электростатической задачи

Если имеется сис-ма проводников диэлектрика; задана геометрия (их расположение) и задан объем тогда электростатическая задача имеет единств. решение, если либо задан потенциал, либо заряд каждого проводника 12

Уравнения электростатики линейны, гран условия - тоже

Допустим есть 2 решения: $\vec{E}_1, \varphi_1, \vec{D}_1$, и $\vec{E}_2, \varphi_2, \vec{D}_2$.

$\vec{E}' = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$, $\varphi' = \varphi_2 - \varphi_1$, $\vec{D}' = \vec{D}_2 - \vec{D}_1$.

Так как ρ - задано то $\mathrm{div}\vec{D}_1 = 4\pi\rho$ и $\mathrm{div}\vec{D}_2 = 4\pi\rho \Rightarrow \vec{D}' = 0$.

Рассмотрим: $$\int \vec{E}'\vec{D}'\,dV = \varepsilon\int E'^2\,dV = -\int \vec{D}'\,\mathrm{grad}\,\varphi'\,dV = \geq 0$$

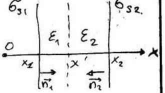
$$= \int dV\{\mathrm{div}(\varphi'\vec{D}') - \varphi\,\underset{0}{\mathrm{div}\vec{D}'}\} = -\oint_{S_\infty + \sum S_a} \varphi'\vec{D}'\,d\vec{S} = \sum_a \oint_{S_a} \varphi' D_n'\,dS$$

$$\Big\|\ d\vec{S} = \vec{N}dS = -\vec{n}\,dS,\ D_{2n} = 4\pi\sigma_{2s}\ D_{1n} = 4\pi\sigma_{1s}\ \Big\| = \sum_a \varphi_a' \oint_{S_a} (D_{2n} - D_{1n})\,dS = \sum_a (\varphi_{2a} - \varphi_{1a})\,4\pi(q_{2a} - q_{1a}) = 0.$$

по теор. $\begin{cases} \varphi_{2a} = \varphi_{1a} = \varphi_a \\ q_{2a} = q_{1a} = q_a \end{cases}$

Слоистые конденсаторы

Плоский идеальный конденсатор (2 неограниченые плоскости)



Емкость любого конденсатора: $C = \frac{q}{|\varphi_2 - \varphi_1|}$ - заряд на любой из пластин

σ_{s1}, σ_{s2} - величина поверхн. заряда

$\mathrm{div}\vec{D} = 0$ (объемного заряда между пластинами нет).

$\varphi(x)$, $\vec{E} = \mathrm{grad}\,\varphi = -\vec{e}_x\frac{d\varphi}{dx} = E(x)\vec{e}_x$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - Const

$\frac{dD_x}{dx} = 0. \Rightarrow D_x$ - Const - во всех областях.

$D_1\big|_{x=x_1} = 4\pi\sigma_{s1}$ $\vec{D}_1 = 4\pi\sigma_{s1}\vec{e}_x$

13 $D_{2n}|_{x=x_2} = 4\pi\sigma_{s2} \to \vec D_2 = 4\pi\sigma_{s2}\vec n_2 = -4\pi\sigma_{s2}\vec n$

$D_{1n} = D_{2n}|_{x=x'} \Rightarrow 4\pi\sigma_{s1} = -4\pi\sigma_{s2}$ $\boxed{\sigma_{s1} = -\sigma_{s2}}$

В случае электростатики поверхностные заряды равны по модулю, но против. по знаку на разных обкладках

$\vec E_1 = \frac{\vec D_1}{\varepsilon_1} = \frac{4\pi\sigma_s}{\varepsilon_1}\vec n \qquad \vec E_2 = \frac{\vec D_2}{\varepsilon_2} = -\frac{4\pi\sigma_s}{\varepsilon_2} \vec n$

$\varphi_2-\varphi_1 = -\int_1^2 \vec E\, d\vec r = -\int_{x_1}^{x_1'} E_1\, dx - \int_{x_1'}^{x_2} E_2\, dx = -4\pi\sigma_s\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$

так как $q=\sigma_s\cdot S$, то

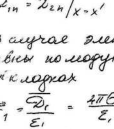
$C = \frac{S}{4\pi\Sigma \frac{d_i}{\varepsilon_i}}$, если однослойный диэлектрик, то:

$C_\varepsilon = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \quad \Longleftarrow \quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$

$\boxed{C_\varepsilon = \varepsilon C_{вак}}$

Цилиндрический конденсатор

$\varkappa_1, \varkappa_2$ - заряд в каждом из ~~полосок~~ обкладок.



$\operatorname{div}\vec D = 0 \qquad \varphi=\varphi(r)$

$\vec E = -\operatorname{grad}\varphi = \vec e_r\left(-\frac{d\varphi}{dr}\right) = E(r)\vec e_r$

$\vec D = \varepsilon\vec E. \qquad \frac1r\frac{d}{dr}(rE_r)=0.$

$E_r = \frac{c'}{r} \qquad D_{1n}|_{r=r_1} = 4\pi\sigma_{s1} \qquad D_1(r)|_{r=r_1} = 4\pi\sigma_{s1}$

$\vec D_1 = 4\pi\sigma_{s1}\vec e_r$

$D_1(r) = \frac{C_1}{r} = 4\pi\sigma_{s1}$, при $r=r_1$: $\frac{C_1}{r_1} = 4\pi\sigma_{s1}$

Тогда $C_1 = 2\cdot 2\pi r_1\sigma_{s1} = 2\varkappa_1$ – заряд приходящийся на единицу длины конденсат.

$\boxed{\vec D_1 = \frac{2\varkappa_1}{r}\vec e_r}$

$D_2 = \frac{C_2}{r}, \quad \vec D_2 = \frac{C_2}{r}\vec n_2, \quad D_{2n}|_{r=r_2} = -D_{2n}|_{r=r_2} = -\frac{C_2}{r_2} = 4\pi\sigma_{s2}$ 14

$C_2 = -2\cdot 2\pi r_2\sigma_{s2} = -2\varkappa_2. \qquad \boxed{\vec D_2 = -\frac{2\varkappa_2}{r}\vec e_r}$

Из электростатики:

$D_{1n} = D_{2n}|_{r=r'} \qquad \varkappa_1 = (-\varkappa_2)$

Заряды приходящиеся на единицу длины в цилинд. конденсаторе равны по модулю и разны по знаку

$\vec E_1 = \frac{\vec D_1}{\varepsilon_1} = \frac{2\varkappa}{\varepsilon_1 r}\vec e_r \qquad \vec E_2 = \frac{\vec D_2}{\varepsilon_2} = -\frac{2\varkappa}{\varepsilon_2 r}\vec e_r.$

$\varphi_2-\varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2}\vec E\, d\vec r = -2\varkappa\left(\int_{r_1}^{r'}\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{dr}{r} + \int_{r'}^{r_2}\frac1{\varepsilon_2}\frac{dr}{r}\right) =$

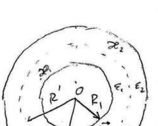
$= -2\varkappa\left\{\frac1{\varepsilon_1}\ln\frac{r'}{r_1} + \frac1{\varepsilon_2}\ln\frac{r_2}{r'}\right\}$

$C_1 = \frac{\varkappa}{2\varkappa\left\{\frac1{\varepsilon_1}\ln\frac{r'}{r_1}+\frac1{\varepsilon_2}\ln\frac{r_2}{r'}\right\}}$ при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ $\boxed{C_{1\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \varepsilon C_{1вак}}$

емкость приходящаяся на единицу длины.

$\boxed{C_{h\varepsilon} = hC_{1\varepsilon}}$ - для цилиндр. конденсатора

Сферический конденсатор



$\operatorname{div}\vec D = 0, \quad \varphi = \varphi(R) \quad E = E(R)\vec e_R.$

$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 D(R)\right) = 0. \qquad D(R) = \frac{C'}{R}.$

$\vec D_1 = \frac{C_1}{R^2}\vec e_R \qquad \vec D_2 = \frac{C_2}{R}(-\vec e_R).$

$D_{1n}|_{R=R_1} = \frac{C_1}{R^2} = 4\pi\sigma_{s1}|_{R=R_1} \qquad C_1 = 4\pi R_1^2\sigma_{s1} = q_1$

$D_{2n_2}|_{R=R_2} = -\frac{C_2}{R^2} = +4\pi\sigma_{s2} \qquad C_2 = -q_2.$

$D_{1n} = D_{2n}|_{R=R'} \quad q_1 = q = -q_2 \qquad \vec D_1 = \frac{q}{R^2}\vec e_R \quad \vec D_2 = -\frac{q}{R^2}\vec e_R$

$R_1\le R\le R' \qquad R'\le R\le R_2$

15 $\vec E_1 = \frac{\vec D_1}{\varepsilon_1} = \frac{q}{\varepsilon_1 R^2}\vec e_R$ $\quad \vec E_2 = \frac{\vec D_2}{\varepsilon_2} = -\frac{q}{\varepsilon_2 R^2}\vec e_R$.

$$\varphi_2-\varphi_1 = -\int_{R_1}^{R_2}\vec E\, d\vec R = -q\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{R_1}^{R_1'}\frac{dR}{R^2} + \frac{1}{\varepsilon_2}\int_{R'}^{R^2}\frac{dR}{R^2}\right) =$$

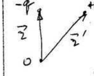
$$= q\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1'}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R'}\right)\right]$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R'}\right)+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_1'}-\frac{1}{R_2'}\right)}$$

Если $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon \Rightarrow$ $\boxed{C_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}} = \frac{\varepsilon R_1R_2}{R_2-R_1} = \varepsilon C_{ВАК}}$

Ёмкость сферического конденсатора

Сила действующая на единицу объема неоднородного электростат. поля.



$\vec f = q\vec E(\vec r') - q\vec E(\vec r) =$
$= q\{\vec E(\vec r)+(\vec l\nabla)\vec E(\vec r)+.. -\vec E(\vec r)\} = (\vec d\nabla)\vec E$.

Среднее знач. дипольн. мом. в един. объема:

$\vec P = \frac1V\sum_a \vec d_a$ $\quad \vec{\mathcal F} = \overline{(\vec d\nabla)\vec E} = (\vec P\nabla)\vec E =$

$\|\vec D = \vec E + 4\pi\vec P\| = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}(\vec E\nabla)\vec E$

$\boxed{\vec F = \vec{\mathcal F} = \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\,E^2}$, диэлектр. вовлекается в сторону абсолют. величины электр поля.

Какая сила действует на единицу поверхности заряженного проводника (оттал. между одноим. зарядами

$\vec E'$ созд. ΔS, $\vec E''$ - создается всей сферой поверхностью

Внутри сферы $\vec E'+\vec E''=0$

$\vec E'+\vec E''=4\pi\sigma_s$ $\quad \vec E''=2\pi\sigma_s\vec n$ $\quad \Delta\vec f = \sigma_s\Delta S\vec E''$ 16

$\vec F = \frac{\Delta\vec f}{\Delta S} = \sigma_s\cdot 2\pi\sigma_s\vec n = \boxed{\frac{E^2}{8\pi}\vec n = \vec F}$

Если поле вне проводника задано, то

На основе теоремы единственности можно судить о правильности решения задачи.

N1 Найти эл. стат. поле создаваемое точечным зарядом, ~~создаваемо~~ лежащим над проводящей средой

$z>0$, $\Delta\varphi = -4\pi q\frac1\varepsilon$ $\quad$ условие т° единств. выполнены

Поле на поверхн. проводника:
суперпозиц. поля точечн. заряда и проводн.

$\varphi = \frac{q}{\varepsilon R}+\varphi'$, φ' - проводник, поверхностн. заряды $\Delta\varphi'=0$.

$\varphi'=\frac{q'}{\varepsilon R'}$ $\quad \varphi|_{z=0,\ R=R'}=0$ $\quad \frac{q}{\varepsilon R}+\frac{q'}{\varepsilon R'}\Big|_{R=R'}=0$. $\quad q'=-q$.

$\boxed{\varphi = \frac{q}{\varepsilon R}-\frac{q}{\varepsilon R'}}$, а теперь найдем поле:

$\vec E = -\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{q\vec R}{\varepsilon R^3}-\frac{q\vec R'}{\varepsilon R'^3}$ — поле

$\vec F = q\left(-\frac{q\vec R'}{\varepsilon R'^3}\right)\Big|_{\vec R'=2d\vec n} = \boxed{-\frac{q^2}{\varepsilon(2d)^2}\vec n = \vec F}$ - Сила

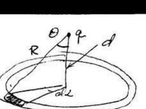
Найдем величину индуцированного заряда на поверхн.

$q'=\int\sigma_s dS$, $D_n = 4\pi\sigma_s|_{z=0}$, $\sigma_s = \frac{1}{4\pi}D_n = \frac{\varepsilon}{4\pi}\vec n\vec E|_{z=0}$

$= \frac{\varepsilon}{4\pi}\vec n\left(\frac{q\vec R}{\varepsilon R^3}-\frac{q\vec R'}{\varepsilon R'^3}\right)\Big|_{R=R'} = \frac{q}{4\pi}\left\{-\frac{d}{R^3}-\frac{d}{R^3}\right\} = -\frac{qd}{2\pi R^3}$ - заряд размазан по

$q' = \int\sigma_s dS = \int -\frac{qd}{2\pi R^3}dS$

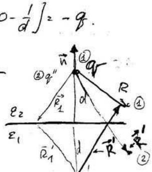
$ds = r\,d\alpha\,dr$, $R=\sqrt{r^2+d^2}$ }



$q' = \int_S -\frac{dq}{2\pi}\frac{1}{(r^2+d^2)^{3/2}}\, d\alpha\, dr\cdot r =$

$= -qd\int_d^\infty \frac{r\,dr}{(r^2+d^2)^{3/2}} = -qd\int_d^\infty \frac{dx}{x^2} = qd\left[0-\frac{1}{d}\right] = -q.$

N2 Найти поле в целом пространстве



$z\ge 0$ $\Delta\varphi_2 = -\frac{4\pi}{\varepsilon_2}\, q\,\delta(\vec R)$.

$z<0$ $\Delta\varphi_1 = 0$.

На поверхности возникает связаный поверхн. заряд.

$\mathrm{div}\vec D = 4\pi\rho$ $\rho_{связ} = -\mathrm{div}\vec P$

$D_{2n}-D_{1n} = 4\pi\sigma_s$ $\boxed{\sigma_{связаных} = P_{1n}-P_{2n}}$ - связаные поверхн. заряды

$\varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 R}+\varphi'$, φ' - поле создав- связ. пов. зарядами

$\varphi' = \frac{q'}{\varepsilon_2 R'}$, $R'\neq 0$.

В $z<0$ $\varphi_1 = \frac{q''}{\varepsilon_2 R}$ - решение удовл. ур-нию эл. статики

1) $z=0$ $\varphi_1=\varphi_2$ $\frac{q}{\varepsilon_2 R_1}+\frac{q'}{\varepsilon_2 R_1'} = \frac{q''}{\varepsilon_2 R_1'}\Big|_{R_1=R_1'}$ Гран условия

2) $z=0$ $D_{1n}=D_{2n}$: $\varepsilon_1\vec n\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 = \varepsilon_2\vec n\,\mathrm{grad}\,\varphi_2$

$\varepsilon_2\vec n\left(-\frac{q}{\varepsilon_2 R^2}\frac{\vec R}{R} - \frac{q'}{\varepsilon_2 (R')^2}\frac{\vec R'}{R'}\right) = \varepsilon_1\vec n\left(-\frac{q''}{\varepsilon_2 R^2}\frac{\vec R}{R}\right)\Big|_{z=0}$

$\frac{qd}{R^3}-\frac{q'd}{R^3} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{q''d}{R^3}$ $q-q' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}q''$ $q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$

$\boxed{2q = q''\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}$

$\boxed{q' = \left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}-1\right)q}$

$\boxed{q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q}$ $\boxed{q' = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q}$

$\left\{\varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 R}+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{q}{\varepsilon_2 R'}\right\}$ $z>0$ $\left\{\varphi_1 = \frac{2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{q}{R}\right\}$ $z<0$

~~Рас~~ Решение нашей задачи

При $\varepsilon_1\to\infty$ $\varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 R}-\frac{q}{\varepsilon_2 R'}$, $\varphi_1 = 0$.

$\vec F = q\vec E\big|_{z=0} = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{q^2}{\varepsilon_2}\frac{\vec R'}{(R')^3}\Big|_{R'=2d} = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\frac{q^2}{\varepsilon_2(2d)^2}\vec n$

Если $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ то $\vec F\parallel\vec n$ (заряды отталкиваются от границы раздела)

Если $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ то заряды притягиваются к границе.

Если $\varepsilon_1\to\infty$ $\vec F = -\frac{q^2}{\varepsilon_2(2d)^2}\vec n$.

Посчитаем плотность связаных поверхн. зарядов

$\sigma_{связ} = P_{1n}-P_{2n}\big|_{z=0} = \frac{\varepsilon_1-1}{4\pi}E_{1n} - \frac{\varepsilon_2-1}{4\pi}E_{2n}\big|_{z=0} = \left\|\ast\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right\|$

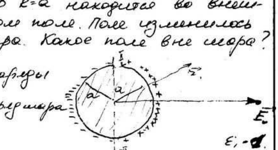
$= \frac{\varepsilon_1-1}{4\pi}\frac{1}{\varepsilon_1}D_{1n} - \frac{\varepsilon_2-1}{4\pi}\frac{1}{\varepsilon_2}D_{2n}\big|_{z=0} = \|$ на границе $D_{1n}=D_{2n}$ $\| =$

$= \frac{D_{1n}}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\Big|_{z=0} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{D_{1n}}{4\pi}\Big|_{z=0}$

Если $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ - никакого поверхностного связ. заряда нету.

N3 Проводящий шар $r=a$ находится во внешнем электрическом поле. Поле изменилось при внесении шара. Какое поле вне шара?

На шаре появляются заряды



$\varphi(a)=0$ $q=0$ - полный заряд шара

$\Delta\varphi = 0\big|_{r\ge a}$

19 $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, φ_0 - потенц. поля без шара

$\varphi_0 = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r})$ $\quad \varphi = -(\vec{E}_0 \vec{r}) + \varphi' \to \Delta\varphi' = 0$

φ' - на бесконечности обращается в нуль

Граничн. условия: $1) \begin{cases} \varphi'(\infty) = 0 \\ \varphi_0 + \varphi'|_{r=a} = 0 \end{cases}$

Решение φ' - бесконечное множество:

$\frac{\vec{A}}{r}$, $(\vec{A}\nabla)\frac{1}{r}$ $\quad A_i B_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\frac{1}{r}$ - решения на бесконечности

$\varphi' = A(\vec{E}_0\nabla)\frac{1}{r} = -(\vec{E}_0 \vec{r})\frac{A}{r^3}$

$\varphi_0 + \varphi'|_{r=a} = -(\vec{E}_0 \vec{r})(1 + \frac{A}{r^3})|_{r=a} = 0$

Тогда запишем: $\varphi = -(\vec{E}_0 \vec{r})(1 - \frac{a^3}{r^3})$ — условия теоремы выполнены

$\varphi' = a^3 \frac{\vec{E}_0 \vec{r}}{r^3} = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{3}{4\pi} \frac{\vec{E}_0 \vec{r}}{r^3} = V \frac{\vec{P} \vec{r}}{r^3}$

$\vec{P}$ - дипольный момент единицы объема вектор поляризац.

$\boxed{\vec{P} = \frac{3}{4\pi}\vec{E}_0}$ в проводящем шаре (он поляризован)

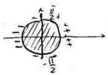
$\sigma_S = \frac{D_n}{4\pi} = \frac{(-1)}{4\pi}\vec{n}(\mathrm{grad}\,\varphi)|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi}\vec{n}(\vec{E}_0 \vec{r})[\mathrm{grad}(\frac{a^3}{r^3})]|_{r=a}$

$= \frac{3}{4\pi}\vec{E}_0 \vec{n} = \boxed{\frac{3}{4\pi}E_0 \cos\alpha = \sigma_S}$

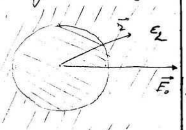
поверхностный заряд зависит от угла

1) при $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos\alpha \ge 0$. - положит. заряд

2) при $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$ $\quad \cos\alpha \le 0$



N4 Есть диэлектрик $(\varepsilon_2, \vec{E}_0)$. Вырезаем из него шарик и заполним его другим диэлектриком. (может быть даже анизотропный)



$\varphi_2 = -(\vec{E}_0 \vec{r})(1 + \frac{A}{r^3})$ - как и для предыдущей задачи

На границе двух диэлектриков могут быть только связанные поверхностные заряды.

$\sigma = \mathrm{div}\,\vec{D} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ik}E_k = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}\varepsilon_{ik}$ — услов.

Нужно решить у-ние с граничн. условиями:

1) $\varphi(\infty) = 0$ $\quad$ 2) $\varphi_1 = \varphi_2|_{r=a}$.

Для решения задачи воспользуемся Т° единственности

$\boxed{\varphi_1 = -B(\vec{E}_0 \vec{r})}$ - удовлетворяет усл. (+).

(Внутри любой выпуклой фигуры при заданном поле $\vec{E}_0$ - решение имеет вид

$\varphi_1 = -(\vec{E}_0 \vec{r})(1 + \frac{A}{a^3})$ $\quad \varphi_2 = -(\vec{E}_0 \vec{r})(1 + \frac{A}{a^3})$

Эл поле внутри шара однородно, значит и вектор индукции тоже. Найдем его на границе, тем самым найдем его во всем пространстве.

