

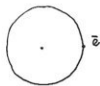
Электродинамика сплошных сред

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\rho}{c} \vec{V}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$



микроуравнения, кот.
явл. основой для
описания микрополей
зар.

изменить микрополе со временем невозможно эксперимент. опред-ть
(микроскоп. приборы)

вещ. во в целом явл. электроинерт.

переслабленные заря-з зар. и токов- возникают поля
при малом. тн. полем в вещ. во возник. самостоятел. поле, сост. из внутр.
полей и полей зар. вещ. во

внутри измения поля ат. вещ. во - от этого надо избавиться
детекторы поля явл. микроскоп. прибор. будут измерять пол, без некого
гравитацион. поля ат. вещ. во (от эт. надо избавиться)

для того чтобы произв-ти усреднение выдир. физ. малый объем в вещ. во

- 1) на протяж-е. размера инерт. поле сущ. но не меняется / выдир. разн. физик.
- 2) в этом со малый объем должно быть больш. кол-во ат. ∞ Малый объем

$$\boxed{\begin{matrix} l_A < l_0 \ll L \\ \tau_A < \tau_0 \ll T \end{matrix}}$$

- период внутр. поля

характерное
ат. время



$(x+\xi, y+\eta, z+\xi)$

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y, z) &= \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \cdot \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\xi \varepsilon(x+\xi, y+\eta, z+\xi, t+\tau) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\xi \frac{\partial \varepsilon(x+\xi, y+\eta, z+\xi, t+\tau)}{\partial x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} d\tau \cdot \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\xi d\eta d\xi \varepsilon(x+\xi, y+\eta, z+\xi, t+\tau) = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon(x, y, z)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$$

если максим. величина

$$\text{rot } \vec{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$\vec{E} = \vec{E}$ - напряж. эл. поля

$\vec{h} = \vec{B}$ - магнитное поле (магнитное поле)

$$\text{div } \vec{h} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \vec{p}$$

$$\vec{p} = (\vec{p}_0 + \vec{p}_{cb}) = \vec{p}_0 + \vec{p}_{cb}$$

обс. зап.

$$\vec{p} \cdot \vec{v} = (\vec{p} \cdot \vec{v})_0 + (\vec{p} \cdot \vec{v})_{cb}$$

обс.

$$\frac{1}{V_0} \sum e a \vec{v} a(t)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0 + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{cb} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi(\vec{p}_0 + \vec{p}_{cb}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{v}_{cb} &= \frac{1}{V_0} \int (\vec{p} \cdot \vec{v})_{cb} dV = \frac{1}{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{p} \cdot \vec{r})_{cb} dV = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{V_0} \sum_a e a \vec{r}_a = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V_0} \sum_a \vec{d} \right) \end{aligned}$$

ср. дип. мом-т
един. объема в б.с

$$\vec{p} = \frac{1}{V_0} \sum_a \vec{d}$$

ср. дип. мом.
ег. в

$$\vec{p} \cdot \vec{v}_{cb} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{j}_{пол}$$

поляризация
вещ. в



возникает дип. мом.
в ант. (напряж. зап-до
поля, отсюда - напряж.
поля), маг. мент. в бр. и
векторное поле направлено в
бр.

связ. зап. образ. ток намагничивания

феноменология: будем рассматр. антепроб. ток (в катуш. ант.)

разно: рассматр. $\vec{E}$ по эксперим. - разно антепроб. ток



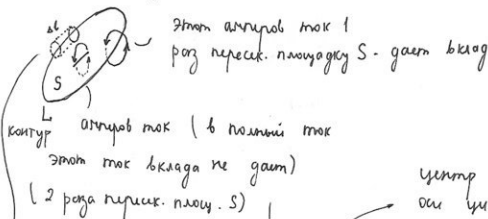
внутри элемент. объем
 ΔS - сеч. цилиндрика
 Δl - выс. цилиндрика

$$\begin{aligned} \text{магн. мом. } \vec{m}_0 &= \frac{1}{2c} \int e \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{v} dV = \\ &= \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{j} dV \quad \vec{j} d = j \frac{d\vec{r}}{dl} \quad dV = \Delta S \cdot dl \\ \vec{m}_0 &= \frac{1}{2c} i \oint \vec{r} \times d\vec{r}; \quad \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r} = \vec{S}_0? \end{aligned}$$

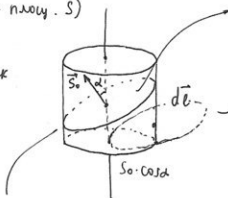
$$\vec{m}_0 = \frac{i \cdot \vec{S}_0}{c}$$

магн. мом. т. изг. ант. проб.
тока

расск. произв. площ. S в вец-ве поставляет ток, произв-е эту площ-ку



Элемент. объемчик
выс. $\Delta l \Rightarrow$
(в увелич. виде)



окружности амер. тока касается образующих цилиндра

$n \cdot \Delta V \cdot i_0$
плотность амер. тока

$$i = \int n i_0 S_0 \cos \alpha \, dl =$$

$$= \int_L n \cdot i_0 \vec{S}_0 \cdot d\vec{l} = c \int_L n \cdot \frac{i_0 \vec{S}_0}{c} d\vec{l} =$$

$$= c \int_L n \cdot \vec{m}_0 \cdot d\vec{l}$$

def: Ср. магн. мом-т ед. V вец-ва - вектор намагниченности вец-ва:

$$\vec{M} \equiv \frac{1}{V_0} \sum \vec{m}$$

if $\vec{m}$ все одинаковы,
то $\vec{M} = \frac{N}{V_0} \cdot \vec{m} = n \cdot \vec{m}$

N - полное число мом-т в об. V_0

$$\frac{N}{V_0} \equiv n - \text{плотность}$$

$$i = c \int_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

сила тока данного сорта амер. к токов

полная сила тока (всех сортов) в магн. линииности = сумме:

$$\vec{M} = \sum_a \vec{M}_a$$

амер. ток. разные сорта

сила тока по определению

теор. Стокса $\Rightarrow i = c \int_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = c \int \text{rot } \vec{M} \cdot d\vec{S} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \vec{j}_{\text{магн.}} = c \cdot \text{rot } \vec{M}$

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{пол.}} + \vec{j}_{\text{магн.}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot } \vec{M}$$

макроскоп. величины, $\vec{P}, \vec{M}$ - измер. на опыте

плотность тока намагниченности. макроскоп. вел.

Матриц. ур. с пер-ми (сохр. зап.):

$$\frac{\partial \rho_{\text{нас}}}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{нас}} = 0$$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{нас}} &= \rho_0 + \rho_d \\ \vec{j}_{\text{нас}} &= \vec{j}_0 + \vec{j}_d \end{aligned}$$

но:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_0 &= 0 \\ \text{своб. зап.} \\ \text{отсутствует} \\ \text{э. ур-ю} \end{aligned} \right\}$$

Отсюда, своб. зап. тоже угодна.
ур-ю пер-ми:

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_d = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_0 + c \cdot \text{rot } \vec{M})$$

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{P} = 0 \quad j_{\text{нас}} + j_{\text{нас}} - j_d$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_d + \text{div } \vec{P}) = 0$$

$$\boxed{\rho_d = -\text{div } \vec{P}}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi (-\text{div } \vec{P}) + 4\pi \rho_0$$

$$\boxed{\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}}$$

$\vec{D}$ - электрическая индукция
вектор индукции $\vec{B}$ ($\vec{A} = \vec{B}$), однако векторное средн. значение напряем.
смы $\vec{B}$, а не $\vec{H}$

$$\boxed{\vec{H} + 4\pi \vec{M} = \vec{B}}$$

напряженность магн. поля $-\vec{H}$ (но аналогия с $\vec{E}$)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0, \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho_0 \end{cases}$$

Сум. ур-е ур, симметр. обл.
э/м поле в вакуум.

Это сум. ур. не полная

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

if э/м поле непрерывно, то
гда изотропной средой:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E}$$

$$\vec{B} = \hat{\mu} \vec{H}$$

анизотропная среда:

$$\vec{D}_i = \hat{\epsilon}_{ij} E_j$$

$$\vec{B}_i = \hat{\mu}_{ij} H_j$$

ϵ_0 - электростат. прониц. вакуума
(э/м поле const в бр.)
в пр-бе может меняться

μ_0 - магн. прониц. вакуума
 $\hat{\epsilon}$ - тенз. опер. p по коорд. и t
 $\hat{\mu}$ - тенз. оператор

$\hat{\epsilon}_{ij}$ - операторный вид тензора
электр. проницаемости

$$\vec{F} = e \cdot \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

$$\vec{F} = \vec{F} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

бл. зап. векторное
магн. поле

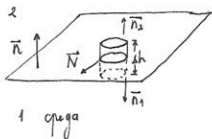
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\Phi} \cdot d\vec{S} + \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{\Phi} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho_0 \cdot dV \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0 \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho_0$$

1) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} =$$



$$= \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot S + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot S + \vec{B} \cdot \vec{N} \cdot S \cdot \Delta h = 0$$

$\Delta h \rightarrow 0$
 $S_1 \rightarrow S$
 $S_2 \rightarrow S$

$$B_{2n} = B_{1n} \Big|_S$$

2) $\text{div } \vec{\Phi} = 4\pi \rho_0$

$$\oint \vec{\Phi} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho \cdot dV \quad \Delta V = S \cdot \Delta h$$

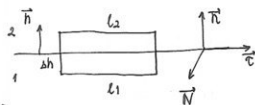
$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \rho_0 \cdot \Delta V = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta V} \cdot \Delta V = \frac{\Delta e}{S \cdot \Delta h} \cdot S \cdot \Delta h$$

$$S \cdot (-D_{1n} + D_{2n}) = 4\pi \sigma_s \cdot S$$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{S} = \sigma_s \quad \text{заряд, сосредоточен на eq. грани. pillbox}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \sigma_s \Big|_S$$

3) $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$



$$\vec{E}_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot l_1 - \vec{E}_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot l_2 + \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot \Delta h - \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot \Delta h = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \vec{N} \cdot \Delta h \cdot l$$

$$\Delta h \rightarrow 0: \quad E_{2\tau} = E_{1\tau} \Big|_S$$

4) $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\Phi} \cdot d\vec{S} + \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{j} \cdot \vec{N} \Delta S =$

$$= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\vec{i} \cdot \vec{N}}{\Delta h} \Delta h \cdot l = \vec{i} \cdot \vec{N} \cdot l \quad (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{e} = \frac{4\pi}{c} \vec{i} \cdot \vec{N} \Big|_S$$

$$\vec{e} = \vec{N} \times \vec{N}$$

$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\vec{N} \times \vec{N}) = \frac{4\pi}{c} \vec{i} \cdot \vec{N} \Big|_S \quad \{ \vec{N} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) - \frac{4\pi}{c} \vec{i} \} \cdot \vec{N} \Big|_S = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{i}$$

рам. усе.

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{2n} = B_{1n}|_s \quad \Phi_{2n} - \Phi_{1n} = 4\pi\sigma_s|_s \quad P_{1n} - P_{2n}|_s = \sigma_{cb} \quad \text{плотн. заря-х зар-б.} \\ E_{2\tau} = E_{1\tau}|_s \quad \text{(на пов-ну)} \\ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{i} \end{array} \right.$$

уп-в электростат. ку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \quad E_{2\tau} = E_{1\tau} \\ \text{div } \vec{D} = 4\pi\rho \quad \Phi_{2n} - \Phi_{1n} = 4\pi\sigma_s \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \end{array} \right.$$

плотность зарядов.
пов-х зар-б

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi$$

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho$$

гуэл. - гуэл.

$$1) \quad \varphi_1 = \varphi_2|_s$$

$$2) \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

гуэл. - нроб.

$$1) \quad \varphi|_s = \text{const}$$

$$\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_s = -4\pi\sigma_s$$

$$22.02.12. \quad (1) \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad | \cdot \vec{H}$$

$$(2) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad | \cdot \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ гуэлеструк - гуэлеструк} \\ E_{2\tau} = E_{1\tau} \\ \Phi_{2n} = \Phi_{1n} \end{array} \right.$$

плотность зарядов.
пов-х зар-б

$$\left\{ \begin{array}{l} 2) \text{ гуэл. - нроб.к.} \quad \vec{E}_{\text{нроб.}} = 0 \quad (\text{внутри электростат. ку}) \\ E_{\tau}|_s = 0 \\ \Phi_n|_s = 4\pi\sigma_s \end{array} \right.$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

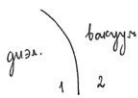
сп. бак.
гуэл. бак. плотн потока

(2)-(1):

$$\frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} \quad | \cdot \frac{c}{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\int_V dV \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \oint_S \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$



на границе раздела: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $H_{1\tau} = H_{2\tau} \Rightarrow$

$$(\vec{E} \times \vec{H})_n = (\vec{E} \times \vec{H})_{n2}$$

$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$ энергия идет на разгон частиц
дополнительно потери, нагрев и т.д.

ток барьеров - сторонними
зарядами

$$\oint_S \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{s}$$

поток энергии в-з. об-ем,
охлаждающими потоками

Изучение в ед. бр. плотности энергии эл. поля в вакууме

Саму плотн. эн. в общем случае, найти невозможно.

$$1) \int_V dV \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$2) \frac{\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0}{const} \frac{1}{4\pi} (\epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) =$$

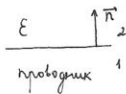
$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) \neq \frac{\partial}{\partial t} W_E$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 H^2}{8\pi} = \frac{\partial}{\partial t} (W_E + W_H)$$

б. энергии и.
заб. м. от бр.

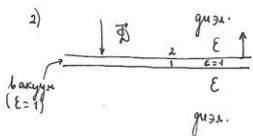
$$W_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi}, W_H = \frac{\mu_0 H^2}{8\pi}$$

плотность энергии, плотность эн.,
запасенной в эл. запас. в магн. поле



$$1) \Phi_n|_S = 4\pi \sigma_S$$

Ост. заряды электростатически связаны с границей и
проводников состоят в том, чтобы найти электр. поле
вне проводн. в V точке пр. та на заданном радиусе
оо-бъем. зар. б. в ваку. и пов-х д. проводн.



$$\Phi_{1n} = \Phi_{2n}|_S$$

$$E_{1n} = D_{2n}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{D}_2$$

$$2) \frac{E_2 \rightarrow}{\vec{n}}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

$$\text{div } \vec{\Phi} = 4\pi \rho, \quad \vec{\Phi} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad \text{возмущен. гравит.} \quad \Delta \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho}{R} dV$$

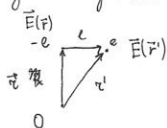
$$\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{R} - \vec{R}_a)$$

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon R} \rightarrow \text{грав. д. зарядов}$$

След, генер. на електрич. поле. $\vec{E}$ еоген. поле

визначам ген. момент (поле еоген)



$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\ell}$$

$$x(t_0 + T) = x(t_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{(i)}(t_0)}{i!} T^i$$

T - час

$$\vec{F} = e \vec{E}(\vec{r}') - e \vec{E}(\vec{r}) = e \{ \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{\ell} \nabla) \vec{E}(\vec{r}) + \dots - \vec{E}(\vec{r}) \} = (\vec{\ell} \nabla) \vec{E}$$

$$- \vec{E}(\vec{r}) \} = (\vec{\ell} \nabla) \vec{E}$$

магнетон. поле

$$\vec{F} = \frac{1}{V} \sum \vec{f}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{d} - \text{вектор поляризации}$$

$$\vec{F} = (\vec{P} \nabla) \vec{E}$$

$$\epsilon \vec{E} = \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

$$\epsilon > 1$$

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}$$

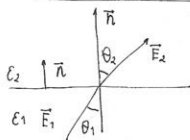
$$\frac{1}{2} \text{grad } \vec{E}^2 = (\vec{E} \nabla) \vec{E} + \vec{E} \times \text{rot } \vec{E}$$

" (в атомар. электро-мех.)

$$\vec{F} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad } E^2$$

grad напряг-а в атомар. электро-мех. атомар. вращении поле

Электромагн. поле, возг. зап. Мет. пол. мн



$$\Phi_m = \Phi_{2n}|_S$$

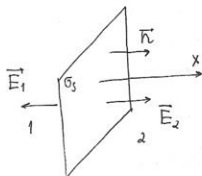
$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$E_{1t} = E_{2t}|_S$$

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$\frac{1}{\epsilon_1} \tan \theta_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \tan \theta_2$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$



σ_s заряд на боковой м. поверхности

$$y = y(x)$$

линия в центре базиса $\epsilon = 1$

$$\text{div } \vec{D} = \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho \quad \text{линия в центре}$$

деформация поверхности

$$\rho = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, E_y = E_z = 0$$

$$E_x = \text{const}$$

Низкий слой const из пар. упр.

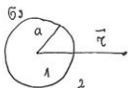
$$E_{2n} \leftarrow E_{1n} = 4\pi \sigma_s$$

$$E_{1n} = E_{2n}$$

$$\vec{E} = 2\pi \sigma_s \vec{n}$$

Электромагн. поле, возг. мет. зап.

Пробовување уметног. роб-м



$$\varphi = \varphi(r) \quad \vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\vec{e}_r \frac{d\varphi}{dr} = \vec{e}_r E_r(r)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho = 0$$

равнотенно зар.
уметног. роб-м

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_r = 0 \quad E_r = \frac{\text{const}}{r}$$

$$r < a: \text{const} = 0; E_r = 0$$

$$r > a: E_{2r} = \frac{C_2}{r}$$

$$E_{2r} \Big|_{r=a} = 4\pi\sigma_s$$

$$\frac{C_2}{a} = 4\pi\sigma_s$$

$$C_2 = 2 \cdot 2\pi a \cdot \sigma_s = 2\pi$$

$$\pi = 2\pi a \cdot \sigma_s$$

зар. на ег. глуми уметног. роб-м

$$\text{Дома: } \vec{E}_2 = \vec{e}_r \cdot \frac{q}{r^2} \quad \vec{E}_1 = 0$$

за сфер. роб-м.

