ОЗАЅ1 — 13.09.11

№39

а) $\mathrm{grad}(\varphi\cdot\psi) = \nabla(\varphi\cdot\psi) = \nabla(\overset{\downarrow}{\varphi}\cdot\psi) + \nabla(\varphi\cdot\overset{\downarrow}{\psi}) =$

$= \psi\,\mathrm{grad}\,\varphi + \varphi\,\mathrm{grad}\,\psi;$

б) $\mathrm{div}(\varphi\cdot\vec{a}) = \nabla(\varphi\cdot\vec{a}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\varphi}\cdot\vec{a}) + \nabla(\varphi\cdot\overset{\downarrow}{\vec{a}}) =$

$= \varphi\cdot\mathrm{div}\,\vec{a} + \vec{a}\times\mathrm{grad}\,\varphi;$

$\frac{\partial}{\partial r}(\overset{\downarrow}{\varphi}\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial r}\overset{\downarrow}{\varphi}a$

в) $\mathrm{rot}(\varphi\cdot\vec{a}) = \nabla\times(\varphi\vec{a}) = \nabla\times(\overset{\downarrow}{\varphi}\cdot\vec{a}) + \nabla\times(\varphi\overset{\downarrow}{\vec{a}}) =$

$= \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\times\mathrm{grad}\,\varphi;$

г) $\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}}\times\vec{b}) + \nabla(\vec{a}\times\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = \vec{b}(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}(\nabla\times\vec{b}) =$

$= \vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\,\mathrm{rot}\,\vec{b};$

д) $\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\times(\overset{\downarrow}{\vec{a}}\times\vec{b}) + \nabla\times(\vec{a}\times\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = \overset{\downarrow}{\vec{a}}(\nabla\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\overset{\downarrow}{\vec{a}}) +$

$+ \vec{a}(\nabla\overset{\downarrow}{\vec{b}}) - \overset{\downarrow}{\vec{b}}(\nabla\vec{a}) = (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a};$

е) $\mathrm{grad}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}}\vec{b}) + \nabla(\vec{a}\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = \{\vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) = \nabla(\vec{a}\overset{\downarrow}{\vec{b}}) -$

$- (\vec{a}\nabla)\vec{b} \Rightarrow \nabla(\vec{a}\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = \vec{a}\times\mathrm{rot}\,\vec{b} + (\vec{a}\nabla)\vec{b};\ \} =$

$= \vec{a}\times\mathrm{rot}\,\vec{b} + \vec{b}\times\mathrm{rot}\,\vec{a} + (\vec{a}\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\nabla)\vec{a};$

№41

а) $\mathrm{grad}\,\varphi(r) = \nabla\varphi(r) = \frac{\partial\varphi(r)}{\partial\vec{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\vec{r}} = \{ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}\} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r};$

б) $\mathrm{div}\,\varphi(r)\cdot\vec{r} = \nabla\varphi(r)\vec{r} = \vec{r}\,\nabla\varphi(r) + 3\varphi(r) = r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 3\varphi;$

б) $\operatorname{rot} \varphi(r)\vec r = \nabla\times(\varphi(r)\vec r) = \nabla\times(\varphi(r)\vec r) + \varphi(r)\nabla\times\vec r =$

$= \left\{ \nabla\times\vec r = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec e_1 0 - \vec e_2 0 + \vec e_3 0 = 0 \right\} =$

$= (\vec r\times \operatorname{grad}\varphi) = \left(\vec r\times\frac{\vec r}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0$

в) $(\vec l\nabla)\varphi(r)\vec r = \varphi(r)(\vec l\nabla)\vec r + \vec r(\vec l\nabla)\varphi(r) =$

?

$= \{ \vec l\times(\nabla\times\vec r) = \nabla(\vec l\vec r) - (\vec l\nabla)\vec r - (\vec l\,0)\vec r - \nabla(\vec l\vec r);$

$(\vec l\nabla)\vec r = \left(l_1\frac{\partial}{\partial x} + l_2\frac{\partial}{\partial y} + l_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(x,y,z) = (l_1, l_2, l_3) = \vec l \} =$

$= \varphi\vec l + \vec r(\vec l\nabla)\varphi(r) = \left\{ \left(l_1\frac{\partial}{\partial x} + l_2\frac{\partial}{\partial y} + l_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \right.$

$= l_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + l_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + l_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(l_1\frac{x}{r} + l_2\frac{y}{r} + l_3\frac{z}{r}\right) =$

$= \left.\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec l\vec r \right\} =$

$= \varphi\vec l + \frac{\vec r(\vec l\vec r)}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$

№43

а) $\operatorname{div}(\vec r\vec a)\vec b = \nabla(\vec r\vec a)\vec b = (\vec r\vec a)\nabla\vec b + \vec b\nabla(\vec r\vec a) =$

$\vec b(\vec a\nabla)\vec r$ $= \cancel{(\vec r\vec a)\nabla\vec b} + \cancel{\vec b(\vec r\times\operatorname{rot}\vec a)} + \cancel{\vec b(\vec a\times\operatorname{rot}\vec r)} + \vec b(\vec a\nabla)\vec r + \cancel{\vec b(\vec r\nabla)\vec a} =$

$= \vec b\left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(x,y,z) = \vec b\vec a$;

~~б) $(\vec a\vec r)\vec r$~~

$\operatorname{div}(\vec r\vec a)\vec b \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} b_i x_j a_j = b_i a_j \delta_{ij} = b_i a_i \to \boxed{\vec b\vec a}$

№44

а) $\operatorname{grad}(\vec a(r)\cdot\vec r) = \nabla(\vec a(r)\vec r) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec a}(r)\vec r) + \nabla(\vec a(r)\overset{\downarrow}{\vec r}) =$

$= \cancel{\vec a(r)\times\operatorname{rot}\vec r} + \vec r\times\operatorname{rot}\vec a(r) + (\vec r\nabla)\vec a(r) + (\vec a(r)\nabla)\vec r =$

$= \Big\{ \operatorname{rot}\vec a(r) = \nabla\times\vec a = \frac{\partial}{\partial\vec r}\times\vec a(r) = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\vec r}\times\vec a(r) =$

$= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\vec r}{r}\times\vec a(r) = \frac{\vec r}{r}\times\frac{\partial\vec a(r)}{\partial r} = \frac{1}{r}\vec r\times\frac{\partial\vec a}{\partial r}\Big\} =$

$= \frac{1}{r}\Big(\vec r\Big(\vec r\frac{\partial\vec a}{\partial r}\Big) - \frac{\partial\vec a}{\partial r}r^2\Big) + (\vec r\nabla)\vec a(r) +$

$+ (\vec a(r)\nabla)\vec r = \frac{\vec r}{r}\Big(\vec r\frac{\partial\vec a(r)}{\partial r}\Big) - r\frac{\partial\vec a}{\partial r} + (\vec r\nabla)\vec a + (\vec a\nabla)\vec r =$

$= \Big\{ (\vec r\nabla)\vec a = \Big(\vec r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\vec r}\Big)\vec a =$

$= \Big(\vec r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\vec r}{r}\Big)\vec a = \Big(r\frac{\partial\vec a}{\partial r}\Big);\ (\vec a\nabla)\vec r = \Big(\vec a\frac{\partial}{\partial r}\frac{\vec r}{r}\Big)\vec r =$

$= \Big\{ \frac{\vec a\vec r}{r}\frac{\partial\vec r}{\partial r} = \frac{\vec a\vec r}{r}\cdot\frac{\vec r}{r} = \vec a \Big\} =$

$= \frac{\vec r}{r}\Big(\vec r\frac{\partial\vec a(r)}{\partial r}\Big) - \cancel{r\frac{\partial\vec a}{\partial r}} + \cancel{r\frac{\partial\vec a}{\partial r}} + \vec a = \boxed{\frac{\vec r}{r}\Big(\vec r\frac{\partial\vec a(r)}{\partial r}\Big) + \vec a};$

б) $\operatorname{grad}(\vec a(r)\vec b(r)) = \vec a\times(\nabla\times\vec b) + \vec b\times(\nabla\times\vec a) +$

$+ (\vec b\nabla)\vec a + (\vec a\nabla)\vec b = \Big\{ \operatorname{rot}\vec b = \ldots = \frac{1}{r}\vec r\times\frac{\partial\vec b}{\partial r};\ \operatorname{rot}\vec a = \frac{1}{r}\vec r\times\frac{\partial\vec a}{\partial r}\Big\} =$

$= \vec a\times\frac{1}{r}\vec r\times\frac{\partial\vec b}{\partial r} + \vec b\times\frac{1}{r}\vec r\times\frac{\partial\vec a}{\partial r} + \vec b\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\vec r}\vec a +$

$+ \vec a\frac{\partial}{\partial r}\frac{\vec r}{r}\vec b = \frac{1}{r}\Big\{\vec r(\vec a\vec b') - \cancel{\frac{\partial\vec b}{\partial r}(\vec a\vec r)} + \vec r(\vec b\vec a') -$

$- \cancel{\frac{\partial\vec a}{\partial r}(\vec b\vec r)}\Big\} + \cancel{\Big(\frac{\vec r}{r}\vec b\Big)\vec a'} + \cancel{\Big(\frac{\vec r}{r}\vec a\Big)\vec b'} = \boxed{\frac{\vec r}{r}\{\vec a\vec b' + \vec b\vec a'\}};$

в) $\operatorname{div}(\varphi(r)\cdot\vec a(r)) = \nabla(\varphi\cdot\vec a) = \varphi\nabla\vec a + \nabla(\overset{\downarrow}{\varphi}\vec a) =$

$= \varphi\nabla\vec a + (\vec a\nabla)\varphi = \varphi\cdot\frac{\vec r}{r}\vec a' + \Big(\vec a\frac{\vec r}{r}\Big)\varphi' = \boxed{\frac{\varphi}{r}(\vec r\vec a') + \frac{\varphi'}{r}(\vec a\vec r)};$

е) $\mathrm{rot}\left(\varphi(r)\vec{a}(r)\right) = \nabla\times\varphi(r)\vec{a}(r) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{a} +$

$+\ \vec{a}\times\mathrm{grad}\,\varphi = \varphi\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{a}'\right) - \vec{a}\times\frac{\vec{r}}{r}\varphi' =$

$= \boxed{\frac{\varphi}{r}\left(\vec{r}\times\vec{a}'\right) - \frac{\varphi'}{r}\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)}\ ;$

g) $(\vec{l}\cdot\nabla)\varphi(r)\vec{a}(r) = \varphi\,(\vec{l}\,\nabla)\vec{a}(r) + \vec{a}\,(\vec{l}\,\nabla)\varphi =$

$= \varphi\cdot\left(\vec{l}\,\frac{\vec{r}}{r}\right)\vec{a}' + \vec{a}\left(\vec{l}\,\frac{\vec{r}}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \boxed{\frac{\vec{l}\cdot\vec{r}}{r}\left\{\varphi\vec{a}' + \vec{a}\varphi'\right\}}$

§57

т.д.: $\int\left(A\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,B - B\cdot\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,A\right)dV = \oint\left\{(B\times\mathrm{rot}\,A) - (A\times\mathrm{rot}\,B)\right\}d\vec{S}$

$\vec{A}\cdot(\nabla\times\mathrm{rot}\,\vec{B}) = -\nabla(\vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{B}) = -\nabla(\vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{B}) + \nabla(\vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{B}) =$

~~док-во~~ распишем подинт. выр-я: $= -\nabla(\vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{B}) + \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}$

1) $A\cdot\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\cdot B - B\cdot\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\cdot A \Rightarrow A_i\cdot\varepsilon_{ikj}\{\nabla\times(\nabla\times B)\}_i - B_i\{\nabla\times(\nabla\times A)\}_i =$

$= A_i\cdot\varepsilon_{ikj}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\varepsilon_{jlm}\frac{\partial}{\partial x_l}B_m - B_i\varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m =$

$= \varepsilon_{ikj}\cdot\varepsilon_{jlm}A_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}B_m - \varepsilon_{ikj}\,\varepsilon_{jlm}B_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m =$

$= \varepsilon_{jik}\,\varepsilon_{jlm}A_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}B_m - \varepsilon_{jik}\,\varepsilon_{jlm}B_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m =$

$= \delta_{il}\delta_{km}A_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}B_m - \delta_{im}\delta_{kl}A_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}B_m - \delta_{il}\delta_{km}B_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}$

$+ \delta_{im}\delta_{kl}B_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = A_i\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot B_m - A_i\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}B_i -$

$- B_i\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_i}A_m + B_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{A}\nabla)(\nabla\vec{B}) - \vec{A}\Delta\vec{B} - \vec{B}\cdot\nabla(\nabla\vec{A}) + \vec{B}\Delta\vec{A}\ ;$

$A_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}B_m\right)$

$\vec{A}\cdot(\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,B)$

$\vec{A}\left(\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{B})\right)$

2) $(B\times \mathrm{rot}\, A)_i - (A\times \mathrm{rot}\, B)_i \Rightarrow \varepsilon_{ikj} B_k \varepsilon_{jlm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m - \varepsilon_{ikj} A_k \varepsilon_{jlm}\frac{\partial}{\partial x_l} B_m =$

$= \varepsilon_{jik}\varepsilon_{jlm} B_k \frac{\partial}{\partial x_l}A_m - \varepsilon_{jik}\varepsilon_{jlm} A_k \frac{\partial}{\partial x_l} B_m =$

$=\delta_{il}\delta_{km} B_k \frac{\partial}{\partial x_l}A_m - \delta_{im}\delta_{kl} B_k \frac{\partial}{\partial x_l}A_m - \delta_{il}\delta_{km} A_k \frac{\partial}{\partial x_l} B_m +$

$+\delta_{im}\delta_{kl} A_k \frac{\partial}{\partial x_l} B_m = B_m \frac{\partial}{\partial x_i} A_m - B_l \frac{\partial}{\partial x_l} A_i -$

$- A_m \frac{\partial}{\partial x_i} B_m + A_l \frac{\partial}{\partial x_l} B_i = \nabla(\vec{B}\cdot \overset{\downarrow}{\vec{A}}) - (\vec{B}\,\nabla)\vec{A} -$

$-\nabla(\vec{A}\,\overset{\downarrow}{\vec{B}}) + (\vec{A}\,\nabla)\vec{B};$

Согласно обобщ. th Остроградского-Гаусса:

$\int_S d\vec{S} \ldots = \int_V dV\, \mathrm{div} \ldots \Rightarrow$ Возьмем от 2) дивергенцию и сравним с 1):

$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot B_m \frac{\partial}{\partial x_i} A_m - \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot B_m \frac{\partial}{\partial x_m} A_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot A_m \frac{\partial}{\partial x_i} B_m +$

$+ \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot A_m \frac{\partial}{\partial x_m} B_i = \cancel{\left(\frac{\partial B_m}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_i}\right)} + B_m \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_i^2} - \cancel{\left(\frac{\partial B_m}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_m}\right)} -$

$- B_m \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} A_i - \cancel{\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial B_m}{\partial x_i}\right)} - A_m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} B_m +$

$+ \cancel{\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_m}\right)} + A_m \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_i \partial x_m} = B_m \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_i^2} - B_m \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_i \partial x_m} -$

$- A_m \frac{\partial^2 B_m}{\partial x_i^2} + A_m \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_i \partial x_m} = \vec{B}\,\Delta \vec{A} - \vec{B}\,\nabla(\nabla \vec{A}) -$

$- \vec{A}\,\Delta \vec{B} + \vec{A}\,\nabla(\nabla \vec{B})$

ч.т.д.

