

3A #1: #11, #5, #7)

0 #2: #1.12, #1.15

0 #3: #1.20, #1.25, #1.23

0 #4: #1.29, #

0 #5: 30900 #1

0 #6: #2.416, #2.6

0 #7: #2.20, #2.22

0 #8: 30900 продвинуто

0 #9: #3.416, #3.3, #3.7

0 #10: #3.13, #3.1216)

0 #11: #3.26, #3.20, #3.38

0 #12:

чл { 13:10-13:55
14:05-15:50

нм { 12:20-13:05
13:10-13:55

КВАНТЫ

Порошкин
Дмитрий
Николаевич

tuturnik@gmail.com

Трастуха #1

#1.1/a, b/

a) $\hat{I}\psi(x) = \psi(1-x)$

b) $M_c \psi(x) = \sqrt{c} \psi(cx) /$
оператор масштабирования

$\hat{I}(a\psi + b\varphi) = a\hat{I}\psi + b\hat{I}\varphi$ - линейны

$\psi \in \mathcal{L}$
 $\int |\psi|^2 dg \leq \infty$ - конечен/сходится = N

$\int |\psi|^2 dg = 1$ - нормирован

$(ab) = \sum a_i b_i = \int \underbrace{a(\tau)}_{\text{дискретный оператор}} \underbrace{b(\tau)}_{\text{непрерывный оператор}} d\tau$

$(aa) \rightarrow \int \bar{a}(\tau) a(\tau) d\tau$
if действительные числа
if комплексные числа

$(a \hat{A} b) \Rightarrow \int \bar{a}(\tau) \hat{A} b(\tau) d\tau$

$\hat{A} = \sum \hat{A}_i$ - матрица элемент
разложения по базису

12.02.16

$$a = \sum a_i \hat{e}_i$$

$$b = \sum b_i \hat{e}_i = \sum \bar{a}_i b_j \underbrace{\int \hat{e}_i \hat{A} \hat{e}_j d\tau}_{A_{ij}}$$

$$|a, \bar{A}b| = \int \bar{a}(\tau) \hat{A} b(\tau) d\tau =$$

$$= \int (\hat{A}^T \bar{a}(\tau)) \cdot b(\tau) d\tau =$$

$$= \int (\hat{A}^T a(\tau))^* \cdot b(\tau) d\tau = \int (\hat{A}^+ a(\tau)) b(\tau) d\tau$$

~~# 1.1~~

~~$$\hat{I} \psi(x) = \psi(-x)$$~~
~~$$M_c \psi(x) = \sqrt{c} \psi(cx)$$~~

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}_2(x) \hat{I} \psi_1(x) dx =$

$$\int \bar{\psi}_2 \hat{A} \psi_1 dx = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle = A_{21}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}_2(x) \psi_1(-x) dx = \int \bar{\psi}_2(-y) \psi_1(y) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{I} \bar{\psi}_2(y)] \psi_1(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{I} \hat{\psi}_2(y))^* \psi_1(y) dy$$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}_2(x) \hat{M}_c \psi_1(x) dx =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}_2(x) \sqrt{c} \psi_1(cx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}_2\left(\frac{y}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{c}} \psi_1(y) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (M_c^T \bar{\psi}_2(y))^* \psi_1(y) dy \Rightarrow M_c^T \bar{\psi}_2(y) = \frac{1}{\sqrt{c}} \bar{\psi}_2\left(\frac{y}{c}\right)$$

$$M_c^T = M_c^{\dagger} \Rightarrow M_c^T = M_c^{\dagger} \neq M_c^+$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (M_c^T \bar{\psi}_2(y))^* \psi_1(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (M_c^+ \bar{\psi}_2(y))^* \psi_1(y) dy$$

1.2 a)

Задача: найти каноническое сопряжение, оператор $\hat{p}$ — оператор

Преобразование оператора:

$$\psi(x+a) = \sum \frac{\psi^{(n)}(x)}{n!} a^n = \left(\sum \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \right) \psi(x) =$$

$$= e^{a \frac{d}{dx}} \psi(x)$$

$$\psi(x+a)$$

Нахождение обратного оператора

a) $\hat{I} \psi(x) = \psi(-x)$

b) $M_c \psi(x) = \sqrt{c} \psi(cx)$

b) $\hat{p} = i \frac{d}{dx}$

$$\hat{A} \hat{A}^{\dagger} = 0$$

$$\hat{A} \hat{A}^{\dagger} = 1$$

a) $\hat{I}(\hat{I} \psi) = \hat{I} \psi(-x) = \psi(x) \Rightarrow \hat{I}^{-1} = \hat{I}$