Електро уметног. роб-м

пробовување на. бгдм от бср оу-х
пробовување

$$\varepsilon = 1 \quad q = \oint \sigma_s \cdot ds$$

$$\text{позитив зар. на } \sigma_s \quad \Phi_n = 4\pi\sigma_s$$

$$\vec{n} \cdot \text{grad} \varphi \Big|_s = -4\pi\sigma_s \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_s = -4\pi\sigma_s$$

$$q = \oint \sigma_s \cdot ds = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot ds$$

$$\frac{q}{4} = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot ds$$

оу-х-о равнотенног. роб-м
const

$$C = \frac{q}{4}$$

Електро уметног. роб-м

При заданом позитив. роб-м оу-х зар.

$$C_a = \frac{q}{a} = a \text{ (cm)} \quad \text{б зар. см.}$$

Сила, генерирана на ег. роб-м зар. роб-м:

$$\vec{E} = 4\pi\sigma_s \cdot \vec{n} \quad \vec{E}' + \vec{E}'' = 0 \Rightarrow \underline{E' = E''}$$

бгдм на роб-м
роб-м ег. роб-м ΔS

$$\text{внутри роб-м } \vec{E}' + \vec{E}'' = 0 \Rightarrow \underline{E' = E''}$$

зар. на (у-х зар. на зар. на)

$$\vec{E}' + \vec{E}'' = 2\vec{E}' = 4\pi\sigma_s \cdot \vec{n} = \vec{E}$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{2} \vec{E} = 2\pi\sigma_s \cdot \vec{n}$$

$\vec{E}'$ - бгдм на роб-м ΔS

$$\sigma_s \cdot \Delta S \cdot \vec{E}' = 2\pi\sigma_s^2 \Delta S \cdot \vec{n} = \vec{F}$$

$$\vec{E} = 4\pi\sigma_s \cdot \vec{n} \quad \sigma_s^2 = \frac{E^2}{(4\pi)^2}$$

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}}{\Delta S} = \frac{E^2}{8\pi} \cdot \vec{n}$$

на зар. ег. роб-м
роб-м генерирана сила
пробовување

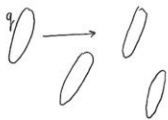
$$C = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ стг} \varphi}{300 \text{ стг} \varphi} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}}$$

cm

9

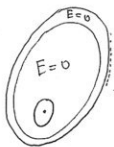
Система зап-х проб-б
Электростатика

Тематика 1-го
"Обобщ. ф. чин"



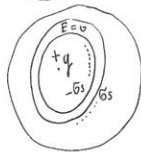
переносим-е зап-б
на проб-ны проб-ка

Электростат. заряды



• q

набл. заряды на внутр. проб-ны
прободника, кон. экраниром



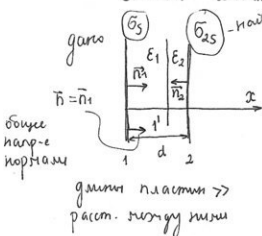
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi q$$

Конденсаторы

пр-во, заряды, между
плоск. Мет. пластинами

плоск. экраниром внутр. часть
(зар. вне конденс. не влияет
на емкость)

Емкость плоскост. конденсаторов



плоскост. конденсатор (не учитыв. краевые эфф.)

объемные зап-б нет (внутри)

$$C = \frac{q}{|y_2 - y_1|}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$y = y(x) \quad \vec{E} = \vec{e}_x E(x) \quad \vec{D} = \vec{e}_x D(x)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = 0$$

$$\vec{D}_1 = \vec{e}_x \cdot C_1 \quad \vec{D}_2 = \vec{e}_x \cdot C_2$$

$$\vec{D}_{in} = \vec{D}_{out} \Big|_1 \quad C_1 = C_2$$

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x \frac{C}{\epsilon_1} \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_x \frac{C}{\epsilon_2} \quad D_{in} = 4\pi \sigma_s \Big|_{x=0} \quad C = 4\pi \sigma$$

$$E_1 = \frac{4\pi \sigma_s \vec{e}_x}{\epsilon_1} \quad E_2 = \frac{4\pi \sigma_s \vec{e}_x}{\epsilon_2} \quad D_{2n2} = 4\pi \sigma_s \Big|_{x=d} \quad ; \quad D_{2n2} = -D_{2n1} = -D_{1n1} = -4\pi \sigma_s =$$

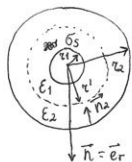
$$y_2 - y_1 = - \int_1^2 E \cdot dx = - \int_1^{1'} E_1 dx - \int_{1'}^2 E_2 dx = -4\pi \sigma_s \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) = 4\pi \sigma_s \quad \boxed{\sigma_{25} = -\sigma_s}$$

$$C = \frac{\sigma_s \cdot S}{4\pi \sigma_s \cdot \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)}$$

$$C = \frac{S}{4\pi \sum_i \frac{d_i}{\epsilon_i}}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon \quad \boxed{C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}} = \epsilon \cdot C_{вакуума}$$

2. Условие. Конген.



бс-запас на ег. густоты бс-линии

$$\rho = 0; \operatorname{div} \vec{\Phi} = 0; \varphi = \varphi(r) \quad \vec{E} = \vec{e}_r \cdot E_r \quad \vec{\Phi} = \vec{e}_r \cdot \Phi(r)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Phi) = 0 \quad \Phi = \frac{\text{const}}{r}$$

1) при $r < r_1$ const = 0

$$1 \text{ бс. } \Phi_{1r} = \frac{C_1}{r} \quad 2 \text{ бс. } \Phi_{2r} = \frac{C_2}{r} \quad \Phi_{1r} = \Phi_{2r} \Big|_{r=r_1} \Rightarrow C_1 = C_2 = C$$

$$\Phi_{1r} \Big|_{r=r_1} = 4\pi \sigma_1 \quad \frac{C_1}{r_1} = 4\pi \sigma_1; \quad C_1 = 2 \cdot 2\pi \sigma_1 \cdot r_1 = 2\pi \quad \boxed{\vec{\Phi}_1 = \vec{e}_r \frac{2\pi}{r} = \vec{\Phi}_2}$$

$$\Phi_{2r_2} = 4\pi \sigma_2 \quad \Phi_{2r_2} \Big|_{r=r_2} = -\Phi_{1r} \Big|_{r=r_2} = -\frac{2\pi}{r_2} \quad -\frac{2\pi}{r_2} = 4\pi \cdot \sigma_2$$

$$\underline{\underline{\sigma = -2\pi r_2 \sigma_2 = -\sigma_2}} \quad \text{ограничить норму зап. на ег. густоту}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_r \cdot \frac{2\pi}{\epsilon_1 r}; \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_r \cdot \frac{2\pi}{\epsilon_2 r} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = -2\pi \int_{r_1}^r \frac{1}{\epsilon_1} \frac{dr}{r} - \frac{2\pi}{\epsilon_2} \int_r^{r_2} \frac{1}{\epsilon_2} \frac{dr}{r} =$$

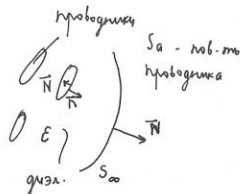
$$= -2\pi \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_2}{r} \right\}$$

$$C_1 = \frac{\pi}{2\pi \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_2}{r} \right)}$$

if $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$

$$\boxed{C_1 = \frac{\epsilon}{2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}} = \epsilon \cdot C_1$$

$\vec{n}$ из объема
гузл. нагрузки
(у бс-линии гипотетическая)



29.02.12.

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \cdot \vec{D} \cdot dV = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{D} \cdot \operatorname{grad} \varphi \cdot dV = -\frac{1}{8\pi} \int dV (\operatorname{div} (\varphi \vec{D}) - \varphi \operatorname{div} \vec{D}) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \cdot 4\pi \rho \cdot dV = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty + \sum S_a} \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \rho \varphi \cdot dV$$

$$S = S_\infty + \sum_a S_a$$

$$N = -\pi$$

$$\Phi_n = 4\pi\sigma a$$

$$= \frac{1}{8\pi} \sum_a \gamma_a \oint D_n dS + \frac{1}{2} \int \rho \gamma dV = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_a \gamma_a q_a}_{\text{потенц. эн. объема заряда с радиусом } \rho} + \underbrace{\frac{1}{2} \int \rho \gamma dV}_{\text{такая потенц. эн. пол., возд. в зар. проводниках и объемам зар. в диэл.}}$$

if обьемы зар. отсутств.

то потенц. эн. сист. зар. проб. в среде-ср:

$$U = \frac{1}{2} \sum_a q_a \gamma_a$$

заряды на проб.-х и потенц. на проб.-х не абс. независ. величинами

$$q_a = \sum_b C_{ab} \gamma_b$$

C_{ab} - коэф. емкости

C_{aa} - коэф. емкости

коэф. электростат. индукции

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab} \gamma_a \gamma_b$$

квадр. положит. опред. форма по γ

$$\forall a \quad C_{aa} > 0$$

$$C_{ab} < 0$$

$$C_{ab} = C_{ba}$$

$$C_{aa} \cdot C_{bb} > C_{ab}^2$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_b} > 0 \quad \gamma_b = 0$$

вс проводники заземленные

$\gamma_a > 0$ вносим положит. зар. проб.-к a , с $\gamma_a > 0$

$$q_b = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_b} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot dS < 0 \quad q_b = \oint_{S_b} \sigma_{s_b} \cdot dS$$

проводник b получает отриц. заряды

$$q_b = \sum_d C_{bd} \gamma_d = C_{ba} \gamma_a \quad C_{ba} < 0$$

$$\begin{cases} \gamma_a > 0 \\ q_b < 0 \end{cases}$$

коэф. электростат. индукции отрицательны

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_a q_a \gamma_a = \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) q = \frac{q^2}{2C}$$

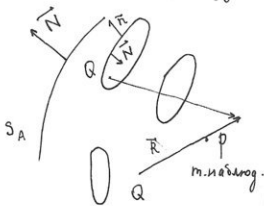
Энергия конденсатора

$$C = \frac{q}{|\gamma_1 - \gamma_2|}$$

Энергия запасенная в конденсат. в форме



Потенц. в м. созн. ^{ноб.} ~~объем~~ зар. проб. и объем. зар. гравитир.



$$\int_V \{ \psi \Delta \psi - \psi \Delta \psi \} dV = \int_S \{ \psi \text{grad} \psi - \psi \text{grad} \psi \}$$

2-я формула Грина

ψ - потенциал $\Delta \psi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$ $\psi = \frac{1}{R}$ $\Delta \psi = -4\pi \delta(R)$

Q - в бесконечности м., не на поверхности

$$-4\pi \psi_p - \int_V \left(\frac{1}{R} \left(-\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \right) \right) dV =$$

$$= \int_S \psi \nabla \frac{1}{R} \cdot \vec{n} dS - \int_S \frac{1}{R} \text{grad} \psi \cdot \vec{n} dS \quad \int_{S_\infty + \sum_a S_a} \psi \nabla \frac{1}{R} \cdot \vec{n} dS = \sum_a \psi_a \int_{S_a} \nabla \frac{1}{R} \cdot \vec{n} dS =$$

$$= - \sum_a \psi_a \int_{S_a} \nabla \frac{1}{R} \cdot \vec{n} dS = - \sum_a \psi_a \Delta \frac{1}{R} dV = 0$$

$$R \neq 0 \rightarrow \Delta \frac{1}{R} = 0$$

$$\int_{S_\infty + \sum_a S_a} \frac{1}{R} \text{grad} \psi \cdot \vec{n} dS = - \sum_a \int_{S_a} \frac{1}{R} \text{grad} \psi \cdot \vec{n} dS = - \sum_a \int_{S_a} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \frac{4\pi}{\epsilon} \sum_n \int_{S_a} \frac{\psi_s}{R} dS$$

$$\psi_p = \frac{1}{\epsilon} \int_V \frac{\rho}{R} dV + \frac{1}{\epsilon} \sum_{S_a} \int_{S_a} \frac{\psi_s}{R} dS \quad \text{потенц. в м. p}$$

но к чему объем,
и к чему проб. грузов

Докажем теорему единственности рел-а электростат-а заряд:

Th. единств. Электростат. заряды имеют единств. рел-е, if даны
распред-я об. зар-б в гнз, геометрия проб-грузов и либо
потенц. конг. проб. либо заряд (потенц) конг. проб-ка.
 ρ, ϵ

господин от протекторно

предположим, что есть 2 пещ. а: 1) $\vec{D}, \vec{E}, \gamma, \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ ρ - заряд

$$2) \vec{D}', \vec{E}', \gamma', \operatorname{div} \vec{D}' = 4\pi\rho$$

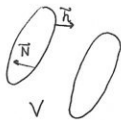
смотрим 3-ю пещ. е: 3) $\vec{D}'' = \vec{D} - \vec{D}' \quad \vec{E}'' = \vec{E} - \vec{E}' \quad \gamma'' = \gamma - \gamma'$

$$\operatorname{div} \vec{D}'' = 0$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E}'' = \vec{E}'' \cdot \vec{D}'' = -\vec{D}'' \operatorname{grad} \gamma'' = -\operatorname{div}(\gamma'' \vec{D}'') + \gamma'' \operatorname{div} \vec{D}''$$

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{E}'' dV = - \int_V \operatorname{div}(\gamma'' \vec{D}'') dV = - \oint_{S_0 + \sum_a S_a} \gamma'' \vec{D}'' \cdot \vec{N} dS = \vec{N} = -\vec{n}$$

$$= \sum_a \gamma''_a \oint_{S_a} \vec{D}''_a dS = \sum_a (\gamma_a - \gamma'_a) \left(\oint_{S_a} \vec{D}''_a dS - \oint_{S_a} \vec{D}'_a dS \right) = 4\pi \sum_a (\gamma_a - \gamma'_a) (q_a - q'_a) = 0 \Rightarrow$$

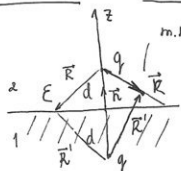


$$\vec{E}'' = 0$$

Метод отражения

$$\text{Пусть } \gamma_a = \gamma'_a$$

$$\text{Пусть } q_a = q'_a$$



м.наблюд.

$$\Delta\gamma = -\frac{4\pi}{\epsilon} q \delta(\vec{R})$$

$$\text{пещ. е. имеет 6 буги: } \gamma = \frac{q}{\epsilon R} + \gamma' \quad \Delta\gamma' = 0$$

$$\gamma' = \frac{q'}{\epsilon R'} \quad R' \neq 0$$

$$\gamma|_S = 0 \quad \left(\frac{q}{\epsilon R} + \frac{q'}{\epsilon R'} \right)_S = 0 \quad \text{на пол-пути } R = R'$$

заряд q равномерно
распределен по пол-пути

распределен q' на пол-пути
от пол-пути

$$\frac{1}{\epsilon R} (q + q') = 0 \quad q' = -q \quad \text{равн. ука. буги, if}$$

$$\gamma = \frac{q}{\epsilon R} - \frac{q}{\epsilon R'} \quad \text{пещ. е. заряд}$$

Метод аналог, генерал. по q со заряд.
на пол-пути заряд

$$\vec{F} = q \vec{E}'|_{z=d} = -q \operatorname{grad} \gamma' = -q \frac{q}{\epsilon R^3} \vec{R}'|_{z=d} = -\frac{q^2}{\epsilon (2d)^2} \vec{n}$$

Распределение пов-х зап-т в проводнике

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = -\frac{4\pi}{\epsilon} \sigma_s \quad \sigma_s = -\frac{\epsilon}{4\pi} \nabla \varphi \Big|_s = -\frac{\epsilon}{4\pi} \nabla \left(-\frac{q}{\epsilon R^3} + \frac{q}{\epsilon R'^3} \cdot \vec{R}' \right) \Big|_s =$$

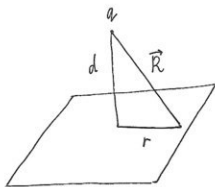
$$= -\frac{\epsilon q}{4\pi} \cdot \frac{2d}{R^3} \quad \text{пов-и заряд}$$

$$\nabla R \Big|_s = -d$$

$$\nabla R' \Big|_s = d$$

$$R = R'$$

Полный заряд:

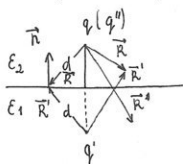


$$q' = \int \sigma_s dS = -\frac{q}{4\pi} \frac{2d}{1} \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{r dr}{(d^2 + r^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} d^2 = r'^2 = x^2 \\ r dr = x dx \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{q d}{1} \cdot \int_d^\infty \frac{x dx}{x^3} = -q$$

Упр. после 5 параг Киперкин конспект.