б) $\mathrm{rot}\,(\vec a\cdot\vec r)\vec b \Rightarrow \varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k} a_l x_l b_j = \varepsilon_{ikj} a_l b_j \delta_{lk} = \varepsilon_{ikj} a_k b_j =$

$(\vec a\times\vec b)_i \Rightarrow$ $\underline{\mathrm{rot}\,(\vec a\cdot\vec r)\vec b = \vec a\times\vec b}$;

2.а) $\mathrm{div}\,(\vec a\cdot\vec r)\vec r \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} a_j x_j x_i = 3a_j x_j + a_j x_i \delta_{ij} \Rightarrow 3(\vec a\cdot\vec r) + \vec a\cdot\vec r =$

$= 4(\vec a\cdot\vec r) \Rightarrow$ $\mathrm{div}\,(\vec a\cdot\vec r)\vec r = 4(\vec a\cdot\vec r)$;

2.б) $\mathrm{rot}\,(\vec a\cdot\vec r)\vec r \Rightarrow \varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k} a_l x_l x_j = \varepsilon_{ikj} a_l x_l \delta_{kj} +$

$+ \varepsilon_{ikj} a_l x_j \delta_{kl} = \cancel{\varepsilon_{ikk} a_l x_l} + \varepsilon_{ilj} a_l x_j \Rightarrow (\vec a\times\vec r)_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{rot}\,(\vec a\cdot\vec r)\vec r = (\vec a\times\vec r)$

2.а) $\mathrm{div}(\vec a\times\vec r) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ikj} a_k x_j = \varepsilon_{ikj} a_k \delta_{ij} = \varepsilon_{iki} a_k = 0$

2.б) $\mathrm{rot}(\vec a\times\vec r) \Rightarrow \varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{jmn} a_m x_n = \cancel{\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn} a_m \delta_{nk}}$

$= \cancel{\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn} a_m = \varepsilon_{jni}\varepsilon_{jmn} a_m =}\ \varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn} a_m = \underline{2\vec a}$

$\delta_{nn}\delta_{im} -$
$- \delta_{mn}\delta_{in} =$
$= \delta_{im}$

$= \cancel{\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jmn} a_m \frac{\partial x_n}{\partial x_k} = \delta_{im}\delta_{kn} a_m \frac{\partial x_n}{\partial x_k} = \dots}$

$\cancel{\dots\ a_k \delta_{ik}} = 0$

$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3.а) $\mathrm{div}\,\varphi(r)(\vec a\times\vec r) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\cdot\varepsilon_{ikj} a_k x_j + \varepsilon_{ikj} a_k \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi x_j =$

$= \cancel{\varepsilon_{ikj} a_k \varphi \delta_{ij}} + \varepsilon_{ikj} a_k x_j \varphi' \frac{x_i}{r} \Rightarrow (\vec a\times\vec r)\cdot\frac{\vec r}{r}\varphi' \frac{1}{r} = 0$

3.б) $\mathrm{rot}\,\varphi(r)(\vec a\times\vec r) \Rightarrow \varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi\,\varepsilon_{jmn} a_m x_n = \varepsilon_{jik}\varepsilon_{jmn} a_m \varphi \delta_{kn} +$

$+ \varepsilon_{jik}\varepsilon_{jmn} a_m x_n \varphi' \frac{x_k}{r} = \varepsilon_{jni}\varepsilon_{jmn} a_m \varphi + \varphi'\{\delta_{im}\delta_{kn} a_m \frac{x_n x_k}{r} -$

$- \delta_{in}\delta_{km} a_m x_n x_k \frac{1}{r}\} = 2a_i\varphi + \varphi'\{a_i \frac{r^2}{r} - a_k \frac{x_i x_k}{r}\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\vec{a}\varphi + \varphi'\left\{\vec{a}\,r - \frac{\vec{r}(\vec{a}\vec{r})}{r}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \varphi(r)\cdot(\vec{a}\times\vec{r}) = (2\varphi + r\varphi')\vec{a} - \frac{\vec{r}(\vec{a}\vec{r})}{r}\varphi'$$

4. α) $\operatorname{div}(\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ikj}x_k\varepsilon_{jmn}a_m x_n = \varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn}a_m x_k\delta_{in} +$

$+ \varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn}a_m x_n\delta_{ki} = \varepsilon_{nkj}\varepsilon_{jmn}a_m x_k + \overset{0}{\cancel{\varepsilon_{iij}\varepsilon_{jmn}a_m x_n}} =$

$= -2\delta_{km}a_m x_k \Rightarrow -2(\vec{a}\vec{r})$

$$\operatorname{div}(\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})) = -2(\vec{a}\vec{r})$$

4. δ) $\operatorname{rot}(\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})) \Rightarrow \varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{jmn}x_m\varepsilon_{npl}a_p x_l =$

$= \varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{npl}a_p x_m\delta_{lk} + \varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{npl}a_p x_l\delta_{mk} =$

$= \varepsilon_{ilj}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{npl}a_p x_m + \varepsilon_{imj}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{npl}a_p x_l =$

$= \delta_{mi}\delta_{nl}\varepsilon_{npl}a_p x_m - \delta_{nj}\delta_{ml}\varepsilon_{npl}a_p x_m - \varepsilon_{imj}\varepsilon_{nmj}\varepsilon_{npl}a_p x_l =$

$= \overset{0}{\cancel{\varepsilon_{lpl}a_p}}x_i - \varepsilon_{jpl}a_p x_l - 2\delta_{in}\varepsilon_{npl}a_p x_l =$

$= -\varepsilon_{ipl}a_p x_l - 2\varepsilon_{ipl}a_p x_l \Rightarrow -3(\vec{a}\times\vec{r})$

$$\operatorname{rot}(\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})) = 3(\vec{r}\times\vec{a})$$

$$\nabla\times\{\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})\} = \nabla\times\{\vec{a}r^2 - \vec{r}(\vec{a}\vec{r})\} =$$

$$= \nabla r^2\times\vec{a} - \nabla(\vec{a}\vec{r})\times\vec{r} = 2r\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{r} =$$

$$= -2\vec{a}\times\vec{r} - \vec{a}\times\vec{r}$$

№ 549

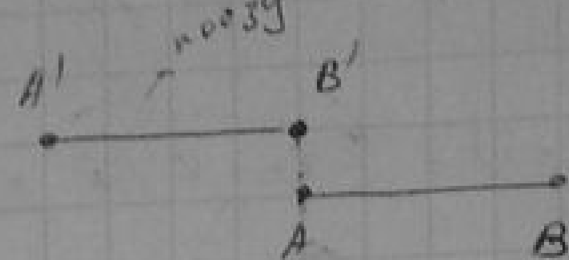
Дано:

$v_п = 240000 \frac{км}{с}$

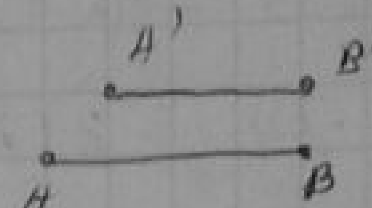
$l_0 = 3{,}64 \cdot 10^8$ км – длина поезда и платформы в собств. с.о.

$t_{B'(0)} = t_{A(0)} = 12^{00}$

голова поезда B' поравнялась с концом платформы B. показания часов – ?



С точки зрения наблюдателя на „платформе".

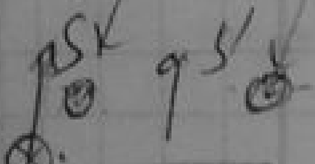


~~$t_A = t_B$~~ Смотря с т. B на т. B' видим, что она пройдет расст. l_0 (длина платформы) со скоростью $v_п$ $\left\{ v_{B'} = \frac{v'_{B'} + v_п}{1 + \frac{v_п v'_{B'}}{c^2}} = \left\{ v'_{B'} = 0 \right.\right.$, т.е. т. B' покоится в с.о. „поезд" $\} = v_п \}$.

Тогда, с учетом, что $t_{B_0} = 12^{00}$ и того, что часы A и B синхронизированы, имеем:

$$t_B = t_A = 12^{00} + \frac{l_0}{v_п} = 12^{00} + \frac{3{,}64 \cdot 10^8}{240000} = \underline{\underline{13^{00}\text{ ч}}}$$

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2} x'_A}{\sqrt{}}$$



Первоначально часы A и B' были синхронизированы, тогда с учетом Лоренцового сокр. времени, тогда как с 12^{00} на часах A прошел час Δt_A на часах B' прошло время

$$\Delta t_{B'} = \Delta t_A \sqrt{1 - \frac{v_п^2}{c^2}} = \Delta t_A \cdot 0{,}6 = 36\text{ мин} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t_{A'} = 12^{36}$

С учетом преобр. Лоренца:

$$\begin{cases} t_{P} = \dfrac{t_{A'} + \frac{v_P}{c^2} x_{A'}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_P}{c}\right)^2}} \\ t_{P} = \dfrac{t_{B'} + \frac{v_P}{c^2} x_{B'}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_P}{c}\right)^2}} \end{cases} \Rightarrow t_{A'} - t_{B'} = \frac{v_P}{c^2}(x_{B'} - x_{A'}) = \frac{v_P}{c^2} l_0 = 38{,}4 \text{ мин} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t_{A'} = 38{,}4 \text{ мин} + 12ч\ 36 \text{мин} = \underline{\underline{13ч\ 14{,}4 \text{ мин}}}$

Ответ: с точки зрения человека на платформе:

$t_A = t_0 = 13^{20}$; $t_{A'} = 13ч\ 14{,}4 \text{мин}$; $t_{P'} = 12ч\ 36 \text{мин}$

№550

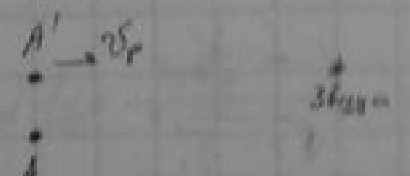
на пар

Дано:
корабль летит от Земли до звезды и обратно.
Расстояние – 4 св. года
$v_{кор} = \sqrt{0{,}9999}\,c$

а) Δt – ? (сколько времени пройдет по земным часам)
б) $\Delta t'$ – ? (сколько времени пройдет по часам в корабле)
в) $T = (\gamma - 1)mc^2$ – ?
$m_p = 10^4$ кг; (каков запас кин. энергии?)

а) Аналогично прошлой задаче введем с.о. „ракета" S' (будем рассматривать ракету как мат. точку, причем её коорд. $x' = y' = z' = 0$)

Относительно „земли" ракета пройдет расстояние в 8 св. лет со скоростью $v_{A'} = \dfrac{v'_{A'} + v_P}{1 + \frac{v_P v'_{A'}}{c^2}} =$



$= \{v'_{A'} = 0\} = v_P$, т.е. $\Delta t = 8_{лет} \cdot c \cdot \dfrac{1}{v} = \dfrac{8_{лет}}{\sqrt{0{,}9999}} \approx \underline{\underline{8_{лет}}}$

б) В нач. мом. времени часы в A и A' были синхронизирования не будет справедливо неизменного во-

ренциально сохр. времени, т.е. в поле по часам в пройдет

время Δt, на часах A' пройдет время

$$\Delta t' = \Delta t\cdot\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}} = 0{,}01\,\Delta t = 0{,}08\text{ лет} = 0{,}96\text{ мес} \approx 1\text{ мес}$$

б) $T = m_0c^2\cdot(\gamma-1) = 10^{[illegible]}\cdot(3\cdot10^8)^2\cdot\{100-1\} = 8{,}91\cdot10^{[illegible]}$

$\approx 2{,}5$ кВт-ч.

Ответ: $\Delta t = 8$ лет; $\Delta t' = 1$ мес; $T = 2{,}5$ кВт-ч

№546

Дано:
S', S
S' движ. отн. S со скор. V.
Нач. мом. вр.: $t = t' = 0$;
$x = y = z = x' = y' = z' = 0$
Требование $t = t'$
(в люб. мом. времени часы в S и S' показ. одно и то же время)

Какие коорд. в об. сист. соотв. этому требованию — ?

Р-ие: по преобразованию Лоренца:

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad t = t' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma\right\} \Rightarrow t\left(\frac{1}{\gamma}-1\right) = \frac{V}{c^2}x' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x' = -\frac{c^2}{V}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)t}$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow t\left(\frac{1}{\gamma}-1\right) = -\frac{V}{c^2}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{c^2}{V}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)t}$$

Т.е. в каждой из систем эта точка движется равномерно

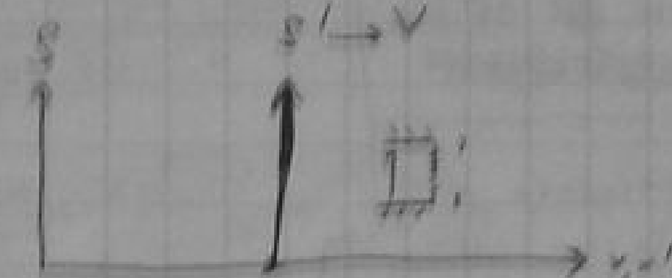
Ответ: $x'_1 = \frac{c^2}{v}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)t'$

$x = \frac{c^2}{v}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)t$

№ 5.448

Дано:
S и S'
S' движ. отн. S со скор. V
в S' — световые часы (см. рис.)
dt_0 — время распростр. пути от 1 и 2 и обратно в S'

$dt = ?$ $dt_0(dt) = ?$



В с.о. S:

$l_{путь} = 2\sqrt{l_0^2 + \frac{V^2 dt^2}{4}}$ =>

=> $\frac{l_{путь}}{c} = dt = \frac{2}{c}\sqrt{l_0^2 + \frac{V^2 dt^2}{4}}$

$dt^2 = \frac{4}{c^2}\left\{l_0^2 + \frac{V^2 dt^2}{4}\right\} = \frac{V^2 dt^2}{c^2} + \frac{4}{c^2} l_0^2$

$dt^2 = \frac{\frac{4}{c^2} l_0^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$; $dt = \frac{\frac{2}{c} l_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

О.в. S' $dt_0 = \frac{2 l_0}{c}$ =>

=> $dt_0 = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

Ответ: $dt_0 = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

№33

Дано:
2 бруска с длиной покоя во движ. друг к другу по X.
На одном сидит набл. и для него Δt ~~[illegible]~~
между совп. пр. и лев. концов

V – ? (относ. скор. движ.) в конеч. пер.-ре совпадут начала и концы брусков для различных наблюдателей – ?

S' – ИСО
наблюдатель S'

Для $\Delta t \neq 0$ оба бруска имеют одинаковую собств. длину в $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ р.
и их концы к началам совпадут одинаково.

Для наблюдателя на левом бруске:

сначала совпадут правые концы, а потом левые. Для наблюдателя находящегося на правом бруске

наоборот.