$D_{1n} = D_{2n}|_{r=a}$ $\quad \cancel{\vec{E}_2 = \vec{E}_0 - A\frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{E}_0 \vec{r})}$

$\vec{E}_2 = \vec{E}_0(1 + \frac{A}{r^3}) - (\vec{E}_0 \vec{r})\frac{3A\vec{r}}{r^5} = \vec{E}_0 - A\frac{3(\vec{E}_0 \vec{r})\cdot\vec{r} - r^2\vec{E}_0}{r^5}$

$\vec{E}_1 = +\vec{E}_0(1 + \frac{A}{a^3})$

$(\vec{D}_1 \vec{n} = \vec{n}\vec{D}_2|_{r=a} \to$ $\quad \vec{D}_1 \vec{n} = \varepsilon_2(\vec{n}\vec{E}_0)(1 - \frac{2A}{a^3})$

21 $\vec{n}\{\vec{D}_1 - \varepsilon_2 \vec{E}_0 (1 - \frac{2A}{a^3})\}\big|_{r=a} = 0$

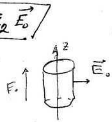
$\vec{D}_1 = \varepsilon_2 (1 - \frac{2A}{a^3}) \vec{E}_0$ +

$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 (1 + \frac{A}{a^3}) \big| \cdot 2\varepsilon_2$ для шара

$\vec{D}_1 + 2\varepsilon_2 \vec{E}_1 = 3\varepsilon_2 \vec{E}_0$ $\boxed{\frac{1}{3}(\vec{D}_1 + 2\varepsilon_2 \vec{E}_1) = \varepsilon_2 \vec{E}_0}$

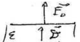
1) Для цилиндра $\boxed{\frac{1}{2}(\vec{D}_1 + \varepsilon_2 \vec{E}_1) = \varepsilon_2 \vec{E}_0}$

при $\vec{z} \perp \vec{E}_0$



2) при $\vec{z} \parallel \vec{E}_0$ $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$

3) Для плоскопараллельной пластинки $\vec{D} = \vec{E}_0$



Для любой выпуклой фигуры это линейная комбинация

$\boxed{\vec{D}_1 + a\vec{E}_1 = b\vec{E}_0}$

$\vec{D}_1 + 2\varepsilon_1 \vec{E}_2 = 3\varepsilon_2 \vec{E}_0$ $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$ $\vec{E}_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \vec{E}_0$

$1 + \frac{A}{a^3} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \cdot 2 + \varepsilon_1} a^3}$

{Статическая электрическая поляризация диэлект.

1) Диэлектрики с неполярными молекулами (квазиупругие) нет собственного момента. (простейшие газы) (O_2, N_2).

2) С полярными молекулами, имеют собственные дипольные моменты (H_2O, NH_3)

1). $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, α - коэфиц. поляризуемости диэлектриков

Доказано, что $\vec{d} = \beta \vec{E}$, тогда $\vec{P} = n\vec{d} = n\beta \vec{E}$.

β - поляризуемость молекулы $\alpha = n\beta \neq \alpha(t^\circ)$

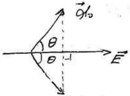
22 2) Изменение энергия диполя $U = -\vec{d}\vec{E}$, $\vec{K}_E = \vec{d} \times \vec{E}$ момент силы.

dW - вероятность нахождения диполя в угле телесном

$dW = C \exp\{-\frac{U}{kT}\} dO$ $\int dW = \frac{C}{4\pi} \int e^{-\frac{U}{kT}} dO = 1$

d_0 - собств. дипольн. момент

Если усреднить по единице объема:



$\overline{d}_\perp = 0$ $\overline{d}_\parallel \neq 0$.

$\overline{d}_\parallel = d_0 \cdot C \int e^{-\frac{U}{kT}} \cos\theta \, dO$

$U = -\frac{\vec{E}\vec{d}_0}{kT} = -\frac{E d_0}{kT} \cos\theta$ Пусть $\frac{E d_0}{kT} = \gamma_E = \mathrm{Const}$

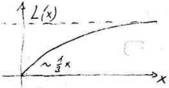
$\overline{d}_\parallel = d_0 \frac{\int_0^\pi e^{\gamma\cos\theta} \cos\theta \sin\theta \, d\theta}{\int_0^\pi e^{\gamma\cos\theta} \sin\theta \, d\theta}$

$J_0 = \int_0^\pi e^{\gamma\cos\theta} \sin\theta \, d\theta = \int_{-1}^{1} e^{\gamma x} dx = \frac{2}{\gamma_E} \operatorname{sh}\gamma_E$

$\int_0^\pi e^{\gamma\cos\theta} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{\partial}{\partial\gamma_E} J_0 = \frac{2}{\gamma_E}\left(\operatorname{ch}\gamma_E - \frac{\operatorname{sh}\gamma_E}{\gamma_E}\right)$

$\boxed{\overline{d}_\parallel = d_0 L(x)}$ $\boxed{L(x) = \operatorname{cth}(x) - \frac{1}{x}}$ ф-я Ланжевена

$x \ll 1$: $L(x) = \frac{x}{3}$, при $x \gg 1$ $L(x) = 1$. $L'(x)\big|_{x \ll 1} = \frac{1}{3}$



— График ф-и Ланжевена

Для полярных диэлектриков

1) $\gamma_E \ll 1$ $P = n d_0 \frac{d_0 E}{3kT} = \frac{n d_0^2}{3kT} E$ $\boxed{\alpha = \frac{n d_0^2}{3kT}}$ Ф-ла Дебая Ланжевена

$\boxed{\varepsilon = 1 + \frac{4\pi n d_0^2}{3kT}}$ - зависимость $\varepsilon(t)$. для полярн. молек

23 2) $\gamma_E \gg 1$ $P = n d_0$, $\gamma_E > 1$ $\vec d_0 = e\vec r$

$E > \frac{kT}{d_0} = \frac{1{,}37\cdot10^{-16}\frac{эрг}{град}\cdot 300^\circ K}{4{,}8\cdot10^{-10}\cdot10^{-8}} = 10^4$ Эрстед $= 3\cdot10^6 \frac{В}{см}$

$E \sim \frac{\varphi}{R} = \frac{1В}{1см}$ Эрстед $= \frac{1 СГС_\varphi}{1 см} \cdot \frac{300 В}{1 см} = 300\frac{В}{см}$.

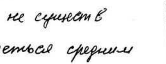
Постоянное поле $E = 1\cdot10^6 \frac{В}{см}$ – не существ.

Магнитность вещества определяется средним магнитным моментом

Парамагнетики, Ферромагнетики, Антиферомагнет.
Диамагнетики – нет собств. магн. момента

$M = -\vec m\vec H$, $\vec K_H = \vec m\times\vec H$ – момент сил

Тепловое действие – дезориентирует
Поле H – ориентирует



$\overline{m_\perp}=0$ $\overline{m_\parallel}=0$.

Ф-ла Больцмана $dW = Ce^{-\frac{U}{kT}}dO$

$-\frac{U}{kT} = \frac{m_0H}{kT}\cos\theta$ $\gamma_H = \frac{m_0H}{kT}$, $\overline{m_\parallel} = m_0 L(\gamma_H)$

$M = nm_0L(\gamma_H)$.

1) $\gamma_H \ll 1$ $M = nm_0\frac{\gamma_H}{3} = \frac{m_0^2 n}{3kT}H$, $M\chi = H$

$\boxed{\chi_{парамагнетика} = \frac{nm_0^2}{3kT}}$ – Закон Кюри   обычно $\chi\sim10^{-3},10^{-4}\ll1$.

2) $\gamma_H \gg 1$ – в случае насыщения $M = nm_0$.

Рассмотрим Диамагнетики (общ. свойства)

$\frac{d\vec M}{dt} = \vec K$ – ур-ние моментов

$\vec M$ – мех. мом. $\vec K$ – момент сил

24

Финитно-движущаяся сис-ма зарядов прецессирует с Ларморовской частотой.

$\frac{d}{dt}\sum_a m_a(\vec R\times\vec v) = \sum\vec R\times\vec F$

$\vec R$ – расстояние до точки набл.

$\frac{d}{dt}\sum\vec R\times\vec p = \sum\vec R\times\vec F =$

$\| \vec E(\vec R) = \frac{\vec R}{R}E(R). \|$

$\vec F$ – сила Лоренца $\| = \sum\vec R\times\{q_a\vec E + \frac{q}{c}\vec v\times\vec H\} = \| \vec v = \frac{d\vec R}{dt} \|$

$= \sum q\vec R\times\{\overset{0}{\frac{\vec R}{R}E(R)} + \frac1c\vec v\times\vec H\} = \frac1c\sum\vec R\times(\vec v\times\vec H) =$

$\| \vec R\times(\vec v\times\vec H) = \vec v(\vec R\vec H) - \vec H(\vec v\vec R) = \frac12\vec v(\vec R\vec H) + \frac12\frac{d}{dt}\vec R(\vec R\vec H) - \frac12 \dots$

$- \frac12\vec R(\vec v\vec H) - \frac12\vec H\frac{dR^2}{dt} = \frac12(\vec R\times\vec v)\times\vec H + \frac{d}{dt}\frac12\underbrace{\{\vec R(\vec R\vec H) - \vec R^2\vec H\}}_{\vec R\times(\vec R\times\vec H)} \|$

$\boxed{\frac{d}{dt}\{\vec M - \frac{1}{2c}\sum q\vec R\times(\vec R\times\vec H)\} = \vec m\times\vec H}$ $\vec m = \sum\frac{1}{2c}q(\vec R\times\vec v)$

В центральном поле

Это применяется к полуклассическому описанию атома, e^- совершают финитное движение.

$\{\frac{q}{m} = \frac{e}{m}$ – const $v \ll c\}$ – финитное

Допустим что $\vec E = 0$, тогда заряды движ. под действием МП.

$\frac{d\vec p}{dt} = \frac{q}{c}\vec v\times\vec H$ $\frac{d}{dt}(\vec p - \frac{q}{c}\vec R\times\vec H) = 0$.

$\frac{d}{dt}\{\sum\vec R\times\vec p - \frac12\sum\vec R\times\vec p\} = \vec m\times\vec H$ $\vec m = \frac{e}{2mc}\vec M$.

$\frac{d}{dt}\frac12\sum\vec R\times\vec p = \vec M\times\frac{e\vec H}{2mc}$ $\boxed{\frac{d\vec M}{dt} = \vec M\times\vec\omega_H}$ – циклотронная частота

$\vec\Omega^L = -\frac{e}{2mc}\vec H$ – ларморовск. частота

$\vec M = \Sigma m \vec R \times \vec v$ $\qquad \frac{d}{dt}\{M_\alpha - J_{\alpha\beta}\Omega_\beta^{(L)}\} = (\vec\Omega^{(L)} \times \vec M)_\alpha$

$-\frac{1}{2c}\Sigma \frac{q}{m} m\{R_\alpha R_\beta - R^2\delta_{\alpha\beta}\}\cdot H_\beta = \underline{\Sigma m(R^2\delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta)}\Omega_\beta^{(L)} =$

$= J_{\alpha\beta}\Omega_\beta^{(L)}$

$\boxed{J_{\alpha\beta} = \Sigma m\{R_\alpha R_\beta - R^2\delta_{\alpha\beta}\}}$ – тензор моментов инерции системы частиц

Движение финитное, тогда мы можем усреднить по времени наше уравнение.

$\tau_a \ll \tau \ll \frac{1}{\Omega_{(L)}}$ ← период движение с ларморовой частотой (слабое магн. поле).

характерн. атомн. времена

$z \uparrow \vec\Omega^{(L)}$

① O_x: $\frac{d}{dt}\left(\overline{M_x} + \Sigma m \overline{xz}\,\Omega^{(L)}\right) = -\Omega_{(L)}\overline{M_y}$

② O_y: $\frac{d}{dt}\left(\overline{M_y} + \Sigma m \overline{yz}\,\Omega^{(L)}\right) = \Omega^{L}\overline{M_x}$

изменен. поперечн. составл.

③ O_z: $\frac{d}{dt}\left(\overline{M_z} - \Sigma m \overline{(x^2+y^2)}\,\Omega^{(L)}\right) = 0$

$\overline{z} = Const$, $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$, $\overline{xz} = 0$, $\overline{yz} = 0$.

$$\begin{cases} \text{①}\ \frac{d\overline{M_x}}{dt} = -\Omega^{(L)}\overline{M_y} \\ \text{②}\ \frac{d\overline{M_y}}{dt} = \Omega^{(L)}\overline{M_x} \ \Big|\cdot i \end{cases} + \qquad \frac{d}{dt}\left(\overline{M_x} + i\overline{M_y}\right) = i\Omega^{(L)}\left(\overline{M_x} + i\overline{M_y}\right)$$

$$\begin{cases} M_x = M_{0\perp}\cos(\Omega^{(L)}t + \alpha_0) \\ M_y = M_{0\perp}\sin(\Omega^{(L)}t + \alpha_0) \end{cases}$$

У диамагнетиков $M_{0\perp} = 0$, нет таких прецессий

$\overline{M_z} - \Sigma m(\overline{x^2} + \overline{y^2})\Omega^{(L)} = M_{0z}$, $M_{0z} = 0$ - диамагнет.

$\overline{M_z} = \Sigma m(\overline{x^2} + \overline{y^2})\Omega^{L} \ \Big|\ \frac{e}{2mc}$ - гиромагнитное соотношение

$\cancel{\overline{m_z} = \Omega^{(L)}\frac{m}{q}}$

$\overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} = r_Б^2$ $\qquad \overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3} r_Б$ - Боровский радиус

$\boxed{\overline{m_z} = \Omega^{(L)}\frac{e}{2mc}\frac{m}{q}\frac{2r_Б^2}{3}\Sigma q}$ - для диамагнетика

$\vec\Omega^{(L)} = -\frac{e\vec H}{2mc} = \vec e_z\Omega^{(L)}$

$\overline{m_z}\vec e_z = -\frac{e\vec H}{2mc}\cdot\frac{e}{2mc}\frac{m}{e}\frac{2}{3}r_Б^2 Ze = -\frac{Ze^2 r_Б^2}{6mc^2}\vec H$

$\vec M = n\vec m = \chi\vec H$ $\qquad \boxed{\chi_{диам} = -\frac{nZe^2 r_Б^2}{6mc^2}}$

Нет зависимости от T $\chi \neq \chi(T)$

Покажем что диамагнетизм незначителен по сравнению с парамагнетизмом

$m_{пар} = \frac{e}{2mc}M = \| M = \hbar\sqrt{L(L+1)} \sim \hbar \| \sim \frac{e\hbar}{2mc}$ - магнетон Бора.

$m_{диа} = \frac{Ze^2 r_Б^2}{6mc^2}H$

$\sim 10^4 \cdot 10^6 \frac{1}{ZH}$

$\frac{m_{пара}}{m_{диа}} \sim \frac{e\hbar}{2mc}\cdot\frac{6mc^2}{e^2 r_Б^2}\frac{1}{ZH} \sim \frac{\hbar c}{e^2}\frac{e}{r_Б^2}\frac{1}{ZH} = 137\cdot\frac{4{,}8\cdot 10^{-10}}{10^{-16} ZH}$

Т.к. $H \sim 10^4$ уже трудно зделать по $10^{10}\frac{1}{ZH} \gg 1$.

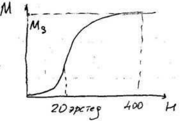
1) Здесь магнитный момент, что появляется направлен против поля

2) Диамагнетизм << Парамагнетизм

3) $\chi \neq \chi(T)$ - нет зависимости от температуры

Фeромагнетики

Здесь $\vec{B} = \mu(\vec{H}) \cdot \vec{H}$, $M = M(H)$ - намагниченость



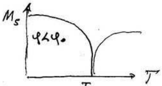
Для ферромагнетика весь обьем разбивается на маленькие обьемчики.
Атомы без поля имеют собств. магнитный момент.
В этом обьемчике магн. моменты однонаправлены.
Т.е. есть магн. момент.
В целом обьеме средний магнитный мом. $= 0$.

$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$ $\quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$,

Поле Вейса есть у ферромагнетика, что приводит к внутренему взаимодействию.

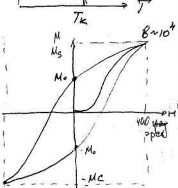
Поле Вейса происходит из спиновых моментов атомов

T_K - температура (точка) Кюри



при $T > T_K$ $\boxed{\chi = \frac{C}{T - T_K}}$ - Закон Кюри Вейса

Процесс намагничевания необратим



Получаем Петлю Гистерезиса
При перемагничевании выделяеться тепло. Можно вычислить работу

$dw = \frac{\vec{H} d\vec{B}}{4\pi}$ $\quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, $\quad d\vec{B} = 4\pi d\vec{M}$

Работа: $A = \omega V \oint \vec{H} d\vec{M}$

$M = n m_0 L(\gamma)$ - намагниченость

$\vec{H}_{эффект} = \vec{H} + b\vec{M}$ ↗ внутримолекулярное поле

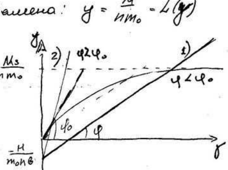
$\gamma = \frac{m_0 H_{эф}}{kT} = \frac{m_0 (H + bM)}{kT}$, m_0 - магн. момент

$\frac{kT}{m_0}\gamma = H + bM \quad \Big| \cdot \frac{1}{n m_0}$

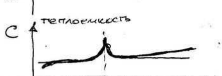
Замена: $y = \frac{M}{n m_0} = L(\gamma)$

$$\begin{cases} y = \frac{kT}{n m_0^2 b}\gamma - \frac{H}{n m_0 b} \\ y = L(\gamma) \end{cases}$$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{kT}{n m_0^2 b}$



Вещество может находится в ферромагнитном и диамагнитном состоянии



При изменении на $-\frac{H}{n m_0 b}$ прямая пересекает $L(\gamma)$ в области насыщения → очень мало

1) $\boxed{M_s = n m_0 L\left(\frac{m_0 b M_s}{kT}\right)}$ при $\varphi < \varphi_0$ - ферромагнитное сост.

2) при $\varphi > \varphi_0$ $y = \frac{\gamma}{3}$, т.е. φ_0 - это та прямая которая описывает переход от ферро к ~~диа~~ пара
$\gamma \ll 1$

$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{k T_{кюри}}{m_0^2 n b} = \frac{1}{3}$ $\quad \boxed{T_{кюри} = \frac{m_0^2 n b}{3k}}$

Из зависимости теплоемкости находим экспериментально $T_{кюри}$, а отсюда и $b \sim 10^4$.

$y = \frac{kT}{n m_0^2 b} 3y - \frac{H}{n m_0 b} \quad \rightarrow \quad y = \frac{T}{T_{кюри}} y - \frac{H}{n m_0 b}$

$y\left(\frac{T}{T_K} - 1\right) = \frac{H}{n m_0 b} \qquad y = \frac{T_K}{(T - T_K)\, n m_0 b} \cdot H \qquad T > T_K$

$\frac{M}{n m_0} = \frac{n m_0^2 b}{3k} \frac{H}{n m_0 b} \frac{1}{(T - T_K)} \qquad \boxed{M = \frac{n m_0^2}{3k(T - T_K)} H = \chi H}$

магн. поля от температуры

29 $\chi = \frac{nm_0^2}{3k(T-T_k)}$ — магн. восприимчивость ~~для~~ для феромагнет. в ~~диам~~ парам. состоян.

$\mu = 1 + 4\pi\chi$ — проницаемость

У ферромагнетиков все соседние моменты направлены одинаково, у антиферромагнетиков направления чередуются

Определим силу действующую на единицу объема вещества в магн. поле

$\vec f = -\text{grad}\, U$ $\quad U = -\vec m \vec h$, $\vec h$ — микроск. магн. поле

$\vec f = \text{grad}(\vec m \vec h)$ $\quad \vec f = \nabla(\vec m \vec B) = \vec m \nabla \vec B + \vec m \times \text{rot}\, \vec B$

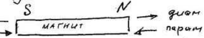
$\boxed{\vec F = (\vec M \nabla)\vec B + \vec M \times \text{rot}\, \vec B}$ ‖ $\vec B = \vec H + 4\pi \vec M$ $\quad \vec M = \frac{\mu-1}{4\pi}\vec H = \frac{\mu-1}{4\pi\mu}\vec B$ ‖

$\vec F = \frac{\mu-1}{4\pi\mu}\left\{(\vec B \nabla)\vec B + \vec B \times \text{rot}\, \vec B\right\} = \boxed{\frac{\mu-1}{8\pi\mu}\, \text{grad}\, B^2 = \vec F}$

Для парамагнетика (медь) $\chi > 0$, $\chi \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$

Для диамагнетика (висмут) $\chi < 0$ $\sim 10^{-4} \div 10^{-6}$

Сила действует в сторону уменьшения поля



Это всё справедливо если по проводнику не течет ток

Постоянный ток в проводниках

Проводники при появлении ЭП возникает ток.

Проводники делятся на металлы, полупроводн., электролиты

Есть свободные заряды.

Ток проводимости ~ приложеному полю (з-н Ома)

30.

В первом приближении ионы неподвижны при ... магнитном поле (плазма)

При $E=0$ и $H=0$ e^- движутся с тепловыми скоростями.

При хаотичном движении $\langle \vec v \rangle = 0$.

При приложении ЭП, запишем ур движения:

$m\frac{d\vec u}{dt} = e\vec E$, $\vec u \approx \frac{e\tau}{m}\vec E$, τ — время свободного пробега

скорость между двумя следующ. столкновениями

$\langle \vec u \rangle = \frac{e\tau}{2m}\vec E$, тогда плотность тока $\langle \vec j \rangle = en\langle \vec u \rangle$

$\langle \vec j \rangle = \frac{ne^2\tau}{2m}\vec E = \frac{ne^2 l}{2mv}\vec E = \sigma \vec E$ ‖ $\tau = \frac{l}{|\vec v + \langle \vec u \rangle|} = \frac{l}{v}$ ‖ $\vec v \gg \langle \vec u \rangle$, $\vec v$ — тепл. скор

$\boxed{\vec j = \sigma \vec E}$ — Закон Ома в диференц. форме

$\boxed{\sigma = \frac{ne^2 l}{2mv}}$ — проводимость, в плазме $\sigma = \sigma(T)$.