Опрег. поле в гуд., если в огном из гуд. наг границе разг. имеется заряд



$$\Delta \varphi_2 = -\frac{4\pi}{\epsilon_2} q'' \delta(R) \quad \varphi_2 = \frac{q''}{\epsilon_2 R} + \varphi'$$

$$\Delta \varphi' = 0 \quad \varphi' = \frac{q'}{\epsilon_2 R'} \quad R' \neq 0$$

$$\Delta \varphi_1 = 0 \quad (\text{м.к. поверхн. зап-т в гуд. } \epsilon_1 \text{ нет})$$

$$\varphi_1 = \frac{q''}{\epsilon_1 R} \quad R \neq 0$$

гран. уса:

$$1) \quad \varphi_1 = \varphi_2 \Big|_s$$

$$\frac{q''}{\epsilon_2 R} + \frac{q'}{\epsilon_2 R'} = \frac{q''}{\epsilon_1 R} \Big|_s$$

$$q + q' = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} q'' \quad \text{м.к. в } \forall \text{ м. граници } R = R'$$

$$2) \quad D_{n2} - D_{n1} = 0 \quad (\text{м.к. пов-и пов-х зап-т нет})$$

$$\nabla (\epsilon_2 \text{ grad } \varphi_2 - \epsilon_1 \text{ grad } \varphi_1) \Big|_s = 0$$

$$\nabla \left(-\epsilon_2 \frac{q''}{\epsilon_2 R^3} \cdot \vec{R} - \epsilon_2 \frac{q'}{\epsilon_2 R^3} \cdot \vec{R}' \right) = -\epsilon_1 \frac{q''}{\epsilon_1 R^3} \nabla R \Big|_s$$

$$\begin{cases} q - q' = q'' \left(1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \\ q + q' = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} q'' \end{cases} \quad \boxed{q'' = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot q}$$

$$q' = q - q'' = q \left(1 - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q = q'$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{q}{R} \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 \rightarrow \infty : y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 R} - \frac{q}{\varepsilon_2 R^3}$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 R} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \cdot \frac{q}{\varepsilon_2 R^3} \end{cases}$$

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right) = q \cdot \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(-\frac{q \vec{R}}{R^3} \right) + q \cdot \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \cdot \frac{q \vec{R}}{\varepsilon_2 R^3} \right) =$$

сила гравит. на зап. q со стор. вн. поля $z=d$

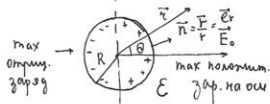
$$= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{q^2}{(2d)^2}$$

7.03.12.

Не зап. под шар

Нет электр. зап. $\Delta\varphi = 0$

согласно ур. Лапласа



$$\varphi = \varphi_0 + \varphi', \quad \varphi_0 = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \quad \Delta\varphi' = 0$$

реш. с ур. Лапласа

также, чтобы

φ' на ∞ стрем. к 0

φ' - возм. заряды

$$\varphi' \sim \frac{1}{r} \quad \text{угодн. ур. Лаплас.} \quad (\vec{A} \nabla) \frac{1}{r}$$

также угодн.

$$A_i A_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{r}$$

угодн. ур. Лаплас.

Можно найти с тем же р-и

$$\varphi|_{r=R} = 0$$

Мож. тем же р-и с соглас. ур. Лапласа

$$\varphi' = A (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \frac{1}{r} = -A \cdot \frac{(\vec{E}_0 \cdot \vec{r})}{r^3}$$

$$\varphi_0 + \varphi'|_{r=R} = (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \left(1 + \frac{A}{r^3}\right) \Big|_{r=R} = 0$$

ран. ур.

$$A = -R^3$$

$$\varphi = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \left(1 + \frac{A}{r^3}\right) = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

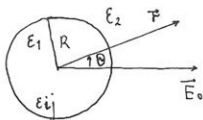
$$4\pi\sigma_s = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_s = -\varepsilon \vec{n} \cdot \text{grad} \varphi \Big|_s = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = +(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \frac{3R^3}{r^5} \vec{r} \cdot \vec{e}_r \cdot \varepsilon \Big|_{r=R} = 3(\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \varepsilon$$

$$\sigma_s = \frac{3\varepsilon}{4\pi} (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \Big|_s = \frac{3\varepsilon}{4\pi} E_0 \cos \theta$$

$$\varphi' = \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{F}}{r^3} \cdot R^3 = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{3}{4\pi} \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{F}}{r^3} = V \frac{\vec{P} \cdot \vec{F}}{r^3} \quad \vec{P} = \frac{3}{4\pi} \vec{E}_0$$

дип. момент ед.
объёма шара

Риск. гизл. ϵ_2 , б ком. сфер. полость ϵ_1



на границе двух гизл. полст. заряд

$$\Delta\varphi_2 = 0 \quad \varphi_2 = -\vec{E}_0 \cdot \vec{F} \left(1 + \frac{A}{r^3}\right)$$

$$\Delta\varphi_1$$

анизотропный гизл. шар $\rightarrow$ ур. Лапласа нем ϵ_{ij}

реш. г.д. концы при $r \rightarrow 0$

1) φ_1 - концы $r \rightarrow 0$

$\text{div } \vec{D}_1 = 0$ нем обьёмн. зар.

2) $\varphi_1 \sim (\vec{E}_0 \cdot \vec{F})$ чтобы выполнял. грани. ур.

нем заб-тм от урла на $\forall$ m. шара (она
есть, но она должна - совпасть.)

$$\vec{E}_1 = -\text{grad } \varphi_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ik} E_{1k} = -\epsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad \varphi_1 = -B(\vec{E}_0 \cdot \vec{F})$$

реш. удовлетв. ур. теор. единственности

$$\varphi_1 = -B(\vec{E}_0 \cdot \vec{F}) \quad \varphi_2 = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{F}) \left(1 + \frac{A}{r^3}\right) \quad \vec{E}_1 = \left(1 + \frac{A}{R^3}\right) \vec{E}_0$$

$$1) \varphi_1 = \varphi|_S: B = 1 + \frac{A}{R^3}$$

или определено boundary

$$\vec{E}_2 = -\text{grad } \varphi_2 = \vec{E}_0 \left(1 + \frac{A}{r^3}\right) - A(\vec{E}_0 \cdot \vec{F}) \frac{3\vec{r}}{r^5} = \vec{E}_0 - A \cdot \frac{3(\vec{E}_0 \cdot \vec{F})\vec{r} - r^2 \vec{E}_0}{r^5}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 - A \cdot \frac{3(\vec{E}_0 \cdot \vec{F})\vec{r} - r^2 \vec{E}_0}{r^5}$$

2-е грани. ур.

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \vec{D}_1 \cdot \vec{n}|_S = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}|_S = \epsilon_2 \vec{E}_2 \cdot \vec{n}|_S = \epsilon_2 (\vec{E}_0 \cdot \vec{n} - A \cdot$$

$$\left. \frac{3(\vec{E}_0 \cdot \vec{F})(R\vec{F}) - r^2(\vec{E}_0 \cdot \vec{n})}{r^5} \right|_{r=R} = \epsilon_2 (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \left(1 - \frac{2}{R^3} A + 1\right) \quad \frac{\vec{F}}{r} = \vec{n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_2 = \left(1 + \frac{A}{R^3}\right) \vec{E}_0 - 2\epsilon_2 \vec{E}_0 \\ \vec{D}_1 = \epsilon_2 \left(1 - \frac{2A}{R^3}\right) \vec{E}_0 \end{array} \right. \quad \text{шар. } \vec{E}_0: \frac{1}{3} (\vec{D}_1 + 2\epsilon_2 \vec{E}_1) = \epsilon_2 \vec{E}_0$$

$$\text{шар. } \vec{E}_0 \perp \text{ ось: } \frac{1}{2} (\vec{D}_1 + \epsilon_2 \vec{E}_1) = \epsilon_2 \vec{E}_0$$

$$\vec{D}_1 + 2\epsilon_2 \vec{E}_1 = 3\epsilon_2 \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_0 \parallel \text{ ось: } \vec{E}_1 = \vec{E}_0 \quad (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) \vec{E}_1 = 3\epsilon_2 \vec{E}_0$$

$$\frac{\vec{E}_0 \uparrow}{\vec{D}_1} \quad \epsilon_2$$

$$\text{Плюс } \vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$$

$$\vec{E}_1 = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \vec{E}_0, \quad A = R^3 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}$$

$$\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} = 1 + \frac{A}{R^3} \quad A=0 \text{ при } \epsilon_1 = \epsilon_2$$

Почт. ток: ток проводимости $\rho = \text{const}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad \text{упр. пер. при } \vec{j} = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\text{div } \vec{j} = 0} \quad \text{одно из упр. для почт. тока}$$

$$\text{З-н Ома в вектор. форме, получим } \vec{j} = \sigma \vec{E} = n e \vec{v}$$

$\vec{v}$ - направленная скорость, вызванная эл. полем $\vec{j} = e n \vec{v}$ ср. знат. направленной скор-ти

из заряд. течен. будем расс. др. зарядо между двумя соседними столбцами

$$m \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = e \vec{E} \quad m \cdot \frac{\vec{u}}{\tau} = e \vec{E} \quad \tau - \text{вр. между двумя соседн. столб.}$$

$$\vec{u} = \frac{e\tau}{m} \vec{E} \quad \vec{u} = \frac{e\tau}{2m} \vec{E} \quad \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{2m} \vec{E} \quad \tau = \frac{l}{|v + \vec{u}|} \approx \frac{l}{v}$$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

σ - коэф. электропр-ти

$$v \gg \vec{u}$$

за вр. между двумя столб.:

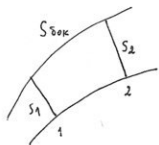
з-н Ома

$$n \cdot \frac{m v^2}{2} \cdot \frac{1}{\tau} = Q \quad \text{число, на которое } v \text{ уменьшается за } \tau$$

$$\vec{u}$$

$$\begin{aligned} \text{Эта энерг. отагается} \quad \frac{nm v^2}{2} \cdot \frac{1}{\tau} = q = \frac{nm}{2\tau} \left(\frac{e\tau}{m} \right)^2 E^2 = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2 \\ \text{полю } \frac{1}{2} E^2 \text{ за } \tau \text{ вр.} \quad = \underline{\underline{\sigma E^2}} \\ \times n \end{aligned}$$

Лин. проводник - пер. сл. $\ll$ др. проводника



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = \oint \vec{j} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j} \vec{n}_1 dS = \int_{S_2} \vec{j} \vec{n}_2 dS + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{j} \vec{n} dS =$$

$$\vec{j}_N = 0 \quad = - \int_{S_1} j dS + \int_{S_2} j dS = -J_1 + J_2$$

$$\frac{1}{\sigma} \oint_L \vec{j} d\vec{l} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \oint_L j \operatorname{grad} \varphi d\vec{l} = 0 \quad \text{Замкн. линейный проводник}$$

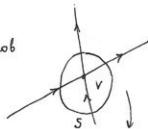
Пот. ток попер. электростат. поля не может

$$\oint_L \vec{j} d\vec{l} = 0 \quad \text{т.} \frac{d\vec{u}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{E}_{\text{см}}) \quad \vec{E}_{\text{см}} - \text{стороннее (уничтож. действие}$$

ист. пот. тока) замк. р-сы.

$$q = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{см}})^2 = \frac{j^2}{\sigma} \quad \boxed{\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{см}})} \quad \text{Ободу. з-н Ома в див. форме}$$

З-н Кирхгофа: 1) Уместе пересечение лин. и проводников
(по ним течет пот. ток)



окружн точку
разделенная
проб-в замкн.
контуром

1) В точке разветвл. цепи алгебр. сумма токов = 0

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = J_1 + J_2 + \dots$$

$$\boxed{\sum_i J_i = 0}$$

$$\oint \vec{j} d\vec{l} = j \cdot dl \quad \text{лин. провод-р}$$

Получим ободу. з-н Ома в интегр. форме

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = (\vec{E} + \vec{E}_{\text{см}}) \quad \int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma S} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{см}} d\vec{l} \quad \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S} = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}$$

ЭДС

S сеч. провод-ка

$$E_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{см}} \cdot d\vec{l}$$

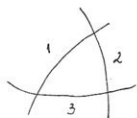
$$R_{12} = \int_1^2 \frac{dl}{\sigma \cdot S}$$

сопротивл.
поп. току
на участке
1-2.

$$\boxed{J \cdot R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}}$$

Ободу. з-н Ома в $\int$ -а форме

2-й з-н Кирхгофа:



защитит. уклад проводов

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \mathcal{E}_i \quad \text{II з-н Кирх.}$$

провод. гудл. $j_n|_S = 0 \quad j_\epsilon|_S = 0$ (в гудл. нет токов) $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$

провод. провод. $j_{1n} = j_{2n}$ (из $\text{div } \vec{j} = 0$) $\frac{j_{1\tau}}{\sigma_1} = \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}$ (напр. перпенд. на границе раздела ϵ и σ)

Максимумы и минимумы полей

$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$ $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ $\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ $\mu \vec{H} = \vec{B}$ μ -задана во всем пр-те

$\frac{1}{\mu} (\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ $\Delta \vec{A} = 0$ $\text{div } \vec{A} = 0$

$$\Delta \vec{A} = \frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}$$

пр. укл:

$A_{1\tau} = A_{2\tau}$ $\frac{1}{\mu_1} (\text{rot } \vec{A}_1)_\tau = \frac{1}{\mu_2} (\text{rot } \vec{A}_2)_\tau|_S$

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$
контакт, отсюда выводим
что пог. знаков попер.
составит пер. величина
 $A_{1\tau} = A_{2\tau}$

$$\begin{cases} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}$$

$$B_{1n} = B_{2n}|_S \quad \frac{1}{\mu_1} (\text{rot } \vec{A}_1)_\tau = \frac{1}{\mu_2} (\text{rot } \vec{A}_2)_\tau$$

чего отсюда б. отсюда напр. (но ось z)

$$\vec{j} = \vec{e}_2 j(x, y) \quad \vec{A} = \vec{e}_2 A(x, y) \quad \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{e}_2 A(x, y) = -\vec{e}_z \times \nabla_1 A$$

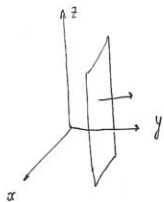
14.03.12

$$\text{rot} \left\{ \frac{1}{f(x,y)} \text{rot } \vec{A} \right\} = -\nabla \times \left\{ \vec{e}_z \times \frac{\nabla_\perp A}{f(x,y)} \right\} = -\vec{e}_z \nabla_\perp \left(\frac{\nabla_\perp A}{f} \right) + \underbrace{(\vec{e}_z \nabla) \frac{\nabla_\perp A}{f}}_{=0}$$

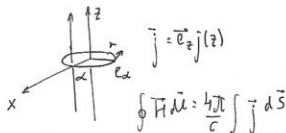
$$\nabla_\perp \left(\frac{\nabla_\perp A}{f} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(x,y) \quad \text{if } f = \text{const} \quad \Delta_\perp A = -\frac{4\pi}{c} f j(x,y)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}: \quad A_{1r} = A_{2r} \Big|_S \quad \frac{1}{f_1} (\text{rot } \vec{A})_r = -\frac{1}{f_1} \{ \vec{e}_z \times \nabla_\perp A \}_r =$$

$$= -\frac{1}{f_1} (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) \cdot \nabla_\perp A \Big|_S = -\frac{1}{f_1} \vec{e}_r \cdot \nabla_\perp A \Big|_S = -\frac{1}{f_1} \frac{\partial A_1}{\partial n}$$



$$2) \frac{1}{f_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} = \frac{1}{f_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} \Big|_S$$



$$d\vec{l} = \vec{e}_\perp r d\alpha \quad \int \vec{H}(r) \vec{e}_\perp r d\alpha = \frac{4\pi}{c} j(r) \quad \vec{H}(r) = \vec{e}_\perp H_\perp(r)$$

$$H_\perp(r) \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j(r)$$

$$\boxed{H_\perp(r) = \frac{2j(r)}{cr}} \quad \text{if } f=1 \quad \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV \quad \vec{B} = \vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \int \nabla \times \frac{\vec{j}}{R} dV = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{R^3} dV$$

Лин. токи и ток (гипер. разрыв)

б. 1 гипер. ток. со тока

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \oint \frac{d\vec{l}}{R} \quad \vec{B} = \vec{H} = \frac{1}{c} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad \text{Био-Савара}$$

if ток сог. ток ток ток ток ток ток ток ток ток ток

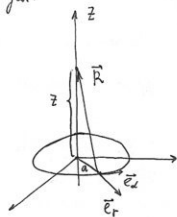
$$\vec{A} = \frac{1}{c} \oint \frac{d\vec{l}}{R} \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

Найдем ток ток, сог. кр. ток ток ток ток

$$\vec{R} = -\vec{e}_r a + \vec{e}_z z \quad R^2 = a^2 + z^2$$

$$d\vec{l} \times \vec{R} = a \cdot d\alpha \vec{e}_\perp \times \vec{R} = a d\alpha \vec{e}_\perp \times (-\vec{e}_r a + \vec{e}_z z) =$$

$$= a (\vec{e}_z a + \vec{e}_r z) d\alpha$$

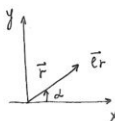


r, α, z

$$H(z) = \frac{J}{c} \cdot \frac{1 \cdot a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ \vec{e}_z \cdot a \int_0^{2\pi} d\alpha + z \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\alpha \right\} = \boxed{\vec{e}_z \cdot \frac{2\pi a^2 J}{c (a^2 + z^2)^{3/2}} = \vec{H}(z)}$$

криволинейный интеграл

$$\int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\alpha = \int_0^{2\pi} (\vec{e}_x \cdot \cos \alpha + \vec{e}_y \cdot \sin \alpha) d\alpha = \vec{e}_x \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha + \vec{e}_y \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = 0$$



$z \gg a$: $H \sim \frac{1}{z^3}$ (поле от диполя убывает) $l \gg a$ l - дл. замкн. проб-ка

поле созд. замкн. мн. проб.-м, то на расст. больших, порядка дл. проб-ка поле можно не учитывать. (поле обрывается на концах проб-ка)

$$l = 2\pi a \rightarrow l^2 \gg a^2$$

Энергия поля, созд. сист. проб.-б: $W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \text{ rot } \vec{H} dV =$
 $= \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} (\nabla \times \vec{A}) dV = -\frac{1}{8\pi} \int \nabla (\vec{H} \times \vec{A}) dV = -\frac{1}{8\pi} \int dV \left\{ \nabla (\vec{H} \times \vec{A}) - \nabla (\vec{H} \times \vec{A}) \right\} =$
 $\downarrow$
 $\oint_{\infty} \dots = 0$
 $= \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{A} (\text{rot } \vec{H}) = \frac{1}{2c} \int \vec{j} \cdot \vec{A} dV$
 $\frac{4\pi}{c} \vec{j}$ $\vec{j}$ — ток, берется по объему проб.-б с токами

Сист. проб.-б с токами:

уп-я и пран. у-я. линейные, то $\vec{H} = \sum_a \vec{H}_a$, $\vec{B} = \sum_b \vec{B}_b$ $W = \sum_a W_{aa} + \sum_{a \neq b} W_{ab}$

$$W_{aa} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H}_a \cdot \vec{B}_a dV \quad W_{ab} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H}_a \cdot \vec{B}_b dV = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H}_b \cdot \vec{B}_a dV$$

энергия поля,
созд. а-ми проб.-ми
(содерж. энерг.)