Пусть мы находимся на левом бруске. Тогда нарисуем нач. и конечн. пол. брусков:

Отн. тела на левом бруске $l_{пр} = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ =>

=> $\Delta t = \frac{l_0\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)}{V}$

Выразим V

$$\Delta t\, v - l_0 = -\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, l_0$$

$$(\Delta t\, v)^2 - 2 v l_0 \Delta t + l_0^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l_0^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2 \left\{ \Delta t^2 + \frac{l_0^2}{c^2} \right\} - v \left\{ 2 l_0 \Delta t \right\} + l_0^2 - l_0^2 = 0$$

$$\boxed{V = \frac{2 l_0 \Delta t}{\Delta t^2 + \frac{l_0^2}{c^2}}} \qquad \frac{v}{c} = \frac{2 \frac{l_0}{c} \Delta t}{\Delta t^2 + \frac{l_0^2}{c^2}} = \frac{2 \frac{l_0}{c} \Delta t}{\left(\frac{l_0}{c} - \Delta t\right)^2 + 2 \frac{l_0}{c} \Delta t} =$$

Ответ: $V = \dfrac{2 l_0 \Delta t}{\Delta t^2 + \frac{l_0^2}{c^2}}$

№554

Сис. S и S'. S' движ отн S со скоростью $\vec{V}$ в произвольном направлении. $\vec{v}(\vec{v}\,')$ - ?

<u>Реш:</u> из зад. №552:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}\,' + \vec{V}t' + \frac{1}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{r}\,')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{\vec{V}\vec{r}\,'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \frac{\vec{v}\,' + \vec{V} + \frac{1}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{v}\,')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,dt'$$

$$dt = \frac{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,dt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{V} + \vec{v}\,' + \frac{1}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{v}\,')}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}}}$$

Ответ: $\vec{v} = \dfrac{\vec{V} + \vec{v}\,' + \frac{1}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{v}\,')}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}}$

№557

т.д. $v = \dfrac{\sqrt{(\vec{v}' + \vec{V})^2 + (\vec{v}' \times \vec{V})^2/c^2}}{1 + \frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}}$

$\vec{v}, \vec{v}'$ – скорости частицы в системах S и S';

$\vec{V}$ – скорость S' относительно S.

Δ воспользуемся ф-лой, полученной в задаче №554

$$\vec{v} = \frac{\vec{V} + \vec{v}' + \frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{v}')}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}}$$

$(\vec{v}, \vec{v}) = \ldots$

$$= \cancel{\frac{\vec{V} + \vec{v}' + \frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) \cdot \left\{\vec{V}(\vec{V}\vec{v}') - \vec{v}' V^2\right\}}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}}} =$$

$$= \cancel{\frac{\vec{V} + \vec{v}' + \frac{\vec{V}}{V^2}(\vec{V}\vec{v}')\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) - \vec{v}'\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}}} =$$

$$= \cancel{\frac{\vec{V}\left\{1 + \frac{(\vec{V}\vec{v}')\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)}{V^2}\right\} + \vec{v}'\left\{1 - 1 + \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right\}}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}}}$$

$$\left(\vec{V} + \vec{v}' + \frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{v}')\right)^2 = (\vec{V} + \vec{v}')^2 + \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)^2}{V^4}\left(\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{v}')\right)^2 +$$

$$+ 2(\vec{V} + \vec{v}')\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V^2}\left(\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{v}')\right) = (\vec{V} + \vec{v}')^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V^2}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot V^2 (\vec{V} \times \vec{v}')^2 +$$

$$= \frac{2(\sqrt{1} - \sqrt{1 - V^2/c^2})}{V^2} \left\{ V^2(\vec V \vec v') + (\vec V \vec v')^2 - (\vec v' \vec V)^2 \ldots \right\}$$

$$= (\vec V + \vec v')^2 + \cancel{1} \cdot (\vec V \cdot \vec v')^2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V^2/c^2}}{V^2} \right)^2 + \frac{2(1 - \sqrt{1 - V^2/c^2})}{V^2} (\vec V \vec v') \ldots$$

$$= (\vec V + \vec v')^2 + \frac{1}{V^2} \left\{ (\vec V \times \vec v')^2 (1 - \sqrt{1 - V^2/c^2})^2 - 2(1 - \sqrt{1 - V^2/c^2})(\vec V \times \vec v')^2 \right\}$$

$$= (\vec V + \vec v')^2 + \frac{(\vec V \times \vec v')^2}{V^2} \left\{ \cancel{1} - 2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \cancel{1} - \frac{V^2}{c^2} - \cancel{2} + 2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right\} =$$

$$= (\vec V + \vec v')^2 - \frac{(\vec V \times \vec v')^2}{c^2} \Rightarrow$$

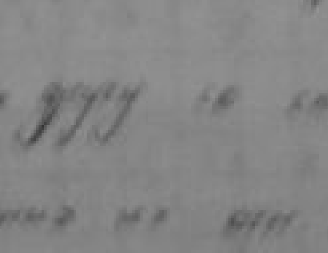
$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{(\vec V + \vec v')^2 - (\vec V \times \vec v')^2 / c^2}}{1 + \vec v' \vec V / c^2}}$$

№ 560

Дано:
2 пучка с
$v = 0{,}9c$ движ.
относительно ин. с.о.

$V - ?$ (относ. скор. движ. е)
а) отн. наблюдателя из л.с.о.;
б) с т. зр. наблюд. из связ. с
одним с.о.

Реш.:



а) Отн. л.с.о. ... два пучка
движ. друг к другу со скоростями v, т.е.
скорость сближения их отн. л.с.о. будет равна
их сумме: $V = 2v = 2 \cdot 0{,}9c = \underline{1{,}8c}$

б) Введем 2 вспомогательные с.о. S', движ. отн. S (лаб.) со скор. v и связ. в своем начале с одним левым пучком электронов (не изучаемым; предполагаем пучок эл. точечным); и S'', движ. отн. S со скор. $-v$ и связ. в своем начале с другим правым пучком e^-.

По ф-ле, полученной в зад. 5.11 про ~~—~~ релятивистское сложение скоростей:

$$\boxed{V'' = \frac{V' + V}{1 + \frac{V'V}{c^2}}}$$

V — скор. S' отн. S
V' — скор. S'' отн. S'
V'' — скор. S'' отн. S

В нашем случае: $V = v$; $V'' = -v$; $V' = V$ — искомая величина. Тогда:

$$-v = \frac{V + v}{1 + \frac{Vv}{c^2}} \Rightarrow \boxed{V = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

С учетом, что $v = 0{,}9c$: $|V| = \frac{2 \cdot 0{,}9c}{1 + 0{,}81} = \frac{1{,}8}{1{,}81}c = 0{,}994c$

$\vec{v}_1 = \vec{e}_x v$ $\quad \vec{v}_2 = -\vec{e}_x v$

$$v'_{2x} = \frac{v_{2x} - V}{1 - \frac{v_{2x}V}{c^2}} = \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Ответ: а) $V = 1{,}8c$;
б) $V = 0{,}994c$

ДОЗ №2

№556

Т.д. $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\vec{v}'\vec{V}/c^2}$; $\vec{v}, \vec{v}'$ – скорости частиц в с.о. S и S'; $\vec{V}$ – скор. S' отн. S

Δ Воспользуемся ф-лой задачи №557:

$$v = \frac{\sqrt{(\vec{v}'+\vec{V})^2 - (\vec{v}'\times\vec{V})^2/c^2}}{1+\frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}}$$

Тогда $$\frac{v^2}{c^2} = \frac{(\vec{v}'+\vec{V})^2 - \left(v'^2V^2 - (\vec{v}'\vec{V})^2\right)/c^2}{(c^2+\vec{v}'\vec{V})^2/c^2}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{c^4 + 2c^2\vec{v}'\vec{V} + \cancel{(\vec{v}'\vec{V})^2} - (\vec{v}'+\vec{V})^2c^2 + v'^2V^2 - \cancel{(\vec{v}'\vec{V})^2}}{(c^2+\vec{v}'\vec{V})^2} =$$

$$= \frac{c^4 + \cancel{2c^2\vec{v}'\vec{V}} - \vec{v}'^2c^2 - \cancel{2c^2\vec{v}'\vec{V}} - \vec{V}^2c^2 + v'^2V^2}{(c^2+\vec{v}'\vec{V})^2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\vec{v}'^2}{c^2} - \frac{\vec{V}^2}{c^2} + \frac{v'^2V^2}{c^4}}{\left(1+\frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}}$$ ▲

№562

S' движ. отн. S со скор. $\vec{V}$, произв. напр. $\dot{\vec{v}}$ - ?

Р-ие: исходя из зад. №554:

$$\vec{v} = \frac{\vec{V} + \vec{v}\,' + \frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{v}\,')}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}};$$

$$dt = \frac{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,dt',$$

$$d\vec{v} = \frac{d\vec{v}\,' + \frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V}\times(\vec{V}\times d\vec{v}\,')}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}} - \frac{\vec{V} + \vec{v}\,' + \frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{v}\,')}{c^2\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^2}\,\vec{V}\,d\vec{v}\,' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{\dot{\vec{v}}\,' + \frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\vec{V}\times(\vec{V}\times\dot{\vec{v}}\,')}{\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^2}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} -$$

$$- \frac{\vec{V} + \vec{v}\,' + \frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\left(\vec{V}(\vec{V}\vec{v}\,') - \vec{v}\,'V^2\right)}{c^2\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^3}(\vec{V}\dot{\vec{v}}\,')\cdot\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} =$$

$$= \vec{v}\,'\cdot\left\{-\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,(\vec{V}\dot{\vec{v}}\,')}{c^2\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^3} + \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,(\vec{V}\dot{\vec{v}}\,')\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)}{c^2\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^3}\right\} +$$

$$+ \dot{\vec{v}}\,'\cdot\left\{\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^2} - \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^2}\right\} +$$

$$+ \vec{V}\cdot\left\{\frac{\frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,(\dot{\vec{v}}\,'\vec{V})}{\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^2} - \frac{(\vec{V}\dot{\vec{v}}\,')\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{c^2\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^3} - \cancel{\frac{(\vec{V}\dot{\vec{v}}\,')\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,(\vec{V}\vec{v}\,')}{c^2\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^3}} -\right.$$

$$\left.- \frac{\frac{1}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)(\vec{V}\vec{v}\,')(\vec{V}\dot{\vec{v}}\,')\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{c^2\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^3}\right\} =$$

$$= \dot{\vec{v}}' \cdot \left\{ \frac{\cancel{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \cancel{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + 1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^2} \right\} +$$

$$+ \vec{v}' \cdot \left\{ \frac{(\vec{V}\dot{\vec{v}}')\left(\frac{V^2}{c^2}-1\right)}{c^2\left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^3} \right\} +$$

$$+ \vec{V} \cdot \left\{ \frac{(\vec{V}\dot{\vec{v}}') \left\{ c^2\left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - (\vec{V}\vec{v}')\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\right.}{c^2\left(1+\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^3} \right.$$

$$= \dot{\vec{v}}' \cdot \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^2} - \vec{v}' \frac{(\vec{V}\dot{\vec{v}}')\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^3} +$$

$$\cancel{+ \vec{V} \cdot (\vec{V}\dot{\vec{v}}') \left\{ \frac{\left(c^2 + \vec{v}\vec{v}'\right)\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{V^2}{c^2} - (\vec{V}\vec{v}')\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2 V^2 \left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^3} \right\}}$$

$$+ \vec{V} \cdot (\vec{V}\dot{\vec{v}}') \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \, \frac{1}{V^2} \left\{ \frac{c^2\left(1+\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) - v^2 - (\vec{v}\vec{v}')\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}{c^2\left(1+\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^3} \right\} =$$

$$= \dot{\vec{v}}' \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^2} - \vec{v}' \frac{(\vec{V}\dot{\vec{v}}')\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^3} -$$

$$- \vec{V} (\vec{V}\dot{\vec{v}}') \frac{1}{V^2} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \left\{ \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2}\right)^3} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ { обозначая $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$, $1+\frac{\vec{v}\vec{v}'}{c^2} = \delta$ получаем } $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{v}} = \frac{1}{\gamma^2\delta^2}\dot{\vec{v}}' - \frac{(\vec{V}\dot{\vec{v}}')}{c^2\gamma^2\delta^3}\vec{v}' - \frac{(\vec{V}\dot{\vec{v}}')(\gamma-1)}{V^2\gamma^3}\vec{V}}$$

№564

Есть частица и её ~~мгновенно~~ сопутств. система (инерциальная) S'.

$\dot{\vec v}'(\dot{\vec v})$ — ? a) $\vec v = \vec\tau(t)\, v_0$; б) $\vec v = v(t)\,\vec\tau_0$

<u>Р-ие:</u> Из р-я задачи №563 $w_i^2 = -\frac{1}{c^4(1-\frac{v^2}{c^2})^3}\left\{\dot v^2 - \frac{(\vec v\times\dot{\vec v})^2}{c^2}\right\}$

Эта величина является инвариантом, а следовательно

$w_i^2 = w_i'^2$. Учитывая, что $\vec v' = 0$ имеем:

$$-\frac{1}{c^4(1-\frac{v^2}{c^2})^3}\left\{\dot v^2 - \frac{(\vec v\times\dot{\vec v})^2}{c^2}\right\} = -\frac{\dot{\vec v}'^2}{c^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec v}'^2 = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^3}\left\{\dot{\vec v}^2 - \left(\dot{\vec v}\times\frac{\vec v}{c}\right)^2\right\}$$

a) $\vec v = \vec\tau(t)\, v_0 \Rightarrow \dot{\vec v}\perp\vec v \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\vec v}'^2 = \gamma^6\left\{\dot{\vec v}^2 - \dot{\vec v}^2\frac{\vec v^2}{c^2} + \underbrace{\left(\dot{\vec v}\cdot\frac{\vec v}{c}\right)^2}_{0}\right\} =$$

$$= \gamma^6\cdot\dot{\vec v}^2\left\{1-\frac{v^2}{c^2}\right\} = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2}\,\dot{\vec v}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec v}' = \frac{\dot{\vec v}}{(1-\frac{v^2}{c^2})}};$$

б) $\vec v = \vec\tau_0\, v(t) \Rightarrow \dot{\vec v}\parallel\vec v \Rightarrow \boxed{\dot{\vec v}' = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\,\dot{\vec v}}$

Ответ а) $\dot{\vec v}' = \frac{\dot{\vec v}}{(1-\frac{v^2}{c^2})}$; б) $\dot{\vec v}' = \frac{\dot{\vec v}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}$

№569

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{v}_1 \vec{v}_2)}{v_1 v_2};$$

$$\cos\alpha' = \frac{(\vec{v}_1{}' \vec{v}_2{}')}{v_1' v_2'} = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{V})(\vec{v}_2 - \vec{V}) - \frac{1}{c^2}(\vec{v}_1 \times \vec{V})(\vec{v}_2 \times \vec{V})}{\sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v}_1 \times \vec{V})^2}\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v}_2 \times \vec{V})^2}}$$