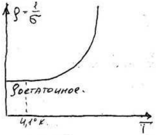
Чем больше T тем больше v и меньше l.

Для e^- газа в металлах от темпер. T зависит только l — длина свободного пробега, $l(t)$ и $v(n)$.

Существ. $T°$ Дебая для каждого проводника.

При $T > T_D$, то $l \sim \frac{1}{T} \Rightarrow \sigma \sim \frac{1}{T}$

$T < T_D$ то $l \sim \frac{1}{T^5} \Rightarrow \sigma \sim \frac{1}{T^5}$



При $T° = 4{,}1°K$ резко падает сопротивл. Явление сверхпроводимости.

Также при высоких температурах (керамика)

В сверхпроводящем состоянии внутри проводника $\vec B = \vec E = 0$ ток распространяется только по поверхности

31 Поверхностн. ток: $\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\big|_s = \frac{4\pi}{c}\vec{i}\big|_s$

$H_{критич} \sim (T - T_{критич})$

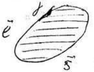
Для полупроводников $n = n_0 e^{-\frac{\Delta}{kT}}$
У них $\sigma \sim T$.

У электролитов возникает движение ионов

$\vec{u}_i = b_i \vec{E}$, b_i – подвижность ионов.

$\vec{j} = \sum q_i n_i u_i = \sum q_i n_i b_i \vec{E} = \sigma \vec{E}$

$q_i n_i b_i = \sigma$ – проводимость электролита



Для постоянных токов $\rho = const$

$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = 0.$

$\operatorname{div}(\sigma\vec{E}) = 0 = \sigma \operatorname{div}\vec{E} = 0$

Если постоянный ток то МП тоже постоянное:

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$

$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} \rightarrow \frac{1}{\sigma}\oint \vec{j}\,d\vec{l} = \oint \vec{E}\,d\vec{l} = -\oint \operatorname{grad}\varphi\, d\vec{l} = -\underbrace{\int \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi\, d\vec{S}}_{0}$

! Постоянный ток не может поддерживаться потенциальным полем.

Обобщенный диф. закон Ома: $\boxed{\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{сторон})}$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \\ \operatorname{div}\vec{j} = 0 \end{cases} \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{стор})$$

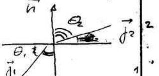
Уравнения описыв. постоянный ток. а также постоянное ЭМП.

Граничные условия: Пров.-пров. $j_{1n} = j_{2n}\big|_s$ 32.

$E_{1\tau} = E_{2\tau} \qquad \frac{j_{1\tau}}{\sigma_1} = \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}\Big|_s$ – если на границе нет источников.

Условия преломления постоянного тока на гран. раздела

$j_1\cos\theta_1 = j_2\cos\theta_2\big|_s \qquad \frac{1}{\sigma_1} j_1 \sin\theta_1 = \frac{1}{\sigma_2} j_2 \sin\theta_2\big|_s$



$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$ – Зн Преломления

В проводнике при электростат. Поле $\Delta\varphi = 0$.

$\varphi_1 = \varphi_2\big|_s \qquad \operatorname{div}(\sigma\vec{E}) = 0 : \sigma_1 E_{1n} = E_{2n}\sigma_2\big|_s$ Постоянный ток

$\sigma_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_s$ n – нормаль к поверхности

$\rho = 0 \quad \Delta\varphi = 0 \quad \varphi_1 = \varphi_2\big|_s \quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ Электростатика

$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{ст})$ 25.

Закон Джоуля-Ленца: $W = \frac{mu^2}{2} \qquad u = \frac{e\tau}{m}(\vec{E} + \vec{E}_{ст})$
енергия которую набирает e^- при последующем столкновении.

$\frac{mW}{\tau} = Q$ – енергия накоплена e^- перед последующ. столкновением

$\boxed{Q = \frac{nW}{\tau} = \frac{n}{\tau}\frac{m}{2}\frac{e^2\tau^2}{m^2}(\vec{E} + \vec{E}_{ст})^2 = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{ст})^2} = \frac{j^2}{\sigma}$

количество тепла выделяемое при протекании постоянного тока в 1 времени

$Q = \int dV\, q = \int \frac{j^2}{\sigma} dV = \int \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}_{ст})\,dV = \int \vec{j}\,\vec{E}_{ст}\,dV - \int \vec{j}\operatorname{grad}\varphi\, dV$

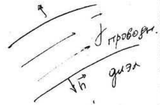
$= \int \vec{j}\,\vec{E}_{ст}\,dV - \int \{\operatorname{div}(\varphi\vec{j}) - \varphi\underbrace{\operatorname{div}\vec{j}}_{0}\}\,dV = \int \vec{j}\,\vec{E}^{ст}\,dV - \oint (\varphi\vec{j})\,d\vec{S}.$

постоянный ток

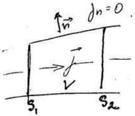
$Q = \int \vec{j}\vec{E}^{\,ст} dV - \oint_S \varphi \vec{j} d\vec{s}$, $j_n ds = 0$.

$$\boxed{Q = \int \vec{j}\vec{E}^{\,ст} dV}$$

тепло получается за счет сторонних взаимодействий



Покажем что сила тока через любое сечение проводника постоянная



$\operatorname{div} \vec{j} = 0$

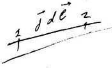
$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV = \oint_S \vec{j} d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{j} d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{j} d\vec{s}_2 + \int_{S_{бок}} \vec{j} ds =$

$= -\int_{S_1} j_n dS + \int_{S_2} j_n dS + \int_{S_{бок}} \underset{=0}{j_n} dS = -J_1 + J_2$ $\boxed{J_1 = J_2}$

Получим обобщенный 3-н Ома в интегральной форме для уединенного проводника

$\int_1^2 \frac{\vec{J} S}{\sigma S} d\vec{e} = \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{ст}) d\vec{e} =$

$= \int_1^2 (-\operatorname{grad}\varphi) d\vec{e} + \int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{e}$

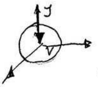


3-н Ома $\boxed{JR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}$ → $R_{12} = \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S}$, $\mathcal{E}_{12}$ - ЭДС

Сопротивление проводника на участке 1-2.

$\boxed{R = \frac{e}{\sigma S} = \rho \frac{e}{S}}$, ρ-удельное сопротивление

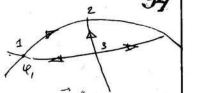
Законы Кирхгофа (распространение постоянного тока в разветвленной цепи)



$0 = \int \operatorname{div} \vec{j} dV = \oint_S \vec{j} ds = \sum_i J_i$

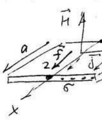
1) $\sum J_i = 0$ - алгебраич. сума токов в точке разветвл. равна нулю.

2) $\sum R_i J_i = \sum_i \mathcal{E}_i$



Эффект Холла

Магнитное поле выкидывает заряды на кромку (край) пластины. Создается σ, который препятствует дальнейшему проникновению зарядов (их отклонению)



$f = \frac{e}{c} \vec{u} \times \vec{H} = \frac{1}{cn} en \vec{u} \times \vec{H} = \frac{1}{cn} \vec{j} \times \vec{H}$

В равновесии (если нет больше отклонения) $\vec{f} + e\vec{E} = 0$.

$\vec{E} = -\frac{\vec{f}}{e} = -\frac{1}{cen} \vec{j} \times \vec{H}$ $\int_1^2 d\varphi = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{z}$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{cen} \int_1^2 jH dx = RjHa$, $\boxed{R = \frac{1}{cen}}$ постоянная Холла

Оценим разность потенциалов: $a = 1$ см, $h = 0{,}1$ мм
$J = 10A$, $H = 10^4$ Гс
тогда разность потенциалов $\Delta\varphi = 7\mu B = 7 \cdot 10^{-6} B$.

Магнитное поле создаваемое постоянным током в проводниках

$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$ Гран. усл. $H_{1\tau} = H_{2\tau}|_S$, $B_{1n} = B_{2n}|_S$

Используя векторный потенциал: $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, $\underset{\text{доп. условие}}{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$.

$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ $\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{\mu}(\operatorname{grad}\operatorname{div} A - \Delta\vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

$\boxed{\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}}$ - в однородной среде.

Среда кусочно-однородная.

Гран. условия: $A_{1\tau}=A_{2\tau}|_s$

Т.к. $\vec j$ не может быть бесконечным (ограничено) то

$\frac{1}{\mu_1}(\mathrm{rot}\,\vec A_1)|_\tau = \frac{1}{\mu_2}(\mathrm{rot}\,A_2)_\tau |_s$

Если у нас большой объем однородной среды.

$V_\infty: \vec A = \frac{\mu}{c}\int \frac{\vec j}{R}dV$

R - расстояние от элемента $\vec j dV$ до точки наблюдения

$$\vec B = \frac{\mu}{c}\int \nabla\times\frac{\vec j}{R}dV = \frac{\mu}{c}\int\nabla\frac{1}{R}\times\vec j\, dV = \frac{\mu}{c}\int\frac{\vec j\times\vec R}{R^3}dV$$

дифференцирование идет по коорд. точки наблюдения.

Задача упрощается если $\vec j = \vec e_z j(x,y)$, $\mu(x,y)$ т.е.

Среда однородна в направл. $\vec e_z$ но неоднородна по x и y.

Предполагаем, что: $\vec A = \vec e_z A(x,y)$

$\mathrm{rot}\,\vec A = \nabla\times\vec e_z A(x,y) = \nabla A\times\vec e_z$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec A\right) = \nabla\times\left(\frac{\nabla A(x,y)}{\mu(x,y)}\times\vec e_z\right) =$$

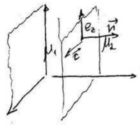
$$= \underbrace{(\vec e_z\nabla)\frac{\nabla A(x,y)}{\mu(x,y)}}_{\frac{\partial}{\partial z}\;=0} - \vec e_z\, \mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{grad}\,A(x,y)}{\mu(x,y)}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{div}\frac{\mathrm{grad}\,A(x,y)}{\mu(x,y)} = -\frac{4\pi}{c}j(x,y)} \qquad \Delta A(x,y) \ominus \frac{4\pi}{c}j(x,y)\cdot\mu$$

Граничные условия:

$A_{1\tau}=A_{2\tau}|_s$

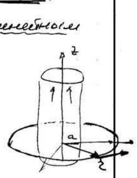
$\frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec A_1)\cdot\vec\tau = \frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec A_2)\cdot\vec\tau$



$\frac{1}{\mu_1}\{\nabla\times\vec e_z A_1(x,y)\}\vec\tau = \frac{1}{\mu_2}\{\nabla\times\vec e_z A_2(x,y)\}\vec\tau\,|_s$

$\frac{1}{\mu_1}\nabla A_1(\vec e_z\times\vec\tau) = \frac{1}{\mu_2}\nabla A_2(\vec e_z\times\vec\tau)$ $\boxed{\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial n}\Big|_s}$

Магнитное поле создаваемое прямолинейным аксиально-симметричным током.



$\vec j = \vec e_z j(r)$ $\quad \mathrm{rot}\,\vec H = \frac{4\pi}{c}j$

Рассматриваем МП при $r>a$.

$J = \int\vec j\, d\vec S = \int j\vec e_z\, r\,dr\,d\alpha$

$\int\mathrm{rot}\,\vec H\, d\vec S = \frac{4\pi}{c}J = \oint\vec H d\vec l = \int_0^{2\pi}H\vec e_\alpha\, r\, d\alpha =$

$= 2\pi H_\alpha(r)\cdot r = \frac{4\pi}{c}J.$ $\quad\boxed{H_\alpha = \frac{2J}{cr}}$

МП создаваемое линейными проводниками с током

$\vec j = j\frac{d\vec l}{dl}$ $\quad dV = dl\,dS$

$\int\vec j\, dV = \int dS\, j\, d\vec l = \int J d\vec l = J\int d\vec l$

Можно сделать замену: $\vec j dV \to J d\vec l$

$\boxed{\vec A = \frac{\mu}{c}J\oint\frac{d\vec l}{R}}$ Векторный потенциал

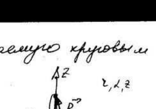
$\boxed{\vec B = \frac{\mu}{c}J\oint\frac{d\vec l\times\vec R}{R^3}}$ - МП.

Если $\vec B = \mu\vec H$ то $\boxed{\vec H = \frac{J}{c}\oint\frac{d\vec l\times\vec R}{R^3}}$ З-н Био Савара Лапласа

Нету гран условий, по этому линейным проводникам нет дела до ферромагнетиков или парамагнетиков.

Имеет значение только сила тока J, где уже учтено μ.

Найдем напряж. МП создаваемую круговым током на оси.



$\vec R = \vec e_z z - \vec e_r \cdot a$

$d\vec l = \vec e_\alpha a\, d\alpha$

$d\vec l \times \vec R = d\alpha\, a\, \vec e_\alpha \times (\vec e_z z - \vec e_r \cdot a) =$

$= d\alpha \cdot a\{z\vec e_r + a\vec e_z\}$ $\quad R^2 = a^2+z^2$

$$\vec H = \frac{J}{c}\frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}\left\{z\underbrace{\int_0^{2\pi}\vec e_r\, d\alpha}_{=0} + a\int_0^{2\pi}\vec e_z\, d\alpha\right\} = \frac{2\pi a^2 J}{c(a^2+z^2)^{3/2}}\cdot\vec e_z$$

$\vec e_r = (\vec e_x\cos\alpha + \vec e_y \sin\alpha)$ $\quad$ МП на оси.

при $z\gg a$ $\quad H\sim \frac{a^2}{z^3}$, при $z=0$ $\quad H\sim\frac{1}{a}$

Поле $\vec H$ нужно учитывать при длинах провода $0 \le H \le 2\pi a$

Энергия системы постоянных токов

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec H\vec B\, dV = \left\|\vec B = \text{rot}\,\vec A\right\| = \frac{1}{8\pi}\int \vec H\,\text{rot}\,\vec A\, dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int dV\{-\nabla(\vec H\times\vec A)\} = \frac{1}{8\pi}\int\{-\text{div}(\vec H\times\vec A) + \vec A\,\text{rot}\,\vec H\}dV =$$

$$= -\oint_{S_\infty}(\vec H\times\vec A)^0 d\vec S + \frac{1}{2c}\int \vec A\vec j\, dV$$

$\boxed{W = \frac{1}{2c}\int\vec A\vec j\, dV}$ - интегрирование только по объемам с током.

$\vec B = \sum_a \vec B_a \quad \vec H = \sum_b \vec H_b \quad W = \sum_a W_{aa} + \sum_{a>b} W_{ab}$

$W_{aa} = \frac{1}{8\pi}\int \vec H_a\vec B_a\, dV \qquad H_aB_b = H_a\mu H_b = B_a H_b$

$W_{ab} = \frac{1}{4\pi}\int \vec H_a\vec B_b\, dV = \frac{1}{4\pi}\int\vec H_b\vec B_a\, dV.$

$W_{aa} = \frac{1}{2c}\int\vec A_a\vec j_a\, dV_a \qquad W_{ab} = \frac{1}{2c}\int \vec A_b\vec j_a\, dV_a$

Векторный потенциал: $A = \frac{\mu}{c}\int\frac{j}{R}dV$, $\vec j \sim J\vec e$.

$\boxed{W_{aa} = \frac{1}{2c^2}L_{aa}J_a^2}$ (*) $\quad$ μ - магн. проницаемость

L_{aa} - коэф. самоиндукции (коэф. пропорцион)

Аналогично: $W_{ab} = \frac{1}{c^2}L_{ab}J_b J_a$ - энергия взаимодействия 2-х проводников с током

L_{ab} - коэф. взаимоиндукции 2х проводников с током

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_a L_{aa}J_a^2 + \frac{1}{c^2}\sum_{a>b}L_{ab}J_aJ_b = \frac{1}{2c^2}\sum_a\sum_b L_{ab}J_aJ_b > 0.$$

Представим энергию в виде положит. определенной квадратичной формы, где:

$L_{aa}\ge 0 \qquad L_{aa}L_{bb}\ge L_{ab}^2$

$W_{aa} = \frac{\mu}{2c^2}\int\frac{\vec j_a\vec j_a'}{R}dV_a\, dV_a' \qquad W_{ab} = \frac{\mu}{c^2}\int\frac{\vec j_a\vec j_b}{R_{ab}}dV_a\, dV_b.$

Можна сделать замену в силу линейности проводника

$\vec j_a dV_a \to J_a d\vec l_a \qquad W_{ab} = \frac{\mu}{c^2}J_aJ_b\oint\oint\frac{d\vec l_a\, d\vec l_b}{R_{ab}}$

$\boxed{L_{ab} = \mu\oint\oint\frac{d\vec l_a\, d\vec l_b}{R_{ab}}}$ коэф. самоиндукц. линейн. проводн.

$W = W_i + W_e$, $\quad$ W_e - энергия поля вне проводника

W_i - внутри пров. $\quad \boxed{W_e \gg W_i}$

$\vec H = \frac{2J}{cr}\vec e_\alpha \qquad dV_1 = r\,dr\,d\alpha\cdot 1$ (единица длины)

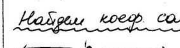
$W_{e1} = \frac{\mu}{8\pi}\int H^2 dV_1 = \frac{\mu}{4}\left(\frac{2J}{c}\right)^2\int\frac{dr}{r}$

Проводник по которому течет постоянный ток должен быть замкнутый, поле нарастает на расстояниях порядка длины проводника.

$W_{e1} = \frac{\mu}{c^2} J^2 \ln\left(\frac{l}{a}\right)$ $\quad$ $\underline{W_{e1} = \frac{1}{2c^2} L J^2}$ (*)

$L_1 = 2\mu \ln\left(\frac{l}{a}\right)$ $\quad$ $\boxed{L = 2\mu l \ln\frac{l}{a}}$

Найдем коэф. самоинд. соленоида



n - число витков
Здесь есть поверхностный ток i.

$\vec i = nJ\vec e_\alpha$ - величина поверхн. тока.

$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec H = 0 \quad (j=0) \\ \operatorname{div}\vec B = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\boxed{\nabla\times\vec H = 0}$

$\vec e_r$: $\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} = 0$ $\quad$ $(z\to\infty)$ Нет зависимости от z

$\vec e_\alpha$: $\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$ $\quad$ $H_z = Const$ $\quad$ $H_z \neq H_z(r)$ $\quad$ $\underline{H_z = C_1}$

$\vec e_z$: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r H_\alpha - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\alpha} = 0$ $\quad$ $rH_\alpha = Const$ $\quad$ $\underline{H_\alpha = \frac{C_2}{r}}$

$\nabla\vec H = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ $\quad$ $\underline{H_r = \frac{C_3}{r}}$

Эти уравн. справедливы и внутри (1) и снаружи (2)

I Среда (внутр): $H_z = C_1$ $\quad$ $C_2 = 0\ (r=0)$ $\quad$ $H_\alpha = 0$, $H_r = 0$.

II Среда (снаружи) $r\to\infty$ $\quad$ $C_1 = 0$ $\quad$ $H_z = 0$ $\quad$ $H_\alpha = \frac{C_2}{r}$ $\quad$ $H_r = \frac{C_3}{r}$

Гран. условия: $\vec n\times(\vec H_2 - \vec H_1) = \frac{4\pi}{c}\vec i\Big|_s$, $\vec n = \vec e_r$

$\vec e_r\times(\vec H_2 - \vec H_1) = \frac{4\pi}{c} nJ\vec e_\alpha\Big|_{r=a}$

1) $\vec e_\alpha$: $\underbrace{(\vec e_\alpha\times\vec e_r)}_{-\vec e_z}(\vec H_2 - \vec H_1) = \frac{4\pi nJ}{c}\Big|_{r=a}$ $\quad$ $\vec e_z(\vec H_1 - \vec H_2) = \frac{4\pi nJ}{c}$

В первой области: $\vec H_2 = 0$ $\quad$ $C_1 = \frac{4\pi nJ}{c}$

$H_{1z} = \frac{4\pi nJ}{c}$

$\vec e_z$: $(\vec e_z\times\vec e_r)(\vec H_2 - \vec H_1)\Big|_{r=a} = 0$ $\quad$ $H_{2\alpha} - H_{1\alpha} = 0\Big|_{r=a}$ $\to$ $\frac{C_2}{a} = 0$ $\quad$ $C_2 = 0$.

$H_{2\alpha} = 0$.

$H_{1n} = H_{2n}\Big|_{r=a}$ $\quad$ $H_{1r} = H_{2r} = 0 = \frac{C_3}{a}$ $\quad$ $C_3 = 0$.

Результат: $\vec H_1 = \frac{4\pi Jn}{c}\vec e_z$ $\quad$ $\vec H_2 = 0$.

W_1 (на 1 длины) $= \frac{\mu}{8\pi}\int\left(\frac{4\pi Jn}{c}\right)^2 dV_1 = \| dV_1 = \pi a^2\cdot 1\text{см} \| =$

$= \frac{\pi^2}{8\pi}\frac{16n^2J^2}{c^2}\pi a^2 \cancel{\mu} = \frac{2\mu}{c^2} n^2J^2\pi^2a^2 \equiv \frac{J^2}{2c}L$

Отсюда коэф. самоинд. $L = 4\pi^2\mu n^2a^2$

С $2\pi anh$ $\quad$ $L_h = 2\pi\mu nal$

$W = \frac{\mu}{2c}\int\vec A\,\vec j_a\,dV_a = \frac{\mu}{2c}\sum_a J_a\oint\vec A\,d\vec l_a = \frac{\mu}{2c}\sum_a J_a\int_{S_a}\underbrace{\operatorname{rot}\vec A}_{\vec B}\,d\vec S_a =$

$= \boxed{\frac{\mu}{2c}\sum_a J_a\Phi_a = \frac{1}{2c^2}\sum_{a,b} L_{ab}J_aJ_b}$ $\quad$ Φ_a - поток полной магн. индукции через проводник

$\Phi_a = \frac{1}{c}\sum_b L_{ab}J_b + \Phi_{a\,\text{внешнего поля}}$

Переменные токи и поля распространяющиеся в среде

Сильно связаны с частотой и св-вами среды
Рассмотрим поле в больших проводниках в квази стационарном случае.