энерг. взаимод.
а-ми и б-ми проб.-ков

$$W_{aa} = \frac{1}{2c} \int \vec{j}_a \cdot \vec{A}_a dV_a \quad W_{ab} = \frac{1}{c} \int \vec{j}_a \cdot \vec{A}_b dV_a = \frac{1}{c} \int \vec{j}_b \cdot \vec{A}_a dV_b$$

$$W_{aa} = \frac{1}{2c^2} L_{aa} J_a^2 \quad L_{aa} - \text{самонадукция а-го провод-ка}$$

$$W_{ab} = \frac{1}{c^2} L_{ab} J_a J_b \quad L_{ab} - \text{коэф. взаимонадукции между провод-ками}$$

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_a L_{aa} J_a^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{a \neq b} L_{ab} J_a J_b = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} J_a J_b \gg 0 \quad L_{aa} L_{ab} \gg L_{ab}^2$$

$$W_{aa} = \frac{1}{2c^2} \int \frac{\vec{j}_a \cdot \vec{j}_a'}{R} dV_a dV_a' \quad W_{ab} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\vec{j}_a \cdot \vec{j}_b}{R_{ab}} dV_a dV_b$$

$\mu=1$

$$\left. \begin{aligned} \vec{j}_a dV_a &\rightarrow J_a d\vec{l}_a \\ \vec{j}_b dV_b &\rightarrow J_b d\vec{l}_b \end{aligned} \right\} \quad W_{ab} = \frac{J_a J_b}{c^2} \iint \frac{d\vec{l}_a \cdot d\vec{l}_b}{R_{ab}} = \frac{1}{c^2} L_{ab} J_a J_b$$

$$L_{ab} = \iint \frac{d\vec{l}_a \cdot d\vec{l}_b}{R_{ab}}$$

$$W_{aa} = \frac{J_a J_a}{2c^2} \iint \frac{d\vec{l}_a \cdot d\vec{l}_a'}{R} \rightarrow \infty \quad \text{самонадукция отг-х провод-ков расм-ся отменяется}$$

(эти ф-лы не работают)

используем теорему о магн. потоке, но ком. между ток

$$\text{Сум. магн. провод-ков, полная энергия: } W = \frac{1}{2c} \int \vec{j} \cdot \vec{A} dV = \frac{1}{2c} \sum_a \int \vec{j}_a \cdot \vec{A} dV_a =$$

$$= \frac{1}{2c} \sum_a J_a \oint \vec{A} d\vec{l}_a \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{A}_e \text{ — брешн. поле}$$

$$W = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \oint \vec{A} d\vec{l}_a = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \varphi_a = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} J_a J_b$$

поток магн. $\vec{B}$
вдоль контура а-го
провод-ка

полн. поток

$$\varphi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} J_b + \varphi_e$$

полн. поток, проходящий
контур а-го провод-ка



Энергия поля, созд. ∞ прямыми проводками $\longrightarrow$

$$W = W_e + W_i \quad \text{энерг. запаса. в магн. поле}$$

W_i мало по сравн. с W_e
(провод-ки минимальны, $V \rightarrow 0$)

$$W = W_e + W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{\mu_0}{8\pi} \int \left(\frac{2J}{cr} \right)^2 \cdot r dr \cdot 2\pi \cdot \underbrace{1}_{\text{по } z} =$$

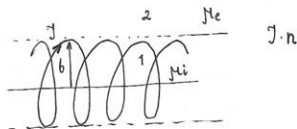
$$= \frac{\mu_0}{c^2} J^2 \int_a^L \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 J^2}{c^2} \ln \frac{L}{a} \quad \text{мн. н.о.м.}$$

$L \gg a$ сг. н.о.м.

длин. замкн. н.о.м.-к
н.о.м. о.р.у. на расст. a

$$W_e \approx \frac{\mu_0 J^2}{c^2} L \ln \frac{L}{a} \approx \frac{L J^2}{2c^2} \quad \boxed{L \approx 2\mu_0 c^2 \ln \frac{L}{a}}$$

Кардингская солонка



однородно тока н.о.м.

но н.о.м. у.н.и.н.у.р.а н.е.м. ток

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0 & \text{в } b, 1 \text{ и } b, 2 \text{ обл.} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

у.н.и.н.у.р.а. с.к. с.р.о.д.о.м. э.т.и. у.р. на о.с.и. з.с.к.:

$$(\text{rot } \vec{H})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial z} = 0 \rightarrow \text{от } z, z \text{ н.о.м.} \quad \text{div } \vec{B} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r)$$

$$(r \text{ rot } \vec{H})_z = \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial z} = 0 \rightarrow H_z = C^1 \quad H_r = \frac{C^2}{r}$$

$$(\text{rot } \vec{H})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_z) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial z} = 0 \rightarrow H_z = \frac{C^3}{r}$$

1. о.д.а.: $H_z = C^1 \quad H_r = 0 \quad H_z = 0$

2. о.д.а.: $H_z = 0 \quad H_r = \frac{C^2}{r} \quad H_r = \frac{C^3}{r} = 0$

1) $B_{1n} = B_{2n} \Big|_{r=a}$

$B_{1r} = B_{2r} \Big|_{r=b} \rightarrow H_r = 0 \quad \underline{\underline{C_3 = 0}}$

r, z, z

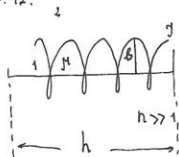
$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi n J}{c} \vec{e}_z \quad \vec{n} = \vec{e}_r$

1) $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \rightarrow (\vec{e}_r \times \vec{e}_r) (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi n J}{c} \Rightarrow \vec{e}_z (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \Big|_{r=b} = \frac{4\pi n J}{c}$

$C_1 = \frac{4\pi n J}{c}$

2) $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z$

$C_2 = 0$



$$H_2 = 0$$

$$\vec{H}_1 = \vec{e}_2 \cdot \frac{4\pi n J}{c}$$

Энергия магн. поля eq. груза

$$W_1 = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dV_1 = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \frac{16\pi^2 n^2 J^2}{c^2} \pi b^2 \cdot 1 \text{ см} =$$

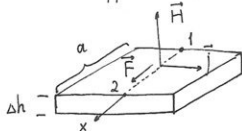
$$= \frac{28\pi^2 n^2 J^2 b^2}{c^2}$$

$$W_h = \frac{2\pi^2 \mu n^2 J^2 b}{c^2} \cdot h = \frac{L_h \cdot J^2}{2c^2}$$

$$L_h = 4\pi^2 \mu \cdot n^2 b^2 h = 2\pi \mu n b l$$

$$l = 2\pi b \cdot n \cdot h - \text{длина проволоки}$$

эпп. Кошля:



ток протекает по сеч. глубины $\vec{e}$

$$\vec{F} = \frac{e}{c} \vec{u} \times \vec{H} = \frac{1}{cn} (ne \vec{u}) \times \vec{H} = \frac{1}{cn} \vec{j} \times \vec{H}$$

$$e\vec{E} + \vec{F} = 0 \quad \text{б. силы равновесия}$$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{F}}{e} = -\frac{1}{cen} \vec{j} \times \vec{H}$$

Между 1 и 2 сеч. разности потенциалов.

$$d\varphi = -\vec{E} d\vec{r} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 E dx = \frac{1}{cen} j \cdot H a$$

$$H \sim 10^4 \text{ эвс}$$

$$J = 10 \text{ А}$$

$$\Delta h = 0.1 \text{ мм}$$

$$a = 1 \text{ см}$$

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \sim 7 \text{ мВ}$$

$$R_x = \frac{1}{cen} - \text{ном. Кошля}$$

Масштаб. проводники, ток. б. перен. магн. поле:



$$l - \text{длина} \quad \lambda \sim \frac{c}{\omega} \gg l$$

кб. магн. э/м поле 1) $\omega \ll \frac{c}{l}$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi \vec{j}}{c} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho \end{cases} \quad \text{б.н.е.} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Учитывая по порядку величины:

$$|\text{rot } \vec{E}| \sim \frac{E}{l}, \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \sim \frac{\mu \omega H}{c}$$

$$|\text{rot } \vec{H}| \sim \frac{H}{l}, \quad \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \sim \frac{\epsilon \omega E}{c}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ E \ll H \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{близки к 0-му} \\ \text{проводника} \end{array}$$

поле вне проб-ки можно считать как поле поле

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

В таком, как при пост.
поле

ток смещения и ток проб-ки
ток смещ. < ток проб-ки

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi \sigma}{c} \vec{E} \quad | : \sigma \rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{E} \quad | \text{rot}$$

$$\begin{cases} \text{rot} \left\{ \frac{1}{\sigma} \text{rot } \vec{H} \right\} = \frac{4\pi}{c} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \sigma \text{ н.д. однородна (задана до б.в. пр. б.в.)} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\text{rot rot} : \text{grad div} - \Delta$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{H} = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{упр. уравн} \\ \text{многопроб-ки} \end{array}$$

$\ll 1$

$$E \sim \left(\frac{\mu \omega l}{c} \right) H \Rightarrow E \ll H$$

в гл.з. среде, окр. пр.
проводник поле мало

$$H \sim \left(\frac{\epsilon \mu \omega^2 l^2}{c^2} \right) H \ll 1$$

для упрощ. расчетов и описания квазистат.
поле внутри проб-ки будет считаться, что

2) $T \gg \tau_{\text{пр.}}$ пр. ток изм. поле велик по
ср. с пр. установл. проводимости
 $\omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{пр.}}}$ (пр. своб. пробега в проводимости)

3) уже квазистат-ки: $\boxed{\omega \ll \frac{4\pi \sigma}{E}}$

$$\left| \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right| \sim \frac{4\pi \sigma}{c} E \quad \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \sim \frac{\epsilon \omega}{c} E \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \ll \frac{\epsilon \omega}{c} \ll \frac{4\pi \sigma}{c}$$

Среда кванто-однородна (в квант.
сл. проб-ка $\sigma, \mu = \text{const}$)
в квант. образке σ, μ не зад. от $\vec{r}$

$$\frac{1}{\sigma_1} (\text{rot } \vec{H}_1)_r = \frac{1}{\sigma_2} (\text{rot } \vec{H}_2)_r \Big|_S$$

$$B_{1n} - B_{2n} \Big|_S$$

Задача: Проб-к при $t < 0$ нах. вo вакуум. мом. поле $\vec{H}_0(\vec{r})$

1) $t < 0$ $H_0(\vec{r})$

при $t = 0$ $\vec{H} = 0$ (вн. поле выключается)

Как следует из теории поле должно проб-ка; $t > 0$ $\mu = 1$

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = \vec{H}_m(\vec{r}) e^{-\gamma_m t} \quad \Delta \vec{H}_m(\vec{r}) = - \frac{4\pi\epsilon}{c^2} \gamma_m \vec{H}_m(\vec{r})$$

нам осталось убедиться, что доказано что $\gamma_m > 0$

предположим, что в обл. φ - $\vec{u}$ $\frac{4\pi}{c^2} \gamma_m \vec{H}_m = \text{rot} \left(\frac{\text{rot} \vec{H}_m}{\epsilon} \right)$ $\vec{H}_m^*$ и $\int_{\text{ho}}$

$$\frac{4\pi}{c^2} \gamma_m \int |\vec{H}_m|^2 dV = \int dV \left(\nabla \times \frac{\text{rot} \vec{H}_m}{\epsilon} \right) \vec{H}_m^* = \text{берем } \nabla$$

$$= - \int dV \left\{ \nabla \left(\vec{H}_m^* \times \frac{\text{rot} \vec{H}_m}{\epsilon} \right) - \nabla \left(\vec{H}_m^* \times \frac{\text{rot} \vec{H}_m}{\epsilon} \right) \right\} = - \oint_S \left(\vec{H}_m^* \times \frac{\text{rot} \vec{H}_m}{\epsilon} \right) d\vec{S} + \int \frac{|\text{rot} \vec{H}_m|^2}{\epsilon} dV =$$

$$\text{rot} \vec{H}_m = 0 \text{ if } \int \text{вне тела}$$

$\Rightarrow \boxed{\gamma_m > 0}$

каким образом.

H_m ортонорм. сист. φ - $\vec{u}$: $\vec{H}_0(\vec{r}) = \sum_m \vec{H}_m(\vec{r}) C_m$

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = \sum_m C_m e^{-\gamma_m t} \vec{H}_m(\vec{r}) \quad \gamma_m - \text{номер соответ. зн- $\vec{u}$ }$$

получим $\min \gamma_m = \gamma_1$

$\tau = \frac{1}{\gamma_1}$ бр. γ_1 как миним. поле $\downarrow$ t е раз (поле можно смещ. = 0)

$$|\Delta \vec{H}| \sim \frac{H}{l^2} \sim \frac{4\pi\epsilon}{c^2} \cdot \frac{H}{\tau}$$

$\tau \sim \frac{4\pi\epsilon l^2}{c^2}$ по порядку велич. определем τ , когда возникнет поле

Итак задача: образы поле вo вакуум. пер. мом. поле. Проникновение переменного поля в масс. проводник.

токи $\vec{J}_{\text{тока}}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \quad l \sim \sqrt{\chi t}$$

выбрана проектор. перем. по t пробужден

упр. - микроскоп-м

$$\vec{H}(t) = \vec{H}_0 \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi}{\omega}} \quad \text{выбрана проектор. за период}$$

$$\Delta \vec{H} = -i \frac{4\pi\epsilon_0\omega}{c^2} \vec{H} \sim \frac{1}{\delta^2} \vec{H}$$

$$\delta \sim \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0\omega}}$$

1) $\delta \gg l$ пол. проектор. на тело выбр. проб-ка:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vec{H} &= 0 \\ \text{div } \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_{\text{ст}} &= 0 \\ \text{div } \vec{H}_{\text{ст}} &= 0 \end{aligned} \quad \text{H стационарное}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= i \frac{\omega}{c} \vec{H} \\ \text{div } \vec{E} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} &= 0 \\ \text{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \cdot \vec{E} \right) &= 4\pi \rho \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \text{div } \vec{j} &= 0 \\ \text{div } \vec{E} &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

max $\epsilon_{\text{матр.}} \ll$

гид. клониров. поля

2) $\delta \ll l$, $\delta \gg$ гл. доб. проб-ка

пол. проектор. на ст. токены свои по ср. с микр. разг. проб-ка

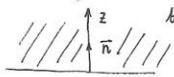
(в 1-м приближ. пол. доб. не проектор. вынужд. проб-ка)

В сверхпроводящем теле только пол. ток, они компенсиру. вн. ток. поле и оно не проектор. вынужд. проб-ка

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 \cdot e^{-i\omega t} \\ H_{0n} &= 0 \end{aligned} \right.$$

норм. сост. аз = 0

Считаем пол-то плоской, т.к. пол. не проектор. вынужд. проб-ка



$\vec{H}(z)$ (из симметрии)

$$0 = \text{div } \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$H_z = \text{const}$$

$$H_z|_S = 0 \quad \text{в силу пр. упр.}$$

$$\frac{d^2 \vec{H}}{dz^2} + K^2 \vec{H} = 0$$

$$K = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0\omega i}{c^2}} = \frac{1+i}{\delta}$$

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\epsilon_0\omega}}$$

$$\sqrt{i} = ?$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{ikz} = \vec{H}_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

при $z = \delta$ пол. изгн. в е раз

Направим ось y по H_0 :

$$H_y = H_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \quad \text{мат. поле вглубь проб-ка}$$

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{H}_0 \cdot e^{ikz} = \frac{c}{4\pi\sigma} ik \vec{e}_z \times \vec{H}_0 \cdot e^{ikz} = \frac{c}{4\pi\sigma} i \cdot \frac{1+i}{\delta} \vec{n} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi\sigma} \sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c}} (1+i) \vec{H} \times \vec{n}$$

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} (1-i) \vec{H} \times \vec{n} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

$$E_x = \sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}} H_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad j_x = \sigma E_x$$

сдвиг фазы на $\frac{\pi}{4}$

Плотн. тока продв. вглубь проб-ка (матр. продв.-мат)

Оценим темп, выделяющ. в проб-ке:

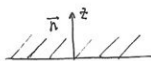
$$Q = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \int \sigma \vec{E}^2 dV \quad Q = \oint \vec{S} d\vec{s} \quad \vec{S} - \text{вектор Пойнтинга}$$

дисип. энергии

$$1) \text{ при малых част. } \omega \quad Q \sim \omega^2$$

при увеличении конст. затухающ.