$\vec{V} \to c \quad \alpha(\alpha') - ?$

Р-ие: обозначим $\vec{V} = \vec{V}_0 c$, где $|\vec{V}_0| = 1$ →

$$\Rightarrow \cos\alpha' = \frac{(\vec{v}_1\vec{v}_2) - c\vec{V}_0\vec{v}_1 - c\vec{V}_0\vec{v}_2 + c^2 - \frac{1}{c^2}\left\{\cancel{\vec{v}_1\vec{v}_2 c^2} - (\vec{V}_0\vec{v}_1)(\vec{V}_0\vec{v}_2)c^2\right\}}{\sqrt{\cancel{v_1^2} + c^2 - 2(\vec{v}_1\vec{V}_0)c - \cancel{\frac{1}{c^2}v_1^2 c^2} + (\vec{v}_1\vec{V}_0)^2}\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v}_2 \times \vec{V})^2}}$$

$v_1^2 c^2 - (\vec{v}_1\vec{V}_0)^2$

$$= \frac{c^2 - \vec{v}_1\vec{V} - \vec{v}_2\vec{V} + \frac{1}{c^2}(\vec{V}\vec{v}_1)(\vec{V}\vec{v}_2)}{\sqrt{\left(c - \frac{\vec{v}_1\vec{V}}{c}\right)^2}\sqrt{\left(c - \frac{\vec{v}_2\vec{V}}{c}\right)^2}} = 1 \to$$

$\Rightarrow \alpha' = 0$

Ответ: при $\vec{V} \to c \quad \alpha' \to 0$

№572

Пучок света образует телесный угол $d\Omega$. $d\Omega' - ?$

Р-ие:

$$d\Omega \equiv \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$d\Omega' = \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi'$$

Найдем преобразования, связывающие φ с φ' и θ с θ'

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}} \quad ; \quad v_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}} v_y' ; \quad v_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}} v_z'$$

$$v_x = c \cos\theta \qquad v_x' = c \cdot \cos\theta'$$
$$v_y = c \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \qquad v_y' = c \cdot \sin\theta' \cdot \cos\varphi'$$
$$v_z = c \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \qquad v_z' = c \cdot \sin\theta' \cdot \sin\varphi'$$

Тогда $c \cdot \cos\theta = \dfrac{c \cdot \cos\theta' + V}{1 + \frac{V \cancel{c} \cos\theta'}{c^{\cancel{2}}}}$; $\cancel{c} \cdot \sin\theta \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, \cancel{c} \sin\theta' \cos\varphi'}{1 + \frac{V \cancel{c} \cos\theta'}{c^{\cancel{2}}}}$

$$c \cdot \sin\theta \sin\varphi = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, c \sin\theta' \sin\varphi'}{1 + \frac{V \cos\theta'}{c}} \quad ; \quad \boxed{\beta = \frac{V}{c}}$$

Из 1-го соотношения: $\cos\theta = \dfrac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta \cos\theta'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\theta + \beta \cos\theta \cos\theta' = \cos\theta' + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta}}$$

Из 2-го соотношения: $\dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \dfrac{\sqrt{1 - \beta^2}\, \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}}{1 + \beta \cos\theta'} =$

$$= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta - 2\beta\cos\theta + \beta^2}{(1 - \beta\cos\theta)^2}}}{\sin\theta \left(1 + \beta \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}\, \sqrt{1 - \cancel{2\beta\cos\theta} + \beta^2\cos^2\theta - \cos^2\theta + \cancel{2\beta\cos\theta} - \beta^2}}{\sin\theta \left(1 - \cancel{\beta\cos\theta} + \cancel{\beta\cos\theta} - \beta^2\right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta - \beta^2(1 - \cos^2\theta)}}{\sin\theta \sqrt{1 - \beta^2}} =$$

$$= 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi = \varphi' \Rightarrow d\varphi = d\varphi'$;

Тогда $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$. $\{ \cancel{-\sin\theta' d\theta' = \frac{-\sin\theta d\theta}{1-\beta}}$

$\Rightarrow -\sin\theta' d\theta' = \frac{-\sin\theta d\theta}{1-\beta\cos\theta} - \frac{(\cos\theta - \beta)\beta\sin\theta d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\theta' d\theta' = \frac{(\sin\theta - \cancel{\beta\sin\theta\cos\theta} + \cancel{\beta\cos\theta\sin\theta} - \beta^2\sin\theta)d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} =$

$= \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\sin\theta d\theta \} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d\Omega' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} d\Omega}$

Ответ: $d\Omega' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} d\Omega$; $\beta = \frac{V}{c}$

№573

Звезды распределены равномерно. Их распределение в S'

$\frac{dN}{d\Omega'}$ $(V \to c)$

$\frac{dN}{d\Omega'}$ = {пользуемся результатом предыд. задачи} =

$= \frac{dN}{d\Omega} \cdot \frac{(1-\beta\cos\theta)^2}{1-\beta^2} \cdot \left(\frac{N_0}{4\pi}\right)$ где N_0 — полное число вид. звезд

$$d\Omega' = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta'\right)^2} d\Omega$$

$$\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{dN}{d\Omega}\,\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \boxed{\frac{N}{4\pi}\,\frac{1-\beta^2}{(1+\beta\cos\theta')^2} = \frac{d^2N}{d'\Omega'}}$$

При $v \to c$ $\frac{dN}{d\Omega'} \to 0$ при $\theta' \neq \pi$ и $\frac{dN}{d\Omega'} \to \infty$ при $\theta' = \pi$

№622

$\vec{v}(p) - ?$

Р-ие:
$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{p^2+m^2c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} \Rightarrow \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{m\vec{v}\sqrt{p^2+m^2c^2}}{mc} \Rightarrow \vec{v} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}$$

Ответ: $\vec{v} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}$;

№623

Частица с массой m и энергией E, $v - ?$ а) $p \ll 1$
б) $p \gg 1$

Р-ие: $\varepsilon = \cancel{p^2 + mc^2} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{m^2c^4}{\varepsilon^2} \Rightarrow \beta = \dfrac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2}$

$v = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2}$

а) $v \ll c \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon = mc^2\left\{1 + \dfrac{v^2}{2c^2}\right\} \Rightarrow \dfrac{v^2}{2c^2} = \dfrac{\varepsilon}{mc^2} - 1 \Rightarrow v = \sqrt{2}\,c\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{mc^2} - 1}$

б) $v \to c \Rightarrow \left(\dfrac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2 \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v = c\left\{1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\right\}$

Ответ: $v = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2}$;

а) $v = \sqrt{2}\,c\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{mc^2} - 1}$;

б) $v = c\left\{1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\right\}$.

№636

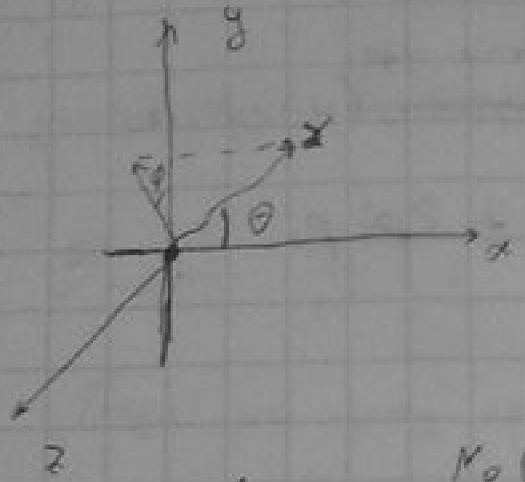
π^0 мезон движ-ся в и расп. на 2 γ-кванта

$\dfrac{dW}{d\Omega'} = \dfrac{1}{4\pi}$ (сфер. симмет. в с.о. π^0)

$\dfrac{dW}{d\Omega} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}$ (из задачи №628) ; $\xi = \dfrac{N_{пер}}{N_{зад}}$

$E(t) - ?$

<u>Р-ие:</u> $N_{пер}$ и $N_{зад}$ – соотв. число γ-квантов, испуск. в переднюю и заднюю полусферы



$$N_{\substack{пер \\ (зад)}} = \int \frac{dN}{d\Omega}\, d\Omega = \int N_0 \frac{dw}{d\Omega}\, d\Omega =$$

$$= \begin{cases} N_{пер} = \frac{N_0}{4\pi}(1-\beta^2)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \frac{N_0(1-\beta^2)}{2\beta}\int_0^{\pi/2}\frac{d(1-\beta\cos\theta)}{(1-\beta\cos\theta)^2} \\ N_{зад} = \frac{N_0}{2}(1-\beta^2)\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \frac{N_0(1-\beta^2)}{2\beta}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{d(1-\beta\cos\theta)}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} = -\frac{N_0(1-\beta^2)}{2\beta}\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\right\} = \frac{N_0(1-\beta^2)}{2(1-\beta)} \\ = -\frac{N_0(1-\beta^2)}{2\beta}\left\{\frac{1}{1+\beta} - 1\right\} = \frac{N_0(1-\beta^2)}{2(1+\beta)} \end{cases},$$

где N_0 – общ. число разлетевшихся γ-квантов $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f = \frac{N_{пер}}{N_{зад}} = \frac{1+\beta}{1-\beta}; \quad (1)$$

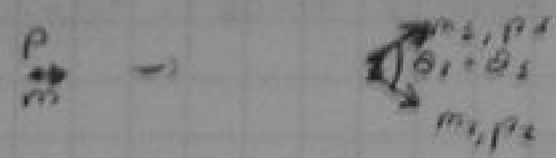
Эн-я π^0-мезона выражается след. образом: $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (2)

Из (1) $f - f\beta = 1+\beta \Rightarrow \beta = \frac{f-1}{1+f} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{f-1}{f+1}\right)^2}} = \frac{mc^2(f+1)}{\sqrt{f^2+2f+1-f^2-1+2f}} = \frac{mc^2(f+1)}{2\sqrt{f}}$$

Ответ: $\mathcal{E} = \frac{mc^2(f+1)}{2\sqrt{f}}$, где $f = \frac{N_{пер}}{N_{зад}} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$

№ 641



$m_1 = ?$

Р-ие: Запишем з-н сохранения ~~энергии~~ (4-х имп.) импульса:

$p^i = p_1^i + p_2^i \Rightarrow m^2c^2 = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2p_1^i p_{2i} =$

$= m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\vec{p}_1\vec{p}_2$;

С учетом, что $E_1 = c\sqrt{p_1^2 + m_1^2c^2}$, $E_2 = c\sqrt{p_2^2 + m_2^2c^2}$

$\Rightarrow$ ~~...~~

!

С др. стороны $p_1^i = p^i - p_2^i \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1^2c^2 = m^2c^2 + m_2^2c^2 - 2\frac{E E_2}{c^2} + 2\vec{p}\vec{p}_2 =$

$= (m^2 + m_2^2)c^2 - 2\sqrt{(p_2^2 + m_2^2c^2)(p^2 + m^2c^2)} + 2pp_2\cos\theta_2$

В единицах, когда $c = 1$:

Ответ: $m_1^2 = m^2 + m_2^2 - 2\sqrt{(p_2^2 + m_2^2)(p^2 + m^2)} - 2pp_2\cos\theta_2$

№625

Частица: m, e, кот. прошла разность потенц. V при $v_0 = 0$.

v - ? {скорость после прохода V} Рассмотреть нерелят. и ультрарелят. случаи.

Р-ие: $\frac{dE}{dt} = 0$ {т.к.

Тогда по з-ну сохр. энергии:

$$E_1 = mc^2 + e\varphi_1 = E_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e(\varphi_2 - \varphi_1) = mc^2\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + e(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Если $e > 0 \Rightarrow$ для ускорения частицы необходимо чтоб $\varphi_1 > \varphi_2$

если $e < 0 \Rightarrow \varphi_1 < \varphi_2$, Обобщая, получаем

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + |eV| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{mc^2}{mc^2 + |eV|}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2+|eV|}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\cancel{m^2c^4} + 2mc^2|eV| + (eV)^2 - \cancel{m^2c^4}}{(mc^2+|eV|)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2mc^2|eV| + (eV)^2}{m^2c^2\left(1+\frac{|eV|}{mc^2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2|eV|}{m}\cdot\frac{1+\frac{|eV|}{2mc^2}}{\left(1+\frac{|eV|}{mc^2}\right)^2}} = v$$

a) $v \lll c \Rightarrow mc^2\left\{1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right\} = mc^2 + |eV|$

$$\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \cancel{1} + \frac{|eV|}{mc^2}$$

$$\frac{2|eV|}{m} = v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2|eV|}{m}}}$$

б) $v \to c \Rightarrow$ из $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + |eV|$

$|eV| \to \infty \Rightarrow$

$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x$

$$\Rightarrow v = c\sqrt{1 + \left\{-\frac{1}{\left(1+\frac{|eV|}{mc^2}\right)}\right)^2\right\}} \simeq$$

$$\simeq c \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{|eV|}{mc^2}\right)^2}\right\} =$$

$$= c\left\{\frac{\cancel{2} - \cancel{1} + \frac{4|eV|}{mc^2} + 2\frac{(eV)^2}{(mc^2)^2}}{2\left(1+\frac{|eV|}{mc^2}\right)^2}\right\} \simeq$$

$$\simeq c \cdot \frac{(eV)^2}{(mc^2+|eV|)^2}$$

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2|eV|}{m} \cdot \frac{1+\frac{|eV|}{2mc^2}}{\left(1+\frac{|eV|}{mc^2}\right)^2}}$;

a) $v \ll c \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|eV|}{m}}$

б) $v \to c \Rightarrow v = c\,\frac{|eV|^2}{(mc^2+|eV|)^2}$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{eV}{mc^2}\right)^2}\left(1 + \frac{mc^2}{|eV|}\right)^{-2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{eV}{mc^2}\right)^2}\left(1 - 2\frac{mc^2}{|eV|}\right)} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{eV}\right)^2 + 2\left(\frac{mc^2}{|eV|}\right)^3}$$

№654

$$\gamma + \overset{m_1}{(\text{частица})} \longrightarrow e^+ + e^- + (\text{частица})$$

д.у., что сие возможно, когда $m_1 \neq 0$. $T_0 - ?$

Δ Обозначив общую массу частиц пр. части з M имеем из з-на сохр. 4-х мерного импульса:

$$p_\gamma^i + p_1^i = P^i \Rightarrow m_1^2c^2 + 2\frac{\varepsilon m_1 c^2}{c^2} = M^2c^2$$

$M = 2m_e + m_1$ — мы берем случай, когда δ: после вылета $= 0$ → → порог реакции

$$\varepsilon = T_0 + \cancel{m_\gamma c^2} = T_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{c^2}{2m_1}\{M^2 - m_1^2\} = \{\text{подстав. явное выр-е для } M\} =$$

$$= \frac{c^2}{2m_1}\{4m_e^2 + 4m_e m_1\} = \frac{2c^2 m_e}{1}\left\{1 + \frac{m_e}{m_1}\right\}$$

Отсюда видно, что при $m_1 \to 0$ $T_0 \to \infty$, т.е. реакция становится невозможной. $\blacktriangle$

Ответ: $T_0 = 2m_e c^2\left\{1 + \frac{m_e}{m_1}\right\}$

$$y = \frac{p_{0y}}{p_{0x}}x + \frac{1}{2}\frac{p_{0y}c^2}{eE}\left(\frac{eE}{cp_{0x}}x\right)^2 = \frac{p_{0y}}{p_{0x}}x + \frac{meE}{2p_{0x}^2}x^2 = y$$

$$v \ll c: \quad y = \frac{p_{0y}c}{eE}\,sh\left(\frac{eE}{cp_{0x}}x\right) + \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\left[ch\left(\frac{eE}{cp_{0x}}x\right) - 1\right]$$

$$\text{при } c\to\infty: \quad y = \frac{meE}{2p_{0x}^2}x^2 + \frac{p_{0y}}{p_{0x}}x$$

№ 102

Нерелят. частица с e, m проходит через $\varphi = k(x^2 - y^2)$; $k = const > 0$

$t = 0$: x_0, y_0, z_0 ; $v_0 = \frac{p_{0z}}{m}(0; 0; v_{0z})$. Определить движ-е частицы.