$\mathrm{rot}\, \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t}$ $\quad$ $\mathrm{rot}\, \vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j$

$\mathrm{div}\, \vec D = \rho 4\pi$ $\quad$ $\mathrm{div}\, \vec B = 0$

Для массивного проводника нужно записать условия внутри и снаружи

Вне проводника $\vec j = 0$.

а) $\mathrm{rot}\, \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t}$ $\quad$ б) $\mathrm{rot}\, \vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t}$

$|\mathrm{rot}\, \vec E| \sim \frac{E}{\ell}$ $\quad$ $\left|\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t}\right| \sim \frac{\mu\omega}{c} H$ $\quad$ $E \sim \frac{\mu\omega\ell}{c} H$

1) Условие квазистационарности: $\lambda \sim \frac{c}{\omega} \gg \ell$.

$\boxed{\omega \gg \frac{c}{\ell}}$ $\quad$ $E \sim \frac{\mu\omega\ell}{c} H \ll H$.

Очень малое индукционное ЭП.

б) $|\mathrm{rot}\, \vec H| \sim \frac{H}{\ell}$ $\quad$ $\left|\frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t}\right| \sim \frac{\varepsilon\omega}{c} E \sim \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\ell H \ll 1 \cdot H$

Отсюда в массивных проводниках (вблизи)

$\mathrm{rot}\, \vec E_{стац} = 0$ $\quad$ $\mathrm{rot}\, \vec H_{стац} = 0$.

II Условие квазистационарности: Считаем, что σ, ε, μ такие же как и в постоянном поле

Тогда $T \gg \tau$, τ-время формирования проводимости диэл. и магн. проницаемости

Пока поле изменилось проводимость установилась.

$\boxed{\omega \ll \frac{1}{\tau_{своб\ проб}}}$ $\quad$ σ, ε, μ - как и для постоянных полей и токов.

III. Условие квазистационарности: $\left|\frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t}\right| \ll \left|\frac{4\pi}{c}\vec j\right|$

Ток смещения от. мал по сравнению с током проводимости

$\varepsilon\omega E \ll 4\pi\sigma E$ $\quad$ $\boxed{\omega \ll \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}}$

$\mathrm{rot}\, \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t}$ $\quad$ $\mathrm{rot}\, \vec H = \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t}}\ \frac{4\pi}{c}\sigma\vec E$, $\quad \vec j = \sigma\vec E$ $\quad \mathrm{div}\, \vec j = 0$

Справедливо внутри проводника

$\mathrm{rot}\, \frac{1}{\sigma}\vec j = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \;\Big|\; \frac{4\pi}{c}$

$\boxed{\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\, \vec H\right) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \vec B}{\partial t}}$ — уравнение для квази стацион. случая.

σ_1, σ_2 - Const $\quad$ Если кусочногладкая система

Тогда $\Delta \vec H = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec B}{\partial t}$, если $\mu \approx 1$ $\quad \Delta \vec H = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}$.

Граничн. условия: $\frac{1}{\sigma_1}(\mathrm{rot}\, \vec H_1)_\tau = \frac{1}{\sigma_2}(\mathrm{rot}\, \vec H_2)_\tau \Big|_s$

$H_{1n} = H_{2n} \Big|_s$

Если $\mu \approx 1$ и среда безграничная, $\sigma = \mathrm{Const}$.

$H_{1\tau} = H_{2\tau}$, $H_{1n} = H_{2n} \rightarrow \vec H_1 = \vec H_2$.

Задача: проводник в постоянном МП

$t < 0$: внутри $\vec H_0(\vec r)$.

Какое поле при выключении поля в $t = 0$.

При $t > 0$ H-? (внешнее поле = 0 при $t = 0$)

$\vec H(t, \vec r) = \vec H_m(\vec r)\, e^{-\gamma_m t}$

43 $\vec H(t,\vec r) = \vec H_m(\vec r)\, e^{-\gamma_m t}$

$\Delta \vec H_m(\vec r) = -\frac{4\pi\sigma\gamma_m}{c^2} H_m(\vec r)$.

Покажем что $\gamma_m > 0$ и $\gamma_m \in \mathbb{R}$
а также γ_m определяет естественную ортонормированую систему функций

$\mu \approx 1$ $\quad \frac{4\pi}{c^2}\gamma_m \vec H_m = \nabla\times\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\vec H_m\right)$

$\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m \int dV\, |\vec H_m|^2 = \int dV\, \vec H_m^* \cdot \left(\nabla\times\left(\frac{\mathrm{rot}\,\vec H_m}{\sigma}\right)\right) =$

$= -\int dV\, \nabla\left(\vec H_m^* \times \frac{\mathrm{rot}\,\vec H_m}{\sigma}\right) =$

$= -\int dV \left\{\nabla\cdot\left(H_m^* \times \frac{\mathrm{rot}\,\vec H_m}{\sigma}\right) - \mathrm{rot}\,H_m^* \cdot \frac{\mathrm{rot}\,\vec H_m}{\sigma}\right\} =$

$= -\oint_S \vec H_m^* \times \frac{\mathrm{rot}\,\vec H_m}{\sigma}\, d\vec S = \int dV\, \frac{|\mathrm{rot}\,H_m|^2}{\sigma}$

γ_m - положит. и вещественное,

Магнитное поле со временем должно убывать

$\boxed{\vec H(t,\vec r) = \vec H_m(\vec r)\, e^{-\gamma_m t}}$ $\quad \Delta \vec H_m = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}\gamma_m \vec H_m$

$\Delta \vec H = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec H}{\partial t}$

При заданых гран. условиях γ_m преобрет. собств. значения а H_m стает ортонормированым

$t<0$ $\quad \vec H_0(\vec r) = \sum C_m \vec H_m(\vec r)$

$t>0$ $\quad \vec H(t,\vec r) = \sum_m C_m \vec H_m(\vec r)\, e^{-\gamma_m t}$ наименьшее γ_m характ. убывание полей в среде

γ_1 - самое маленькое γ_m $\quad \tau = \frac{1}{\gamma_1}$

$|\Delta \vec H| \sim \frac{H}{l^2}$ $\quad \left|\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}\right| \sim \frac{4\pi\sigma}{c^2}\gamma_1$ $\quad \tau = \frac{4\pi\sigma l^2}{c^2}$ 44

Массивный проводник вносится в перем. магн поле с частотой ω $\quad \vec H_0 e^{-i\omega t}$

$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$ - ур-ние диффузии

t: $\delta \sim \sqrt{\chi t}$ - глубина проникновения температуры за время t

$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\sigma} t}$ $\quad t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad \delta \sim \frac{c}{\sqrt{\sigma\omega}}$

1) $\delta \gg l$ (линейн. размеры проводника)

$|\Delta \vec H| \sim \frac{H}{l^2}$ $\quad \Delta \vec H = -i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}\vec H$ $\quad \left|-i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}\vec H\right| \sim \left|\frac{\vec H}{c^2}\right| \sim \frac{H}{\delta^2}$

$\Delta \vec H = 0$ $\quad \mathrm{div}\,\vec H = 0$ $\quad \begin{cases}\mathrm{rot}\,\vec H = 0\\ \mathrm{div}\,\vec H = 0\end{cases}$ $\quad \vec H = \vec H$ стационарн.

$\mathrm{rot}\,\vec H = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec E$ - этим уравн. $\vec E$ не определяется

$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec H}{\partial t} = i\frac{\omega}{c}\vec H}$, отсюда $E \sim \omega$

Из $\mathrm{div}\,j = 0$ $\quad \boxed{\mathrm{div}\,\vec E = 0}$ индукционные поля (МП) возбуждает ЭП, отсюда токи Фуко, что нагревають проводник

2) $\delta \ll l$ $\left(\delta \gg l_{\text{своб. пробега}}\right)$ $\quad \Delta \vec H(\vec r) + k^2 \vec H(\vec r) = 0$

$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt 2}$ $\quad k^2 = \sqrt{\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}i}$

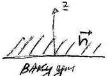
$k = \sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c^2}}(1+i) = \frac{1+i}{\delta}$ $\quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$

Если $\delta \to 0$, то $\omega \to \infty$ в этом случае в первом приближении внутри проводника E можно неучитыв а вне проводника Сверхпроводящее среда

$H_0 e^{-i\omega t}$ – тангенц. поле на границе

Вне проводн. $\vec{H}_t \vec{n}\,\big|_S = 0$ $\quad \vec{H}_z = 0$

Все величины зависят только от z



div $\vec{H} = 0$ – внутри.

$\vec{H}(z) \to \frac{dH}{d(z)} = 0 \quad H(z) = \mathrm{Const}, \ \vec{H}_z\big|_S = 0, \ C = 0$

Внутри проводника проникающее поле может иметь только тангенциальную составляющую

Внутри $\vec{H}(z) = \vec{H}_0 e^{ikz} = \vec{H}_0 \exp\{-\frac{z}{\delta}\}$

$$\vec{H}(z,t) = \vec{H}_0 e^{ikz - i\omega t} = \boxed{H_0 \exp\{-\frac{z}{\delta}\}\exp\{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)\}}$$

При $z = \delta$ – поле убывает в e-раз, δ-скин слой.

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{c}{4\pi\sigma} ik\,\vec{e}_z \times \vec{H} =$$

$$= \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}(1-i)\vec{H}\times\vec{e}_z = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)\,\vec{H}\times\vec{e}_z$$

Справедливо для плоской границы и для любой гран.

$\boxed{\vec{E}_t = \zeta(\vec{H}_t \times \vec{n})\big|_S}$ – связь между τ составл ЭП и МП.

Гран условие Леонтовича и Арцемовича

$\boxed{\zeta = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)}$ (*) поверхностный импеданс проводника

Теперь рассмотрим $\vec{H}_0$ такое что δ было веществ.

$H_y = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \quad E_x = H_0\sqrt{\frac{\omega 2}{8\pi\sigma}}\exp\{-\frac{z}{\delta}\}\cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4})$

Сдвиг фаз между колебаниями H_y и E_x на $\frac{\pi}{4}$.

$j_x = \sigma E_x$ (токи Фуко)

(*) $1 - i = \sqrt{2}\exp(-i\frac{\pi}{4})$

Выделение тепла под воздействием токов Фуко

$\boxed{Q = \int \frac{\overline{j^2}}{\sigma} dV = \int \sigma \overline{E^2}}$ – формула для низкочастотных полей

$\overline{|j^2|}$ – усреднили. тут $E \sim \omega$, $\to$ $Q \sim \omega^2$ в НЧ

В ВЧ случаях: $\boxed{Q = \oint \overline{\vec{S}}\, d\vec{S}}$

колебательная часть исчезнет при усреднении и енергия проникнувшая внутрь десипирует.

$d\vec{S} = \vec{n}\, ds = \vec{e}_z\, ds$.

$$\overline{\vec{S}_z} = \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)_z = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\{(\vec{H}\times\vec{e}_z)\times\vec{H}^*\}_z =$$

$$= \left\| \vec{e}_z|\vec{H}|^2 - \vec{H}(\underbrace{e_z\vec{H}^*}_{0})\right\| = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}|\vec{H}|^2 \qquad \vec{H}(z=0) = \vec{H}_0$$

$\boxed{Q = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\int_{z=0}|H_0|^2 dS}$ Ф-ла Рыкова $\quad Q \sim \sqrt{\omega}$ (скин эффект)

Для нахождение тепла нужно знать внешнее поле, и это не зависит от поверхности.

Скин-эффект – когда поле проникает на малую глубину

$$Q = \frac{\omega\delta}{16\pi}\int_S |H_0|^2 ds$$

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКАХ

На участке линейного проводника З-н Ома: $\mathcal{E} = R \cdot J$

Если НЧ $\mathcal{E}(t) = R J(t)$ – при низких частотах

При увеличении частоты соотношение несправедл.

$\omega \to$: $J(t) = \cancel{\hat{z}^{-1}}\ \hat{z}^{-1}\mathcal{E}(t)$, $\quad \hat{z}$ – лин. оператор.

47 Если разложить $I(t)$ и $E(t)$ в интегр. Фурье

$J(t)=J_0 e^{-i\omega t}$, тогда действие оператора:

$\mathcal{E}(\omega)=Z(\omega)\, J(\omega)$, $Z(\omega)$ - это уже число

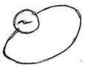
$Z(\omega)$ - Комплексн. сопрот. лин. проводника (импеданс)

Видно что $Z(0)=R$

Найдем $Z(\omega)$: Рассмотр. диф. з-н Ома в обобщенной форме $\quad \vec{j}=\sigma(\vec{E}+\vec{E}^{ст})$

$\vec{j}/\sigma = \vec{E}+\vec{E}_{ст} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}-\text{grad}\,\varphi+\vec{E}_{ст}$

Рассмотр. переменн. ток в замкнутом контуре



$\oint \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\sigma} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\oint \vec{A}\, d\vec{l}+\oint \vec{E}^{ст} d\vec{l} =$

$= -\frac{1}{c}\int_S \overset{\vec{B}}{\text{rot}\,\vec{A}}\, d\vec{S}+\oint \mathcal{E}$

$\mathcal{E} = JR+\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$ (изменение магнитного потока в 1 времени)

$\Phi=\frac{1}{2}LJ \quad \boxed{\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}+JR=\mathcal{E}}$ изменение тока в лин. замкнут. проводн.

$\mathcal{E}J = RJ^2+\frac{d}{dt}\frac{LJ^2}{2c^2}$ - з-н Сохранения энергии

работа Джоуль Тепло - изменение энерг. МП.

$A=\int \vec{j}\,\vec{E}_{ст}\, dV=\oint J\vec{E}_{ст}\, d\vec{l} = J\cdot\mathcal{E}$ — Работа

Ток постоянный $\text{div}\,\vec{j}=0$ (квазистацион)

Работа над проводником расходуется на тепло и изменение энергии МП.

$J(t)=J_0 e^{-i\omega t} \quad \mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t} \quad \mathcal{E}=\left(R-\frac{i\omega L}{c^2}\right)J$

Отсюда $Z(\omega)=R-\frac{i\omega L}{c^2}$

$J(t)=\text{Re}\left(\frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}}{Z(\omega)}\right)=\text{Re}\,\frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{R^2+\frac{\omega^2L^2}{c^4}}\,e^{-i\alpha}}$; $\text{tg}\,\alpha=\frac{\omega L}{c^2R}$ 48

$\boxed{J(t)=\frac{\mathcal{E}_0}{(R^2+\omega^2L^2/c^4)^{1/2}}\cos(\omega t+\alpha)}$ Сдвиг фаз между J и $\mathcal{E}$ на α

Задача: $t<0$ $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0$ а в $t>0$: $\mathcal{E}=0$ (выключили)

По какому закону будет меняться ток?

$\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}+JR=0 \quad \boxed{J=J_0\exp\left\{-\frac{Rc^2}{L}\cdot t\right\}}$

При выключении ЭДС ток будет exp. уменьшаться

При $\tau=1/Rc^2$ ток уменьшится в e раз

Если есть система замкнутых проводников, то они будут действовать друг на друга

$\mathcal{E}_a = R_aJ_a+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{1}{c}\sum_b L_{ab}J_b+\underbrace{\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}}_{\text{внешн. поле}}$

Если $\Phi_e=0$, то:

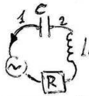
$\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\sum_b L_{ab}J_b+R_aJ_a=\mathcal{E}_a$, $\quad J_b=J_{0b}e^{-i\omega t}$

$\mathcal{E}_a=\sum_b Z_{ab}(\omega)J_b \quad \boxed{Z_{ab}=R_a\delta_{ab}-\sum_b\frac{i\omega L_{ab}}{c^2}}$

Матрица импедансов при действии системы пров.

Рассмотрим разомкнутый комплекс проводн.

$\vec{j}=(\vec{E}+\vec{E}_{ст})\sigma=\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}-\text{grad}\,\varphi\right)+\vec{E}_{ст}$



$\int_1^2 \frac{\vec{j}}{\sigma}\, d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \vec{A}\, d\vec{l}-(\varphi_2-\varphi_1)+\int_1^2 \vec{E}_{ст}\, d\vec{l}$

Так как конденсат ≪ длины пров. то: $\oint_1^2 \vec{A}\, d\vec{l}$ (замкнутый)

$JR=-\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{q}{C}+\mathcal{E}_{12}$ (ЭДС на участке 1,2)

$JR = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{q}{C} + \mathcal{E}_{12}$

Пластины конденсатора источники и стоки

$\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ — поток собств. магн. поля через $\vec{e}$ $\quad \Phi = \frac{1}{c}LJ$

$$\boxed{\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} + JR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}} \qquad J(t) = \frac{dq}{dt} \text{ (на пластинах конденсат)}$$

$J = J_0 e^{-i\omega t}$ $\quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$ $\quad q = q_0 e^{-i\omega t}$, $J = -i\omega q$ $\quad q = \frac{i}{\omega}J$

$$\mathcal{E} = \left(R - \frac{i\omega L}{c^2} + \frac{i}{\omega C}\right)J \qquad \boxed{Z(\omega) = R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Понятие импеданс при наличии разрыва (емкости)

Получим закон сохранения энергии

$$\boxed{\mathcal{E}J = \frac{L}{c^2}\frac{dJ^2}{dt} + RJ^2 + \frac{d}{dt}\frac{q^2}{2C}}$$

RJ^2 — тепло, $\quad \frac{d}{dt}\frac{L}{c^2}J^2$ — изменение энергии МП в 1 врем.

$\frac{d}{dt}\frac{q^2}{2C}$ — измен. энергии ЭП между пластинами конденсатора в 1 времени

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\sum_a \varphi_a q_a} \text{ — энергия ?}$$

При $\rho = 0$ $\quad U_C = \frac{1}{2}\sum_a \varphi_a q_a = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$

Если $q_1 = -q_2 = q$ $\quad \left\{U_C = \frac{q}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q^2}{2C}\right\}$ энергия конденсат.

$\mathcal{E} = Z(\omega)J$, $\quad Z(\omega) = R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)$

$$J(t) = \mathrm{Re}\,\frac{\mathcal{E}(t)}{Z(\omega)} = \mathrm{Re}\,\frac{\mathcal{E}_0 \exp(-i\omega t)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{-i\alpha}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R}{\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}}$$

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}_{\text{реактивное сопротивление}}}}\cos(\omega t - \alpha)$$

Сдвиг фазы α между $J(t)$ и $\mathcal{E}(t)$.

Так как у нас линейное диференц. ур-ние II-ого порядка, то у нас происходят колебательн. процессы

$$\frac{L}{c^2}\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

При $\mathcal{E} = 0$: $\quad Z(\omega)J = 0$, $J \neq 0$, $\boxed{Z(\omega) = 0}$ — уравнение определяющ. частоты собственных колеб.

$$R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \quad \Big/ \cdot i\omega\frac{c^2}{L}$$

$$\omega^2 - i\frac{Rc^2}{L}\omega - \frac{c^2}{LC} = 0. \qquad \omega_{1,2} = -i\frac{Rc^2}{2L} \pm \sqrt{-\left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2 + \frac{c^2}{LC}}$$

1) $\frac{Rc^2}{2L} > \frac{c}{\sqrt{LC}}$ $\quad \omega = \omega' + i\omega''$ — чисто мнимая частота.

$J \sim e^{-i\omega'' t}$ — чисто апериодический разряд (убывает)

2) $\frac{Rc^2}{2L} < \frac{c^2}{\sqrt{LC}}$ $\quad \omega = \omega' + i\omega''$ $\quad J = J_0 e^{-\omega'' t - i\omega' t}$ $\sim \cos\omega' t$

Колебания с убывающей амплитудой.

3) Когда $R \to 0$, тогда $\omega = \omega' = \boxed{\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}}$ — Томсоновская частота

Тогда колебания незатухающие, или слабозатухающие

Система линейных контуров с током

$$RJ = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} - \frac{q}{C} + \mathcal{E} \qquad \mathcal{E}_a = R_a J_a + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{1}{c}\sum_b L_{ab}J_b + \frac{q_a}{C_a}$$

Учитывается индукция соседних контуров ($b \neq a$)

$\mathcal{E}_a = \sum_b Z_{ab}(\omega) J_b$

$$\boxed{Z_{ab}(\omega) = \left(R_a + \frac{1}{\omega C_a}\right)\delta_{ab} - \frac{i\omega L_{ab}}{c^2}}$$ матрица импеданса системы контуров

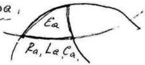
Если собств. колебания ($\mathcal{E}_a = 0$)

$\sum Z_{ab} J_b = 0$ $J_b \neq 0$ $\to \det Z_{ab} = 0$.

Отсюда находятся собственные частоты

Если хотя бы один $R_1 \neq 0$ то будет диссипация.

<u>Согласно з-ну Кирхгофа</u> для контура.



1) $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ $\sum_a J_a = 0$.

2) $\mathcal{E} = Z(\omega) J$ $\sum_a Z_a(\omega) J_a = \sum_a \mathcal{E}_a$

Для квазистацион. токов в любой точке разветвления

Электро-магнитная волна в идеальном диэл.