26.03.12.



$$\vec{H}_0 e^{-i\omega t} \quad n=1$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} (1-i) \vec{H} \times \vec{n}$$

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad \delta \ll l$$

малая глубина проникнов. перем. мат. поле в проб-к

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{скин-эффект}$$

$$1) \delta \gg l, \quad Q \sim \omega^2$$

$$2) \delta \ll l \quad \text{Потери} \quad Q = \oint \vec{S} d\vec{s} \quad \vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{c}{8\pi} \text{Re}\left\{\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} (1-i) (\vec{H} \times \vec{n}) \times \vec{H}^*\right\} =$$

$$\pi |H|^2 - \overline{H}(\overline{\pi} \overline{H}^2)$$

проб-ка имеет вид
как сверхпроводник при малом
протекании тока $\Rightarrow$ напр. ток $= 0$

$$\text{пот. ток } Z=0 \quad \overline{H} = \overline{H}_0$$

$$2) \delta \ll l \quad Q \sim \sqrt{\omega}$$

при больших частотах

$$1) \delta \gg l, Q \sim \omega^2$$

при малых частотах

$$\overline{S} = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\epsilon}} |H|^2 \overline{\pi}$$

$$Q = \frac{\epsilon}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\epsilon}} \oint_S |H|^2 ds$$

$H = H_0$ на пот. ток проб-ка ф-ла
Рыкова

который СВЧ энергии в масс-х
проб-х не способна поля внутри проб-ка
не может релаксировать внутри зазора

$$Q = \frac{\omega}{16\pi} \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\epsilon\omega}} \oint |H_0|^2 ds = \frac{\omega\delta}{16\pi} \oint |H|^2 ds$$

коэффициент потерь в массивной проб-ке

В линейных пробниках при пот. токе

был з-н Ома в виде: $E = R \cdot J$

if поле не линейно зависит от тока в
кр. этой ф-е можно пользоваться

$$E(t) = R \cdot J(t)$$

if частота поле увеличив.

$$J(t) = \hat{J}^{-1} E(t) \quad E(t) = \hat{Z} J(t)$$

Наша задача найти вид
оператора $\hat{Z}$:

$$E(\omega) = \underline{\underline{Z}}(\omega) J(\omega) \rightarrow \text{фурье разлож.}$$

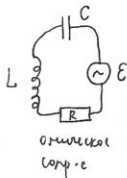
$Z(\omega)$ - импеданс пробника (комплекс. сопр-е)

$$J(t) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \dots \text{мониторинг. ток (волны)}$$

$$\hat{J} e^{-i\omega t} = Z(\omega) e^{-i\omega t}$$

при протекании тока по проб-ке есть индуктив-та
проб-ка, ёмкость и сопр-е

Рассм. такой контур:



плазм. конт. и др. роль источников и
тока пробности

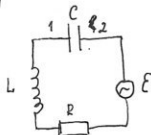
ток возникает между пласти.
конденс.

3-й Ома в гир. ф.м: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{cm})$

учеб. квазитоп. в макс. не как гир. пот.
тока, поэтому можно использ. это ур-е

$\vec{j} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{grad } \gamma + \vec{E}^{cm}$ проб-к минимиз

ток сечения замыкает
ток проб-м



по контуру проб-ка

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \vec{A} d\vec{l} - \int_1^2 \underbrace{\text{grad } \gamma d\vec{l}}_{dy} + \int_1^2 \vec{E}^{cm} d\vec{l}$$
 генерируемые проб-м; $\vec{j}$ направ. по $d\vec{l}$

$$\vec{j} S d\vec{l} = \frac{I S}{I} d\vec{l}$$
 Т. Стокса
$$\int_1^2 \vec{A} d\vec{l} \approx \oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \varphi$$
 норм

$$C = \frac{q}{|y_2 - y_1|}$$

расчет-матрицу
напряж.-поле, напряж.-поле

$$\boxed{I \cdot R = -\frac{1}{c} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{q}{c} + \mathcal{E}} \cdot I$$

$$\varphi = \frac{1}{c} L \cdot I$$
 L - коэф. самоиндукции

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\mathcal{E} I = R I^2 + \frac{d}{dt} \frac{L I^2}{2c^2} + \frac{d}{dt} \frac{q^2}{2c}$$

$$dV = S \cdot dl$$

$$A = \int \vec{j} \cdot \vec{E}^{cm} dV = I \int E^{cm} d\vec{l} = I \cdot \mathcal{E}$$

$$Q = \int \frac{j^2}{\sigma} dV \cdot \frac{S^2}{S^2} = I^2 \int \frac{dl}{\sigma \cdot S} = I^2 R$$

$$\vec{j} dV \rightarrow I d\vec{l}$$

напряжение проб-ка

работа источника

$$\mathcal{E} \cdot I = R I^2 + \frac{d}{dt} \frac{L I^2}{2c^2} + \frac{d}{dt} \frac{q^2}{2c}$$
 напряжение

замкн. проб-к:

$$\boxed{\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + \frac{q}{c} + I \cdot R = \mathcal{E}}$$

Многочастот. колеб. в контуре: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$, $I = I_0 e^{-i\omega t}$, $q = q_0 e^{-i\omega t}$

$$I = -i\omega q \Rightarrow q = \frac{i}{\omega} I$$

$$\mathcal{E} = \left(R - \frac{i\omega L}{c^2} + \frac{i}{\omega C} \right) \mathcal{I}$$

$$\mathcal{E} = Z(\omega) \mathcal{I}$$

уравнение проводка: $Z(\omega) = R - \frac{i\omega L}{c^2} + \frac{i}{\omega C} = \boxed{R - i \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right) = Z(\omega)}$

$$\mathcal{I}(t) = \operatorname{Re} \frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}}{Z(\omega)} = \operatorname{Re} \frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot e^{-i\psi}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos(\omega t - \psi)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Эффект. сопр-е индукт. цепей емкостное сопр-е и
реакт. сопр-е (обоз. с параметрами L и C)

$$t=0: \mathcal{E}=0$$

$$t>0: Z(\omega) \mathcal{I} = 0 \quad \text{При } Z(\omega) = 0: \mathcal{I} \neq 0 \quad \text{собственные колебания, хар-ся опред. частотами}$$

$$Z(\omega) = R - i \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right) = 0 \quad \left| \cdot \frac{\omega c^2}{L} \right. \quad 1) R=0 \quad \boxed{\omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}} \quad \text{Томпсонская част.}$$

$$\omega^2 + i \frac{R c^2}{L} \omega - \frac{c^2}{LC} = 0$$

Незатухающие собств. колебания

$$\omega_{1,2} = -i \frac{R c^2}{2L} \pm \sqrt{-\left(\frac{R c^2}{2L} \right)^2 + \frac{c^2}{LC}}$$

$$2) R \neq 0$$

$$a) \frac{R c^2}{2L} < \frac{c}{\sqrt{LC}} \quad e^{-i\omega t}$$

Собств. колеб. затухающие

$$b) \frac{R c^2}{2L} > \frac{c}{\sqrt{LC}} \quad \text{нет колеб.}$$

априори не существует

Система индуктивно обаз-х контуров

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} \mathcal{I}_b \quad \text{поток, возг. б-ми контурами}$$

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{I}_a R_a + \frac{q_a}{C_a} + \sum_b \frac{L_{ab}}{c^2} \frac{d\mathcal{I}_b}{dt} \quad \text{б-ми а-ом.}$$

б-ми а-ом.

$$\text{Общие колеб.} \quad \mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{0a} e^{-i\omega t} \quad \mathcal{I}_a = \mathcal{I}_{0a} e^{-i\omega t}$$

$$\Phi_a = \det Z_{ab}(\omega) = 0$$

$$\mathcal{E}_a = \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) \mathcal{I}_a - \frac{i\omega}{c^2} \sum_b L_{ab} \mathcal{I}_b = \sum_b Z_{ab}(\omega) \mathcal{I}_b$$

$$\boxed{Z_{ab}(\omega) = \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) \delta_{ab} - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab}}$$

матрица импеданса

Контуры без электричества $C \rightarrow \infty$

Эл.-магн. волны в среде

(в изотропной гомогенной среде)

04.04.12.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{изог. среда}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \left(\frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Эл.-магн. волна в изог. среде имеет электр. поле и магн. поле (перпендикулярно друг другу)

Плоская волна: (x, t)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{E}(x, t) = \vec{E}_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \vec{E}_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) \\ \vec{H}(x, t) = \vec{H}_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \vec{H}_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) \end{cases}$$

Монохр. волны:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}(x) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{H}(x, t) = \vec{H}(x) e^{-i\omega t}$$

$\vec{E}_1, \vec{H}_1$ - бегущая волна вправо x

$$\frac{d^2 \vec{E}(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}(x) = 0$$

Плоск. монохр. волна

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_0 e^{ikx}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \mu_0$$

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$\vec{E}$ - электрическое поле

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = i \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$\vec{k}$ - вектор волнового числа

$$\nabla e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\omega}{c} \mu_0 \vec{H}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu_0 \vec{H}_0$$

для волны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения

$$\vec{H}_0 = \frac{c\vec{K}}{\omega\mu_0} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{\mu_0} \frac{c}{\omega} \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \vec{K}_0 \times \vec{E}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{K}_0 \times \vec{E}_0^*$$

б. уг. гуэл. напр. поле 1 гр. гулу и 1 напр. рапр. волны

нм сдвиг фазы между колеб. эл. и маг. поле т.к. $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ - безразмер. велич.

$$W_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi} \quad W_H = \frac{\mu_0 H^2}{8\pi} \quad \text{плотность энергии}$$

Но подставим из *

$$\underline{W_H = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{8\pi} E^2 = W_E}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{B} = \frac{c\vec{K}}{\omega} \times \vec{E}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \frac{c}{\omega\mu_0} \vec{E} \times (\vec{K} \times \vec{E}) = \frac{c^2}{4\pi\mu_0\omega} (\vec{K}E^2 - \vec{E}(\vec{K}\vec{E})) =$$

для плоск. волны $\vec{K}\vec{E} = 0, \vec{K}\vec{H} = 0$

$$= \frac{c^2}{4\pi\mu_0\omega} \cdot \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \vec{K}_0 E^2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{\epsilon_0 E^2 \vec{K}_0}{4\pi} =$$

$$= N W \vec{K}_0$$

$$б. уг. гуэл. $N_\varphi = N_\psi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} < c$$$

N - фазовая скорость (скор. переноса энергии)

$$N_\psi \text{ всегда } < c$$

$$\text{здесь и } N_\varphi < c$$

рассмотр. не уг. гуэл. а сф. гулу

рассм. квазистат. волны б. сф.:

такт. волн такая

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$$

комплексная гуэл. теория.

коэф. $\epsilon_0, \mu_0, \sigma_0$ такие же как и для стат. поля

$$\text{rot } \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon_0 \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma_0 \vec{E} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E}$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}$$

$$\text{rot } \vec{E} = i\frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu(\omega) \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = -i\frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$$

$\mu(\omega), \epsilon(\omega)$ - завис-ть от частоты $\rightarrow$ дисперсия

$$\text{rot rot } \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \left(i \frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E} \right) \quad \underline{\rho = 0} \text{ нем бн. обзвн. зар-б}$$

grad div - Δ

$$\text{div } \vec{D} = \varepsilon(\omega) \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \vec{E} = 0 \quad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i \vec{k} \vec{r}} \quad \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega)}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \varepsilon'(\omega) + i \varepsilon''(\omega) \\ \mu(\omega) &= \mu'(\omega) + i \mu''(\omega) \end{aligned} \quad \left\| \begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)} \\ &= \left\{ \vec{K} = \vec{K}' + i \vec{K}'' \right\} = \\ &= \vec{E}_0 e^{-\vec{K}'' \vec{r}} \cdot e^{i(\vec{K}' \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \right.$$

показр. показ. бжна абз. неоднородной, асимметрии
уменьшам б показ $\vec{K}'$

$\vec{K}''$ немн бжна показр. не макс, как $\vec{K}'$

Уменьшение асим. бжна $\vec{K}''$, а бжна показр. по $\vec{K}'$

$$K'^2 - K''^2 + 2i \vec{K}' \vec{K}'' = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon' + i \varepsilon'') (\mu' + i \mu'')$$

1) $\mu = 1$ $\mu(\omega)$ с показр. частоты $\rightarrow 1$

$$K'^2 - K''^2 + 2i \vec{K}' \vec{K}'' = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon' + i \varepsilon''), \text{ if } \varepsilon'' \neq 0 \text{ дисип. энтрпий - бжна. темп}$$

1) $\varepsilon'' = 0$ нем бжна. энтрпий, $\varepsilon'(\omega) > 0$ асимметрии не бжна. уменьш. $\Rightarrow$

$$\vec{K}'' = 0 \text{ (уг. дисипетив)}$$

2) $\varepsilon'' = 0$, $\varepsilon'(\omega) < 0$ дисипатив энтрпий нем - асимметрии не ↓, $K'^2 < 0 \Rightarrow$
 $K'' = 0$ т.к. $\varepsilon'' = 0$

$$K = i |K| \text{ это не п. бжна } \rightarrow \underline{\text{бжна не может показр. по}} \\ \underline{\text{б эту абз. пр-ба.}} \quad (\varepsilon'(\omega) < 0, \varepsilon'' = 0)$$

бжна показр. на этой абз. пр-ба

$$\vec{K} = K_0 \vec{K} = \vec{K}_0 \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}, \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i \varepsilon''(\omega) \quad \sqrt{\varepsilon(\omega)} = n(\omega) + i \kappa(\omega)$$

$n(\omega)$ - показр. преломл. coeff. $\kappa(\omega)$ - coeff. погл. coeff.

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega x}{c} \vec{k}_0 \vec{r}} \cdot e^{i(\frac{\omega n}{c} \vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)}$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{\omega x(\omega)}{c} - \text{гекперити з аныгана}$$

$$\frac{c}{n(\omega)} = v_{\varphi}$$

Харгал н у х бичих. үүдэг ε' у ε''

$$\sqrt{\varepsilon} = n + ix \quad n^2 - x^2 + 2inx = \varepsilon' + i\varepsilon'' \rightarrow n^2 - x^2 = \varepsilon'(1) \quad 2nx = \varepsilon''(2)$$

$$u_2(2) \quad x = \frac{\varepsilon''}{2n} \quad n^2 - \left(\frac{\varepsilon''}{2n}\right)^2 = \varepsilon' \quad n^4 - \varepsilon' n^2 - \frac{\varepsilon''^2}{4} = 0 \quad n_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon''}{2}\right)^2}$$

↙ $\text{negat. } \lambda(1) \rightarrow$

$$n^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon') \quad \underbrace{\varepsilon''(\omega) > 0 \quad \omega > 0, \quad x(\omega) > 0}_{n(\omega) > 0} \quad (\text{ангуун. гонгину заныгх})$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon'}$$

$$x = \frac{\varepsilon''}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon' \cdot \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon'}$$

$$\vec{k}_0 = \vec{e}_x \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega x}{c} \vec{k}_0 \vec{r}} \cdot e^{i(\frac{\omega n}{c} x - \omega t)}$$

Фогм Коид. Электр. у нани. нана ампл. гр. он гурга ↓

$$\mu=1: \quad \vec{H} = \frac{c}{\omega} \vec{e}_x \times \vec{E}_0 \cdot \underbrace{\frac{\omega}{c}(n+ix)}_K e^{-\frac{\omega x}{c} \vec{k}_0 \vec{r}} e^{i(\frac{\omega n}{c} x - \omega t)} = \vec{e}_x \vec{E}_0 \sqrt{n^2 + x^2} e^{-\frac{x\omega}{c} i(\frac{\omega n}{c} x - \omega t + \psi)}$$

$$\overline{W_E} = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{16\pi} = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2}{16\pi} e^{-2\frac{\omega x}{c} x}$$

$$\overline{W_H} = \frac{|\vec{H}|^2}{16\pi} = \frac{(n^2 + x^2) |\vec{E}_0|^2}{16\pi} e^{-2\frac{\omega x}{c} x} = \frac{(n^2 + x^2) \overline{W_E}}{\varepsilon_0}$$

үсрэгн.но нүрнүүг

$$\text{Когзугау. болон: } \left. \begin{aligned} \varepsilon' &= \varepsilon_0, \quad \varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \varepsilon_0 + i\frac{4\pi\sigma_0}{\omega} \\ |\varepsilon(\omega)| &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{W_H}}{\overline{W_E}}$$

$$1) \quad \varepsilon_0 \gg \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}$$

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_0}$$

$$x(\omega) = \frac{|\varepsilon''|}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma_0}{\omega\varepsilon_0}\right)^2} - 1 \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4\pi\sigma_0}{\omega\varepsilon_0} = \frac{2\pi\sigma_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}}$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{\omega x}{c} = \frac{x}{n} \cdot \frac{\omega}{c} = \frac{x}{n} \cdot \frac{1}{v_{\varphi}}$$

$$\Gamma(\omega) \cdot \tilde{x} = \frac{x}{n} \ll 1$$

нүрнүүгн
ангуунгн
на гд. болон
хүрнүүгн

$$\overline{W_H} = \frac{\varepsilon_0 + \left(\frac{2\pi\sigma_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}}\right)^2}{\varepsilon_0} \overline{W_E} \sim \overline{W_E}$$

$$\epsilon' = \epsilon_0 \quad \epsilon'' = \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} \quad h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon_0^2 + \left(\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}\right)^2} + \epsilon_0 \quad \frac{\overline{W_H}}{W_E} = \frac{h^2 + \kappa^2}{\epsilon_0}$$

$$\kappa(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon_0^2 + \left(\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}\right)^2} - \epsilon_0$$

$$2) \epsilon_0 \ll \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}, \quad n \sim \kappa \sim \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} \quad \Gamma \kappa = \frac{\kappa}{n} \sim 1 \quad \Gamma = \frac{\omega \kappa}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma_0}}{c} = \frac{1}{\delta}$$

δ - глуб. проникнов.