Р-ие: $\vec{\mathcal{F}}_p - e$ движ-я $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}$

$\vec{E} = -grad\,\varphi = -\nabla k(x^2 - y^2) = -k(2x; -2y; 0) = (-2xk; 2yk; 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = -2kex \\ \frac{dp_y}{dt} = 2key \\ \frac{dp_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{Част. не рел.} \Rightarrow \quad \begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kex \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = 2key \\ ~~mv_z~~\; p_z = mv_{0z} \Rightarrow z = Et + F \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{2ke}{m}x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{2ke}{m}y = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ y = C\,sh\,\omega t + D\,ch\,\omega t \end{cases}$$

Определим константы A, B, C, D, E, F из нач. усл.:

$x(0) = x_0 = A$; $y(0) = y_0 = D$; $z(0) = z_0 = F$

$\dot{x}(0) = -A\omega \sin\omega t + B\omega \cos\omega t \Big|_{t=0} = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$

$\dot{y}(0) = \omega C \operatorname{ch}\omega t + \omega D \operatorname{sh}\omega t \Big|_{t=0} = \omega C = 0 \Rightarrow C = 0$

$\dot{z}(0) = E = v_{0z}$

Тогда $\begin{cases} x = x_0 \cos\omega t \\ y = y_0 \operatorname{ch}\omega t \\ z = v_{0z} t + z_0 \end{cases}$, где $\omega^2 = \frac{2 k e}{m}$

№693 (курс)

$\frac{dp^2}{ds} = \frac{eE}{c} U^0$; $\; \delta ecc = U^0 \to 1 \Rightarrow \frac{dp^2}{ds} = \frac{eE}{c} \Rightarrow p^2 = \frac{eE}{c} s + p_y$

$p_y \ll mc \Rightarrow \frac{eE}{c} s \ll mc \Rightarrow \frac{eE}{mc^2} s \ll 1$

$s = \frac{mc}{p_{0x}} x \Rightarrow \frac{eE}{mc^2} \frac{mc}{p_{0x}} x = \boxed{\frac{eE}{c p_{0x}} x \ll 1}$

$y = \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\left(\operatorname{ch}\frac{eE}{c p_{0x}} x - 1\right) + \frac{c p_{0y}}{eE} \operatorname{sh}\frac{eE}{c p_{0x}} x =$

$= \{\delta ecc\} \Rightarrow y = \frac{\overset{mc^2}{\mathcal{E}_0}}{eE} \frac{1}{2}\left(\frac{eEx}{c p_{0x}}\right)^2 + \frac{c p_{0y}}{\cancel{eE}} \frac{\cancel{eE}}{c p_{0x}} x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{eEm}{2 p_{0x}^2} x^2 + \frac{p_{0y}}{p_{0x}} x$

$$\boxed{y = \frac{eE}{2m v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x}$$

№626

а) $T = 30$ эВ

б) $T = 300$ МэВ $\quad v - ?$

в) $T = 10$ ГэВ

Реш.: $\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] mc^2 = T$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T}{mc^2} + 1 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{T+mc^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{mc^2}{T+mc^2}\right)^2 \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{T+mc^2}\right)^2}$$

~~а) $v = 0{,}03c$~~

~~б) $v = 0{,}9999985c$~~

~~в) $v = 0{,}999999938c$~~

в) $v = c\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}51\cdot10^6}{10^{10}+0{,}51\cdot10^6}\right)^2} =$

$$= c\cdot\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}51\cdot10^6}{10^{10}+0{,}51}\right)^2\right\} = c\left\{1 - (0{,}000025)^2\right\} \simeq$$

$\simeq 0{,}99999995c$

б) $v = c\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{300}{0{,}51}+1}\right)^2} \simeq c\sqrt{1 - \left(\frac{1}{600}\right)^2} = c\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{(600)^2}\right\} =$

$= 0{,}9999986c$

а) $v = c\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}51\cdot10^6}{300+0{,}51\cdot10^6}\right)^2} =$

$$\simeq c\sqrt{1 - \frac{1}{(1+600\cdot10^{-6})^2}} = c\sqrt{1 - \frac{1}{1+1200\cdot10^{-6}}} =$$

$$= c\sqrt{1 - \frac{1}{1{,}0012}} \simeq 0{,}034c$$

Ответ: а) $v = 0{,}034c$;
б) $v = 0{,}9999986c$;
в) $v = 0{,}99999995c$

№564 (доп.)

1. $$\dot{\vec{v}} = \frac{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}{\left(1+\frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)^3}\left(\left(1+\frac{\vec{V}\vec{v}\,'}{c^2}\right)\dot{\vec{v}}\,' - \frac{\vec{V}\dot{\vec{v}}\,'}{c^2}\vec{v}\,' - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}\right)\frac{\vec{V}\dot{\vec{v}}\,'}{V^2}\vec{V}\right)$$

Или $$\dot{\vec{v}}\,' = \frac{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{\vec{V}\vec{v}}{c^2}\right)^3}\left\{\left(1-\frac{\vec{V}\vec{v}}{c^2}\right)\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{V}\dot{\vec{v}}}{c^2}\vec{v} - \left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)\frac{\vec{V}\dot{\vec{v}}}{V^2}\vec{V}\right\}$$

2. С учетом, что $\vec{V}=\vec{v}$; $\vec{v}\,'=0$ имеем:

$$\dot{\vec{v}}\,' = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}\dot{\vec{v}}}{c^2}\vec{v} - \frac{\vec{v}\dot{\vec{v}}}{v^2}\vec{v} + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\vec{v}\dot{\vec{v}}}{v^2}\vec{v}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\dot{\vec{v}} + \left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{v^2}+\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v^2}\right)\vec{v}\dot{\vec{v}}\,\vec{v}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}}\,' = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\cdot\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\dot{\vec{v}} + \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-1+\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\vec{v}\dot{\vec{v}}}{v^2}\vec{v}\right\}$$

Дальнейшие ДЮЗА не нумеруются

№697

Частица релятивистская. Внешние поля однородны, причем

$\vec{E} \parallel \vec{H} \parallel \vec{e}_z$. $t=0 \Rightarrow x_0=y_0=z_0=0$; $\vec{p}_0=(p_{0x}, 0, p_{0z})$

$x(S)$; $y(S)$; $z(S)$; $t(S)$ - ?

Р-ие: Запишем ур-е движ-я частицы в электр. и магн. поле в 4-х мерном виде:

$$\boxed{\frac{dp^i}{dS} = mc\frac{dU^i}{dS} = \frac{e}{c}F^{ik}U_k} \qquad (1)$$

Кроме того $dS = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \Rightarrow S = c\int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \Rightarrow$ $t=0: S_0=0$

Строим матрицу F^{ik} с учетом, что $F^{ik}=-F^{ki}$; $F^{0\alpha}=-E^\alpha$; $F^{\alpha\beta}=-e^{\alpha\beta\gamma}H^\gamma$:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & -H & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Подставляя явный вид F^{ik} в (1) имеем:

$$\begin{cases} \frac{dU^0}{dS} = \frac{e}{mc^2}(-EU_3) = \frac{eE}{mc^2}U^3; \\ \frac{dU^1}{dS} = \frac{e}{mc^2}(-HU_2) = \frac{eH}{mc^2}U^2; \\ \frac{dU^2}{dS} = \frac{e}{mc^2}HU_1 = -\frac{eH}{mc^2}U^1; \\ \frac{dU^3}{dS} = \frac{e}{mc^2}EU_0 = \frac{eE}{mc^2}U^0; \end{cases}$$

Решаем систему след. образом: разбиваем на 2 системы, а именно объединяем 1-е с 4-м и 2-е с 3-м ур-я.

Для 1-го „тандема" диф. 1-е ур-е по S:

$$\frac{d^2U^0}{dS^2} = \frac{eE}{mc^2}\frac{dU^3}{dS} = \frac{eE}{mc^2}\cdot\frac{eE}{mc^2}U^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^0 = A\cdot \mathrm{sh}\left(\frac{eE}{mc^2}S\right) + B\,\mathrm{ch}\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)$$

Определим ~~—~~ константы интегрирования используя нач. усл-я:

$t=0 \to S=0 \Rightarrow U^0(t=0)=B;\quad U^0=\frac{p^0}{mc}=\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\Rightarrow \underline{B=\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}};$

Подставляя выр-е для U^0 в 1-е ур-е $\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}$ и проинтегрировав

получим: $U^3=\frac{\cancel{eE}}{mc^2}\frac{\cancel{mc^2}}{eE}\left(A\,ch\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+B\,sh\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)\right)$

$U^3(t=0)=A=\frac{p^3(t=0)}{mc}=\frac{p_{0z}}{mc}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}U^3=\frac{p_{0z}}{mc}\,ch\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\,sh\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)\\ U^0=\frac{p_{0z}}{mc}\,sh\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\,ch\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)\end{cases}}$$

Для 2-го „тандема" проделываем ту же операцию:

$$\frac{d^2U^1}{dS^2}=-\left(\frac{eH}{mc^2}\right)^2U^1\Rightarrow U^1=A\cos\left(\frac{eH}{mc^2}S\right)+B\sin\left(\frac{eH}{mc^2}S\right)$$

$U^1(t=0)=A=\frac{p^1(t=0)}{mc}=\frac{p_{0x}}{mc};$

$U^2=\frac{eH}{mc^2}\frac{mc^2}{eH}\left(-A\sin\frac{eH}{mc^2}S+B\cos\frac{eH}{mc^2}S\right)$

$U^2(t=0)=B=\frac{p^2(t=0)}{mc}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}U^1=\frac{p_{0x}}{mc}\cos\left(\frac{eH}{mc^2}S\right)\\ U^2=-\frac{p_{0x}}{mc}\sin\left(\frac{eH}{mc^2}S\right)\end{cases}}$$

Теперь, определив явные зависимости U^0, U^1, U^2, U^3 от S

перейдем к величинам x, y, z, t, воспользовавшись тем, что

$U^i=\frac{dx^i}{dS}$.

$\underline{i=0:}$ $U^0=\frac{dx^0}{dS}=c\frac{dt}{dS}\Rightarrow ct=\frac{p_{0z}}{mc}\frac{mc^2}{eE}ch\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+\frac{\mathcal{E}_0}{eE}sh\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+A$

$t=0 \Rightarrow \frac{p_{0z}c}{eE}+A=0 \Rightarrow$ ~~$ct = \frac{p_{0z}c}{eE}\,sh\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+\frac{\mathcal{E}_0}{eE}\left[ch\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)-1\right]$~~

$$ct = \frac{p_{0z}c}{eE}\left[ch\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)-1\right]+\frac{\mathcal{E}_0}{eE}\,sh\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)$$

$i=1$: $x = \frac{p_{0x}}{mc}\frac{mc^2}{eH}\sin\left(\frac{eH}{mc^2}S\right)+B$

$x(t=0)=B=0 \Rightarrow x = \frac{p_{0x}c}{eH}\sin\left(\frac{eH}{mc^2}S\right)$;

$i=2$: $y = \frac{p_{0x}c}{eH}\cos\left(\frac{eH}{mc^2}S\right)+C \Rightarrow y(t=0)=0=\frac{p_{0x}c}{eH}+C \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{p_{0x}c}{eH}\left[\cos\left(\frac{eH}{mc^2}S\right)-1\right]$

$i=3$: $z = \frac{p_{0z}c}{eE}\,sh\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+\frac{\mathcal{E}_0}{eE}\,ch\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+D$

$z(t=0)=\frac{\mathcal{E}_0}{eE}+D=0 \Rightarrow z = \frac{p_{0z}c}{eE}\,sh\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)+\frac{\mathcal{E}_0}{eE}\left[ch\left(\frac{eE}{mc^2}S\right)-1\right]$

Для интереса можно ввести собственное время $\tau = \frac{S}{c}$.

Тогда получаем окончательный результат, что и отражено ниже.

Ответ:

$$x = \frac{p_{0x}c}{eH}\sin\left\{\frac{eH}{mc}\tau\right\};$$

$$y = \frac{p_{0x}c}{eH}\left[\cos\left\{\frac{eH}{mc}\tau\right\}-1\right]$$

$$z = \frac{p_{0z}c}{eE}\,sh\left\{\frac{eE}{mc}\tau\right\}+\frac{\mathcal{E}_0}{eE}\left[ch\left\{\frac{eE}{mc^2}\tau\right\}-1\right]$$

$$ct = \frac{p_{0z}c}{eE}\left[ch\left\{\frac{eE}{mc}\tau\right\}-1\right]+\frac{\mathcal{E}_0}{eE}\,sh\left\{\frac{eE}{mc}\tau\right\}$$

$$\tau = \frac{S}{c}$$

№69

$\vec{\dot{v}}\,(\vec{v}, \vec{E}, \vec{H})$ - ?

Р-ие: $\cancel{\vec{\dot{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{c^2\vec{p}}{\varepsilon_k}\right)}$ Используя ур-е движ-я заряда в эл.п. в 3-х мерном виде (векторной форме)

$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\times\vec{H}]$, а также те факты, что

$\vec{p} = \frac{\varepsilon_k \vec{v}}{c^2}$; $\frac{d\varepsilon_k}{dt} = e\vec{E}\vec{v}$, получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\varepsilon_k}{c^2}\vec{\dot{v}} + \frac{\vec{v}}{c^2}e\vec{E}\vec{v} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\times\vec{H}];$$

$$\varepsilon_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\dot{v}} = \frac{1}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\times\vec{H}] - \frac{e\vec{v}}{c^2}(\vec{E}\vec{v})\right\} =$$

$$= \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{H}] - \frac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{E}\vec{v})\right\}$$

Ответ: $\vec{\dot{v}} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{H}] - \frac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{E}\vec{v})\right\}$

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\varepsilon_k} \longrightarrow \vec{\dot{v}}$$

№60

Заряженный пространственный осциллятор. Собств. частота кол-й — ω_0. Определить ω в пост. одн. магн. поле.