$\vec{j} = 0$ $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $B_i(t,\vec{r}) = \hat{\mu}_{ij} H_j(t,\vec{r})$

$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ $D_i(t,\vec{r}) = \hat{\varepsilon}_{ij} E_j(t,\vec{r})$

Диэл. проницаемость $\varepsilon_{ij} \neq \varepsilon_{ij}(\omega)$ т.е $\vec{D}(t,\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(t,\vec{r})$

Это справедливо вдали от собств. частот диэлектр

$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 H(\vec{r},t)$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}$.

$\operatorname{div}\vec{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = 0$. $-\frac{\mu_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = -\frac{\mu_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t} = 0} \qquad \boxed{\Delta\vec{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t} = 0} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Волновые уравнения

...ая плоская волна: $\vec{E}(t,x)$ $\frac{\partial^2 \vec{E}(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(t,x)}{\partial t^2} = 0$

$\vec{E}(t,x) = \vec{E_1}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \vec{E_2}\left(t + \frac{x}{v}\right)$ - против оси x

туда $\to$ сюда $\leftarrow$ (а мне?)

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ $\boxed{\Delta\vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{v^2}\vec{E}(\vec{r}) = 0}$

Распространение волны в пространстве

Рассмотр плоскую монохроматическую волну:

$\vec{E}(t,x) = \vec{E_0} e^{-i\omega(t - \frac{x}{v})} = \vec{E_0} e^{i(\frac{\omega}{v}x - \omega t)} = \vec{E_0} e^{i(kx - \omega t)}$

$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$, $\vec{k} = k\vec{e}_x$

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$, $\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$, $-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{v^2}E$

$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)\vec{E} = 0$, $\vec{E} \neq 0$ $\boxed{k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ волновой вектор.

$\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}$ - фазовая скорость волны. В среде ЭМ волна распростр. с меньшей скоростью это Максвеловская скорость

Для разреженных газов ф-ла подтверждается експерим.

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ $\vec{H} = \vec{H_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

$\operatorname{div}\vec{E} = 0$ $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ $\vec{k}\vec{E} = 0$ $\vec{k}\vec{H} = 0$ $\vec{k} \perp \vec{E}$, $\vec{k} \perp \vec{E}$.

$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\to i\vec{k}\times\vec{E} = \frac{i\omega\mu_0}{c}\vec{H}$.

$\vec{H} = \frac{c}{\mu_0}\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E} = \frac{c}{\mu_0}\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\frac{1}{\omega}\vec{k_0}\times\vec{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{k_0}\times\vec{E_0} = H$

$\vec{H_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{k_0}\times\vec{E_0}$ — волна чисто поперечная в идеальном диэлектрике

$\vec{H_0}$ и $\vec{E_0}$ колеблятся в одной фазе.

53 Энергия: $W = \frac{\vec E\vec D + \vec H\vec B}{8\pi} = W_E + W_H$

$W_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{8\pi}$ $W_H = \frac{\mu_0 H^2}{8\pi} = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{8\pi} = W_E$

Как и в вакууме $W_E = W_H$.

$\vec S = \frac{c}{4\pi}\vec E\times\vec H = \frac{c}{4\pi}\vec E\times\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec k\times\vec E\right) =$

$= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\varepsilon_0}{4\pi}\left\{\vec k_0 E^2 - \underbrace{(\vec k_0\vec E)}_{0}\vec E\right\} = \boxed{vW\cdot\vec k_0 = \vec S}$

В ид. диел. групповая скорость совпадает с фазовой

ЭМВ в реальной среде, где диссипация

$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t}$ $\mathrm{div}\,\vec B = 0$

$\mathrm{rot}\,\vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j$ $\mathrm{div}\,\vec D = \rho 4\pi$

Предположим, что $\vec j = \sigma_0\vec E$, $\vec D = \varepsilon_0\vec E$, $\vec B = \mu_0\vec H$, $\mu_0\approx 1$

$\vec E,\vec H,\vec j \sim e^{-i\omega t}$ $\mathrm{rot}\,\vec H = -\frac{1}{c}i\omega\varepsilon_0\vec E + \frac{4\pi}{c}\sigma_0\vec E$

$\mathrm{rot}\,\vec H = -\frac{i\omega}{c}\left(\varepsilon_0 + i\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}\right)\vec E \equiv -\frac{i\omega}{c}\varepsilon(\omega)\vec E$

Введем комплексную диэл. проницаем. $\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}}$

$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t}$ $\mathrm{rot}\,\vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec D'}{\partial t}$, где $\vec D = \varepsilon(\omega)\vec E$.

Введем также комплексн. магн. проницаемость:

$\mathrm{rot}\,\vec E = i\frac{\omega}{c}\mu(\omega)\vec H$ $\mathrm{rot}\,\vec H = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon(\omega)\vec E$

У нас квазистационарность и однородность:

$\mathrm{div}\,\vec B = \mu(\omega)\,\mathrm{div}\,\vec H = 0$ $\mathrm{div}\,\vec D = \varepsilon(\omega)\,\mathrm{div}\,\vec E = 0$ $\rho = 0$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec E = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec E}_{0} - \Delta\vec E = i\frac{\omega}{c}\mu(\omega)\left(-i\frac{\omega}{c}\varepsilon(\omega)\vec E\right)$

54

отсюда $\begin{cases}\Delta\vec E(\vec r) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\vec E(\vec r) = 0\\ \Delta\vec H(\vec r) + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\right)\vec H(\vec r) = 0\end{cases}$

Ищем решение в виде $\vec E(\vec r) = \vec E_0 e^{i\vec k\vec r}$

$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\right)\vec E(\vec r) = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$

$\begin{cases}\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)\\ \mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)\end{cases}$ — если учитываем $\varepsilon(\omega)$ и μ, то у нас частотная (временная) дисперсия

$\vec k = \vec k' + i\vec k''$.

$\boxed{\vec E(t,\vec r) = \vec E_0 e^{i(\vec k\vec r - \omega t)} = \vec E_0 e^{-\vec k''\vec r}\cdot e^{i(\vec k'\vec r - \omega t)}}$

Это плоская неоднородная волна, что убывает $\vec k''$ и $\vec k'$ могут иметь различные направления

$\vec k'$ — направление ЭМВ

$\vec k''$ — направление убывания амплитуды ЭМВ

При $|\mu(\omega)|\sim 1$ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)\right)$, $\vec k = \vec k' + i\vec k''$

$k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)\right)$.

1) Если $\varepsilon''(\omega) = 0$, $\varepsilon'(\omega) > 0$. - идеальный диэлектрик

2) $\varepsilon''(\omega) = 0$ $\varepsilon'(\omega) < 0$ $k = i|k|$, амплитуда експ падает

Диссипация енергии определяется мнимой частью

Волна не проникает ~~в~~ в среду где $\varepsilon'(\omega) < 0$.

Случай когда k' и k'' однонаправлены

$\mu = 1$ $\vec k = k\vec k_0$, $\vec k_0$ — 1 вектор в направлении распростр.

$\vec k = k\vec k_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}\,\vec k_0$ $\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n(\omega) + i\varkappa(\omega)$

$n(\omega)$ - показатель преломления вещества

$\varkappa(\omega)$ - коэф. поглощения вещества

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp\left\{-\frac{\omega}{c}\varkappa(\omega)\vec{\kappa}_0\vec{r}\right\} \exp\left\{-i\omega\left[t-\frac{n(\omega)}{c}\vec{\kappa}_0\vec{r}\right]\right\}.$$

$\boxed{\Gamma(\omega) = \frac{\omega}{c}\varkappa(\omega)}$ – декремент затухания

$\frac{c}{n(\omega)} = v_\varphi$ – фазовая скорость

Рассмотрим связь между ЭП и МП.

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{c}{\omega}\vec{\kappa}\times\vec{E} = \frac{c}{\omega}\frac{\omega}{c}(n+i\varkappa)\vec{\kappa}\times\vec{E}_0 \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{\omega}{c}\varkappa\vec{\kappa}_0\vec{r}\right\}\exp\left\{-i\omega\left[t-\frac{n}{c}\vec{\kappa}_0\vec{r}\right]\right\} =$$

$$= \sqrt{n^2+\varkappa^2}\, e^{i\psi}\,\vec{\kappa}_0\times\vec{E}_0 \exp\left\{-\frac{\omega}{c}\varkappa\vec{\kappa}_0\vec{r}\right\}\exp\left\{-i\omega\left(t-\frac{n}{c}\vec{\kappa}_0\vec{r}\right)\right\}$$

$\vec{\kappa}_0 = \vec{e}_x \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{H}(t,\vec{r}) = \underbrace{\sqrt{n^2+\varkappa^2}\exp\left\{-\frac{\omega}{c}\varkappa x\right\}}_{\text{амплитуда}} \cdot$

$$\cdot\, \vec{e}_x\times\vec{E}_0 \exp\left\{-i\omega\left[t-\frac{x}{c/n}\right]+i\psi\right\}$$

$$\vec{H}_0(t,\vec{r}) = \sqrt{n^2+\varkappa^2}\,\vec{e}_x\times\vec{E}_0$$

$n+i\varkappa = \sqrt{\varepsilon} \qquad n^2-\varkappa^2+2i\varkappa n = \varepsilon'+i\varepsilon'' \qquad \begin{cases} n^2-\varkappa^2 = \varepsilon' \\ 2n\varkappa = \varepsilon'' \end{cases}$

$\varkappa = \frac{\varepsilon''}{2n} \qquad n^2 - \left(\frac{\varepsilon''}{2n}\right)^2 = \varepsilon'$

$n^4 - \varepsilon' n^2 - \left(\frac{\varepsilon''}{2}\right)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad n^2_{1,2} = \frac{\varepsilon'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon''}{2}\right)^2} \quad n>0$

$n^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}+\varepsilon'\right) \qquad \underline{n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}+\varepsilon'}}$

Известно что $\varepsilon''(\omega)>0$ при $\omega>0$, $\varepsilon''(\omega)<0$, $\omega<0$.

$$\varkappa = \frac{\varepsilon''}{2n} = \frac{\varepsilon''}{2}\sqrt{2}\left(\left(\varepsilon'^2+\varepsilon''^2\right)^{1/2}+\varepsilon'\right)^{-1/2}\cdot\frac{\left(\left(\varepsilon'^2+\varepsilon''^2\right)^{1/2}-\varepsilon'\right)^{1/2}}{\left(\ \dots\dots\ \right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon''}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\dots-\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon''^2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}-\varepsilon'} = \varkappa}$$

Рассмотрим: $\underline{\underline{\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}}}$, $|\varepsilon(\omega)| \xrightarrow[\omega\to 0]{} \infty$

1) Рассмотрим когда $\varepsilon_0 \gg \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}$

$\Gamma = \frac{\omega\varkappa}{c} = \frac{\omega}{c/n}\frac{\varkappa}{n} = \frac{\omega}{v_{фаз}}\frac{\varkappa}{n} = \frac{1}{\lambda\!\!\!^-}\frac{\varkappa}{n} = \Big\| \ \lambda = \frac{2\pi v_\varphi}{\omega}, \ \lambda\!\!\!^- = \frac{v_\varphi}{\omega}$

$\Gamma\lambda\!\!\!^- = \frac{\varkappa}{n}$ – затухание на длине волны

В этом случае $n \approx \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{\varepsilon_0}$

$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right)-\cancel{\varepsilon'}} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{1}{2}\frac{4\pi\sigma_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}} = \frac{2\pi\sigma_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}}$

Отсюда: $\Gamma\lambda\!\!\!^- \approx \frac{2\pi\sigma_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_0}} = \frac{2\pi\sigma_0}{\omega\varepsilon_0} \ll 1$

Случай идеального диэл., практически нет потерь на длине волны.

2) $\varepsilon_0 \ll \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}$

$n \approx \varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon''} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}}$

$\Gamma = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma_0\omega}}{c} = \frac{1}{\delta}$ – глубина проникновения поля

Это соответствует хорошему проводнику.

Энергия: $\overline{W_E} = \frac{\overline{\vec{E}\vec{D}}}{8\pi} = \frac{\varepsilon_0\overline{E^2}}{8\pi} = \frac{\varepsilon_0}{16\pi}|E_0|^2 e^{-2\frac{\omega}{c}\varkappa x}$ – средн. энергии МП и ЭП

$\overline{W_H} = \frac{\overline{H^2}}{8\pi} = \frac{n^2+\varkappa^2}{16\pi}e^{-2\frac{\omega}{c}\varkappa x}|E_0|^2 = \frac{n^2+\varkappa^2}{\varepsilon_0}\overline{W_E}$

1) $\varepsilon_0 \gg \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} \qquad \frac{\overline{W_H}}{\overline{W_E}} = \frac{n^2+\varkappa^2}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0+o(\omega)}{\varepsilon_0} \approx 1.$

2) $\varepsilon_0 \ll \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} \qquad \frac{\overline{W_H}}{\overline{W_E}} = \frac{n^2+\varkappa^2}{\varepsilon_0} = \frac{2\varkappa^2}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\sigma_0}{\omega\varepsilon_0} \gg 1$

Энергия магн. поля $\gg$ энергии эл. поля

57 Если учесть собственные частоты

Нужно рассматривать распространение волны в среде с осцилляторами, что ориентируются по полю, получаем диполи.

$\mathcal{D} = \vec E + 4\pi \vec P$ $\qquad \vec P = \frac{\sum \vec d}{V}$ $\qquad \vec P = N\vec d$, N - к-во диполей

$$m\ddot{\vec r} = \underbrace{-k\vec r}_{\text{возвращ. сила}} + \underbrace{e\vec E + \frac{e}{c}\vec v\times\vec H}_{\text{Сила над волны}} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec r}$$ — сила лучистого трения

Т.к. $e\vec E \gg \frac{e}{c}\vec v\times\vec H$ $\qquad \ddot{\vec r} + \omega_0^2\vec r + \gamma\dot{\vec r} = \frac{e}{m}\vec E(t)$

|| где $\dddot{\vec r} = -\omega_0^2\dot{\vec r}$, $\gamma = \frac{2e^2}{3c^2 m}\omega_0^2 \ll \omega_0$ ||

|| $\vec E(t,\vec r) = E_0\exp\{-i[\vec k\vec r - \omega t]\}$, $|\vec k\vec r| \ll \omega t$ при $v \ll c$ ||

|| $\vec r(t) = \vec r_0 e^{-i\omega t}$

$$(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)\vec r_0 = \frac{e}{m}\vec E_0 \,\Big|\cdot e^{-i\omega t}$$

$$\vec r(t) = \frac{e/m}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\vec E(t), \qquad \vec d = e\vec r.$$

$$\vec P = N\vec d = \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\vec E(t)$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\right)\vec E = \varepsilon(\omega)\vec E$$

Если много разных осцилляторов, то у них отличаются m, ω_0, γ

$$\boxed{\varepsilon = 1+\sum_{\text{сорт}}\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}}$$ Диэл. проницаемость для разных сортов.

Рассмотрим разреженную среду n - небольшое

$$n + i\varkappa = \sqrt{\varepsilon} = 1+\frac{1}{2}\sum\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma} =$$

58

$$= 1+\frac{1}{2}\sum\frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2+i\omega\gamma)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$$

$$n(\omega) = 1+\frac{1}{2}\sum\frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \;\Big/\; \varkappa(\omega) = \frac{1}{2}\sum\frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}$$

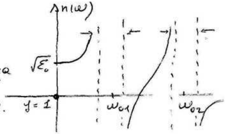
1) $|\omega-\omega_0| \gg \gamma$ $\qquad \gamma = \frac{2e^2}{3c^2m}\omega_0^2$

$$n(\omega) = 1+\frac{1}{2}\sum\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad \varkappa(\omega) = \frac{1}{2}\sum\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}\underbrace{\left(\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}\right)}_{\ll 1} \quad |\varkappa|$$

Если частота не близка к какой-нибудь собственной частоте, то поглощение маленькое.

$$n-1 = \frac{\omega_{p1}}{\omega_{01}^2-\omega^2}+\frac{\omega_{p2}}{\omega_{02}^2-\omega^2}$$

Дисперсионная картина



Здесь $\varkappa = 0$ - коэф. поглощ.

с ростом частоты

$n(\omega)$ тоже растет — нормальная дисперсия.

2) Для одной из собств. частот $|\omega-\omega_{01}| \sim \gamma$.

Остальные ω_{02} ω_{03} неучитываем из-за малости.

$$n(\omega) = 1+\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2\, 2\omega_0(\omega_0-\omega)}{4\omega_0^2(\omega_0-\omega)^2+\omega_0^2\gamma^2} = \;\Big\|\; \omega_0^2-\omega^2 = (\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega) = 2\omega_0(\omega_0-\omega)$$

$$n(\omega) = 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2\omega_0}{\omega_0^2\gamma^2}\frac{\left((\omega-\omega_0)/\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\gamma}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma/2}\right)^2} = \;\Big\|\; \text{Замена } \left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right)2 = x$$

$$= -\frac{\omega_p^2}{2\omega_0\gamma}\frac{x}{1+x^2} = n(x)-1 \qquad x = \pm 1$$

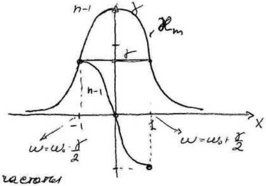
$$\varkappa(\omega) = \frac{\omega_p^2\omega_0\gamma}{2\omega_0^2\gamma^2}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma/2}\right)^2} = \frac{\omega_p}{2\omega_0\gamma}\frac{1}{1+x^2}$$

59 $\varkappa_m|_{x=0} = 2/(n-1)$

$x=-1$ $\quad \omega-\omega_0 = -\frac{\gamma}{2}$

$x=1$ $\quad \omega-\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$

Ширина полосы - γ.



Показатель преломления убывает с ростом частоты

Это аномальное повышение частоты ... полное число e^-

При $\omega \gg \omega_0$ $\quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ $\quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2}{m}\Sigma N$

частоты при которых e^- не успевает проколебаться

$$n(\omega) = 1 - \frac{2\pi e^2}{m}\frac{\Sigma N}{\omega^2} \qquad n(\omega)_{класс} = 1 - \frac{2\pi e^2}{m}\Sigma\frac{N}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$\boxed{n(\omega)_{\substack{квант\\механ}} = 1 - \frac{2\pi e^2 N}{m}\Sigma\frac{f_r}{\omega_r^2-\omega^2}}$$

ω_r - частота перехода с r-ого уровня на 0-ой $\quad \omega_r = \frac{E_r - E_0}{\hbar}$

f_r - вероятность нахожд. на этом r-ом уровне $\quad \Sigma f_r = 1$

При больших частотах $\quad \underset{\omega\gg\omega_0}{n(\omega)_{клас}} = \underset{\omega\gg\omega_r}{n(\omega)_{кв.мех}} = 1 - \frac{2\pi N e^2}{\omega^2}$ норм. дисперс.

$v_{фаз} = \frac{c}{n(\omega)} > c$

фазовая скорость превышает скорость света.

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{c}n(\omega)\right) = \frac{1}{c}\left(n + \omega\frac{dn}{d\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\left\{1 - \frac{2\pi N e^2}{m\omega^2} + \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}\right\} = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{2\pi N e^2}{m\omega^2}\right)$$

$$v_{гр} = \frac{c}{1 + \frac{2\pi N e^2}{m\omega^2}} \approx c\left(1 - \frac{2\pi N e^2}{m\omega^2}\right) = c\, n(\omega) < c$$

Распространение ЭМВ в однородной анизотропной среде 60

Удобно пользоваться другим видом уравнений Максвелла. Также вводят тензор электромагнитной проницаемости, который включает в себя и ε и μ. Также известно, что при $\omega\to\infty$, $\mu\to 1$.

$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t}$ макроскоп. поле в веществе $\qquad \mathrm{rot}\,\vec B = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{(\rho\vec v)}_{связ} + \frac{4\pi}{c}\vec j_0$ макр. м.п. в веществе

$\mathrm{div}\,\vec B = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec E = 4\pi(\overline{\rho}_{связ} + \rho_0)$

Если определить $\overline{\rho}_{связ} = \rho(\vec E, \vec B) = \rho(\vec E, \vec B(\vec E)) = \rho(\vec E)$.

$\overline{(\rho\vec v)}_{связ} = \vec j(\vec E, \vec B) = \vec j(\vec E)$

Т.е. связанные заряды возникают при появлении $\vec E$.