δ - глуб. проникновения в среду

$$K = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} (1+i) = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{связ. с гл. волны в атомной проб-ке}$$

комплексные ур-я упрощ. составные чл-ы чл-ы ур-я глуб-я

среда поддается набору осцилляторов (дип. моментов)

амплитуда приобр. дип. моменты под действием поля (перемещения)

дип. моменты разных сортов

Будет полез. ур-я глубины

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

расст. диполи одного сорта $\vec{P} = N \cdot \vec{d}$

$\vec{P}$ - ур. дип. мом. ед. объема чл-ы

Нужно найти дип. мом. под дейст. эл. поля

расст. распростран. волны

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = -k \cdot \vec{r} + \underbrace{e \vec{E}_0 \cdot e^{-i\omega t}}_{\substack{\text{возбужд. сила} \\ \text{свобод. волн.}}} + \underbrace{\frac{e}{c} \vec{N} \times \vec{H}_0 e^{-i\omega t}}_{\substack{\text{сила со} \\ \text{свобод. эл. в.} \\ \text{мом.}}} + \left| \text{плоская волна} \right| \left| \vec{E}_0 \right| = \left| \vec{H}_0 \right| + \underbrace{\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}}_{\substack{\text{сила изл.} \\ \text{тр.}}}$$

сила изл. трения

самая маленькая
сила, зат. ампл.
бл. силы

$$\frac{K}{m} = \omega_0^2 - \text{свобод. част.}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{r}} \quad \ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} \quad \ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{F}_0 = \frac{e}{m} \vec{E}_0$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma$$

$$\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) \left(\frac{\omega_0}{c} \right) \omega_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_e}{\lambda} \right) \omega_0 \ll 1$$

$$\omega \cdot \text{p.a.g.} \cdot \vec{E}$$

$$\gamma \ll \omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$$

$$\vec{F}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}(t)$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma$$

$$\vec{d} = e\vec{r} = \frac{e^2}{m} \vec{E}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma$$

$$4\pi\vec{P} = \frac{4\pi N e^2}{m} \vec{E}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma$$

$$\pi = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \sum_{\text{no 4 ker copman}} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma}$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}$$

поперечная составляющая
(нормальная составляющая)

параметры: $n(\omega)$, $\chi(\omega)$ определяются

поперечная компонента: $N \ll 1$

поперечная компонента: $N \ll 1$

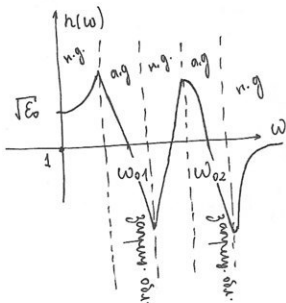
$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n(\omega) + i\chi(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma} = 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2}$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2}$$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2}$$

$$1) |\omega_0 - \omega| \gg \gamma \quad n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \chi(\omega) = \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_p^2 \cdot \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2} \ll 1$$

$$|\chi(\omega)| \ll |n(\omega)|$$



Однородная
поперечная
составляющая

$$\omega = 0, \quad n = \sqrt{\epsilon_0}$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_{p2}^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}$$

n.g. - норм. диспер.

a.g. - аном. диспер.

$$2) |\omega - \omega_0| \sim \gamma$$

$$\omega \sim \omega_0$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 + \omega)^2 (\omega_0 - \omega)^2 - \gamma^2 \omega_0^2} =$$

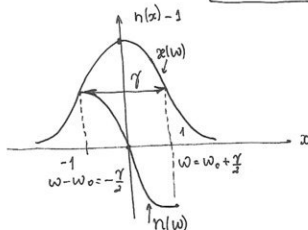
$$= 1 - \frac{\omega_p^2 \frac{\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}}{2\omega_0 \gamma \left(1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}\right)^2\right)}}{2\omega_0 \gamma (1 + x^2)} = 1 - \frac{\omega_p^2 \cdot x}{2\omega_0 \gamma (1 + x^2)}$$

$$x = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}}$$

$$x(\omega) = \frac{\omega_p^2}{2\omega_0 \gamma} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \quad x \sim n$$

$$\omega - \omega_0 = -\frac{\gamma}{2}, \quad x = -1$$

$$\omega - \omega_0 = \frac{\gamma}{2}, \quad x = 1$$



$x(\omega) = n(\omega)$ — преломление и коэффициент затухания.

область аномальной дисперсии. $n(\omega) \downarrow$

область нормальной дисперсии. $n(\omega) \uparrow$

$$\omega \gg \omega_0 \quad \epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad N = \sum_i N_i$$

Слабая дисперсия

$$\gamma = 0: \quad n(\omega) = 1 - \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2}$$

$$n(\omega) = 1 - \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2}$$

$$N_p = \frac{c}{n} > c \quad (n < 1)$$

фазовая скорость > скорости света

$$N_p = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} \Rightarrow$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} (\omega \cdot n) = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2} + \frac{4\pi N e^2}{m \omega^3} \right) =$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2} \right); \quad N_p = \frac{c}{1 + \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2}} =$$

$$= c \left(1 - \frac{2\pi N e^2}{m \omega^2} \right) = c \cdot n(\omega) \quad n(\omega) < 1 \quad N_p < c$$

$$\overline{e} = \vec{E}, \quad \overline{h} = \vec{B}$$

$$1) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$2) \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$D_i(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k})$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \int \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k}$$

$$\vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \vec{E}(t, \vec{r}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} dt d\vec{r}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{\omega}{c} \vec{B}(\omega, \vec{k}) \\ 2) \vec{k} \times \vec{B}(\omega, \vec{k}) = -\frac{\omega}{c} \vec{D}'(\omega, \vec{k}) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0(\omega, \vec{k}) \\ \vec{k} \cdot \vec{D}'(\omega, \vec{k}) = -4\pi \rho_0(\omega, \vec{k}) \\ \vec{k} \cdot \vec{B}(\omega, \vec{k}) = 0 \end{array} \right.$$

симметрия относительно времени
токи и заряды заданы ($\rho_0, \vec{j}_0$)
 $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \quad \mu_{ij}(\omega, \vec{k})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot i\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \end{array} \right.$$

$$1) \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega}{c} \left(-\frac{\omega}{c} \vec{D}' - \frac{4\pi i}{c} \vec{j}_0 \right)$$

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{k}^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D}' - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \vec{j}_0 \quad \left| \cdot \frac{c^2}{\omega^2} \right.$$

$$k_j E_j$$

$$D'_i(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k})$$

$$\left\{ \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right\} E_j(\omega, \vec{k}) = -\frac{4\pi i}{\omega} \vec{j}_0(\omega, \vec{k})$$

$$\mu_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j) - \text{тензор Максвелла}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{k}}{k}$$

$$\boxed{\mu_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) = -\frac{4\pi i}{\omega} \vec{j}_0(\omega, \vec{k})}$$

значит $\vec{j}_0 \rightarrow$ производим
компоненты $\vec{E}$, ком.
возмущ. в теч. времени из
данных сторонних токов

$$\vec{j}_0(\omega, \vec{k}) = 0 \Rightarrow \mu_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (*)$$

это значит, что в вакууме нет свободных и связанных зарядов

монотонная волна: $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$

(*) упр. - выдана справочника для свободных колебаний

Исход. уравн $\omega = \omega(\vec{k})$

$M_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) = 0$ исходное уравн. и $\det(M_{ij}) = \underline{M(\omega, \vec{k}) = 0}$

$E_{ij}(\omega, \vec{k}) = E'_{ij}(\omega, \vec{k}) + i E''_{ij}(\omega, \vec{k})$

дисперсионное
уравнение

Сделаем предположение

область прозрачности среды: $|E'_{ij}(\omega, \vec{k})| \gg |E''_{ij}(\omega, \vec{k})|$
какая-то конкретная
волна

$M(\omega, \vec{k}) = M'(\omega, \vec{k}) + i M''(\omega, \vec{k})$

предположение

$|M'(\omega, \vec{k})| \gg |M''(\omega, \vec{k})|$

$M'(\omega, \vec{k}) + i M''(\omega, \vec{k}) = 0$ выдана формула по выводу предположения

справ. свобод. частоты

$\hookrightarrow \underline{M'(\omega, \vec{k}) = 0} \Rightarrow \omega = \omega(\vec{k}) = \omega_k \quad \omega = \omega_k - i\gamma_k \quad |\gamma_k| \ll |\omega_k|$

$M'(\omega_k - i\gamma_k) + i M''(\omega_k - i\gamma_k) = 0$ и выдана формула из-за от $\vec{k}$

$M'(\omega_k) - i\gamma_k \frac{\partial M'(\omega_k)}{\partial \omega_k} + i M''(\omega_k) = 0$

$\gamma_k = \frac{M''(\omega_k)}{\frac{\partial M'(\omega_k)}{\partial \omega_k}}$

$$\gamma_k = \frac{\text{Im } M(\omega, \vec{k})}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } M(\omega, \vec{k})} \bigg|_{\omega = \omega_k}$$

$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-\gamma_k t - i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r})}$

полная затухающая волна

$\gamma_k > 0$ амплитуда постепенно убывает

Рассмотрим распростран. соедств. волны в однород. и изотропной среде

изотр. среда - нет выделенных напр-ий, св-ва среды одинаков во всех напр.

НО! Направление распростран. волны - выдел. напр-е. $\vec{k} = \frac{\vec{k}}{k}$

среда не абс. изотропной

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{\epsilon} E_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \\ \vec{\epsilon} \vec{E}_{\perp} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall \text{ тензор 2 ранга можно разложить по един.} \\ \text{ортонорм. гр. гр. тензоров} \end{array}$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{\parallel}(\omega, \vec{k}) \chi_i \chi_j + \epsilon_{\perp}(\omega, \vec{k}) (\delta_{ij} - \chi_i \chi_j)$$

по заданному ϵ_{ij}
всегда можно найти
 $\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}$

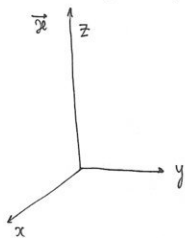
$$(\delta_{ij} - \chi_i \chi_j) \chi_i = \chi_j - \chi_i^2 \chi_j = 0$$

Перпендикуляр максвелловский тензор б. виде:

$$M_{ij} = \epsilon_{\parallel} \chi_i \chi_j + \epsilon_{\perp} (\delta_{ij} - \chi_i \chi_j) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \chi_i \chi_j) = \epsilon_{\parallel} \chi_i \chi_j + \left(\epsilon_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) (\delta_{ij} - \chi_i \chi_j)$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{\frac{\omega^2}{k^2}} = \frac{c^2}{v_p^2} = N^2$$

Распростр. поляризованных и дисперс. ур-е соедств. волны в изотр. среде



или z направлено по $\vec{k}$

$$\chi_i = 0$$

$$M_{ij}(\omega, \vec{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

$$M(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{\parallel}(\omega, \vec{k}) \left[\epsilon_{\perp}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right]^{-2} \text{ определитель}$$

опред. сохр. б. $\forall$ сист. коорд.

$$M_{ij} E_j = 0$$

$$M_{ij} E_j = 0$$

$$(i=1) \quad M_{1j} E_j = M_{11} E_1 = \left(\epsilon_1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) E_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_x \neq 0 \text{ тогда есть колебания} \\ \epsilon_1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0 \end{cases}$$

возможны колеб. в напр. x

частота этих продольн. колеб. опред. ур. $\epsilon_1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0$ - это есть дисперс-е ур-е для продольных продольн. колебаний

$$(i=2) \quad M_{12} E_2 = \left(\epsilon_1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_y \neq 0 \\ \epsilon_1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0 \end{cases}$$

поперечная волна

вырожденные колебания: продольн. ко. взаимно $\perp$ напр., но с одинак. частотой (вырожд. по частоте)

$$(i=3) \quad M_{33} E_3 = \epsilon_{11}(\omega, \vec{k}) E_z = 0 \quad \begin{cases} E_z \neq 0 \\ \epsilon_{11}(\omega, \vec{k}) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{дисперсионное ур-е} \\ \text{в вакууме таких волн} \\ \text{нет (}\epsilon=1\text{)} \end{array}$$

продольная продольн. волна

в однород. и изотроп. среде возможны распростран. попер-х волн и продольных волн.

Найдем рел-е неоднород. сист. ур-й

$$M_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) = - \frac{4\pi i}{\omega} \vec{j}_{oi}(\omega, \vec{k}) \quad \Big| \cdot M_{nj}^{-1}$$

$$E_n(\omega, \vec{k}) = - \frac{4\pi i}{\omega} M_{ni}^{-1} \cdot \vec{j}_{oi} \frac{M}{M} \longrightarrow |n-i| \quad E_i(\omega, \vec{k}) = - \frac{4\pi i}{\omega} e_{in} \cdot \vec{j}_{on} \frac{1}{M}$$

$$e_{in} \equiv M \cdot M_{in}^{-1}$$

$$M_{in}^{-1} = \frac{A_{ni}}{M} \sim \text{амплит. гомоген. к прямой матрице (транспониров.)}$$

ср-е прозвучива: $\frac{1}{M} = \frac{1}{M' + iM''}$, $M'' \rightarrow 0 \quad \lim_{M'' \rightarrow 0} \frac{1}{M} = \lim_{M'' \rightarrow 0} \frac{1}{M' + iM''}$

$$\lim_{M'' \rightarrow 0} \frac{1}{M} = \lim_{M'' \rightarrow 0} \frac{1}{M' + iM''} = \lim_{M'' \rightarrow 0} \frac{M' - iM''}{M'^2 + M''^2} = P \frac{1}{M'}$$

реальное значение интеграла

$$P \frac{1}{M'} = \begin{cases} 0, & M' = 0 \\ \frac{1}{M'}, & M' \neq 0 \end{cases}$$

$$P \frac{1}{M'} - i\pi \operatorname{sign} M''(\omega, \vec{k}) \delta[M'(\omega, \vec{k})]$$

$$E_i^{M_0}(\omega, \vec{k}) = -\frac{4\pi^2}{\omega} \operatorname{sign} M''(\omega, \vec{k}) e_{in}(\omega, \vec{k}) j_{on}(\omega, \vec{k}) \delta[M']$$

$$E_i(\omega, \vec{k}) = E_i(\omega, \vec{k}) + E_i(\omega, \vec{k})$$

не резонансное резонансное

$$e_{in}(\omega, \vec{k})$$

$$j_{on}(\omega, \vec{k})$$

$$\delta[M'(\omega, \vec{k})]$$

$$E_i^{M_0}(t, \vec{r}) = -4\pi^2 \int d\omega d\vec{k} \frac{\operatorname{sign} M''(\omega, \vec{k})}{\omega} e_{in}(\omega, \vec{k}) j_{on}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \delta[M'(\omega, \vec{k})]$$

$$\vec{j}_0(t, \vec{r}) = \vec{j}_0(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t}$$

$$\vec{j}_0(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dt d\vec{r} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \vec{j}_0(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$= \frac{\delta(\omega - \omega_0)}{(2\pi)^3} \int d\vec{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \vec{j}_0(\vec{r}) = \vec{j}_0(\vec{k}) \delta(\omega - \omega_0)$$

выражения - компонента Фурье

$$E_i^{M_0} = -\frac{4\pi^2}{\omega_0} \int d\omega d\vec{k} \operatorname{sign} M''(\omega, \vec{k}) e_{in}(\omega, \vec{k}) j_{on}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \cdot \int_s \frac{\delta(\omega - \omega_s(\vec{k}))}{\left| \frac{\partial M'}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_s(\vec{k})}}$$

$$\omega_0 = \omega_s(\vec{k})$$

$$\vec{k} = \vec{k}_s(\omega_0)$$

рез. часть поля излучения точечного источника.

с част. ω . прелом. среды упрямых волн частот, колебаний
у волн. ω_0 углубл. гравитационному упр-ю

ω_0 -зависимая частота

разложение по плоским волнам $k_s(\omega_0)$

резонансной части поля

внутр. энергия поля в вакууме

$W = W_K + W_E + W_{cp}$ не изменяется внутр. состояние вакуума
 полная кин. поля среды
 эн.