<u>Р-ие:</u> Ур-я пространственного осциллятора в некот поле выглядят так:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}\frac{dp_x}{dt} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{1}{m}\frac{dp_y}{dt} \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{1}{m}\frac{dp_z}{dt} \end{cases}$$

С учетом специфики поля $(\vec{H} = (0;0;H);\ \vec{E} = 0)$ и ур-я движ-я в э.м.п. в вмз. форме $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]$ имеем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}\begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = \frac{eH}{c}\dot{y};\quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{eH}{c}\dot{x};\quad \frac{dp_z}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}; \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x}; \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0; \end{cases}$$

Домножая 2-е ур-е на i и складывая с 1-м имеем:

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + \omega_0^2(x + iy) = \frac{eH}{mc}(\dot{y} - i\dot{x}) = -\frac{ieH}{mc}(\dot{x} + i\dot{y})$$

Обозначая $x + iy = \xi$ имеем:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\frac{ieH}{mc}\dot{\xi} \quad \text{или} \quad \ddot{\xi} + \frac{ieH}{mc}\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$$

Ищем р-ие в виде $\xi = e^{\pm i\omega t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\omega^2 - \frac{eH}{mc}\omega + \omega_0^2 = 0, \quad -\omega^2 + \frac{eH}{mc}\omega + \omega_0^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega = -\frac{eH}{2mc} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}; \quad \omega = \frac{eH}{2mc} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}$$

[illegible]

[illegible]

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}}$$

<u>Замечание</u> [illegible]

Ответ: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}$

№ 698 (2)

$\vec{E} \perp \vec{H}$; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — [illegible]

$\vec{H} = (0;0;H)$; $\vec{E} = (0;E;0)$; $t=0$: $\vec{p}_0$; $\vec{r}_0 = 0$. Закон движения — ?

Решение

Запишем ур-е движения в 4-х мерном виде

$$\frac{dp^i}{dS} = \frac{e}{c} F^{ik} U_k \quad (1)$$

По определению U^i: $p^i = mcU^i$. Перепишем ур-е (1):

$$\frac{dU^i}{dS} = \frac{e}{mc^2} F^{ik} U_k \quad (2)$$

Используя тот факт, что $F^{0\alpha} = -E^\alpha$; $F^{\alpha\beta} = -e^{\alpha\beta\gamma} H_\gamma$; $F^{ik} = -F^{ki}$,

строим матрицу F^{ik}:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -H & 0 \\ E & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для разных i расписываем ур-е (2) по компонентам

$$\begin{cases} \frac{dU^0}{dS} = \frac{e}{mc^2} E U^2 \\ \frac{dU^1}{dS} = +\frac{e}{mc^2} H U^2 \\ \frac{dU^2}{dS} = +\frac{e}{mc^2} E U^0 - \frac{e}{mc^2} H U^1 \\ \frac{dU^3}{dS} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Из ур-я (3.4) $U^3 = Const$. Из того, что $p^3 = mcU^3$

$p^3 = mcU^3 = mc \frac{dx^3}{dS} = p_{oz} \Rightarrow$ $x^3 = \boxed{z = \frac{p_{oz}}{mc} S}$

Продифф. ур-е (3.3) по S получим

$\frac{d^2U^2}{dS^2} = \frac{e}{mc^2} \left\{ E \frac{dU^0}{dS} - H \frac{dU^1}{dS} \right\} = \{$ подставляя выр-я для

$\frac{dU^0}{dS}$ и $\frac{dU^1}{dS}$ из (3.1) и (3.2) соответственно, получаем $\} =$

$= \frac{e}{mc^2} \left\{ \frac{e}{mc^2} E^2 U^2 - \frac{e}{mc^2} H^2 U^2 \right\} = \left(\frac{e}{mc^2}\right)^2 \{E^2 - H^2\} U^2$

Рассмотрим случай, когда $E > H \Rightarrow$

$\Rightarrow U^2 = A\, ch\left\{(E^2-H^2)^{1/2} \cdot \frac{e}{mc^2} S\right\} \pm B\, sh\left\{\sqrt{E^2-H^2} \frac{e}{mc^2} S\right\}$ (4)

Исходя из них условий определим константы интегр. A и B.

т.к. $dS = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow S = \int_0^t dt\, c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$; $t=0 \Rightarrow S=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ с учетом, что $U^3(t=0) = \frac{p^3(t=0)}{mc} = \frac{p_{0z}}{mc}$ из ур-я (4) получим

$\frac{p_{0z}}{mc} = A$.

Подставим ур-е (4) в ур-я (3.2) и (3.2):

$$\begin{cases} \frac{dU^0}{dS} = \frac{e}{mc^2}E\cdot\left[\frac{p_{0z}}{mc}\, ch\{\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{e}{mc^2}S\} + B\cdot sh\{\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{e}{mc^2}S\}\right] \\ \frac{dU^1}{dS} = +\frac{e}{mc^2}H\left[\frac{p_{0z}}{mc}\, ch\{\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{e}{mc^2}S\} + B\, sh\{\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{e}{mc^2}S\}\right] \end{cases}$$

Интегрируя по S оба выр-я получим

$$\begin{cases} U^0 = \frac{e}{mc^2}E\left[\frac{p_{0z}}{mc}\,\frac{mc^2}{e\sqrt{E^2-H^2}}\, sh\{\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{e}{mc^2}S\} + \frac{B\,mc^2}{e\sqrt{E^2-H^2}}\, ch\{\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{e}{mc^2}S\}\right] + C \\ U^1 = +\frac{e}{mc^2}H\left[\dots\right] + D \end{cases}$$

Подставляя н.у. для U^0 и U^1 [а именно $U^0(t=0) = \frac{\varepsilon_0}{mc^2}$; $U^1(t=0) = \frac{p_{0x}}{mc}$]

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{mc^2} = \frac{e}{mc^2}E\cdot\frac{mc^2\, B}{e\sqrt{E^2-H^2}} + C = \frac{E\,B}{\sqrt{E^2-H^2}} + C \\ \frac{p_{0x}}{mc} = +\frac{H\,B}{\sqrt{E^2-H^2}} + D \end{cases} \qquad (5)$$

Теперь для выполнения с.у. (3) подставим выр-я для U^0 и U^1 в (3.3) – следует, что верно

$$\frac{p_{0z}}{mc}\,\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\, sh(\dots) + B\,\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\, ch(\dots) = \left(\frac{eE}{mc^2}\right)^2\left[\frac{p_{0z}c}{e\sqrt{E^2-H^2}}\, sh(\dots) + \frac{B\,mc^2}{e\sqrt{E^2-H^2}}\, ch(\dots)\right] +$$

$$+ C\,\frac{eE}{mc^2} - \left(\frac{eH}{mc^2}\right)^2\left[\frac{c\,p_{0z}}{e\sqrt{E^2-H^2}}\, sh(\dots) + \frac{B\,mc^2}{e\sqrt{E^2-H^2}}\, ch(\dots)\right] - D\,\frac{eH}{mc^2}$$

Используя св-во ~~...~~ функц. независимости $\{e^x; e^{-x}; 1\}$ приравниваем ~~и~~ между собой своб. коэффициенты:

$$0 = \frac{e}{mc^2}\{CE - DH\} \Rightarrow C = +\frac{HD}{E} \Rightarrow$$ возвращаясь к усл. (5) получим:

$$\begin{cases} \frac{EB}{\sqrt{E^2-H^2}} + \frac{H}{E}D = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \\ D + \frac{HB}{\sqrt{E^2-H^2}} = \frac{p_{0x}}{mc} \end{cases} \Rightarrow D = \frac{p_{0x}}{mc} - \frac{H}{\sqrt{E^2-H^2}}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cdot\left\{\frac{E}{\sqrt{E^2-H^2}} - \frac{H^2}{E\sqrt{E^2-H^2}}\right\} = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} - \frac{H}{E}\frac{p_{0x}}{mc}$$

$$B\left\{\frac{E^2-H^2}{E\sqrt{E^2-H^2}}\right\} = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} - \frac{H}{E}\frac{p_{0x}}{mc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = \frac{E}{\sqrt{E^2-H^2}\,mc}\left\{\frac{\mathcal{E}_0}{c} - \frac{H}{E}p_{0x}\right\} \\ D = \frac{p_{0x}}{mc} - \frac{HE}{(E^2-H^2)mc}\left\{\frac{\mathcal{E}_0}{c} - \frac{H}{E}p_{0x}\right\} \qquad (6) \\ C = +\frac{H}{E}\frac{p_{0x}}{mc} - \frac{H^2}{(E^2-H^2)mc}\left\{\frac{\mathcal{E}_0}{c} - \frac{H}{E}p_{0x}\right\} \end{cases}$$

из (4) с учетом (6)

Тогда: $u_2 = \frac{p_{0y}}{mc}\,ch\left\{\sqrt{E^2-H^2}\frac{e}{mc^2}S\right\} + \frac{E}{\sqrt{E^2-H^2}\,mc}\left[\frac{\mathcal{E}_0}{c} - \frac{H}{E}p_{0x}\right]sh\left\{\sqrt{E^2-H^2}\frac{e}{mc^2}S\right\} = \frac{dx^2}{dS} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = y = \frac{p_{0y}}{mc}\cdot\frac{mc^2}{e\sqrt{E^2-H^2}}sh\left\{\sqrt{E^2-H^2}\frac{eS}{mc^2}\right\} + \frac{E}{\sqrt{E^2-H^2}\,mc}\cdot\frac{mc^2}{e\sqrt{E^2-H^2}}\left[\frac{\mathcal{E}_0}{c} - \frac{H}{E}p_{0x}\right]ch\left\{\sqrt{E^2-H^2}\frac{e}{mc^2}S\right\} + A_1$

$y(t=0) = 0 \Rightarrow \quad y|_{t=0} = 0 = \frac{Ec}{(E^2-H^2)e}\left[\frac{\mathcal{E}_0}{c} - \frac{H}{E}p_{0x}\right] = -A_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{p_{0y}c}{e\sqrt{E^2-H^2}}sh\left\{\sqrt{E^2-H^2}\frac{eS}{mc^2}\right\} + \frac{\cancel{cE}}{e(E^2-H^2)}\left(\frac{\mathcal{E}_0E - Hp_{0x}c}{\cancel{cE}}\right)\left[ch\left\{\sqrt{E^2-H^2}\frac{e}{mc^2}S\right\} - 1\right]$

Или окончательно: $\boxed{y = \frac{cp_{0y}}{e\sqrt{E^2-H^2}}sh\left\{\frac{e\sqrt{E^2-H^2}}{mc^2}S\right\} + \frac{\mathcal{E}_0E - cp_{0x}H}{e(E^2-H^2)}\left[ch\left\{\frac{e\sqrt{E^2-H^2}}{mc^2}S\right\} - 1\right]}$

Из (6) также находим выр-я для u^0 и u^1, а, следовательно, и x, ct (с учетом нач. условий):

$$U^1 = H\cdot\left[\frac{p_{0y}}{mc\sqrt{E^2-H^2}}\,sh(\dots) + \frac{E}{(E^2-H^2)mc}\left\{\frac{E\varepsilon_0 - p_{0x}cH}{eE}\right\}ch(\dots)\right] + \frac{p_{0x}}{mc} - \frac{HE}{(E^2-H^2)mc}\left[\frac{E\varepsilon_0 - cp_{0x}H}{cE}\right.$$

$$x = \frac{-p_{0y}H}{\sqrt{E^2-H^2}}\,\frac{mc^2}{e\sqrt{E^2-H^2}}\,ch(\dots) + \frac{HE\,mc^2}{(E^2-H^2)^2\,mc\cdot e}\cdot\frac{E\varepsilon_0 - p_{0x}cH}{eE}\,sh(\dots) +$$

$$+ \cancel{p_{0x}(E^2-H^2) - HE}\left(\frac{p_{0x}}{mc} - \frac{HE(E\varepsilon_0 - cp_{0x})H^2}{(E^2-H^2)mc^2 E}\right)S + A_2 =$$

$$= \left\{ x\big|_{t=0} = 0 = \frac{cp_{0y}H}{e(E^2-H^2)} + A_2 \right\} = \frac{cp_{0y}H}{e(E^2-H^2)}\left[ch(\dots) - 1\right] + \frac{H(\varepsilon_0 E - cp_{0x}H)}{e(E^2-H^2)^{3/2}}\,sh(\dots) +$$

$$+ \left(\frac{cp_{0x}(E^2-H^2) - HE\varepsilon_0 + cp_{0x}H^2}{mc^2(E^2-H^2)}\right)S\,;$$

Окончательно $\boxed{x = \frac{E(cp_{0x}E - H\varepsilon_0)}{mc^2(E^2-H^2)}S + \frac{H(\varepsilon_0 E - cp_{0x}H)}{e(E^2-H^2)^{3/2}}\,sh\left(\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{eS}{mc^2}\right) + \frac{cp_{0y}H}{e(E^2-H^2)}\left[ch\left(\frac{\sqrt{E^2-H^2}\,e}{mc^2}S\right) - 1\right]}$

$$U^0 = E\left[\frac{p_{0y}}{mc\sqrt{E^2-H^2}}\,sh(\dots) + \frac{E}{(E^2-H^2)mc}\left\{\frac{E\varepsilon_0 - p_{0x}cH}{eE}\right\}ch(\dots)\right] + \frac{p_{0x}}{mc}\frac{H}{E} - \frac{H^2}{(E^2-H^2)mc}\left\{\frac{E\varepsilon_0 - cp_{0x}H}{cE}\right\}$$

Используя тот факт, что $ct(t=0) = 0$; $\frac{dx^0}{dS} = U^0$; $x^0 = ct$ имеем

$$ct = \frac{cp_{0y}E}{e(E^2-H^2)}\left[ch(\dots) - 1\right] + \frac{E(E\varepsilon_0 - cp_{0x}H)}{e(E^2-H^2)^{3/2}}\,sh(\dots) + S\left(\frac{p_{0x}Hc(E^2 - \cancel{H^2}) - H^2(E\varepsilon_0 - \cancel{\dots})}{mc^2E(E^2-H^2)}\right)$$

В итоге: $\boxed{ct = \frac{H(p_{0x}cE - H\varepsilon_0)}{mc^2(E^2-H^2)}S + \frac{E(E\varepsilon_0 - cp_{0x}H)}{e(E^2-H^2)^{3/2}}\,sh\left(\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{eS}{mc^2}\right) + \frac{cp_{0y}E}{e(E^2-H^2)}\left[ch\left(\sqrt{E^2-H^2}\,\frac{eS}{mc^2}\right) - 1\right]}$

Т.о. были получены зависимости ct, x, y, z от интервала S, что обведено в прямоугольник (см. выше).

№703

Получить ур-е движ-я заряда в H и E поле в цилин. коорд.

Реш-е: $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{v}\vec{A} - e\varphi$

Замечание: $d\vec{l} = \vec{e_r}dr + \vec{e_\alpha} r d\alpha + \vec{e_z} dz \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{e_r}\dot{r} + \vec{e_\alpha} r\dot{\alpha} + \vec{e_z}\dot{z} = \vec{e_r}v_r + \vec{e_\alpha}v_\alpha + \vec{e_z}v_z$

Ур-е движ-я: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$;

В нашем случае $q_1 = r$; $q_2 = \alpha$; $q_3 = z$.