$\mathrm{rot}\,\vec B = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j(\vec E) + \frac{4\pi}{c}\vec j_0 \qquad \mathrm{div}\,\vec E = (\rho(\vec E) + \rho_0)$

$\mathcal{D}'(t,\vec r) \equiv \vec E(t,\vec r) + 4\pi\int_{-\infty}^{t}\vec j(t,\vec E)\,dt' \quad // t=-\infty \quad \vec E = 0 //$

$\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec E}{\partial t} + 4\pi\vec j(t,\vec E)$

Соответственно: $\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{D}}' = \mathrm{div}\,\vec E + 4\pi\int_{-\infty}^{t}\mathrm{div}\,\vec j(t')\,dt' =$

$= \mathrm{div}\,\vec E - 4\pi\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\rho(t')}{\partial t'}dt' = 4\pi(\rho(\vec E) + \rho_0) - 4\pi\rho(\vec E) = 4\pi\rho_0 = \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{D}}'$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\vec B &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j_0 \end{aligned} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\,\vec B = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{D}}' = 4\pi\rho_0 \end{cases}}$$
- ф-лы которые описыв. анизотропн. среды

$\vec{\mathcal{D}}' = \vec E + 4\pi\int_{-\infty}^{t}\vec j(\vec E, t')\,dt'$

Связь поля в данной точке в данный момент времени, с предыдущим временем, также имеют влияние други точки (нелокальная связь)

$$D_i'(t,\vec r) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec r\, \underbrace{\hat\epsilon_{ij}(t-t', \vec r-\vec r'; t, \vec r)}_{\text{оператор}} E_j(t', \vec r')$$

Наличие t и $\vec r$ говорит о нестацион. и неоднородн. Но мы не будем учитывать нестационарность и неоднородность

Если среда однородна то трансляционная симметрия $r_1 \to r_2 \to r_n$, также стационарна по времени

Пусть среда будет бесконечная, тогда можно все величины разложить в интеграл Фурье.

$$\vec E(t,\vec r) = \int \vec E(\omega,\vec k) \exp\{i(\vec k\vec r - \omega t)\}\, d\omega\, d\vec k.$$

$$\vec E(\omega,\vec k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \vec E(t,\vec r)\exp\{-i(\vec k \vec r - \omega t)\}\, dt\, d\vec r.$$

Получаем систему ур-ний относит. компонент Фурье

$D_i'(\omega,\vec k) \to E_i(\omega,\vec k)$ и находим $\hat\epsilon_{ij}$

$t-t'=t_1$, $\vec r - \vec r' = \vec r_1$ — Замена

$$D_i'(t,\vec r) = \int_0^\infty dt_1 \int d\vec r_1\, \hat\epsilon_{ij}(t_1,\vec r_1)\, E_j(t-t_1, \vec r - \vec r_1) =$$

$$= \int_0^\infty dt_1 \int d\vec r_1\, \hat\epsilon_{ij}(t_1,\vec r_1) \int d\omega\, d\vec k\, E_j(\omega,\vec k)\exp\{-i\omega(t-t_1) + i\vec k(\vec r - \vec r_1)\} =$$

$$= \int d\omega\, d\vec k\, E_j(\omega,\vec k) \exp\{-i\omega t + i\vec k\vec r\} \int_0^\infty dt_1 \int d\vec r_1\, \epsilon_{ij}(t,\vec r_1)\, e^{i\omega t_1 - i\vec k \vec r_1} \equiv$$

$$\equiv \int d\omega\, d\vec k\, D_i(\omega \vec k)\, e^{-i\omega t + i\vec k\vec r}$$

Отсюда $\boxed{D_i'(\omega,\vec k) = \epsilon_{ij}(\omega,\vec k)E_j(\omega,\vec k)}$

$$\boxed{\epsilon_{ij}(\omega,\vec k) = \int_0^\infty dt \int d\vec r\, \hat\epsilon_{ij}(t,\vec r)\exp\{i\omega t - i\vec k\vec r\}}$$

материальное ур-ние, описывающее св-ва среды.

Можно теперь перейти от системы частных производн. к системе линейных ур-ний. (алгебраических) При этом $\nabla \to i\vec k$, $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$.

Если $\vec D_i$ и $\vec E_j$ — вещественные, то $\epsilon_{ij} \in R$

тогда $\epsilon_{ij}^*(\omega,\vec k) = \int_0^\infty dt \int d\vec r\, \hat\epsilon_{ij}(t,\vec r)\exp\{-i\omega t + \vec k\vec r i\} = \epsilon_{ij}(-\omega,-\vec k)$

$\mathrm{rot}\,\vec E \longrightarrow \vec k\times\vec E(\omega,\vec k) = \frac{\omega}{c}\vec B(\omega,\vec k)$

$\mathrm{rot}\,\vec B \to \vec k\times\vec B(\omega,\vec k) = -\frac{\omega}{c}\vec D'(\omega,\vec k) + \frac{4\pi i}{c}\vec j_0(\omega,\vec k)$ — ур-ния Максвела

$\vec k\vec B = 0$ $\quad i\vec k\vec D'(\omega,\vec k) = 4\pi\rho_0(\omega,\vec k)$

$$\vec k\times(\vec k\times\vec E) = \frac{\omega}{c}\vec k\times\vec B = \vec k(\vec k\vec E) - k^2\vec E = \frac{\omega}{c}\left(-\frac{\omega}{c}\vec D' - \frac{4\pi i}{c}\vec j_0\right)$$

Переходим к тензорной записи:

$$D_i - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\left\{\delta_{ik}E_k - \frac{k_ik_k}{k^2}E_k\right\} = -\frac{4\pi i}{c} j_{0i}$$

$D_i'(\omega,k) = \epsilon_{ij}(\omega,\vec k)E_j(\omega,\vec k)$ $\quad \left\{\epsilon_{ij}(\omega,\vec k) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right)\right\}E_j(\omega,\vec k) = -\frac{4\pi i}{\omega}$

$\boxed{M_{ij}(\omega,\vec k) \equiv \epsilon_{ij}(\omega,\vec k) - \frac{c^2k^2}{\omega}\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}}$ — тензор Максвела

$M_{ij}E_j = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{0i}$ $\;/\cdot M_{ni}^{-1}$ — обратный тензор

Тогда $M_{ni}^{-1}M_{ij} = \delta_{nj} \to \boxed{E_n(\omega,\vec k) = -\frac{4\pi i}{\omega}M_{in}^{-1}j_{0i}}$

Рассмотрим собственные колеб. в анизотр. среде

$M_{ij}(\omega,\vec k)E_j(\omega,\vec k) = 0$ — определяет собств. колеб, $E_j \neq 0$

тогда $\det M_{ij} = 0$, отсюда находим зависимость $\omega = \omega(\vec k)$. $\quad M(\omega,\vec k) = \det M_{ij}(\omega\vec k) = 0$.

$\boxed{M = M' + iM''}$, нас интересует слабозатухающие колебания, т.е амплитуда волны за dt мало.

При частотах при которых есть такая волна, то волна распространяется в области прозрачности вещества

63 $\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \varepsilon'_{ij}(\omega,\vec{k}) + i\varepsilon''_{ij}(\omega,\vec{k})$.

Область прозрачности: $|\varepsilon'_{ij}(\omega,\vec{k})| \gg |\varepsilon''_{ij}(\omega,\vec{k})|$

Отсюда $|M'(\omega,k)| \gg |M''(\omega,k)|$

$M'(\omega,\vec{k}) + iM''(\omega,\vec{k}) = 0 \rightarrow \underbrace{M'(\omega,\vec{k}) = 0}_{}$, $\omega_k = \omega_k(\vec{k})$ — I приближение

II приближение $\omega = \omega_k - i\gamma_k$, $\gamma_k \ll \omega_k$

$M'(\omega_k - i\gamma_k, \vec{k}) + iM''(\omega_k - i\gamma_k, \vec{k}) = 0$

Разложим в ряд: $\underbrace{M'(\omega_k,\vec{k})}_{0} - i\gamma_k \left.\frac{\partial M'}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_k} + iM''(\omega_k,\vec{k}) = 0$

$$\boxed{\gamma_k(\omega_k,\vec{k}) = \left.\frac{M''(\omega,\vec{k})}{\frac{\partial M'(\omega,k)}{\partial\omega}}\right|_{\omega=\omega_k} = \left.\frac{\operatorname{Im} M(\omega,\vec{k})}{\frac{\partial}{\partial\omega}\operatorname{Re} M(\omega,\vec{k})}\right|_{\omega=\omega_k}}$$

$E \sim E_0 e^{-i\omega t} = E_0 e^{-i(\omega_k - i\gamma_k)t} = E_0 e^{-\gamma_k t} e^{-i\omega_k t}$ — убывание волны

$M'(\omega,\vec{k}) = 0$ — определяет $\omega_k = \omega_k(\vec{k})$

M'' — определяет убывание, γ_k.

$E_i(\omega,\vec{k}) = -\frac{4\pi i}{\omega} M^{-1}_{ij} j_{0j}$

$e_{ij}(\omega,\vec{k}) \equiv M M^{-1}_{ij}(\omega,\vec{k}) = A_{ji}$ — алгебраич. дополнение

$E_i(\omega,\vec{k}) = -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{e_{ij}(\omega,\vec{k})\, j_{0j}(\omega,\vec{k})}{M(\omega,\vec{k})}$

В обл. прозрачн: $\frac{1}{M} = \frac{1}{M'+iM''} = \frac{M'-iM''}{M'^2+M''^2} =$

$\lim_{M''\to 0}\left\{\frac{M'}{M'^2+M''^2} - i\frac{M''}{M'^2+M''^2}\right\} = \underset{\uparrow}{P}\frac{1}{M'} - i\pi \operatorname{sign} M'' \underset{\uparrow}{\delta}(M'(\omega,\vec{k}))$

главное знач. интегр.   δ-ф-я

64

$E_i^{\text{резон}}(\omega,\vec{k}) = -\frac{4\pi^2}{\omega}\operatorname{sign} M''(\omega,\vec{k}) \cdot \frac{e_{ij}(\omega,\vec{k})\, j_{0j}(\omega,\vec{k})}{1}\,\delta(M'(\omega,\vec{k}))$.

$E_i^{\text{резон}}(t,\vec{r}) = -4\pi^2 \int \frac{d\omega}{\omega} d\vec{k} \operatorname{sign} M''(\omega,\vec{k})\, e_{in}(\omega,\vec{k})\, j_{n0}(\omega,\vec{k})\, \delta(M'(\omega,\vec{k}))$

$\delta[\varphi(x)] = \sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{\varphi'(x)|_{x=x_s}}$ $\quad \varphi(x_s) = 0$ $\quad$ токи $\quad \parallel \quad \sum_s \frac{\delta(\omega-\omega_s(\vec{k}))}{\left.\frac{\partial M'}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_s(\vec{k})}}$

Токи могут возбуждать слабозатух. волны.

Рассмотрим конкретный пример (источник монохроматических токов)

$\vec{j}_0(t,\vec{r}) = \vec{j}_0(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t}$ ← подставим компон. Фурье.

$\vec{j}_0(\omega,\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \vec{j}_0(t,\vec{r}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} dt\, d\vec{r} =$

$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\vec{r}\, \vec{j}_0(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \int dt\, e^{i(\omega-\omega_0)t} \frac{2\pi}{2\pi} = \|$ дельта ф-ция $\|$

$= \vec{j}_0(\vec{k})\,\delta(\omega-\omega_0)$

Тогда $\underline{E_{\text{рез}\, i}(t,\vec{r})} = -\frac{4\pi^2}{\omega_0}\int d\vec{k}\, e^{-i\omega_0 t + i\vec{k}\vec{r}} \cdot \operatorname{sign} M''(\omega_0,\vec{k})\, e_{in}(\omega_0,\vec{k}) \cdot$

$\cdot\, \vec{j}_0(\vec{k}) \sum_s \frac{\delta(\omega_0 - \omega_s(\vec{k}))}{\left.\frac{\partial M'}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0=\omega_s(\vec{k})}} \longrightarrow \delta(k_s - k(\omega_0))$!

$\boxed{\text{РАССМОТРИМ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ.}}$

В изотропной среде только одно выделеное направление — напр. распространения волны.

$\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp = E_\parallel \vec{\varkappa} + \vec{E}_\perp = E_\parallel \frac{\vec{k}}{k} + \vec{E}_\perp$, $\vec{E}_\perp \vec{\varkappa} = 0$.

Любой тензор можно тоже записать в таком виде. (в сумме тензоров ортогональн. друг другу)

$\underline{\varepsilon_{in}(\omega,\vec{k}) = \varepsilon_\parallel(\omega,\vec{k})\varkappa_i\varkappa_n + \varepsilon_\perp(\omega,\vec{k})(\delta_{in} - \varkappa_i\varkappa_n)}$

$\varkappa_i(\delta_{in} - \varkappa_i\varkappa_n) = \varkappa_n - \varkappa_n = 0$ - ортогональны друг другу

1) $\varkappa_i\varkappa_n\varepsilon_{in}(\omega,\vec k) = \varepsilon_\parallel(\omega,\vec k)$

2) $\varepsilon_{in}(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n) = \varepsilon_\perp(\omega,\vec k)(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n)(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n) =$

$= \varepsilon_\perp(\vec k,\omega)(3-1-1+1) = 2\varepsilon_\perp(\omega,\vec k)$.

Справедливо только при 1 выделенном направлении.

Тогда Максвелловский тензор: $M_{in}(\omega,\vec k) = \varepsilon_{in} - \frac{c^2k^2}{\omega^2}(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n) =$

$=\varepsilon_\parallel \varkappa_i\varkappa_n + \left(\varepsilon_\perp - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n)$

$\boxed{M_{in}E_n=0} \Rightarrow \left[\varepsilon_\parallel\varkappa_i\varkappa_n + \left(\varepsilon_\perp - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n)\right](E_\parallel\varkappa_n + E_{\perp n}) = 0$

$\varepsilon_\parallel E_\parallel \varkappa_i + \left(\varepsilon_\perp - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)E_{\perp i} = 0$

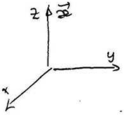
$\varepsilon_\parallel E_\parallel \vec\varkappa + \left(\varepsilon_\perp - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)\vec E_\perp = 0$

1) $\vec\varkappa\cdot \varepsilon_\parallel(\omega,\vec k)\vec E_\parallel = 0$, $E_\parallel\neq0 \to \boxed{\varepsilon_\parallel(\omega,\vec k)=0}$

Дисперсион. у-ние для продольных колебаний в однородной изотропной среде

2) $\vec\varkappa\times$: $\left(\varepsilon_\perp - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)E_\perp = 0$, $E_\perp\neq0$ при $\boxed{\varepsilon_\perp(\omega,\vec k) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}=0}$

Дисперс. ур-ние для поперечных колеб. —//—



$M_{in}(\omega,\vec k) = \varepsilon_\parallel\varkappa_i\varkappa_n + \left(\varepsilon_\perp - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n)$

$$M_{in}\begin{pmatrix} \varepsilon_\perp - \frac{c^2k^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp - \frac{c^2k^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}$$

Тензор симметр.

Определитель → $\boxed{|M(\omega,\vec k)| = \varepsilon_\parallel(\omega,\vec k)\left[\varepsilon_\perp(\omega,\vec k) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right]^2}$

$M_{in}E_i = 0$. $i=1$: $\left(\varepsilon_\perp(\omega,\vec k) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right) = 0$, $E_1\neq0$. E_x.

Колебания будуть ⊥ направл. распростран.

$i=2$ $\varepsilon_\perp(\omega,\vec k) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}=0$ $E_x=0$ $E_y=0$

Собств. частота определяет фазовую и групповую скорость, а также и поляризацию.

Вырождение: 1 собств. частоте соотв. 2 волны (...

$i=3$. $\varepsilon_\parallel(\omega,\vec k)=0$, $E_\parallel=0$, E_z

Если изотропная среда $\varepsilon_{in} = \varepsilon\delta_{in}$, $\varepsilon(\omega,\vec k)$ зависит от ω и $\vec k$ из-за теплового движения молекул. $\vec k\vec v_{тепл}$

С учетом теплового движения $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ - разные.

Если не учитыв $\vec v_T=0$, тогда $\varepsilon_\parallel(\omega)=\varepsilon_\perp(\omega)\equiv\varepsilon(\omega)$

Тогда в холодной, однородной изотропной среде:

$\varepsilon(\omega)=0$ и $\varepsilon(\omega) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}=0$.

$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$

При $\omega\to\infty$ $\varepsilon(\omega) = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

1) при $\varepsilon(\omega)=0 \to \omega_p^2=\omega^2$

2) при $\varepsilon(\omega) - \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2=0 \to \omega^2 = (ck)^2+\omega_p^2$ (поперечн. волны)

$\omega^2=(ck)^2$ - поперечные волны в вакууме

Плотность Энергии ЭМ Волн в Среде

Взаимодействие ЭМ волны ~~...~~ с электронными оболочками

В результате взаимодействия - диссипация.

Уменьшается амплитуда волны, уменьшается плотность ЭМ энергии.

Плотность ЭМ энергии это разность между плотност[ью] ЭМ среды без волны, и ЭМ среды с распрост. волной

Это возможно без диссипации, когда волна распростр. в прозрачной среде.

Изменение кинет. энергии сторонних част. в ЭМП:

$$\frac{d}{dt}\sum_a \mathcal{E}_{a\,кин} = \sum_a e_a \vec v_a(t)\,\vec E(t,\vec r)\Big|_{\vec r=\vec r_a(t)} =$$

$$= \int \vec j_0(t,\vec r)\,\vec E(t,\vec r)\,dV. \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\sum_a \mathcal{E}_{a\,кин} - \int \vec j_0\cdot\vec E\,dV = 0}$$

Изменение эн. сторонних частиц идет на изменение энергии поля и среды.

$-\vec j_0(t,\vec r)\cdot\vec E(t,\vec r)$ — изменение плотности ЭМ энергии в 1 времени

$\vec D\to\vec D'$, $\vec H\to\vec B$.

$$-\vec j_0\vec E = \frac{1}{4\pi}\left(\vec E\frac{\partial \vec D'}{\partial t}+\vec B\frac{\partial\vec B}{\partial t}\right) + \frac{c}{4\pi}\mathrm{div}(\vec E\times\vec B).$$

$\vec E(t,\vec r)=\vec E_0 e^{-i\omega t+i\vec k\vec r}$ — плоская монохром. волна.

Усреднение по периоду $T=\frac{2\pi}{\omega}$ $(\vec D'=\epsilon(\omega)\vec E')$

$$-\overline{\vec j_0\vec E} = \frac{1}{8\pi}\mathrm{Re}\Big\{\vec E^*\underbrace{\frac{\partial\vec D'}{\partial t}}_{-i\omega''\epsilon(\omega)}+\vec B^*\frac{\partial\vec B}{\partial t}\Big\}+\frac{c}{4\pi}\mathrm{Re}\,\mathrm{div}\,(\vec E^*\times\vec B)=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\mathrm{Re}\{-i\omega(\epsilon'+i\epsilon'')|E|^2 - \cancel{i\omega|\vec B|^2}^{\,0}\} + \frac{c}{4\pi}\mathrm{Re}\,\mathrm{div}\underbrace{\cancel{(\vec E_0\times\vec B_0)}}_{const}^{\,0}$$

$$= \boxed{\frac{\omega\epsilon''(\omega)}{8\pi}|\vec E|^2 = q}$$ — к-во тепла выделяемое в 1 времени

Зависит только от диссипации

$\epsilon''(\omega)>0$ при $\omega>0$, $\epsilon''(\omega)<0$ при $\omega<0$

Это флуктуационно диссипативная теорема.

Важно! усреднение должно делать не для монохромат. волны, а для убывающей.

$\vec E(t,\vec r)=\vec E_0(t)\exp\{-i\omega t+i\vec k\vec r\}$ — убывает с t.

Амплитуда меняется по периоду слабо.

$\vec E_0(t)=\int\vec E_0(\alpha)e^{-i\alpha t}d\alpha$ — разлож. в интеграл Фурье.

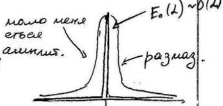
$\vec E_0(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\vec E_0(t)e^{i\alpha t}dt$ — формула обращения

Если $\vec E_0(t)=\vec E_0=Const$, тогда $\vec E_0(\alpha)=\vec E_0\,\delta(\alpha)$ — дельта ф-я

Тогда $\vec E(t,\vec r)=\int E_0(\alpha)\exp\{-i(\omega+\alpha)t+i\vec k\vec r\}\,d\alpha$

$\underline{|\alpha|\ll|\omega|}$

Компоненты Фурье делают вклад в убывание волны.