b) $\hat{p} \psi = g$

$$\psi = \hat{p}^{-1} g$$

$$i \frac{d\psi}{dx} = g \Rightarrow \psi = -i \int g dx = \hat{p}^{-1} g$$

$$\begin{aligned}
 \text{В)} \quad M_c^T &= M_{1/c} \\
 M_{1/c} M_c &= M_c^T M_c = \\
 M_{1/c} M_c \psi(x) &= M_{1/c} \sqrt{c} \psi(cx) = \\
 &= \sqrt{c} M_{1/c} \psi(cx) = \sqrt{c} \frac{1}{\sqrt{c}} \psi\left(\frac{x}{c}\right) = \psi(x)
 \end{aligned}$$

$$\hat{M}_c^{-1} = \hat{M}_{1/c}$$

$$\hat{M}_{1/c} \hat{M}_c = 1$$

10. Практика #2

#18

Покажите, что выполняется закон дисперсионности.

$$\begin{aligned}
 &A_i, B_i \\
 &\sum_{i=1}^n A_i, \sum_{i=1}^n B_i \quad \text{показать, что } [\sum_{i=1}^n A_i, \sum_{i=1}^n B_i] = \\
 &\quad = \sum_{i=1}^n [A_i, B_i]
 \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n A_i \sum_{j=1}^n B_j - \sum_{j=1}^n B_j \sum_{i=1}^n A_i &= \sum_{i,j} A_i B_j - \sum_{j,i} B_j A_i = \\
 &= \sum_{i,j} (A_i B_j - B_j A_i) = \sum_{i,j} [A_i, B_j]
 \end{aligned}$$

#1.10 Доказать тождество Якоби:

3 и коммутационный оператор:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

Решение:

$$\Delta [A, [B, C]] = [A, BC - CB] =$$

$$= A(BC - CB) - (BC - CB)A =$$

$$= \cancel{ABC} - \cancel{ACB} - \cancel{BCA} + \cancel{CBA}$$

$$[B, [C, A]] = [B, CA - AC] =$$

$$= B(CA - AC) - (CA - AC)B =$$

$$= \cancel{BCA} - \cancel{BAC} - \cancel{CAB} + \cancel{ACB}$$

$$[C, [A, B]] = C(AB - BA) =$$

$$= C(AB - BA) - (AB - BA)C =$$

$$= \cancel{CAB} - \cancel{CBA} - \cancel{ABC} + \cancel{BAC}$$

0

▲

$$A 1.12(a)$$

$$F(\hat{f}) = \sum_n i \alpha_n \hat{f}^n \quad \text{p-ol op}$$

$$F(z)/z \in \mathbb{R} = \sum_n i \alpha_n z^n \quad \text{oneirofa}$$

$$e^{i \hat{J}} \quad ? \quad \hat{J} \psi(x) = \psi(-x)$$

$$L \in \mathbb{R}$$

Решение:

$$\hat{U} = e^{i \hat{E}}$$

$$\det \hat{U} = e^{i \text{Sp } \hat{E}} \quad \left[\hat{U} = e^{i \hat{H} \beta} \right] = e^{i \text{Sp } \hat{H} \beta}$$

преобразуем в канонический базис с помощью

$$(A_x, A_y) = (x, A_y)$$

$$(x, y) = (B_x, B_y)$$

$$\text{Преобразуем оператор } \hat{U} = e^{i \hat{J}}, L \in \mathbb{R}$$

$$e^{i \hat{J}} / L \in \mathbb{R} = e^{\hat{J}}$$

$$= 1 + X + \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{X^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

$$e^{i \hat{J}} = \sum_n \frac{(i \hat{J})^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i (-1)^n L^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \cos L + i \hat{J} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{i \hat{J} \sin L + \cos L} = e^{i \hat{J} L}$$

$$= i \hat{J} \sin L + \cos L = i \hat{J} 0 + 1 = 1$$

1.