На практике было получено:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{mr\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_r + eE_r \text{ [это соответств. } q = r\text{]}$$

Проделаем операцию для $q = \alpha$ и $q = z$

1) $q = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\left[-mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\alpha}^2+\dot{z}^2)} + \frac{e}{c}(\dot{r}A_r + r\dot{\alpha}A_\alpha + \dot{z}A_z) - e\varphi\right]\right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{+\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{r^2\dot{\alpha}}{c^2} + \frac{e}{c}rA_\alpha\right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} + \frac{e}{c}\dot{r}A_\alpha + \frac{e}{c}r\frac{dA_\alpha}{dt} = \left\{\frac{dA_\alpha}{dt} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial r}\frac{dr}{dt} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)A_\alpha\right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} + \frac{e}{c}\dot{r}A_\alpha + \frac{e}{c}r\left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + v_z\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} + \frac{v_\alpha}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + v_r\frac{\partial A_\alpha}{\partial r}\right];$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{e}{c}\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial \alpha} + r\dot{\alpha}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha}\right) - e\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$$

Продолжение для вар-я по α:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m r^2 \dot\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{e}{c}\left(\dot r\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} + \cancel{r\dot\alpha}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \dot z\frac{\partial A_z}{\partial\alpha}\right) - e\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{e}{c}\dot r A_\alpha -$$

$$- \frac{e}{c} r\left[\cancel{\quad}\ \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + v_r\frac{\partial A_\alpha}{\partial r} + \cancel{\frac{v_\alpha}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}} + v_z\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\right] =$$

$$= \boxed{\begin{aligned}(\operatorname{rot}\vec A)_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha}\\ (\operatorname{rot}\vec A)_\alpha &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\\ (\operatorname{rot}\vec A)_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\end{aligned}} = \boxed{\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec A}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi} =$$

$$= \left[\nabla = \cancel{\quad}\ \vec e_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec e_\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \vec e_z\frac{\partial}{\partial z} \to \vec E_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right] =$$

$$= + e r\left\{\cancel{\quad} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}\right\} + \frac{er}{c}\left[\frac{v_r}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} + \frac{v_z}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} -\right.$$

$$\left. - \frac{\dot r}{r}A_\alpha - v_r\frac{\partial A_\alpha}{\partial r} - v_z\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\right] =$$

$$= e r E_\alpha + \frac{er}{c}\left[\cancel{\quad}\ v_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial r} - \frac{A_\alpha}{r}\right) +\right.$$

$$\left. + v_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\right)\right] = e r E_\alpha + \frac{er}{c}\left[v_z H_r - v_r H_z\right] =$$

$$= e r\left\{E_\alpha + \frac{1}{c}\left(\vec v\times\vec H\right)_\alpha\right\}$$

Итого $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m r^2\dot\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e r\left\{E_\alpha + \frac{1}{c}\left(\vec v\times\vec H\right)_\alpha\right\}}$

г) $q = z$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot z}\left[-mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\alpha^2 + \dot z^2\right)} + \frac{e}{c}\left(\dot r A_r + r\dot\alpha A_\alpha + \dot z A_z\right) - e\varphi\right]\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m \dot z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c}A_z\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) + \frac{e}{c}\frac{dA_z}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{e}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{e}{c}\left\{v_z\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{v_\alpha}{z}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{e}{c}\left\{\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z} + z\dot{\alpha}\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right\} - e\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Приравнивая получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -e\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{e}{c}\left\{v_z\frac{\partial A_z}{\partial z} + v_\alpha\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} -\right.$$

$$\left. - v_z\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{v_\alpha}{z}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha}\right\} = eE_z + \frac{e}{c}\left\{v_z H_\alpha - v_\alpha H_z\right\} =$$

$$= eE_z + \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_z$$

Итого $\boxed{\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} = eE_z + \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_z}$

Ответ:
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} = \frac{mz\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + eE_z + \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_z$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{mz^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} = ez\left[E_\alpha + \frac{1}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_\alpha\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} = eE_z + \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_z$$

S: $\vec{E} \perp \vec{H}$

S': $H' = 0$; или $E' = 0$

S' движ отн S со скор V. V - ? Обсудить существование и единственность реш

Реш

а) Пусть ~~...~~ мы ищем систему, где $H' = 0$

Преобразования для векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$ при переходе из S в S' следующие:

$$\begin{cases} H_x = H_x' \\ H_y' = \dfrac{H_y + \frac{V}{c} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ H_z' = \dfrac{H_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = E_x' \\ E_y' = \dfrac{E_y - \frac{V}{c} H_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ E_z' = \dfrac{E_z + \frac{V}{c} H_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad (1)$$

Инварианты поля ~~...~~ $H^2 - E^2$, $\vec{E}\vec{H}$

~~Пусть $\vec{E} = (0, E, 0)$; $\vec{H} = (0, 0, H)$~~

Пусть $\vec{E} = (0, E, 0)$; $\vec{H} = (0, 0, H)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_x = H_x' = 0 \\ H_y' = \dfrac{H_y + \frac{V}{c} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0 \\ H_z' = \dfrac{H_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{H - \frac{V}{c} E}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0 \Rightarrow \dfrac{V}{c} = \dfrac{H}{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = E_x' = 0 \\ E_y' = \dfrac{E - \frac{V}{c} H}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{E^2 - H^2}{E\sqrt{1 - \frac{H^2}{E^2}}} = \sqrt{E^2 - H^2} = E' \\ E_z' = 0 \end{cases}$$

Тогда видно, что $H' = 0$ только тогда, когда $\underline{E > H}$

Это видно и из 2-го инварианта: $H^2 - E^2 = -E'^2 \Rightarrow E > H$

В общем случае:

$H_x = 0$; $H_y = \dfrac{-\frac{V}{c} E_z'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$; $H_z = \dfrac{V}{c} \dfrac{E_y'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

Пусть $\vec{V} = (V, 0, 0)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}} (\vec{V} \times \vec{E}) = \frac{E\,(\vec{V} \times \vec{E})}{c\sqrt{E^2 - H^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{V} \times \vec{E}) = \frac{c\sqrt{E^2 - H^2}}{E} \vec{H};$$

$$\frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} = \frac{\vec{E}'}{|\vec{E}'|} = \frac{\vec{E}'}{E'} = \frac{\vec{E}'}{\sqrt{E^2 - H^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}' = \frac{\sqrt{E^2 - H^2}}{E} \vec{E}}$$

$$\vec{V}(\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{c\sqrt{E^2 - H^2}}{E} H^2$$

опред
сумма ...

Из з-на инвариант. $H^2 - E^2 = -E'^2 \Rightarrow \underline{E > H}$

$E' = \sqrt{E^2 - H^2}$; $\quad \dfrac{\vec{E}'}{E'} = \dfrac{\vec{E}}{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E}' = \dfrac{\sqrt{E^2 - H^2}}{E}\vec{E}}$

$H' = 0 \Rightarrow H_x' = H_y' = H_z' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_x = 0; \quad H_y = -\dfrac{v}{c}\dfrac{E_z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad H_z = \dfrac{v}{c}\dfrac{E_y'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$E_x = E_x'; \quad E_y = \dfrac{E_y'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad E_z = \dfrac{E_z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Кроме того по условию $(\vec{E}, \vec{H}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{v}{c}\dfrac{E_z' E_y'}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \dfrac{v}{c}\dfrac{E_z' E_y'}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0$ — все хорошо.

Пусть $\vec{H} = (0, 0, H)$; $\vec{E} = (0, E, 0)$ $\quad \{\vec{E} \perp \vec{H}\}$

Пусть $\vec{V}$ напр. по $x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\vec{V}}{c} = \dfrac{v}{c}\dfrac{\vec{E}\times\vec{H}}{|\vec{E}\times\vec{H}|} = \dfrac{v}{c}\dfrac{\vec{E}\times\vec{H}}{EH} = \{\text{из „выше"}\} = \dfrac{H}{E}\dfrac{\vec{E}\times\vec{H}}{EH} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = c\,\dfrac{\vec{E}\times\vec{H}}{E^2}}$

б) Ищем систему, где $\vec{E}' = 0 \Rightarrow H^2 - E^2 = H'^2 \Rightarrow \underline{H > E}$

$H' = \sqrt{H^2 - E^2} \Rightarrow \boxed{\vec{H}' = \dfrac{\sqrt{H^2 - E^2}}{H}\vec{H}}$

Пусть опять $\vec{H} = (0, 0, H)$; $\vec{E} = (0, E, 0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} E_x' = E_x = 0 \\ \dfrac{E - \frac{v}{c}H}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \\ E_z' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x = H_x' \\ H_y' = 0 \\ H_z' = \dfrac{H - \frac{v}{c}E}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\frac{E}{H} = \frac{v}{c} \qquad H_z' = \frac{H - \frac{E}{H}E}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{H^2}}} = \sqrt{H^2 - E^2}$$

№705

Анод испускает e^- с $v=0$

Ток течет по аноду.

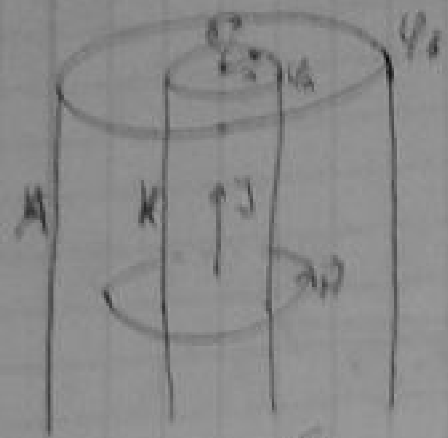


рис.№1

__Задача:__ $|\varphi_b - \varphi_a|_{min} = V_{min}$, чтоб e^- достигли катода

__Р-ие:__ из-за протекания пост. тока J по аноду в пр-ве между А и К создается магнитное поле, как показано на рис.№1. За счет этого e^- будут поворачиваться и падать обратно на анод. При увеличении V у e^- ~~траектория движ-я~~ „дуга" e^- будет ближе приближаться к катоду.

рис.№2

На рис.№2 показан момент, когда e^- попадут на катод, причем это будет V_{min}.

Причем в т. пад. e^- $p_r^{(b)}=0$ (требование критичности процесса);

$p_\varphi^{(b)}=0$ (нет соответствующих сил)

$\vec{H}(t)$ и $\vec{E}(t)$ — const $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ — const;

$\mathcal{E} = \sqrt{c^2p^2+m^2c^4} - e\varphi$ $\{e>0\}$

$\mathcal{E}(r=a) = mc^2 - e\varphi_a$

$\mathcal{E}(r=b) = \sqrt{m^2c^4+c^2p_z^{(b)2}} - e\varphi_b$

Таким образом $mc^2 + e(\varphi_a - \varphi_b) = \sqrt{m^2c^4 + c^2 p_r^{(b)2}}$

Для того, чтоб е ускорялся в поле, оно должно быть направлено к оси r, т.е. $\varphi_a - \varphi_b = V > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow eV_{кр} = \sqrt{m^2c^4 + c^2 p_r^{(b)2}} - mc^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{кр} = \sqrt{\frac{m^2c^4}{e^2} + \frac{c^2}{e^2} p_r^{(b)2}} - \frac{mc^2}{e} \qquad p_r^{(b)} - ?$$

Как было показано ~~в задаче~~ 30.11.11 на практике

$$\frac{dp_r}{dt} = F_r = eE_r - \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{H})_r = \{\vec{E} = (E,0,0);\ \vec{H} = (0,H,0)\} =$$

$= -\frac{e}{c} v_z H = \{$ из курса „общая физика — эл-во и магнетизм"

$H = \frac{2J}{cr}\} = -\frac{e}{c}\frac{2J}{c}\frac{dr}{r\,dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dp_r = -\frac{2Je}{c^2}\frac{dr}{r}$$

Проинтегр. от a до b с учетом, что $p_r^{(a)} = 0$ имеем

$$p_r^{(b)} = -\frac{2Je}{c^2}\ln r\Big|_a^b = -\frac{2Je}{c^2}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{кр} = \sqrt{\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{e^2}}\cdot\frac{4J^2\cancel{e^2}}{\cancel{c^4}c^2}\ln^2\frac{b}{a} + \frac{m^2c^4}{e^2}} - \frac{mc^2}{e}$$

Итак окончательно $\boxed{V_{кр} = \sqrt{\frac{4J^2}{c^2}\ln^2\frac{b}{a} + \frac{m^2c^4}{e^2}} - \frac{mc^2}{e}}$

Ответ: $V_{кр} = \sqrt{\frac{4J^2}{c^2}\ln^2\frac{b}{a} + \frac{m^2c^4}{e^2}} - \frac{mc^2}{e}$

№ 664

$\vartheta = \dots$

Дано:
S: $\vec{E} \perp \vec{H}$
S': а) $H' = 0$
б) $E' = 0$
S' движ. отн. S с V

$\vec{V} = ?$

а) $H^2 - E^2 = H'^2 - E'^2 = -E'^2 \Rightarrow \boxed{E > H}$

Пусть $\vec{V} \perp (\vec{E}, \vec{H})$

$$H' = 0 = \frac{\vec{H} - \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{E} - \frac{1}{V^2}\left(1 - \cancel{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right)\vec{V}(\vec{V}\vec{H})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{E}} \quad \Big| \times \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{c}\vec{E}\times(\vec{V}\times\vec{E}) = \frac{1}{c}\vec{V}E^2 - \frac{1}{c}\cancel{\vec{E}(\vec{E}\vec{V})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = c\,\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{E^2}}$$

Замечание: Введем систему S'', кот. движ. отн. S' со скоростью V'. Тогда
$$\vec{H}'' = \frac{\vec{H}' - \frac{1}{c}\vec{V}'\times\vec{E}' - \frac{1}{V'^2}\left(1 - \cancel{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}}\right)\vec{V}'(\vec{V}'\vec{H}')}{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}}$$

Требуем, чтоб $\vec{H}'' = 0 \Rightarrow \frac{1}{c}\vec{V}'\times\vec{E}' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ В любой системе, движущейся вдоль $\vec{E}'$ с произвольной скоростью, магн. поле также будет отсутствовать.

б) $H^2 - E^2 = H'^2 - E'^2 = H'^2 \Rightarrow \boxed{H > E}$

$$\vec{E}' = 0 = \frac{\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{H} - \frac{1}{V^2}\left(1 - \cancel{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right)\vec{V}(\vec{V}\vec{E})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{c}(\vec{H}\times\vec{V}) \quad \Big| \times \vec{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{H}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{H}\times(\vec{H}\times\vec{V}) = \frac{1}{c}\cancel{\vec{H}(\vec{H}\vec{V})} - \frac{1}{c}\vec{V}H^2$$

Петрзик $\vec{V} = c\,\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{H^2}$

№ 106

Дано:
[illegible] провод ([illegible]),
радиус a
ток провода I

[illegible],
[illegible] провода, [illegible]
$\vec{v}_0 \parallel \vec{e}_z$

b? ([illegible])

Рис. 6

Подробно [illegible] № 106 [illegible] по проводу сопровождается появлением $\vec{H}$ вокруг провода как это показано на рис. 6. Так [illegible] расстояние „[illegible]" r от оси z, при [illegible] $\vec{v}_0 \parallel \vec{e}_z$ ([illegible] составляющая силы Лоренца [illegible] „направленная" [illegible] r и оси z).

В [illegible] r [illegible] („за-[illegible]" [illegible] будет [illegible] с [illegible] до [illegible] $H \sim \frac{1}{r}$). [illegible] b будет [illegible], когда $\vec{v} \perp \vec{e}_z$. Зная [illegible] и [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] (система стационарна).