$\frac{\partial\vec D'}{\partial t}=\hat f\,\vec E(t)$ где $\hat f=\frac{\partial}{\partial t}\hat\epsilon$

Тогда $\hat f A_0 e^{-i\omega t}\equiv f(\omega)A_0e^{-i\omega t}$. $\qquad \underline{f(\omega)=-i\omega\epsilon(\omega)}$

Здесь мы не учитываем $v_{тепловое}\to 0$

$$\hat f\,\vec E(t)=\hat f\int\vec E_0(\alpha)e^{-i(\omega+\alpha)t}d\alpha=\int d\alpha\,\vec E_0(\alpha)\,\hat f e^{-i(\omega+\alpha)t}=$$

$$=\int d\alpha\,\vec E_0(\alpha)f(\omega+\alpha)e^{-i(\omega+\alpha)t}=e^{-i\omega t}\int d\alpha\,\vec E_0(\alpha)\Big[f(\omega)+\alpha\frac{\partial f(\omega)}{\partial\omega}\Big]e^{-i\alpha t}$$

$$=e^{-i\omega t}\int d\alpha\,\vec E_0(\alpha)\Big[f(\omega)+i\frac{\partial f}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\Big]e^{-i\alpha t}=$$

$$=e^{-i\omega t}\Big[f(\omega)+i\frac{\partial f}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\Big]\cdot\int d\alpha\,\vec E_0(\alpha)e^{-i\alpha t}=$$

$$=e^{-i\omega t}\Big[f(\omega)\vec E_0(t)+i\frac{\partial f}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\vec E_0(t)\Big]$$

$$\frac{\partial\vec D'}{\partial t}=e^{-i\omega t}\Big\{-i\omega\epsilon(\omega)E_0(t)+\frac{\partial[\omega\epsilon(\omega)]}{\partial\omega}\frac{\partial E_0}{\partial t}\Big\}$$

$$\overline{\vec E\frac{\partial\vec D'}{\partial t}}=\frac12\mathrm{Re}\,\vec E_0^*\Big\{-i\omega\epsilon(\omega)\vec E_0(t)+\frac{\partial[\omega\epsilon(\omega)]}{\partial\omega}\frac{\partial\vec E_0}{\partial t}\Big\}=$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-i\omega(\epsilon'+i\epsilon'')|\vec{E}_0|^2 + \frac{\partial(\omega(\epsilon'(\omega)+i\epsilon''(\omega)))}{\partial\omega}\vec{E}_0^*\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}\right\} =$$

$$= \frac{\omega\epsilon''(\omega)}{2}|\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial[\omega\epsilon(\omega)]}{\partial\omega}\left(\vec{E}_0^*\frac{\partial E_0}{\partial t} + \vec{E}_0\frac{\partial E_0^*}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\omega\epsilon''(\omega)}{2}|E_0|^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\omega\epsilon(\omega)}{\partial\omega}|\vec{E}_0|^2\right)$$

$$\overline{\vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{B}_0^* e^{+i\omega t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}_0(t)e^{-i\omega t}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{B}_0^*(t)\frac{\partial\vec{B}_0}{\partial t}\right\} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}|B_0|^2$$

$\mathrm{div}\,\overline{(\vec{E}\times\vec{B})} = 0$ (нет зависимости от координат)

$$\overline{-\vec{j}\cdot\vec{E}} = \frac{\omega\epsilon''(\omega)}{8\pi}|E_0|^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial(\omega\epsilon(\omega))}{\partial\omega}\frac{|E_0|^2}{16\pi} + \frac{|B_0|^2}{16\pi}\right\} =$$

$$\equiv q + \frac{\partial\overline{W}}{\partial t} \qquad \boxed{q = \frac{\omega\epsilon''(\omega)}{8\pi}|E(t,\vec{r})|^2}$$

$$\boxed{\overline{W} = \frac{\partial[\omega\epsilon'(\omega)]}{\partial\omega}\frac{|\vec{E}_0|^2}{16\pi} + \frac{|\vec{B}|^2}{16\pi}}$$ ← вставим exp $\vec{E} = \vec{E}_0\exp\ldots$

Не учитывая изменение амплитуды $\to \vec{B} = \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$.

$$|\vec{B}|^2 = \frac{c^2}{\omega^2}|\vec{k}\times\vec{E}|^2 = \frac{c^2}{\omega^2}\left\{k^2|\vec{E}|^2 - |\vec{k}\vec{E}|^2\right\} =$$

$$= \frac{c^2k^2}{\omega^2}\left\{\delta_{in} - \varkappa_i\varkappa_n\right\}E_i^*E_n$$

$$\overline{W} = \frac{\partial}{\partial\omega}\,\omega\left\{\epsilon'(\omega)\delta_{in}\frac{E_i^*E_n}{16\pi} - \frac{c^2k^2}{\omega^2}(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n)\frac{E_i^*E_n}{16\pi}\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\omega}\,\omega\left\{\epsilon'(\omega)\varkappa_i\varkappa_n + \left[\left(\epsilon'(\omega) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right]\right(\delta_{in}-\varkappa_i\varkappa_n)\right\}\frac{E_i^*E_n}{16\pi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\omega}\,\omega M_{in}(\omega,\vec{k})\frac{E_i^*E_n}{16\pi} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\omega\epsilon'(\omega)\frac{|\vec{E}_\parallel^2|}{16\pi}\right\} + \frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\omega\left[\epsilon(\omega)-\frac{c^2k^2}{\omega^2}\right]\frac{|E_\perp|^2}{16\pi}\right\} =$$

$$= \overline{W_\parallel} + \overline{W_\perp}$$

$$\overline{W_\parallel} = \omega\frac{\partial\epsilon(\omega)}{\partial\omega}\frac{|E_\parallel|^2}{16\pi}\Big|_{\epsilon(\omega)=0}$$

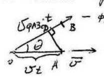
$$\boxed{\overline{W_\perp} = \omega\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\cancel{|E_\perp|^2}\,\epsilon(\omega) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right]\frac{|E_\perp|^2}{16\pi}\Big|_{\epsilon(\omega)-\frac{c^2k^2}{\omega^2}=0}}$$

Эффект Черенкова

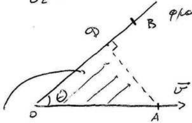
распространение заряж. (быстрых) частиц через прозрачную среду. Излучение не зависимо от масы движущейся частицы. Счетчики (детекторы) Черенкова частиц с большой энергией.

1953 Тамм, Франк, Черенков – нобелевская премия

За время измерения считаем что частица летеет равномерно.



$OB = v_{фаз}\cdot t$, $OA = v\cdot t$



$BD = BO - DO = v_{фаз}\cdot t - v\cdot t\cos\theta$ – разность ~~фаз~~ хода

лучи идущие в одной фазе (фронт волны)

Тогда если $BD = 0$ $\cos\theta = \frac{v_\varphi}{v}$, $v_\varphi = \frac{c}{n(\omega)}$

$v \geqslant \frac{c}{n(\omega)}$ излучение частиц под различными углами.

Єто излучение не частицы под воздействием среды, а самой среды под воздействием поля заряженой высокоэнергетичной частицы.

С макроскопической точки зрения: у среды нет поглощения, а энергия частицы уменьшается.

Возникает поперечная волна (поперечн. Черенк. волна) ~~атомы~~ ~~но~~ електроны получають одинаковую энергию

получаем когерентное излучение.

Возникають продольные волны (поляризация среды

Найдем интенсивность излучения:

$d\mathcal{E}_{кин} = q\, d\vec{r}(t)\cdot E(t,\vec{r})\big|_{\vec{r}=\vec{v}t}$ – изменение кин. энерг.

$$\frac{d\mathcal{E}_{кин}}{dl} = \cancel{q}\,\cancel{\frac{d\vec{r}/dt}{dl/dt}}\; q\,\frac{d\vec{r}/dt}{dl/dt}\, E(t,\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{v}t}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{q}{v}\,\vec{v}\,\vec{E}(t,\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{v}t}$$ $\vec{E}$ – напряж. эл. заряда, что движ. вдоль среде,

Из ур. Максвела: $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

$\mathrm{div}\,\vec{D}' = 4\pi\rho_0$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, ρ_0 – плотность создав. движ. зар.

$\vec{j}_0(t,\vec{r}) = q\vec{v}\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{v}t)$ – плотность тока, что создается движущимся зарядом

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ $\quad \rho_0(t,\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{v}t)$

$\begin{cases} \mathrm{rot}\,E_1 \neq 0 \\ \mathrm{div}\,E_1 = 0 \end{cases}$ Поперечн. часть Поля — Черенковск. излучение

$\begin{cases} \mathrm{rot}\,E_2 = 0 \\ \mathrm{div}\,E_2 \neq 0 \end{cases}$ Продольная часть Поля — Поляризация среды

$0 = \mathrm{div}\,D' = \epsilon(\omega)\,\mathrm{div}(\overset{0}{E_1} + E_2)$, $\mathrm{div}\,E_2 \neq 0 \to \epsilon(\omega) = 0$ дисперс. ур-ние для продольн. колебаний

Перейдем от дифференц. представления к алгебраическому представл. через интеграл Фурье.

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \int d\omega\, d\vec{k}\, \vec{E}(\omega,\vec{k})\exp\{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}\}$$

$$\vec{E}(\omega,\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dt\, d\vec{r}\, \vec{E}(t,\vec{r})\exp\{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}\}$$

$\nabla \to i\vec{k}$, $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ – операторы.

система ур-ний

$$\begin{cases} \vec{k}\times\vec{E}(\omega,\vec{k}) = \frac{\omega}{c}\vec{B}(\omega,\vec{k}) = \\ \vec{k}\times\vec{B}(\omega,\vec{k}) = -\frac{\omega}{c}\vec{D}'(\omega,\vec{k}) - \frac{4\pi}{c}i\,\vec{j}_0(\omega,\vec{k}) \\ \vec{k}\vec{D}'(\omega,\vec{k}) = -4\pi i\,\rho_0(\omega,\vec{k}) = \vec{k}\,\epsilon(\omega)\cdot\vec{E} \quad (1) \end{cases}$$

$$\rho_0(\omega,\vec{k}) = (2\pi)^{-4}\int dt\, d\vec{r}\, q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{v}t)\exp\{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}\} =$$

$$= \underbrace{q\cdot(2\pi)^{-4}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \exp\{\{i\omega - i\vec{k}\vec{v}\}t\} = \frac{q}{(2\pi)^4}\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}_{} = \rho_0$$

$$\left\{\vec{j}_0(\omega,\vec{k}) = \frac{q\vec{v}}{(2\pi)^3}\,\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})\right.$$

$$k\times(k\times E) = \frac{\omega}{c}\left\{-\frac{\omega}{c}\vec{D}' - \frac{4\pi i}{c}\frac{q\vec{v}}{(2\pi)^3}\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})\right\}$$

(1) $\vec{k}\cdot(\vec{k}\cdot\vec{E}) - \vec{E}(\vec{k}\cdot\vec{k}) = \vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})$.

$$\vec{k}\left(-\frac{4\pi i q}{(2\pi)^3\epsilon(\omega)}\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})\right) - \vec{E}\cdot k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\vec{E} - \frac{4\pi i}{c^2}\frac{q\vec{v}}{(2\pi)^3}\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

$$\boxed{E(\omega,\vec{k}) = i\,\frac{4\pi q}{(2\pi)^3}\,\frac{\omega\vec{v}/c^2 - \vec{k}/\epsilon(\omega)}{k^2 - \omega^2/c^2\cdot\epsilon(\omega)}\cdot\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}$$

Компоненты Фурье Электрического Поля

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dl} = \frac{q}{v}\int \vec{v}\,\vec{E}(\omega,\vec{k})\exp\{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}\}\,d\omega\, d\vec{k}\,\Big|_{\vec{r}=\vec{v}t}$$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(\omega)\exp\{-i\omega t\}d\omega = \int_{-\infty}^{0}\vec{E}(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega + \int_0^{\infty}\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_0^{\infty}\vec{E}(-\omega)e^{i\omega t}d\omega + \int_0^{\dots} = \Big(\int_0^{\infty}\underset{\vec{E}(\omega)}{\vec{E}^*(-\omega)}e^{-i\omega t}d\omega\Big)^* + \int_0^{\infty}\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

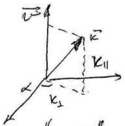
$$= 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad \vec{E}^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}^*(\omega)e^{i\omega t}d\omega =$$

$= \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} E}$ Если они веществ. то равны, $\vec{E}^*(\omega) = \vec{E}(-\omega)$

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dl} = \frac{q}{v}\cdot 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}d\omega\int d\vec{k}\, e^{-i(\omega - \vec{k}\vec{v})t}\cdot i\,\frac{q}{2\pi^2}\,\frac{\omega v^2/c^2 - \vec{k}\vec{v}/\epsilon(\omega)}{k^2 - \omega^2\epsilon(\omega)/c^2}\cdot\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$ — Нужно проинтегрировать

$d\vec{k} = k_\perp dk_\perp dk_\parallel d\alpha$



$\delta(\omega - \vec{k}\vec{v}) = \delta(\omega - k_\parallel v) =$

$= \frac{1}{v}\delta\left(k_\parallel - \frac{\omega}{v}\right)$.

$\frac{d\mathcal{E}_k}{dl} = Re\cdot i\,\frac{q^2}{\pi c^2}\int_0^\infty d\omega \int_0^{k_{\perp max}} \cdot\,\omega\left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right)\cdot \qquad \left\|\beta = \frac{v}{c}\right\|$

$\int_0^{k_{\perp max}} \frac{2k_\perp dk_\perp}{k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(1-\beta^2\epsilon(\omega))} = \qquad \cdot\left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right) =$

$= Re\; i\,\frac{q^2}{\pi c^2}\int_0^\infty d\omega\,\omega\,\ln\left[k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\left(1-\beta^2\epsilon(\omega)\right)\right]_0^{k_\perp max} \cancel{\left(1-\frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right)}$

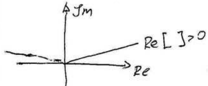
$= Re\; i\,\frac{q^2}{\pi c^2}\int_0^\infty d\omega\cdot\omega\cdot\ln\left[1 + \frac{k_{\perp max}^2}{\frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2\epsilon(\omega))}\right]\cdot\left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right) =$

$\frac{d\mathcal{E}_k}{dl} = Re\; i\,\frac{q^2}{\pi c^2}\int_0^\infty d\omega\cdot\omega\left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right)\left\{i\arg[\ ] + \ln\left|1 + \frac{k_{\perp max}^2 v^2/\omega^2}{1-\beta^2\epsilon(\omega)}\right|\right\}$

$1 + \frac{\frac{k_{\perp max}^2 v^2}{\omega^2}}{1-\beta^2\epsilon(\omega)} = 1 + \frac{\frac{k_{max}^2 v^2}{\omega^2}}{1-\beta^2(\epsilon' + i\epsilon'')} =$

$= 1 + \frac{k_{max}^2 v^2}{\omega^2}\,\frac{1-\beta^2\epsilon' + i\beta^2\epsilon''}{(1-\beta^2\epsilon')^2 + \beta^4\epsilon''^2} =$

$= 1 + \frac{k_{max}^2 v^2}{\omega^2}\,\frac{1-\beta^2\epsilon'}{(1-\beta^2\epsilon')^2 + \beta^4\epsilon''^2} + i\left(\frac{k_{max}v}{\omega}\right)^2\frac{\beta^2\epsilon''}{[\ \cdot\ ]}$



$\epsilon'' \to 0$

1) $Re[\ ] > 0 \quad \arg[\ ] = 0$

2) $Re[\ ] < 0 \quad \arg[\ ] = \pi$

2) $\epsilon'' \to 0 \quad 1 + \frac{(k_{max}v/\omega)^2}{1-\beta^2\epsilon'} < 0$

1) $1 - \beta^2 < 0 \qquad 1 - \frac{(k_{max}v/\omega)^2}{\beta^2\epsilon - 1} < 0$

$0 < \beta^2\epsilon - 1 < (k_{max}v/\omega)^2 \qquad \epsilon''(\omega) > 0$ т.к. $\omega > 0$.

$\beta^2\epsilon' > 1 \qquad v^2/c^2 > 1/\epsilon' \qquad v > c/\sqrt{\epsilon'} = \frac{c}{n(\omega)}$

$-\frac{d\mathcal{E}_k}{dl}\Big|_{поляр} = +Re\; i\,\frac{q^2}{\pi c^2}\,\frac{1}{\beta^2}\int_0^\infty \frac{1}{\epsilon(\omega)}\cdot\omega\, d\omega\, \ln|1+\dots|$

$\frac{1}{\epsilon(\omega)} = \lim_{\epsilon''\to 0}\frac{1}{\epsilon' + i\epsilon''} = \lim\frac{\epsilon' - i\epsilon''}{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} = P\frac{1}{\epsilon'} - \frac{i\pi\delta[\epsilon'(\omega)]}{\epsilon''(\omega) > 0}$

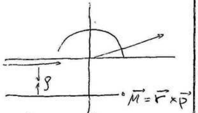
главное знач интеграла

$-\frac{d\mathcal{E}_k}{dl}\Big|_{поля} = \frac{q^2}{v^2}\int_0^\infty d\omega\cdot\omega\,\ln\left(\frac{k_{\perp max}v}{\omega}\right)^2\delta[\epsilon'(\omega)]$.

$\hbar \sim \rho\hbar k_{max}$, ρ - прицельный параметр

$M = \hbar\sqrt{(l+1)l} \sim \hbar$

$p \to \hbar k \to \hbar k_{max}$



$1/k_{max} \sim \rho \gg a \qquad k_{max} \ll \frac{1}{a} \sim 10^8 \qquad k_{max} \lesssim 10^8$

Получим ~~формулу~~ условие когда наша формула справедл

При высокочастотном случае: $\epsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$\delta[\epsilon'(\omega)] = \sum \frac{\delta(\omega - \omega_s)}{\frac{\partial\epsilon'(\omega)}{\partial\omega}}\Big|_{\omega=\omega_s} \qquad 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0. \quad \boxed{\omega_s = \omega_p}$

$\frac{\partial\epsilon'(\omega)}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega_p} = 2\frac{1}{\omega_p}$, тогда:

$-\frac{d\mathcal{E}_k}{dl}\Big|_{пол} = \frac{q^2}{v^2}\,\omega_p\ln\left(\frac{k_{\perp max}^2 v^2}{\omega_p^2}\right)\frac{\omega_p}{2} = \frac{q^2}{v^2}\,\frac{2\pi Ne^2}{m_e}\ln\frac{k_{\perp max}^2 v^2 m}{4\pi Ne^2}$

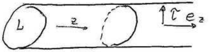
$-\frac{d\mathcal{E}_k}{dl}\Big|_{черенк} = \frac{q^2}{c^2}\int_0^{\omega_{max}} d\omega\cdot\omega\left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon'(\omega)}\right). \qquad \beta^2\epsilon(\omega) > 1$

$\beta^2\epsilon'(\omega)_{max} > 1$

q — заряд движущейся частицы

Распрастр ЭМВ в Волноводах

Волноводы в линейных ускорителях



Сечение неизменно, но произв. по форме.
Пустой волновод

Рассматриваем волну бегущую вдоль O_z.

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \left(\vec{E}_\perp(\vec{r}_\perp) + \vec{e}_z E_z(\vec{r}_\perp)\right) \exp\{i(k_3 z - \omega t)\} \qquad k_3 = \frac{\omega}{v_{фаз}}$$

$$\vec{H}(t,\vec{r}) = \left(\vec{H}_\perp(\vec{r}_\perp) + \vec{e}_z H_z(\vec{r})\right) \exp\{i(k_3 z - \omega t)\} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = ik\vec{H} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -ik\vec{E}.$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \nabla \times (\vec{E}_\perp + \vec{e}_z E_z) e^{i(k_3 z - \omega t)} =$$

$$= e^{i(k_3 z - \omega t)} \Big\{ \overbrace{ik_3 \vec{e}_z \times (\vec{E}_\perp + \vec{e}_z E_z)}^{\perp \vec{e}_z} + \nabla_\perp \times \vec{E}_\perp + \overbrace{\nabla_\perp E_z \times \vec{e}_z)}^{\perp \vec{e}_z} \Big\} =$$

$$= ik(\vec{H}_\perp + \vec{e}_z H_z) \cdot \cancel{e}.$$

$$\left\{ \overset{\vec{H}_\perp}{\vec{H}_\perp = \frac{k_3}{k}\vec{e}_z \times E_\perp + \frac{1}{ik}\nabla_\perp E_z \times \vec{e}_z} \qquad \nabla_\perp \times \vec{E}_\perp = ikH_z\vec{e}_z. \right\}$$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = -ik\vec{E}$, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = ik\vec{H}$

Аналогично:
$$\begin{cases} \vec{E}_\perp(\vec{r}_\perp) = -\frac{k_3}{k}\vec{e}_z \times \vec{H}_\perp - \frac{1}{ik}\nabla_\perp H_z \times \vec{e}_z \\ \nabla_\perp \times \vec{H}_\perp = -ik E_z \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\vec{E}_\perp = -\frac{k_3}{k}\vec{e}_z \times \left(\frac{k_3}{k}\vec{e}_z \times \vec{E}_\perp - \frac{i}{k}\nabla_\perp E_z \times \vec{e}_z\right) + \frac{i}{k}\nabla_\perp H_z \times \vec{e}_z =$$

$$= \frac{k_3^2}{k^2} E_\perp + \frac{ik_3}{k^2}\nabla_\perp H_z \times \vec{e}_z$$

Волноводное обозначение: $k_1^2 = k^2 - k_3^2$, $k = \frac{\omega}{c}$ $k_3 = \frac{\omega}{v_{фаз}}$

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}_\perp) = \frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp E_z + \frac{ik}{k_1^2}\nabla_\perp H_z \times \vec{e}_z$$
– мы выразили $\perp$ составляющ. через продольную.

$\nabla_\perp \times \vec{E}_\perp = ikH_z\vec{e}_z$, Аналогично $\| \vec{E} \rightleftarrows \vec{H},\ k \leftrightarrows -k \|$

$$\vec{H}_\perp(\vec{r}_\perp) = \frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp H_z - \frac{ik}{k_1^2}\nabla_\perp E_z \times \vec{e}_z \qquad \nabla_\perp \times \vec{H}_\perp = -ikE_z\vec{e}_z$$

$$\nabla_\perp \times \left\{ \frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp H_z - \frac{ik}{k_1^2}\nabla_\perp E_z \times \vec{e}_z \right\} = \frac{ik}{k_1^2}\vec{e}_z \Delta_\perp E_z = -ikE_z\vec{e}_z$$

Уравн. для продольной сост.: $\boxed{\Delta_\perp E_z + k_1^2 E_z = 0}$

Граничное условие: $\boxed{E_z|_L = 0}$

Аналогично: $\boxed{\Delta_\perp H_z + k_1^2 H_z = 0}$ нормаль $\boxed{\frac{\partial H_z}{\partial n}\Big|_L = 0}$

Гр. усл.: $0 = \vec{\tau}\vec{E}_\perp|_L = \cancel{\frac{ik_3}{k_1^2}\frac{\partial E_z}{\partial \tau}\Big|_L} - \frac{ik}{k_1^2}\overbrace{(\vec{\tau} \times \vec{e}_z)}^{нормаль}\nabla_\perp H_z|_L = -\frac{ik}{k_1^2}\frac{\partial H_z}{\partial n}\Big|_L = 0$

Тангенциальн. составл. связана с появл. поверн. токов

$$0 = \vec{n}\vec{H}_\perp|_L = \cancel{\frac{ik_3}{k_1^2}\frac{\partial H_z}{\partial n}}\Big|_L + \frac{ik}{k_1^2}(\vec{n} \times \vec{e}_z)\nabla_\perp E_z|_L = \frac{ik_3}{k_1^2}\vec{\tau}\nabla_\perp E_z =$$

$$= \frac{ik_3}{k_1^2}\frac{\partial E_z}{\partial \tau}\Big|_L = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial E_z}{\partial \tau}\Big|_L = 0}$$

Получили ур-ния и гран. услов. для бегущей волны вдоль z.

I Может ли в волноводе распростр. TEM-волна $(E_z = H_z = 0)$
То есть волна поперечная.

Тогда $k_1^2 = 0$. Отсюда $k_3^2 = k^2 \to \frac{\omega^2}{v_{фаз}^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \to v_\varphi = c$.