только в среде прозр. среды можно полу. в экв. виде эн. поля:

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{||} \hat{x}_i \hat{x}_j + \epsilon_{\perp} (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j)$$

if $\epsilon_{||} = \epsilon_{||}(\omega, \vec{k})$ и $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\perp}(\omega, \vec{k})$, то функцион. зав. от волнового

$\epsilon_{||}$ и $\epsilon_{\perp}$ пропорционально тепловой скорости

if темп. скар. можно считать = 0 (распрост. холодного газа), то $\epsilon_{||}, \epsilon_{\perp}$ не зав. от $\vec{k}$

при $N_T = 0 \Rightarrow \epsilon_{||}(\omega)$ только брешинг дисперсия продольн., и
 $\epsilon_{\perp}(\omega)$ пространств. изотропн.

$$\boxed{\epsilon_{\perp}(\omega) = \epsilon_{||}(\omega)} \text{ когда } N_T = 0 \text{ тогда } \epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon_{||}(\omega) \hat{x}_i \hat{x}_j + \epsilon_{\perp}(\omega) (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) =$$

$$= \epsilon(\omega) \delta_{ij} \quad \underline{\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon(\omega) \delta_{ij}} \quad \text{среда полностью изотропна}$$

расст. без учета простран. дисперсии, в среде прозр. среды

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi} \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) \quad \vec{j}(t, \vec{r}) = \vec{j}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

работа, соизмеримая
 с пространств. токами
 маг. э. поле

поток энергии
 поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\overline{-\vec{j} \cdot \vec{E}} = q = \frac{1}{8\pi} \text{Re} \left\{ \vec{E}^* \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{B}^* \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + c \cdot \text{div}(\vec{E}^* \vec{B}) \right\}$$

коэф. темп., бегущего волн. и эг. V

усреднение по периоду $\frac{2\pi}{\omega}$

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} + \vec{B}' \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \quad \vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{B}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{D}'(t, \vec{r}) = \epsilon(\omega) \vec{E}(t, \vec{r})$$

$$-\vec{j}_0 \cdot \vec{E} = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}_0^* (-i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0) - i\omega \vec{B}_0^* \vec{B}_0 + \frac{c}{4\pi} \nabla (\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0) \right\} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ |\vec{E}_0|^2 (-i\omega (\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)) - i\omega |\vec{B}_0|^2) \right\} = \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 = \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{8\pi} |\vec{E}|^2 = q \rightarrow$$

кол-во тепла, выделяющ. в ед. об. в ед. V

$$q > 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{много выделяется} \\ \text{выделяется мало} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \epsilon''(\omega) > 0 \quad \text{при } \omega > 0 \\ \epsilon''(\omega) < 0 \quad \text{при } \omega < 0 \end{array}$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(t, \vec{r}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\epsilon''(\omega) \rightarrow 0, \text{ но: } T_A \gg T = \frac{2\pi}{\omega},$$

выделяется мало

$$L_A \gg \frac{2\pi}{k} \sim \lambda \quad A - \text{антенна}$$

антенныго режима мало выделяется

Умножить можно безразлично, групп. не умножаем

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(t) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \quad \epsilon = \epsilon(\omega)$$

$$\frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} = \hat{f} \vec{E}(t, \vec{r}) \quad \hat{f} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{E} \quad \hat{f} A_0 e^{-i\omega t} = f(\omega) A_0 e^{-i\omega t}$$

мн. зап. $\hat{f}$

$$f(\omega) = -i\omega \epsilon(\omega)$$

$$\frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} = \hat{f} \vec{E}(t) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} =$$

$$= \hat{f} \int d\lambda \vec{E}_0(\lambda) e^{-i(\omega+\lambda)t + i\vec{k}\vec{r}} = e^{i\vec{k}\vec{r}} \int d\lambda \vec{E}_0(\lambda) \hat{f} e^{-i(\omega+\lambda)t} =$$

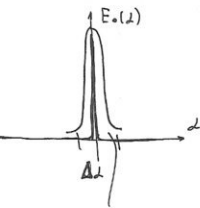
б. $\int \varphi_{\text{групп}}$

$$= e^{i\vec{r}\vec{r}} \int d\alpha \vec{E}_0(\alpha) f(\omega+\alpha) e^{-i(\omega+\alpha)t} \quad (\equiv)$$

аппаратура медико-тех. на период войны

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \int d\omega \vec{E}_0(\omega) e^{-i(\omega + \omega_0)t + i\vec{k}\vec{r}} \quad \vec{E}_0 = \text{const}$$

$$\vec{E}_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt \vec{E}_0 e^{i\omega t} = \vec{E}_0 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt}_{\delta(\omega)} = \underline{\underline{\vec{E}_0 \delta(\omega)}}$$



густый слой молока на E_1 , когда $\alpha = 0$

разлагается в функции, и в асимпт. масс. равенств, брось не только при $\alpha=0$ и в и интегр. $d\alpha$

$$T_A = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \frac{2\pi}{\alpha} \gg \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{\omega \gg \alpha}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \int d\alpha \vec{E}_0(\alpha) \left[f(\omega) + \alpha \frac{\partial f}{\partial \omega} + \dots \right] e^{-i\alpha t} &= e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \left[d\alpha \vec{E}_0(\alpha) \left[f(\omega) + \right. \right. \\ + i \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left. \left. \right] e^{-i\alpha t} \right] &= e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \left[f(\omega) + i \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right] d\alpha \vec{E}_0(\alpha) e^{-i\alpha t} \\ &= e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \left[f(\omega) + i \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{E}_0(t) \quad f(\omega) = -i\omega \epsilon(\omega) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{D}'}{\partial t} = e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \left\{ -i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0(t) + \frac{\partial \omega \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} \right\}$$

$$\overline{\vec{E} \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t}}^T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vec{E}_0^* \left\{ -i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0 + \frac{\partial \omega(\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega))}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (-i\omega(\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)) |\vec{E}_0|^2 +$$

Abbildung zu Aufgabe 10

$$= \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{2} |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\partial \omega \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} \vec{E}_0^* \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} = \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{2} |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \omega \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} \left\{ \vec{E}_0^* \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} + \vec{E}_0 \frac{\partial \vec{E}_0^*}{\partial t} \right\} = \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{2} |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \omega \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial |\vec{E}_0|^2}{\partial t}$$

$$\overline{\vec{E} \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t}} = \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \omega \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t}$$

$$\overline{\vec{B} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{B}^* \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B}^*) = \frac{1}{4} (\vec{B}^* \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t}) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial |\vec{B}|^2}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \quad \text{дез якого заст. при} \\ \text{аритметич. см. бр.}$$

беремо 1
пор. мовимо

$$\vec{x} = \frac{\vec{k}}{k}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} |\vec{x} \times \vec{E}|^2 \quad \overset{x^2=1}{=} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \{ |\vec{E}|^2 - |\vec{x} \vec{E}|^2 \} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - x_i x_j) E_i^* E_j$$

$$\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{B}) = 0 \quad (\text{м.к. аритметич. не заст. см. r})$$

$$-\overline{\vec{j} \cdot \vec{E}} = \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{8\pi} |\vec{E}|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{E}|^2}{16\pi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{E_i^* E_j}{16\pi} =$$

$$= q + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \omega [\varepsilon'(\omega) \delta_{ij} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - x_i x_j)] \frac{E_i^* E_j}{16\pi} \right\} = q + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \omega M_{ij}(\omega)}{\partial \omega} \frac{E_i^* E_j}{16\pi} \right) =$$

$$= q + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \omega [\varepsilon'(\omega) x_i x_j + (\varepsilon'(\omega) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) (\delta_{ij} - x_i x_j)] \frac{E_i^* E_j}{16\pi} \right\} =$$

$$= q + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \omega \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} \frac{|\vec{x} \vec{E}|^2}{16\pi} + \frac{\partial \omega [\varepsilon'(\omega) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}]}{\partial \omega} \frac{|\vec{x} \times \vec{E}|^2}{16\pi} \right\}$$

$$-\vec{j}_0 \cdot \vec{E} = q + \frac{\partial W_{II}}{\partial t} + \frac{\partial W_I}{\partial t}$$

↓ ↓ ↘

канал- излучение излр. попом. эи.
сф. фот попом от энергии попер. канал

излуч. диполь поглощение
энерг. брызг канал

$$W_{11} = \frac{\partial W \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} \bigg|_{\substack{\varepsilon'(\omega)=0 \\ 16\pi}}$$

интенсивность излучения Чиренкова - кол-во энергии излуч. заст. на ед. длины

$$d\mathcal{E}_k = q \cdot \vec{E} d\vec{r}$$

0,1% энергии заст. уходит на ед. длины →

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dl} = q \cdot \frac{d\vec{r}}{dl} \vec{E} = \frac{q}{v} \vec{v} \vec{E} \Big|_{\vec{r}=\vec{v}t}$$

похоже сущности, что заст. глукт.
с $v = \text{const}$

Излучение энергии с расстоянием

16 м. где макс. расстояния

Рассмотрим $\int \mathcal{P}_{\text{упр}}: \vec{E}(t, \vec{r})$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} \quad \underbrace{\vec{E}(t) = \vec{E}^*(t)}_{\text{бесконеч.}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{E}^*(\omega) e^{i\omega t} = \left\{ \omega \rightarrow -\omega \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{E}^*(-\omega) e^{-i\omega t} \quad \boxed{\vec{E}(\omega) = \vec{E}^*(-\omega)}$$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_0^{\infty} d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} + \int_{-\infty}^0 d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} =$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} + \int_0^{\infty} d\omega \vec{E}(-\omega) e^{i\omega t} = \int_0^{\infty} d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} + \left(\int_0^{\infty} d\omega \vec{E}^*(\omega) e^{-i\omega t} \right)^* =$$

$\vec{E}(\omega)$

$$= 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega \int d\vec{k} \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{2q}{N} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega \int d\vec{k} \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{v}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \rightarrow i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{\omega}{c} \vec{B}(\omega, \vec{k})$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\vec{k} \times \vec{B}(\omega, \vec{k}) = -\frac{\omega}{c} \vec{D}(\omega, \vec{k}) - \frac{4\pi i}{c} \vec{j}_\omega(\omega, \vec{k})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{k} \vec{D}'(\omega, \vec{k}) = -4\pi i \rho_\omega(\omega, \vec{k})$$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega}{c} \left\{ -\frac{\omega}{c} \vec{D}'(\omega, \vec{k}) - \frac{4\pi i}{c} \vec{j}_\omega(\omega, \vec{k}) \right\} \quad (*)$$

$$\left\{ \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} \right\}_i = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) E_i - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{\omega i}(\omega, \vec{k})$$

$$\rho_\omega(t, \vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{v}t)$$

$$\vec{j}_\omega(t, \vec{r}) = \rho_\omega \vec{v} = q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{v}t)$$

нормальная составляющая тока

$$\vec{j}_\omega(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega d\vec{k} \vec{j}_\omega(t, \vec{r}) e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} =$$

4-я составляющая

$$= \frac{q \vec{v}}{(2\pi)^4} \int dt d\vec{r} e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{v}t) = \frac{q \vec{v}}{(2\pi)^4} \int dt e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{v}t)} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) =$$

$$= \frac{q \vec{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$\rho_\omega(\omega, \vec{k}) = \frac{q}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

05.05.12.

$$\vec{D}'(\omega, \vec{k}) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega, \vec{k}) \quad \text{по упр. (*)}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\omega, \vec{k}) = -4\pi i \rho_\omega(\omega, \vec{k})$$

$$\left\{ \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} \right\} = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \vec{j}_\omega$$

$$\rho_\omega(\omega, \vec{k}) = \frac{q}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)$$

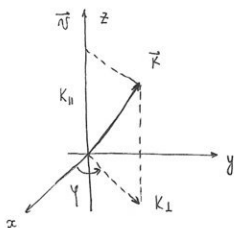
$$\vec{j}_\omega(\omega, \vec{k}) = \frac{q}{(2\pi)^3} \vec{v} \delta(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E} = i \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \cdot \left(\frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{K}}{\epsilon}\right) \delta(\vec{K} \vec{v} - \omega)$$

$$\vec{E}(\omega, \vec{K}) = i \frac{q}{(2\pi)^2} \frac{\frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{K}}{\epsilon}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \delta(\vec{K} \vec{v} - \omega)$$

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} = \frac{2q}{N} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\omega \int d\vec{K} \vec{v} \vec{E}(\omega, \vec{K}) e^{i(\vec{K} \vec{v} - \omega t)}$$

опыт. берем. (принимаем)
реальные значения)



$$d\vec{K} = K_\perp dK_\perp dK_\parallel dy$$

$$-\frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} = -\frac{2q}{N} \operatorname{Re} i \frac{q}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int dK_\perp K_\perp \int_{-\infty}^\infty dK_\parallel \int_{-\infty}^\infty d\gamma \frac{\frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{K} \vec{v}}{\epsilon}}{K_\perp^2 + K_\parallel^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \cdot dK_\parallel$$

носитель берем.

$$\cdot \delta(K_\parallel v - \omega) e^{i(K_\parallel v - \omega t)} =$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\left| \delta(K_\parallel v - \omega) = \frac{1}{v} \delta\left(K_\parallel - \frac{\omega}{v}\right) \right| = -\frac{q^2}{\pi N^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty d\omega \frac{v^2}{c^2} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right).$$

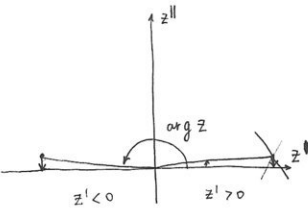
$$K_\perp \max \int_0^\infty \frac{2K_\perp dK_\perp}{K_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \epsilon(\omega))} = -\frac{q^2}{\pi c^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \ln \left(1 + \frac{K_{\perp m}^2 v^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)}\right) =$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega) \quad \epsilon'(\omega) \rightarrow 0$$

$$1 + \frac{K_{\perp m}^2 v^2 / \omega^2}{1 - \beta^2 \epsilon(\omega)} = Z(\omega)$$

$$= -\frac{q^2}{\pi c^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) \left\{ i \arg Z(\omega) + \ln |Z(\omega)| \right\}$$

$$Z(\omega) = 1 + \frac{K_{\perp m}^2 v^2}{\omega^2} \frac{1 - \beta^2 \epsilon' + i \beta^2 \epsilon''}{(1 - \beta^2 \epsilon')^2 + \beta^4 \epsilon''^2} = Z'(\omega) + i Z''(\omega)$$



$E''(w) > 0$ при $w > 0$
 $z' > 0$ при $z'' \rightarrow 0$
 if $\arg z = 0$ то это означает
 нулевой кривой & нулевого значения не дают
 $z' < 0$
 $\arg z = \pi$ при $z'' \rightarrow 0$

интересно, что при нулевом значении:

$$-\frac{\partial E_k}{\partial \ell} = \frac{q^2}{c^2} \int_{\text{кривая}}^{\omega_{\max}} d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 E(\omega)}\right)$$

кривая 0

$$0 < \beta^2 E(\omega) - 1 < \frac{K_{1\max}^2 v^2}{\omega^2}$$

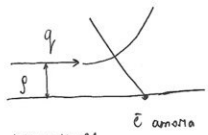
$z'(w) \text{ г.д.} < 0$
 когда это имеет:

$$\lim_{z'' \rightarrow 0} z'(w) = 1 - \frac{K_{1\max}^2 v^2}{\omega^2} \frac{1}{\beta^2 E(\omega) - 1} < 0$$

$$\frac{K_{1\max}^2 v^2}{\omega^2} > \beta^2 E(\omega) > 1 \quad 0 < \beta^2 E(\omega) - 1 < \frac{K_{1\max}^2 v^2}{\omega^2}$$

$$\beta^2 E(\omega) = \frac{v^2}{\frac{c^2}{E(\omega)}} = \frac{v^2}{v_{\phi}^2} > 1$$

у нас
 излуч.
 кривая



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{момент} \quad M \approx p \cdot r$$

p - импульс поля

p - импульс частицы

$$\vec{p}^{(t)} = \hbar \vec{k} \quad M \approx p \cdot r \approx \hbar k K_{1\max} \quad M = \hbar \sqrt{L(L+1)} \sim \hbar$$

$\frac{1}{K_{1\max}} \sim \gamma \gg 10^8$ Макроскопич. процессы, сравнимы с релакс. $\gg$ микроскопич. релакс.

$$K_{1\max} \lesssim 10^8 \text{ см}^{-1}$$

$$\beta^2 E(\omega) > 1 \quad E(\omega) \rightarrow 1 \quad \omega \rightarrow \infty$$

$$\beta^2 E(\omega_{\max}) = 1$$

граничное значение

$$2) - \frac{\partial \mathcal{E}_K}{\partial e} \Big|_{\substack{\text{попарная} \\ \text{нормы}}} = - \frac{q^2}{\pi c^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty d\omega \omega \left(1 - \frac{e' - i e''}{\beta^2 (\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2)} \right) \ln \left| 1 + \frac{\kappa_{\perp m}^2 v^2 / \omega^2}{1 - \beta^2 \varepsilon} \right| =$$

$$= \frac{q^2}{\pi v^2} \int_0^\infty d\omega \omega \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)} \ln \left| 1 + \frac{\kappa_{\perp m}^2 v^2 / \omega^2}{1 - \beta^2 \varepsilon} \right| = \frac{q^2}{v^2} \int_0^\infty d\omega \omega \delta(\varepsilon'(\omega))$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} = \pi \delta(x)$$

$$\cdot \ln \left(1 + \frac{\kappa_{\perp m}^2 v^2}{\omega^2} \right) =$$

$$= \frac{q^2}{v^2} \int_0^\infty d\omega \omega \ln \left(\frac{\kappa_{\perp m}^2 v^2}{\omega^2} \right) \delta(\varepsilon'(\omega))$$

$$\boxed{\varepsilon'(\omega) = 0}$$

→ дисперс. ур-е для
прогнозируемых колебаний

$$\delta[\varepsilon'(\omega)] = \sum_s \frac{\delta(\omega - \omega_s)}{\left| \frac{d\varepsilon'(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_s}}$$

Колебание атомарных $\varepsilon \rightarrow$
попарная норма

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon(\omega_s) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} = 0 \quad \omega_s^2 = \omega_p^2$$

$$|\omega| \gg |\omega_s|$$

сдвиг. частоты

N - количество ε

$$\omega_s = +\omega_p$$

$$\frac{d\varepsilon'}{d\omega} = \frac{2\omega_p^2}{\omega_s^3} = \frac{2}{\omega_p}$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m_e}$$

$$- \frac{\partial \mathcal{E}_K}{\partial e} \Big|_{\text{нон.}} = \frac{q^2}{v^2} \cdot \frac{\omega_s^2}{2} \ln \left. \frac{\kappa_{\perp m}^2 v^2}{\omega_s^2} \right|_{\omega_s = \omega_p} = \frac{q^2}{v^2} \frac{2\pi N e^2}{m_e} \ln \left(\frac{\kappa_{\perp m}^2 m_e v^2}{4\pi N e^2} \right)$$