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = Const!$$

Учитывая, что $p_x^{(b)} = p_x^{(a)} = p_y^{(b)} = p_y^{(a)} = 0$ имеем

$$E(z=a) = \sqrt{c^2(p_z^{(a)})^2 + m^2c^4} \Rightarrow$$

$$E(z=b) = \sqrt{c^2(p_z^{(b)})^2 + m^2c^4}$$

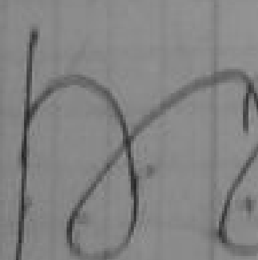
$$\Rightarrow (p_z^{(a)})^2 = (p_z^{(b)})^2 \Rightarrow |p_z^{(a)}| = |p_z^{(b)}|$$

Кроме того проделывая ту-же операцию, как и в зад. 5(а), т.е. стартуя с ур-я $\frac{dp_z}{dt} = F_z = -\frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_z$ получаем:

$p_z(z)$

$$p_z^{(b)} - p_z^{(a)} = \frac{2Je}{c^2}\ln\frac{b}{a}$$

Теперь обозначив за $p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ и заметив, что



$p_z^{(b)}$ и $p_z^{(a)}$ противоположного знака (а именно $p_z^{(a)}$ и $-p_z^{(b)}$) получим:

$$2p_z^{(a)} = 2p_0 = \frac{2Je}{c^2}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \exp\left\{\frac{p_0c^2}{Je}\right\} \Rightarrow b = a\exp\left\{\frac{p_0c^2}{Je}\right\}$$

Ответ: $b = a\cdot\exp\left\{\frac{p_0c^2}{Je}\right\}$, где

$$p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

94 (a)

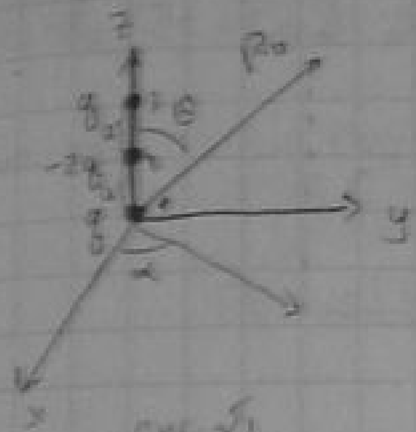


рис. 51

Дано: Линейный квадруполь построенный так, как это изображено на рис. 51

$\varphi(R_0)$ - ? при $R_0 \to \infty$

Р-ие. $\varphi = \dfrac{\sum e}{R_0} + \dfrac{\vec{n}\vec{d}}{R_0^3} + \dfrac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2 R_0^3}$, где e - один из зарядов, $\vec{n} = \dfrac{\vec{R}_0}{R_0}$

С учетом того, что $R_0 \to \infty$ 1-е слагаемое уходит

$$\left.\begin{aligned} d_z &= \sum e z = q \cdot 0 - 2q \cdot a + q \cdot 2a = 0 \\ d_y &= \sum e y = 0 \\ d_x &= \sum e x = 0 \end{aligned}\right\} \vec{d} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 2-е слагаемое тоже уходит

В итоге получаем $\boxed{\varphi = \dfrac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2 R_0^3}}$, где $D_{\alpha\beta}$ - тензор квадрупольного момента поля

Вспоминая то обстоятельство, что если сист. зарядов (в нашем случае линейный квадруполь) имеет ось симметрии выше 2-го пор-ка, то $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}$; $D_{\alpha\beta} = 0$

По определению $D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow D_{zz} = -2q(3a^2 - a^2) + q(12a^2 - 4a^2) = -4qa^2 + 8qa^2 = 4qa^2$

$D_{xx} = D_{yy} = -2qa^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{D_{zz}}{2R_0^3}\left\{ n_z n_z - \frac{n_y n_y}{2} - \frac{n_x n_x}{2} \right\} = \frac{2qa^2}{R_0^3}\left\{ \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta \sin^2\alpha}{2} - \frac{\sin^2\theta \cos^2\alpha}{2} \right\} =$$

$$= \frac{2qa^2}{R_0^3}\left\{ \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \right\} = \frac{2qa^2}{R_0^3}\left\{ \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2} \right\};$$

Вспомним определение полиномов Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}$

и определим явный вид полинома Лежандра 2-го пор-ка

$$P_2(x) = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left[x^4 - 2x^2 + 1\right] = \frac{1}{8}\left\{12x^2 - 4\right\} = \frac{1}{2}\left[3x^2 - 1\right]$$

Наконец делая замену $x \to \cos\theta$:

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left[3\cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta\right] = \frac{1}{2}\left[2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right] = \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}$$

С учетом последнего можно окончательно переписать вид нашего потенциала:

Ответ: $$\varphi(R_0)\Big|_{R_0 \gg a} = \frac{2qa^2}{R_0^3}\left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right) = \frac{2qa^2}{R_0^3}P_2(\cos\theta)$$

№119

Дано: В сфер. коорд.: $\varphi(r) = q\, e^{-\alpha r}/r$; α, q - const

$\rho(r)$ - ?

Решение: $\Delta\varphi = -4\pi\rho \Rightarrow \boxed{\rho = -\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi}$

С учетом, что $\Delta\rho(r)\Big|_{сф.к.} = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left\{r\rho(r)\right\}$ имеем

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\Delta\left[\frac{q e^{-\alpha r}}{r}\right] = \text{\{избавляемся от особенности в 0\}}$$

$$= -\frac{q}{4\pi}\Delta\left[\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r} + \frac{1}{r}\right] = -\frac{q}{4\pi}\Delta\left[\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r}\right] - \frac{q}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \left|\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec r)\right| = -\frac{q}{4\pi r}\frac{d^2}{dr^2}\left[e^{-\alpha r} - 1\right] + q\,\delta(\vec r) =$$

$$= -\frac{q}{4\pi r}\left[\alpha^2 e^{-\alpha r}\right] + q\delta(\vec{r})$$

Ответ: $\rho(r) = q\delta(\vec{r}) - \frac{q\alpha^2}{4\pi}\cdot\frac{e^{-\alpha r}}{r}$

№83

В атоме водорода $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3}\cdot \exp\left[-\frac{2r}{a}\right]$;

$a = 0{,}529\cdot 10^{-8}$ см ; $e_0 = 4{,}8\cdot 10^{-10}\, CGSE_q$

φ_{er}, E_{er} -? φ, E -?

Р-ие: воспользовавшись результатами зад. №81

1) $$E_{er} = \frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \rho(r')r'^2\,dr' = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}} r^2\,dr =$$

$$\cancel{-\frac{4e_0}{a^3}\int_0^r e^{-\frac{2r}{a}}dr = -\frac{4e_0}{a^3}\left[-\frac{a}{2}e^{-\frac{2r}{a}}\right]\Big|_0^r}$$

$$= +\frac{4e_0}{r^2a^3}\frac{a}{2}\int_0^r r^2\,de^{-\frac{2r}{a}} = \frac{2e_0}{r^2a^2}r^2e^{-\frac{2r}{a}}\Big|_0^r - \frac{4e_0}{r^2a^2}\int_0^r r e^{-\frac{2r}{a}}dr =$$

$$= \frac{2e_0e^{-\frac{2r}{a}}}{a^2} + \frac{4e_0}{r^2a^2}\frac{a}{2}\int_0^r r\,de^{-\frac{2r}{a}} = \frac{2e_0}{a^2}e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{2e_0}{r^2a}r e^{-\frac{2r}{a}} -$$

$$-\frac{4e_0}{r^2a^2}\frac{a}{2}\int_0^r e^{-\frac{2r}{a}}dr = \frac{2e_0}{a^2}e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{2e_0}{ra}e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{4e_0\cancel{a}}{2r^2\cancel{a^2}}\frac{\cancel{a}}{2}\left[e^{-\frac{2r}{a}} - 1\right] =$$

$$= \frac{2e_0}{a^2}e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{e_0}{r^2}\left[1 - \frac{2r}{a}e^{-\frac{2r}{a}} - e^{-\frac{2r}{a}}\right] =$$

$$= \frac{2e_0}{a^2}e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{e_0}{r^2}\left[1 - \left(\frac{2r}{a}+1\right)e^{-\frac{2r}{a}}\right] = E_{er}$$

✓

$$2)\ \varphi_e(z) = +4\pi \frac{1}{z}\int_0^z \rho(z')z'^2 dz' + 4\pi \int_z^\infty \rho(z')z'dz' ;$$

$$-4\pi \int_z^\infty \frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2z'}{a}} z'dz' = + \frac{4e_0}{a^3}\frac{a}{2}\int_z^\infty z'\,d e^{-\frac{2z'}{a}} =$$

$$= \frac{2e_0}{a^2}\left\{ z'e^{-\frac{2z'}{a}}\Big|_z^\infty + \frac{2e_0}{a^2}\frac{a}{2}\int_z^\infty d e^{-\frac{2z'}{a}} = \right.$$

$$= -\frac{2e_0}{a^2} z e^{-\frac{2z}{a}} + \frac{e_0}{a} e^{-\frac{2z'}{a}}\Big|_z^\infty =$$

$$= -\frac{2e_0}{a^2} z e^{-\frac{2z}{a}} - \frac{e_0}{a} e^{-\frac{2z}{a}}$$

$$+ 4\pi \frac{1}{z}\int_0^z \rho(z')z'^2 dz' = + z E_{ez} =$$

$$= -\frac{e_0}{z}\left[1 - \left(\frac{2z}{a}+1\right)e^{-\frac{2z}{a}}\right] + \frac{2e_0 z}{a^2} e^{-\frac{2z}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_e(z) = -\frac{e_0}{z} + \frac{2z}{a}\frac{e_0}{z} e^{-\frac{2z}{a}} - \frac{e_0}{z}e^{-\frac{2z}{a}} + \cancel{\frac{2e_0 z}{a^2} e^{-\frac{2z}{a}}} - \cancel{\frac{2e_0}{a^2} z e^{-\frac{2z}{a}}}$$

$$- \frac{e_0}{a}e^{-\frac{2z}{a}} = -\frac{e_0}{z}\left[1 - e^{-\frac{2z}{a}}\right] + \frac{e_0}{a}e^{-\frac{2z}{a}}$$

Т.е. $\varphi_e(z) = -\frac{e_0}{z}\left\{1 - e^{-\frac{2z}{a}}\right\} + \frac{e_0}{a}e^{-\frac{2z}{a}}$

3) С учетом, что $\varphi_p(z) = \frac{e_0}{z}$; $E_{pz} = \frac{e_0}{z^2} \Rightarrow$

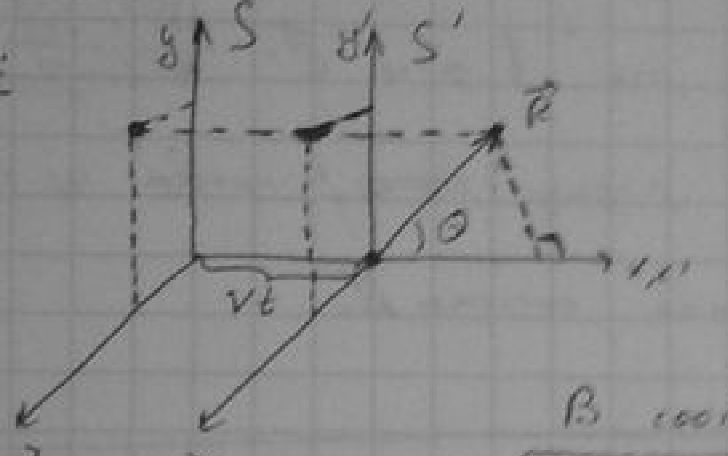
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{e_0}{z}\left\{1 - e^{-\frac{2z}{a}}\right\} + \frac{e_0}{a}e^{-\frac{2z}{a}} + \frac{e_0}{z} \\ E(z) &= -\frac{e_0}{z^2}\left\{1 - \left(\frac{2z}{a}+1\right)e^{-\frac{2z}{a}}\right\} + \frac{2e_0}{a^2}e^{-\frac{2z}{a}} + \frac{e_0}{z^2} \end{aligned}}$$

№611

<u>Док:</u> Равномерно движ. заряд., т.д. что E заряда "сплющивается" в напр-е движ-я (ослабление поля E на линии движ-я зар.)

Есть ли согласие с ф-лой $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$

<u>Р-ие:</u>



Заряд нах. в начале координат системы S', кот. движ. со скор. V отн. лаб. сист. отсч. S.

В соответствии р-ия зад. 610:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{e\vec{R}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{R^3\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}}$$

Фиксируя R, V смотрим зависимость $E(\theta)$. Очевидно, что при $\theta = 0,\ \theta = \pi$ E принимает min знач-е, а при $\theta = \frac{\pi}{2};\ \theta = \frac{3\pi}{2}$ – максимальное, а именно:

$$\theta = 0;\ \theta = \pi:\quad E_{\parallel} = \frac{e}{R_{\parallel}^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) \qquad (1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2};\ \theta = \frac{3\pi}{2}:\quad E_{\perp} = \frac{e}{R_{\perp}^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

$$R_{\parallel}^{*} = R'_{\parallel}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

С этой точки зрения поле движ. зар. и вправду "сплющивается" в напр-е движ-я

$$E_{\parallel} = \frac{e\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{R_{\parallel}^2} \Rightarrow \frac{e\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(R'_{\parallel}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)^2}$$

Что касается соотношения $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$:

$$= \frac{e\sqrt{\ }}{\left(R_{\parallel}\sqrt{\ }\right)^2} = \frac{e}{R'^2_{\parallel}}$$

Пусть ~~[illegible]~~ мы рассматриваем поле в т., отстоящей от т. O' на оси R (на них на оси x, x'), т.е. отстоящ. от заряда на расст. R.

В л.с.о. этот интервал с учетом Лоренцева сокращения равняется $R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Тогда в соответствии с ф-лой (1):

$$\boxed{E_{\parallel} = \frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2} = \frac{e}{R^2} = E'_{\parallel}}$$

, как это и должно быть

Замечание: это показывает, что в ф-ле $\vec{E} = \frac{e\vec{R}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$ за $\vec{R}$ следует принимать радиус-вектор, провед. [illegible] [illegible] системы S.

Эпилог

$$dp_z = -\frac{2Je}{c}\frac{dz}{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_z = -\frac{2Je}{c}\ln z + C$$

$$z = a \Rightarrow p_z = p_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 = -\frac{2Je}{c}\ln a + C \Rightarrow C = p_0 + \frac{2Je}{c}\ln a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_z = -\frac{2Je}{c}\ln\frac{z}{a} + p_0$$

1) 39 1) 41 2) 43а 3) 44 4) 57 6) 43 8) 549 9) 550 10) 546 11) 548 12) 551 14) 554 15) 557 16) 560 18) 556 19) 562	21) 564 22) 569 24) 573 25) 622 26) 636 28) 641 29) 625 31) 654 32) 702 33) 693 34) 626 35) 564 36) 697	39) 59 40) 60 41) 698б 46) 703 53) 705 55) ? 56) 706 58) 94 59) 119 60) 83 62) 611

Страница) Номер_задачи