$e^{iL} = \cos L + i \sin L$
монотонно убывает
с ростом L и $\cos L$

$$e^{i \vec{L} \vec{\sigma}}; \quad \vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$$

$$e^{i \vec{L} \vec{\sigma}} = \cos L + i \frac{\vec{L}}{L} \vec{\sigma} \sin L$$

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} - \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]}$$

$$[A, [A, B]]$$

$$\begin{cases} i^{2k} = (-1)^k \\ i^{2k+1} = (-1)^k i \\ \hat{J}^{2k} = \left(\frac{\hat{J}}{L} \right)^{2k} = 1 \\ \hat{J}^{2k+1} = \frac{\hat{J}}{L} \end{cases}$$

1.13

$$(\hat{A} - \lambda \hat{B})^{-1} / \lambda \ll 1 \quad (=)$$

Получить степенной ряд для этого
сначала по λ ...

$$\textcircled{1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{a}_n = (\hat{A} - \lambda \hat{B})^{-1} / \lambda \ll 1$$

Разложим в ряд по $(\hat{A} - \lambda \hat{B})$

$$(\hat{A} - \lambda \hat{B})(\hat{A} - \lambda \hat{B})^{-1} = (\hat{A} - \lambda \hat{B}) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{a}_n$$

$$1 = (\hat{A} - \lambda \hat{B}) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{a}_n \quad \Rightarrow$$

$$\hat{A} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{a}_n - \hat{B} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{a}_n = 1$$

и заметим что $\lambda \rightarrow \sum \lambda^n = 0$ и то что

$$\hat{A} \hat{a}_0 = 1$$

$$n=3: \hat{A} \lambda^3 \hat{a}_3 = \hat{B} \lambda^2 \hat{a}_2 \Rightarrow$$

$$\hat{A} \hat{a}_3 = \hat{B} \hat{a}_2$$

$$\hat{a}_{n+1} = \hat{B} \hat{a}_n \Rightarrow \boxed{\hat{a}_{n+1} = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{a}_n}$$

$$\hat{a}_0 = \hat{A}^{-1}$$

$$\hat{a}_1 = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1}$$

$$\hat{a}_2 = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} (\hat{B} \hat{A}^{-1})^2$$

$$\hat{a}_n = \hat{A}^{-1} (\hat{B} \hat{A}^{-1})^n$$

$$\hat{A}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\hat{B} \hat{A}^{-1})^n$$

#1.1

Б) свойство: $\hat{T}_a: \hat{T}_a \psi(x) = \psi(x+a)$

✓ $\overline{T_a}(a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x)) = a_1 \overline{T_a} \psi_1(x) + a_2 \overline{T_a} \psi_2(x)$ линейность

$$\checkmark \hat{T}_a^* \psi^*(x) = \psi^*(x+a) \Rightarrow \hat{T}_a^* \psi(x) = \psi(x-a)$$

$$Ta^* = Ta$$

Комплексное сопряжение

$$\checkmark \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^* T_a \psi_1 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^*(x) \psi_1(x-a) dx = \begin{cases} x+a \rightarrow x' \\ x \rightarrow x'-a \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x) \psi_2^*(x) dx = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

Трансформации

$$T_a = T_{-a}$$

$$\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} = \frac{1}{T_c}$$

$$\checkmark T_a \psi_n(x) = \psi_n(x+a) = T_{-a} \psi_n(x)$$

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \tan \hat{T}_a^{-1} \psi_n(x) \\ \tan \psi_n(x) = \psi_n(x+a) \end{cases}$$

Обратный оператор

$$\cdot \tan \psi_n(x) = \psi_n(x+a)$$

$$\tan \psi_n(x+0-a) = \psi_n(x+a)$$

$$\hat{T}a^{-1}\psi_n(x) = \psi_n(x-a)$$

$$\int \tan \psi_2(x-a) = \psi_n /$$

$$\frac{1}{T_a} = \frac{1}{T_a}$$

$$г) \hat{K}\psi(x) = \psi^*(x)$$

комплексное сопряжение:

$$\checkmark \quad K^* \psi^*(x) = \psi(x) = (\psi^*(x))^* \Rightarrow K^* = K$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^* \hat{K} \psi_1 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^* \psi_1 dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \psi_1^* dx \right]^* = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1 \psi_2^* dx \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x) \hat{K} \psi_2^* dx \Rightarrow \hat{K}^\dagger = \hat{K} \end{aligned}$$

$$\hat{K}\psi_n(x) = K_n\psi_n(x) = \psi_n^*(x)$$

$$\psi_n(x) = K_n K_n^{-1} \psi_n(x)$$

$$K_n \psi_0(x) = \psi_n^*(x)$$

$$K_n / \psi_n^*(x)^* = \psi_n^*(x) \Rightarrow K_n^{-1} = K_n$$

#12. Для указанных ниже операторов
найти оператор, который по отношению
к ним является транзитивным,
коротко связанным, рефлексивным,
симметричным, антисимметричным.