Волноводы

обл-ти пр-ва, когда кон-а может расп. волна

спец. волноводы (прямоуг. попер. сеч., цилиндр. волнов. с круговым сечением)

с произвольным сечением, но одинак. вдоль длины волновода



в этой системе
можно распространяться
вдольная волна

оболочка - идеальный проводник

внутри - вакуум

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i k \vec{H} \quad \text{волны монохромат.} \quad (\mu = 1, \epsilon = 1)$$

$$\vec{E}, \vec{H} \sim e^{-i\omega t}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i k \vec{E} \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

Будем искать р-ние в виде: $\vec{E}(t, \vec{r}) = (\vec{E}_1 + \vec{e}_z E_z) e^{-i\omega t + i k_3 z}$

$k_3 = \frac{\omega}{v_{\text{ф}}}$ $\vec{H}(t, \vec{r}) = (\vec{H}_1 + \vec{e}_z H_z) e^{-i\omega t + i k_3 z}$ $\vec{E}_1, \vec{E}_z$ - ф-ции только попер-а коорд.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} = \nabla \times (\vec{E}_1 + \vec{e}_z E_z) e^{-i\omega t + i k_3 z} &= \left\{ i k_3 \vec{e}_z \times (\vec{E}_1 + \vec{e}_z E_z) + \nabla_{\perp} \times \vec{E}_1 + \right. \\ &\left. + \nabla_{\perp} E_z \times \vec{e}_z \right\} e^{-i\omega t + i k_3 z} = i k (\vec{H}_1 + \vec{e}_z H_z) e^{-i\omega t + i k_3 z} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla_1 \times \vec{E}_1 = i k H_z \vec{e}_z \\ \vec{H}_1 = \frac{k_3}{k} \vec{e}_z \times \vec{E}_1 + \frac{1}{i k} \nabla_1 E_z \times \vec{e}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla_1 \times \vec{E}_1 = -i k E_z \vec{e}_z \\ E_1 = -\frac{k_3}{k} \vec{e}_z \times \vec{H}_1 + \frac{1}{k} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \\ \vec{E}_1 &= \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y \end{aligned}$$

4 векторных ур-я

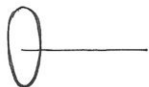
$$\nabla_1 \times \vec{E}_1 = \vec{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right) = \text{rot}_{\vec{e}_z} \vec{E}_1$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{K_3}{K} \vec{e}_z \times \nabla \left\{ \frac{K_3}{K} \vec{e}_z \times \vec{E}_1 - \frac{i}{K} \nabla_1 E_z \times \vec{e}_z \right\} + \frac{i}{K} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z =$$

$$= \frac{K_3}{K^2} E_1 + \frac{i}{K^2} K_3 \nabla_1 E_z + \frac{i}{K} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_1 \left(1 - \frac{K_3^2}{K^2}\right) = \vec{E}_1 \frac{K^2 - K_3^2}{K^2} = \vec{E}_1 \frac{K_1^2}{K^2} \quad \vec{E}_1 = \frac{i K_3}{K_1^2} \nabla_1 E_z + \frac{i K}{K_1^2} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z$$

$$\vec{H}_1 = \frac{i K_3}{K_1^2} \nabla_1 H_z - \frac{i K}{K_1^2} \nabla_1 E_z \times \vec{e}_z$$



$$\nabla_1 \times \vec{H}_1 = \frac{i K_3}{K_1^2} \nabla_1 \times (\nabla_1 H_z) - \frac{i K}{K_1^2} \nabla_1 \times (\nabla_1 E_z \times \vec{e}_z) = \frac{i K}{K_1^2} \vec{e}_z \Delta_1 E_z =$$

$$= -i K E_z \vec{e}_z$$

$$\Delta_1 E_z + K_1^2 E_z = 0, \quad E_z \Big|_L = 0$$

оборачиваемся

$$\nabla_1 \times \vec{E}_1 = \nabla_1 \times \left\{ \frac{i K_3}{K_1^2} \nabla_1 E_z + \frac{i K}{K_1^2} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z \right\}$$

$$\nabla \frac{\Delta_1 H_z + K_1^2 H_z = 0}{\text{мы считаем}}$$

$$\vec{e} \cdot \vec{E}_1 \Big|_L = 0 = \vec{e} \cdot \left\{ \frac{i K_3}{K_1^2} \nabla_1 E_z + \frac{i K}{K_1^2} \nabla_1 H_z \times \vec{e}_z \right\} \Big|_L =$$

$$= \frac{i K_3}{K_1^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \Big|_L + \frac{i K}{K_1^2} \underbrace{(\vec{e} \times \vec{e}_z)}_{\vec{n}} \nabla_1 H_z \Big|_L =$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_L = 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_1 \Big|_L = 0$$

$$E_z = 0, \quad H_z = 0, \quad \text{а } \vec{E}_1, \vec{H}_1 \neq 0 \quad \text{исход. уравнение } K_1 = 0, \text{ т.е. } K = K_3$$

$$\boxed{v_g = c}$$

$$1) \nabla_1 \times \vec{E}_1 = 0 \quad K_3 = K \quad \left\{ \vec{H}_1 = \vec{e}_z \times \vec{E}_1 \right.$$

из ука. $\text{div } \vec{E} = 0$ найдем $\nabla_1 \vec{E}_1 = 0$ hence получим эту сист. ур-н

$$\vec{E}_1 = -\nabla_1 \psi \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 \psi = 0 \\ \psi|_L = \text{const} \end{array} \right. \rightarrow \text{задача Дирихле}$$

if поверхность односвязная, то получ. то есть т. поверхность $\psi = \text{const}$ будет

потому $E_1 = 0$ (макс. поле не существует)

$$2) \nabla_1 \times \vec{H}_1 = 0 \quad \text{из } \text{div } \vec{H} = 0 \quad \nabla_1 \vec{H}_1 = 0 \quad \vec{H}_1 = \nabla_1 \psi \quad \Delta_1 \psi = 0$$

$$n H_1|_L = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial n}|_L = 0 \\ \Delta_1 \psi = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{задача Неймана}$$

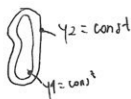
для односвязной поверхности $\psi = \text{const}$, $\vec{H}_1 = 0$,

$$\vec{E}_1 = -\vec{e}_z \times \vec{H}_1$$

в односвязной обл. попер. поля не существует

для связной поверхности и >

одна поверхность является в группе



I ТЕМ- волны ($E_z = 0, H_z = 0$) $v_{гр} = c$

II тип волн Е-волна (ТН-волна) ($E_z \neq 0, H_z = 0$)
поперечная волна

$$\Delta_{\perp} E_z + k_1^2 E_z = 0, \quad E_z|_L = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\perp} = \frac{ik_3}{k_1^2} \nabla_{\perp} E_z \\ \vec{H}_{\perp} = -\frac{ik}{k_1^2} \nabla_{\perp} E_z \times \vec{e}_z \end{array} \right.$$

Е-волна 1-й мн.
ускорителей

III. Н-волна (ТЕ-волна, $H_z \neq 0, E_z = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\perp} H_z + k_1^2 H_z = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_L = 0 \\ \vec{H}_{\perp} = \frac{ik_3}{k_1^2} \nabla_{\perp} H_z \\ \vec{E}_{\perp} = \frac{ik}{k_1^2} \nabla_{\perp} H_z \times \vec{e}_z \end{array} \right.$$

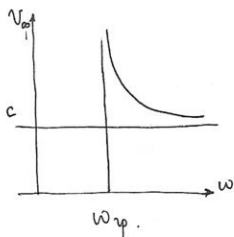
Найдем фазов. скор.-распростр. волны

$$K_3^2 = K^2 - K_1^2 \quad K_3 = \frac{\omega}{v_{гр}}, \quad K = \frac{\omega}{c}, \quad K_3 > 0 \quad K_3^2 = K^2 - K_1^2 > 0$$

$$\frac{\omega^2}{v_{гр}^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{гр}^2}{c^2} \rightarrow v_{гр} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{гр}}{\omega}\right)^2}}$$

$$\frac{\omega_{гр}}{c} = K_1$$

равнение (предельно
большая малая
частота, кот.
можно проп.)



$$K_1 - \text{задание} \rightarrow K_3 dk_3 = k dk$$

$$\frac{dk}{dk_3} = \frac{k_3}{K} \rightarrow \frac{1}{c} \frac{d\omega}{dk_3} = \frac{\omega}{\omega_{гр}} \quad \text{р.ф.}$$

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk_3} = c^2 \frac{1}{v_{гр}}$$

$$\omega = \omega_{\varphi}, \quad \nabla \varphi = 0, \quad \nabla \varphi = 0$$

$$\nabla \varphi = \frac{c^2}{\nabla \varphi}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \nabla \varphi \rightarrow c, \quad \nabla \varphi \rightarrow c$$

Период энергии при попер. сечении

поток эвр.
при попер.
ср. сечении

$$\Pi = \int_S \bar{S}_z^T ds^{\frac{2\pi}{\omega}}, \quad \bar{S}_z = \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{E} \times \vec{H}^*)_z =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \text{Re} \{ (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \times \vec{E}_2) \times (\vec{H}_1^* + \vec{E}_2 \times \vec{H}_2^*) \}_z =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \text{Re} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*)_z$$

E-волна: $\text{Re} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*)_z = \text{Re} \left\{ \frac{iK_3}{K_1^2} \nabla_1 E_2 \times \frac{iK_1}{K_1^2} (\nabla_1 E_2^* \times \vec{e}_z) \right\}_z =$

$$= \frac{K K_3}{K_1^4} |\nabla_1 E_2|^2$$

H-волна: $\text{Re} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*)_z = \frac{K K_3}{K_1^4} |\nabla_1 H_2^2|$

$$\Pi = \frac{CK K_3}{8\pi K_1^4} \int_S |\nabla_1 f|^2 ds \rightarrow \text{для E волны } f = E_2$$

H волны $f = H_2$

$$\int_S |\nabla_1 f|^2 ds = \int_S (\vec{e}_z \times \nabla_1 f^*) (\vec{e}_z \times \nabla_1 f) ds = \int_S (d\vec{S} \times \nabla_1) f^* (\vec{e}_z \times \nabla_1 f) =$$

$$\vec{e}_z \cdot d\vec{S} = d\vec{S} = \int_S (d\vec{S} \times \nabla_1) f^* (\vec{e}_z \times \nabla_1 f) - \int_S ds f^* (\vec{e}_z \times \nabla_1) (\vec{e}_z \times \nabla_1 f) =$$

$$\left\{ \int_S (d\vec{S} \times \nabla_1) \dots = \oint_{\text{замкнутой контуры}} d\vec{r} \dots \right\} \text{Особый теор. Стокса} \left\{ \int_S ds f^* (\vec{e}_z \times \nabla_1) f - \int_L dl \vec{e}_z f^* (\vec{e}_z \times \nabla_1) f - \int_{\text{замкн. контуры}} \right\}$$

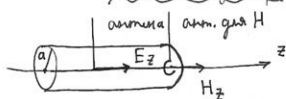
$$- \int_S ds f^* \Delta_1 f$$

$$= \oint_L f^* (\vec{r} \times \vec{e}_z) \cdot \nabla f + k_1^2 \int_S |f|^2 dS = \oint_L f^* \frac{\partial f}{\partial n} + k_1^2 \int_S |f|^2 dS$$

для E-волны

$$\Pi^E = \frac{CKK_3}{8\pi k_1^2} \int_S |E_z|^2 dS \quad \Pi^H = \frac{CKK_3}{8\pi k_1^2} \int_S |H_z|^2 dS$$

Волновой круговой волновод:



возбуждение произв. с помощью антенны

E-волна в цилиндрич. волноводе

$$\Delta_\perp E_z(r, y) + k_1^2 E_z(r, y) = 0$$

$$E_z(r, y) = R(r) \varphi(y) \quad \varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_1^2 R \varphi = 0 \quad \left| \frac{r^2}{R \varphi} \right.$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + k_1^2 r^2 = 0$$

2 уравнения: $\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -m^2 \text{ (const)} \quad \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + m^2 \varphi = 0$, реш.-е:

$\frac{R}{r^2}$ гл. группы слагаемых:

$$\varphi(y) = A_1 \cos my + B_1 \sin my$$

выбрав нулевое по y реш.-е

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k_1^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad \text{уп.-е Бесселя.}$$

нак. уравнение б.ч.-е реш.-е э.м. уп.-а

$$R(r) = A_2 J_m(k_1 r) + B_2 N_m(k_1 r)$$

но на ос. волновода $r=0$

$\downarrow$
ф. Бесселя

$\downarrow$
ф. Неймана

беск. ф.-уны

$N_m(k_1 r) \rightarrow \infty$, тогда не должно
 $r \rightarrow 0$ ∞ поля $\rightarrow B_2 = 0$

$$E_z(r, \varphi) = E_{0z} J_m(k_1 r) \cdot \cos m\varphi$$

$$J_m(k_1 a) = 0$$

$$k_1 a = \alpha_{mn}$$

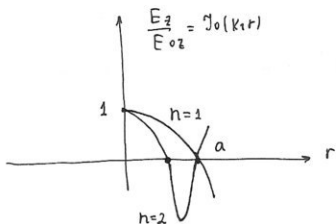
Как корни ф-ции Бер.

приводит к различным
различных колебаний

α_{mn} - n -ый корень ф. Бесселя
m-го порядка

$$\underline{m=0} \quad E_z = E_{0z} \cdot J_0(k_1 r)$$

$$J_0(k_1 a) = 0 \quad \alpha_{0n} = k_1 a$$



$$1) \quad n=1 \quad J_0(k_1 r) = J_0\left(k_1 a \frac{r}{a}\right) = J_0(\alpha_{01} \frac{r}{a})$$

max на оси поля (при $r=0$)
монотонно падает

$$2) \quad n=2 \quad J_0(k_1 r) = J_0\left(k_1 a \frac{r}{a}\right) = J_0\left(\alpha_{02} \frac{r}{a}\right) = J_0\left(\underbrace{\alpha_{01}}_{\approx 1} \cdot \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}} \cdot \frac{r}{a}\right) = J_0(\alpha_{01})$$

$$\alpha_{02} > \alpha_{01}$$

$$\text{при } r < a$$

$$K_1 = \frac{\omega a}{c}$$

$$r = a \frac{\alpha_{01}}{\alpha_{02}} \quad \text{при}$$

Колебания радиальных полей

направл. эл. поля в E-волне направл. по оси

Пустой волновод не работает для ускор. частицы (т.к. $\nabla\varphi > c$)

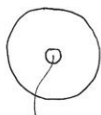
в ускорительной фазе поле замедлит частицу, волна обгоняет частицу
- ускор. нет. (скор. част. $< c$, $\nabla\varphi > c$), част. попад. в замедл. фазу
замедл.-е $\rightarrow$ ускор. $\rightarrow$ замедл. (ускор. нет)

Волноводы радиальных волн

$$\boxed{\nabla\varphi < c}$$

Как построить такой
волновод?

Волновод медленных волн $v_{\varphi} < c$



сплошной диэл. не годится
сечение волновода

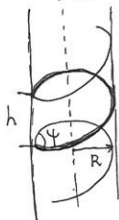
это дорого

гирка частицы осаждались на стенках и "затирали волновод"

Изнутри покрыл отверстие от точки проводником (золото)

(чтобы скин-эфф почти отсутств.) осаждающиеся частицы уходят

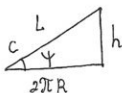
Спиральный волновод:



ψ - угол намотки

или h

развернет на плоскости:



v_{φ}

$$L = ct \quad h = v_{\varphi} \cdot t$$

$$\sin \psi = \frac{h}{L} = \frac{v_{\varphi}}{c} < 1$$

вдоль оси волновода волна будет
распростр. со скор. $< c$

Применяется и сейчас

$$\beta = \frac{v}{c} < 0,5 \quad \text{при больших скор.} \\ \text{прям. излучение}$$

- 3) МГ момент ед V в-ва.
- 4) Связь E, D, B, M...
- 6) Ур-я электростатики.
- 7) Основ задача электростатики.
- 8) Сила, действ на ед объема в неогр поле.
- 8) Электростат поле, созд зар. met поверхн.
- 9) Проводящая цилиндрическая поверхность.
- 9) Емкость уединенного проводника.
- 10) Сисиема заряженных проводников.
- 10) Емкость слоистых конденсаторов.
- 11) Цилиндрический конденсатор.
- 13) Теорета единственности решения эл стат задач.
- 14) Метод отражения.
- 15) Распределение поверхностных зарядов в проводнике.
- 15) После в лиэл, если рядом заряд.
- 16) Не заряд met шар.
- 17) Бесконечн диэл со сферич полостью.
- 19) Законы Кирхгофа.
- 20) Магнитное поле постоянного тока.
- 22) Поле, зоздаваемое замкнутым проводником.
- 24) Самоиндукция соленоида.
- 25) Эффект Холла.
- 25) Массивный проводник в перем мг поле.
- 28) Токи Фуко, глубина проникнов перем поля в проводн.
- 33) Эл-мг волны в среде.
- 38) Дисперсия света.
- 41) Тензор Максвела.
- 43) Распространение волны в однородн изотропн среде.
- 46) 3-а сохранения энтропии в прозрачных средах.
- 51) Эффект Черенкова-Вавилова.
- 57) Волноводы.
- 62) Волновод кругового сечения.
- 63) Волновод медленных волн.
- 64) Спиральный волновод.