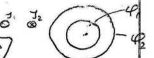
Посмотрим есть ли волны с $v_\varphi = c$.

$E_\perp$ должно удовлетв. $\begin{cases} \nabla_\perp \times \vec{E}_\perp = 0 \\ \nabla_\perp \cdot \vec{E}_\perp = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{E}_\perp = -\nabla_\perp \varphi$, $\quad \Delta_\perp \varphi = 0$.

Отсюда: $\underline{\varphi|_L = Const.}$ и $\Delta_\perp \varphi = 0$

$\varphi = Const$ во всех точках, $\vec{E}_\perp = 0$ в многосвязной области.
Т.е если волновод в виде кабеля

$\varphi_1 = Const$, $\varphi_2 = Const$.



Тут нет дисперсии фазовой скорости $\boxed{v_\varphi = c}$

77 $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=0$ $\varphi(r)=C_1\ln\frac{r}{r_1}+C_2$

$\varphi(r_1)=C_2$.

$\varphi(r_2)=C_1\ln\frac{r_2}{r_1}+\varphi_1(r_1)$ $C_1=\frac{\varphi(r_2)-\varphi(r_1)}{\ln r_2/r_1}$

$$\boxed{\varphi(r)=\frac{\varphi(r_2)-\varphi(r_1)}{\ln r_2/r_1}\cdot\ln\frac{r}{r_1}+\varphi(r_1)}$$ — решение задачи в 2х связной обл.

Если односвязная обл: $\nabla_\perp\times H_\perp=0$ $\nabla_\perp\cdot H_\perp=0$

$$\left.\begin{array}{l}\vec H_\perp=\nabla_\perp\psi \quad \Delta_\perp\psi=0.\\ 0=\vec n\vec H_z=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_L=0\end{array}\right\}\ \psi=Const\quad \vec H_\perp=0.$$

В 2-х связной обл задача Дирихле, в 1 связн. Неймана

2-х связной обл: $\vec H_\perp\neq0$, $\vec E_\perp=-\vec e_z\times\vec H_\perp$

В 2х связ обл. есть распрост. ТЕМ волны.

II. <u>Е-волна</u> (ТН-волна) $E_z\neq0$, $H_z=0$.

$$\begin{cases}\Delta_\perp E_z+k_1^2E_z=0\\ E_z|_L=0\end{cases}$$

Волновод плоский прямоугольн. $\nabla_\perp=\vec e_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec e_y\frac{\partial}{\partial y}$ (x,y,z)

если <u>цилиндр. волн</u> $\nabla_\perp=\vec e_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec e_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ (r,φ,z)

$\vec E_\perp=\frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp E_z$ $\vec H_\perp=-\frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp \cancel{H_z} E_z\times\vec e_z$

III <u>Н-волна</u> (ТЕ-волна) $H_z\neq0$, $E_z=0$.

$$\begin{cases}\Delta_\perp H_z+k_1^2H_z=0\\ \frac{\partial H_z}{\partial n}\Big|_L=0\end{cases}\qquad \begin{array}{l}\vec H_\perp=\frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp H_z\\ \vec E_\perp=\frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp H_z\times\vec e_z\end{array}$$

<u>Найдем фазовую скорость, с какой распр. волна</u>

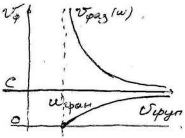
Для распрост. волны <u>необходимо</u> $k_1^2\geq0\to k^2\geq k_1^2$.

$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$, $k_1^2=k_{гр}^2=\frac{\omega_{гр}^2}{c^2}$ $\frac{\omega^2}{v_\varphi^2}=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\omega_{гр}^2}{c^2}$ 78

<u>Фазовая скорость для</u> E, H-волны $v_{ф}=\frac{c}{\left(1-(\omega_{гр}/\omega)^2\right)^{1/2}}$

Есть $v_ф=v_ф(\omega)$ дисперсия

Для фазовой скорости нормальная дисперсия



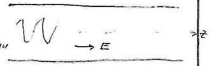
<u>Найдем групповую скорость</u>

$v_{гр}=\frac{d\omega}{dk_3}=\|k_1-\text{фиксиров}\|=c\frac{dk}{dk_3}$

$c\frac{dk}{dk_3}=c\frac{k_3}{k}\to v_{гр}=c\frac{\omega/v_ф}{\omega/c}=\frac{c^2}{v_{фаз}}$

В ускорителях бегущая ~~волна~~ Е-волна.

Волна с частицей должна синхронно двигатся.



По этому очень важная геометрия самого прибора (ускорителя). Определим его размеры

Поток энергии $\Pi^E=\int\overline{S_z^E}ds$ $\overline{S_z}=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(\vec E^*\times\vec H)_z=$

$=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\{(\vec E_\perp+\vec e_zE_z)\times(\vec H_\perp+\vec e_zH_z)\}_z=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\{\vec E_\perp^*\times\vec H_\perp\}_z$

$\vec E_\perp=\frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp E_z$ $\vec H_\perp=-\frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp E_z\times\vec e_z$.

$\Pi^E=\frac{c}{8\pi}\int\mathrm{Re}\left(-\frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp E_z\times\left(-\frac{ik_3}{k_1^2}\nabla_\perp E_z\times\vec e_z\right)\right)=\frac{c}{8\pi}\frac{kk_3}{k_1^4}\int|\nabla_\perp E_z|^2ds$

$\Pi^E=\frac{c}{8\pi}\frac{kk_3}{k_1^4}\int|\nabla_\perp H|^2ds$ - поток энерг. в 1 времени через площ S

$\int|\nabla f|^2ds=\int ds\,(\vec e_z\times\nabla_\perp f^*)(\vec e_z\times\nabla_\perp f)=\cancel{\int ds\,\vec e_z f}$ криволин интеграл

$-\int(d\vec S\times\nabla_\perp)\cdot f^*(\vec e_z\times\nabla_\perp f)=$

$= \int \underbrace{(d\vec{S}\times\nabla_\perp)}_{d\vec{\ell}=\vec{\tau}d\ell} f^*(\vec{e}_z\times\nabla_\perp f) - \int (d\vec{S}\times\nabla_\perp) f^*(\vec{e}_z\times\nabla_\perp f) =$

$= \oint d\ell\, f^*(\vec{\tau}\times\vec{e}_z)\cdot\nabla_\perp f - \int dS\, f^*(\vec{e}_z\times\nabla_\perp)(\vec{e}_z\times\nabla_\perp f) =$

$= \oint d\ell\, \cancel{f^*\frac{\partial f}{\partial n}} - \int dS\, f^*\Delta_\perp f = k_1^2\int|f^2|dS = \int|\nabla f|^2 dS.$

Для E волны $f\to E_z$ и $f\to H_z$, $\Delta_\perp H_z=-k_1^2H_z$

$\Pi^E = \frac{c}{8\pi}\frac{kk_3}{k_1^4}\int|E_z|^2dS \qquad \Pi^H = \frac{c}{8\pi}\frac{kk_3}{k_1^4}\int|H_z|^2dS$

Геометрия входит в k_3 и k_1

Задача в цилиндр. системе:

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2E_z}{\partial\varphi^2}+k_1^2E_z=0.$

$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + k_1^2r^2E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2}=0.$

Разделим переменные: $E_z(r,\varphi)=R(r)\,\Phi(\varphi)$.

$\frac{1}{R} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + k_1^2r^2 + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0. \qquad \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-m$

$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+m\Phi=0 \qquad \Phi=A_1\cos m\varphi + A_2\sin m\varphi$

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \left(k_1^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0.$ — ур-ние Бесселя

Берем вещест. решение: $R(r)=B_1 J_m(k_1r)+B_2N_m(k_1r)$

$N_m(k_1r)\sim\ln r$ при $r\to0$, — нефизично $E(r=0)\neq\infty$.

$\boxed{E_z(r,\varphi)=E_0J_m(k_1r)\cos(m\varphi)}$

$E_z|_{r=a}=0 \qquad J_m(k_1a)=0$, $k_1a=\alpha_{mn}$ — n-ый корень ф-и Бесселя m-ого порядка

$k_1=\frac{\alpha_{mn}}{a}=\frac{\omega_{гран}}{c}$

$v^E_{фаз}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{c\alpha_{mn}}{a\omega}\right)^2}} \qquad \omega>\omega_{гран}$

$\lambda=\frac{2\pi v_{фаз}}{\omega}=\frac{2\pi c}{\omega}\left(1-\left(\frac{c\alpha_{mn}}{a\omega}\right)^2\right)^{-1/2}=\frac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2-\left(c\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2}}$

При α_{01} → λ минимальное.

Для передачи энергии пустой волновод.

Для ускорителей $\boxed{\text{Волноводы медленных волн}}$

$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$ Замена: $\vec{E}\to\sqrt{\varepsilon}\,\vec{E}$, $\vec{H}\to\sqrt{\mu}\,\vec{H}$, $k\to k\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Тогда: $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

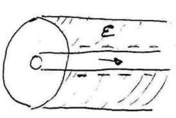
$k_3^2=k^2\varepsilon\mu-k_1^2$ (k_1 опред. геометрией, граница та же).

$\frac{\omega^2}{v_\varphi^2}=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu-\left(\frac{\omega_{0\,гр}}{c}\right)^2 \qquad v_{фаз}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu-\left(\frac{\omega_{0\,гран}}{\omega}\right)^2}}$

$v_\varphi<c$ если $\varepsilon-\left(\frac{\omega_{0\,гр}}{\omega}\right)^2>1$. $\left(\frac{\omega_{0\,гр}}{\omega}\right)^2<\varepsilon-1 \qquad \boxed{\omega>\frac{\omega_{0\,гр}}{\sqrt{\varepsilon-1}}}$

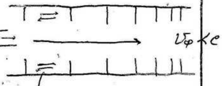
Условие медленной волны

Заряд оседает на стенке канала, что запирает ход волны. Тогда покрывают проводником (серебро) тонким слоем, чтоб толщина покрытия не превышала глубину проникновения ЭПоля.



Волновод Ханзэна

Цилиндр нагружается металлическими дисками

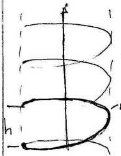


Фазовая скорость менее < C.

отражение волны.

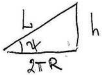
При изменении расстояния между шайбами будет увеличиваться фазовая скорость.

В инжекторе (впрыскиватель частиц) скорость частицы должна быть больше чем 0,5c. Иначе плохая работа.



Если по спирали ток, то в ней скорость c
По оси будет идти волна с меньшей скоростью.
Соленоид – волновод медленных волн.

$$\sin\psi = \frac{h}{L} = \frac{v_{фаз}\, t}{c\, t} = \frac{v_ф}{c} < 1.$$



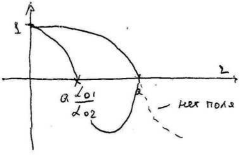
Эффективная работа соленоидального ускорителя при скорости $v < 0{,}5c$
При больших скоростях сильное излучение

Бегущая волна в волноводе.

$E_z = E_0 J_m(k_1 r)\cos m\varphi \exp\{i(k_3 z - \omega t)\}$, $ka = \alpha_{mn}$

Рассмотрим: $m = 0$, отбросим exp.

$E_z(r) = E_0 J_0(k_1 r) = E_0 J_0(\alpha_{mn}\frac{r}{a})$



1) $n = 1$ (α_{01}) $J_0(\alpha_{01}\frac{r}{a})$

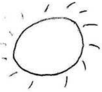
2) $n = 2$ $J_0(\alpha_{02}\frac{r}{a})$

$J_0(\alpha_{02}\frac{r}{a}) = J_0(\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}\cdot\alpha_{01}\frac{r}{a})$ $\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}\frac{r}{a} = 1.$

Поэтому $n = 2$ не годится
распределение по радиусу число n
распределение по углам число m.

Электромагнитные волны в полости внутри проводника

$$\Delta\vec E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$



Считаем что собственные колебания монохроматичны можно разложить в ряд Фурье

$\vec E(t,\vec r) = \vec E(\vec r)e^{-it\omega}$ $\Delta\vec E(\vec r) + \frac{\omega^2}{c^2}\vec E(\vec r) = 0.$

Нужно получить пространственное распределение поля в полости из гран. условий.

Докажем, что поле в полости распределено равномерно

$W_E = \frac{E^2}{8\pi}$ $W_H = \frac{H^2}{8\pi}$

$$\int|\vec H|^2 dV = \left\| \mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec H}{\partial t} = i\omega/c\cdot\vec H \right\| =$$

$$= \frac{c^2}{\omega^2}\int|\nabla\times E|^2 dV = \frac{c^2}{\omega^2}\int dV(\nabla\times\vec E^*)\cdot(\nabla\times\vec E) =$$

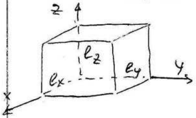
$$= \frac{c^2}{\omega^2}\int dV\,\nabla\cdot[\vec E^*\times(\nabla\times\vec E)] = \frac{c^2}{\omega^2}\int dV\,\nabla[\vec E^*\times(\nabla\times\vec E)] +$$

$$+ \frac{c^2}{\omega^2}\int dV\,\vec E^*\{\nabla\times(\nabla\times\vec E)\} =$$

$$= \frac{c^2}{\omega^2}\oint_S ds\,\underbrace{\vec n\cdot[\vec E^*\times(\nabla\times\vec E)]} + \frac{c^2}{\omega^2}\int dV\,\vec E^*\{\mathrm{grad}\,\underset{0}{\mathrm{div}\,\vec E} - \Delta\vec E\} -$$

$$E_\tau|_S = 0 \quad \left.\begin{matrix}(\vec n\times E^*)\,\mathrm{rot}\,\vec E \\ \vec n\times(\vec n E_n + \underset{0}{\vec\tau E_\tau})\end{matrix}\right\| = \int dV\,|E|^2 \sim \overline{W_E} \sim \overline{W_H}.$$

Рассмотрим прямоугольный волновод прямоугольный резонатор



$$\Delta E_x(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} E_x(\vec{r}) = 0$$

$$E_x(\vec{r}) = E_{xx}(x)\cdot E_{xy}(y)\, E_{xz}(z).$$

$$\frac{1}{E_{xx}}\frac{d^2E_{xx}(x)}{dx^2} + \frac{1}{E_{xy}}\frac{d^2E_{xy}(y)}{d^2y} + \frac{1}{E_{xz}}\frac{d^2E_{xz}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Каждое слагаемое Constan.

$$\frac{1}{E_{xy}}\frac{d^2E_{xy}}{dy^2} = -p_y^2 \qquad \frac{1}{E_{xz}}\frac{d^2E_{xz}}{dz^2} = -p_z^2$$

$$E_{xy}(y) = A_{xy}\sin p_y y + B_{xy}\cos p_y y.$$

Граничные условия: $E_x\Big|_{y=0,\ y=l_y,\ z=0,\ z=l_z} = 0$

При $y=0 \to B_{xy}=0$

При $y=l_y \to \sin(p_y l_y)=0 \to \boxed{p_y = \frac{n\pi}{l_y}}$, $n_y = 1,2,3$

Аналогично для уравнения E_{xz}, те же: Гр.усл.

$E_{xz} = A_{xz}\sin(p_z z)$ $\boxed{p_z = \frac{n_z\pi}{l_z}}$

$$\begin{cases} E_x(x,y,z) = E_{xx}(x)\sin(p_y y)\sin(p_z z) \\ E_y(x,y,z) = E_{yy}(y)\,\cancel{\sin(p_y y)}\,\sin(p_z z)\sin(p_x x) \\ E_z(x,y,z) = E_{zz}(y)\sin(p_x y)\,\cancel{\sin(p_z z)}\,\sin(p_x x) \end{cases}$$

$$\operatorname{div} E = 0 \to \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{1}{\sin p_x x}\frac{dE_{xx}(x)}{dx} + \frac{1}{\sin p_y y}\frac{dE_{yy}(y)}{dy} + \frac{1}{\sin p_z z}\frac{dE_{zz}(z)}{dz} = 0$$

$E_{xx}(x) = A_{xx}\cos(p_x x)$, Отсюда:

$$\begin{cases} E_x(x,y,z) = E_{0x}\cos(p_x x)\sin(p_y y)\sin(p_z z) \\ E_y(x,y,z) = E_{0y}\cos(p_y y)\sin(p_x x)\sin(p_z z) \\ E_z(x,y,z) = E_{0z}\cos(p_z z)\sin(p_x x)\sin(p_y y). \end{cases} \qquad p_x = \frac{n_x\pi}{l_x}$$

$\boxed{p_x E_{0x} + p_y E_{0y} + p_z E_{0z} = 0}$ Связь между константами

$$\frac{\omega^2}{c^2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \to \omega = c\sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}\cdot\pi.$$

Собственные частоты параллелепипеда.

1) Если $p_x\neq0, p_y\neq0, p_z\neq0$, могут возникать колебания с одной частотой, но разной амплитудой — двукратное вырождение.

2) $p_z=0$. $\to E_z = E_{0z}\sin(p_x x)\sin(p_y y)$ — вырождение снимается, есть только одна волна

3) $p_x=p_y=p_z=0$ — нет колебаний.

a) если $n_z=0$, $n_y=1, n_x=0$ $\to \omega_{110} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_y}\right)^2} = \omega_{min}$.

Геометрическая оптика в прозрачной среде

Плоская волна $f_{пл} = a\exp\{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\}$ — в однородной среде

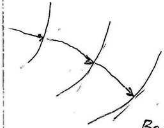
Если среда неоднородная $f = a(\vec{r},t)\exp\{i\psi(\vec{r},t)\}$.

Фаза должна быть большой, а волна мало изменяться

85 $\lambda \frac{\partial a}{\partial x} \ll a$ изменение амплитуды на расстоянии порядка длины волны

$\lambda \frac{\partial a}{\partial x} \ll a$ $L: \frac{\lambda}{a}\cdot\frac{a}{L} \ll 1$.

$\lambda \ll L$ (на каком расстояние существ. изменяется показатель преломления, т.е. длина волны на характерных расстояниях должна мало меняться)



Геометрическая оптика - изучение распространения лучей не считая волновой природы.

$\lambda \ll x \ll L$

Волна на этих участках - плоская

$$\psi(\vec r,t) = \psi_0 + \vec r \frac{\partial\psi}{\partial \vec r} + t\frac{\partial\psi}{\partial t}. \qquad \boxed{\vec k = \text{grad}\,\psi \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

$$\psi(x+\lambda) = \psi(x) + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \ldots = \psi(x)+2\pi$$

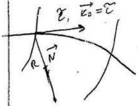
$$\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2\pi \to \lambda\frac{\psi}{L}\approx 2\pi \qquad \psi \sim 2\pi\frac{L}{\lambda} \gg 1$$

~~Такая~~ среда ~~не~~стационарная:

$$\psi(t,\vec r) = -\omega t + \frac{\omega}{c}\psi_1(\vec r), \quad \nabla\psi = \frac{\omega}{c}\psi_1 = \vec k = \frac{\omega}{c}n(\vec r)\vec k_0.$$

$\nabla\psi_1 = n(x,y,z)\vec k_0$ $\boxed{(\nabla\psi_1)^2 = n^2(x,y,z)}$ - уравн.

Эйконала для стационарн. неоднородн. среды



R - радиус кривизны кривой луча

Если среда постоянная частота среда стационарная, то:

$\delta\int_A^B \vec p\, d\vec r = 0$ — теор. Ферма.

$\delta\int_A^B \vec p\, dV = 0$. движение частицы по кривой 86

$\vec p = \text{grad}\, S$, $\mathcal E = -\frac{\partial S}{\partial t}$, $\vec k\to\vec p$, $\omega\to\mathcal E$.

$\vec k = \text{grad}\,\psi$ $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

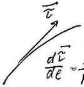
$$\delta\int_A^B \vec k\, d\vec r = \delta\int_A^B \frac{\omega}{c}\, n(\vec r)\underbrace{\vec\tau\cdot\vec\tau}_{1}\, dl = 0.$$

$\delta\int_A^B n\,dl = 0$. $\delta\int_A^B n\,dl = \int_A^B(\delta n\,dl + n\,\delta dl)$

$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \vec r}\delta\vec r = \nabla n\,\delta\vec r$.

$\delta dl = \delta(\vec\tau d\vec r) = \delta\vec\tau\cdot d\vec r + \vec\tau\, d\delta\vec r =$

$= \frac{d\vec\tau}{dl}\delta l\,\vec\tau\, dl + \vec\tau\,\delta d\vec r = \frac{\vec N}{R}\cdot\underbrace{\delta l\,\vec\tau\,dl}_{0} + \vec\tau\,\delta d\vec r$.



$\frac{d\vec\tau}{dl} = \frac{\vec N}{R}$

$$\int_A^B\{\nabla n\,\delta\vec r\,dl + n\vec\tau\, d\delta\vec r\} =$$

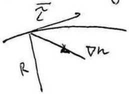
$$= \int_A^B\{\nabla n\,\delta\vec r\,dl + d(n\vec\tau\,\delta\vec r) - \delta\vec r(\vec\tau\,dn + n\,d\vec\tau)\}$$

$$\int_A^B\left\{\nabla n\,\delta\vec r\,dl - \delta\vec r\left(\vec\tau(\nabla n\,d\vec r) + n\frac{d\vec\tau}{dl}dl\right)\right\} =$$

$$= \int_A^B\left\{\nabla n - \left[n\frac{d\vec\tau}{dl} + \vec\tau(\vec\tau\nabla n)\right]\right\}\delta\vec r\,dl = 0.$$

Направление изменения луча определ. по закону:

$$\boxed{\frac{d\vec\tau}{dl} = \frac{1}{n}\{\nabla n - \vec\tau(\vec\tau\nabla n)\}}$$



$\frac{1}{R} = \frac{1}{n}(\vec N\nabla n) > 0$ луч будет загибаться в сторону показателя преломления.