б) $\rho = i\delta r$, r — радиальная переменная сферической системы координат ($0 \leq r \leq \infty$)

$$i \frac{\partial}{\partial r} \psi^* = \hat{p}^* \psi$$

$$\hat{p}^* = -\hat{p}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \psi_2(r) \hat{p} \psi_1(r) dr &= \int_0^{+\infty} \psi_2^*(r) i \frac{\partial}{\partial r} \psi_1(r) dr = \\ &= i \int_0^{+\infty} \psi_2^* d\psi_1 = i \psi_2^* \psi_1 \Big|_0^{+\infty} - i \int_0^{+\infty} \psi_1 d\psi_2^* = \\ &= i \psi_2^* \psi_1 \Big|_0^{+\infty} - i \int_0^{+\infty} \psi_1 \frac{\partial}{\partial r} \psi_2 dr \end{aligned}$$

$$\hat{p}^* = -\hat{p}$$

$$\hat{p}^* = \hat{p}$$

#13

Для произвольного линейного оператора показать следующие:

а) оператора $\hat{L} + \hat{L}^*$ и $i(\hat{L} - \hat{L}^*)$ эрмитовы

$$\Delta \hat{L} + \hat{L}^* = \hat{L}^* + \hat{L} = (\hat{L} + \hat{L}^*)^* = (\hat{L} + \hat{L}^*)^* \quad \blacktriangle$$

$$\Delta [i(\hat{L} - \hat{L}^*)]^* = \overset{\text{от противоположно}}{-i} [\hat{L}^* - \hat{L}]^* = -i(\hat{L}^* - \hat{L}) = i(\hat{L} - \hat{L}^*) \quad \blacktriangle$$

#14

Показать, что если оператор $\hat{G}$ эрмитов, то оператор $\hat{G} = \hat{A} \hat{G} \hat{A}^*$ также является эрмитовым

$$\hat{G} = \hat{A} \hat{G} \hat{A}^*$$

$$\Delta \hat{G}^* = [\hat{A}^* \hat{G}^* \hat{A}^{**}]^T = \hat{A}^{**} \hat{G}^* \hat{A}^* = -\hat{A} \hat{G} \hat{A}^* \quad \blacktriangle$$

#15

Показать, что произвольный оператор $\hat{F}$ можно представить в виде $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$, где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — эрмитовы операторы

$$\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$$

$$\hat{F}^* = \hat{A}^* - i\hat{B}^*$$

Предположим, $\hat{A} = \frac{\hat{F} + \hat{F}^*}{2}$ тогда

$$\begin{aligned} \hat{A}^* &= \frac{\hat{F}^* + \hat{F}^{**}}{2} = \frac{\hat{F}^* + \hat{F}}{2} = \frac{\hat{F} + \hat{F}^*}{2} = \hat{A} \Rightarrow \hat{A} \text{ — эрмитов} \\ \hat{B} &= \frac{\hat{F} - \hat{F}^*}{2i} \Rightarrow \hat{B}^* = \frac{\hat{F}^* - \hat{F}^{**}}{-2i} = \frac{\hat{F} - \hat{F}^*}{2i} = \hat{B} \Rightarrow \hat{B} \text{ — эрмитов} \end{aligned}$$

#16

Показать, что если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — эрмитовы, то операторы $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ и $i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ также эрмитовы

$$(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^* = \hat{B}^* \hat{A}^* + \hat{A}^* \hat{B}^* = \hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \Rightarrow \text{эрмитов}$$

$$[i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})]^* = -i(\hat{B}^* \hat{A}^* - \hat{A}^* \hat{B}^*) = i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = \text{эрмитов}$$

Практика №2

Волны де Бройля:

$$\psi(x,t) \sim e^{\frac{i}{\hbar}(p x - E t)}$$

$$|\psi|^2 \sim D$$

$|\psi(x,t)|^2 dx$ - вероятность = 1
сумма по всем... (условия нормировки)

p и E заданы $\Rightarrow$

Дискретизация коэффициентов - бесконечность

$e^{\frac{i}{\hbar} p x}$ - пространственная зависимость

$$C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_1 x} + C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_2 x} + \dots = \int C(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dp \rightarrow \text{разложение}$$

вид волновой ф-ии - суперпозиция:

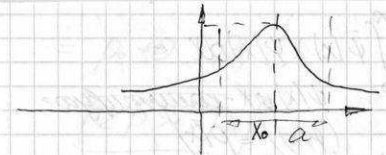
$$\psi(x) \sim \int C(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} \frac{dp}{2\pi\hbar} - \text{волновой пакет!} \rightarrow \text{гармоника}$$

$C(p)$ - гармоника распределена

$$C(p) \sim e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(p-p_0)^2} \quad \sigma^2 - \text{форма пакета}$$



$$\psi(x) = C e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(p-p_0)^2}}{2\pi\hbar} |\psi(x)|^2 dx$$



Амплитуда определяется $C^2 = A$

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2$$

$$\rho(x) = C^2 \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \right]$$

C^2 - значение наибольшей вероятности

1.19

Для волнового пакета найти дисперсию ф-ию распределенного вероятности, среднее значение

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx = a C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy =$$

$$= a C^2 \sqrt{\pi}$$

дисперсия - среднее от квадрата отклонения

$$C = \sqrt{\frac{1}{a\pi}}$$

$$\rho(x) = \frac{1}{a\pi} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \right] \quad \text{вероятность} \rightarrow \text{нормировка}$$

Найдем дисперсию:

$$\int \psi(x) \hat{p} \psi(x) dx \rightarrow \int \psi(p) p \psi(p) dp$$

по def: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(x) x \psi(x) dx =$
 $\psi(x)$ — волновая функция
 $(\psi(x))^2 = \rho(x)$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} x dx =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/a^2} (y+x_0) dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/a^2} y dy + x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/a^2} dy \right] =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} x_0 a\sqrt{\pi} = x_0$$

$$\boxed{\langle X \rangle = x_0}$$

Посчитаем средний импульс:

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(x) \hat{p} \psi(x) dx = -\frac{i\hbar}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \frac{d}{dx} \left[e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} \right] dx =$$

$$= -\frac{i\hbar}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \frac{d}{dx} \left[e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} \right] dx =$$

$$= -\frac{i\hbar}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \left[\frac{i p_0}{\hbar} - \frac{x-x_0}{a^2} \right] dx =$$

$$= -\frac{i\hbar}{a\sqrt{\pi}} \frac{i p_0}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx + \frac{i\hbar}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \frac{x-x_0}{a^2} dx =$$

м.к. симметричной
 и нечетной

$$= p_0 + 0 = p_0$$

$$\boxed{\langle p \rangle = p_0}$$

Найдем дисперсию:

$$\Delta \bar{f}^2 = \bar{f}^2 - \bar{f}^2 \quad \text{— по def}$$

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho(x) dx$$

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} x^2 dx \frac{1}{a\sqrt{\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/a^2} y^2 dy \frac{1}{2\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x d \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \left[x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \left[x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \right) \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/a^2} (y+x_0) dy =$$

$$= x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/a^2} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/a^2} y dy =$$

$$x_0 a\sqrt{\pi} - a^2 e^{-\frac{y^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \left[x(x_0 \int e^{-y^2/a^2} dy - \frac{a^2}{2} e^{-y^2/a^2}) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[x_0 \int e^{-y^2/a^2} dy - \frac{a^2}{2} e^{-y^2/a^2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \int e^{-y^2} dy = 0$$

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[x_0 \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx - \frac{a^2}{2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{a^2}{2} a\sqrt{\pi} - \frac{x_0}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx =$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{x_0}{a\sqrt{\pi}} \left[x \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[a e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} x \right] dx = \frac{a^2}{2} + x_0^2 \quad \therefore$$

Дискретизация:

$$\Delta x^2 = a^2/2 \quad (\text{минимум неопределенности})$$

$$\Delta p^2 \sim \Delta x^2 \quad \text{из принципа неопределенности!}$$

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \quad \Delta p^2 \sim \frac{\hbar^2}{a^2}$$

1.22

Доказать, что L^+ имеет в операторном смысле обратный L^- — минимальный оператор

$$\text{Док-во: } \bar{L}L^+ = \int \bar{\psi}(x) L^+ \psi(x) dx \geq 0.$$

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \int \bar{\psi}(x) \hat{A} \psi(x) dx = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \\ \psi(x) = \langle x | \psi \rangle \\ \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{1} | \psi \rangle = \\ = \langle \psi | U^{-1} U | \psi \rangle = \\ (U^{-1} \psi | U \psi) \end{array} \right.$$

$$\Delta \int \bar{\psi}(x) L^+ \psi dx = \int \bar{\psi}(x) dx$$

$$= \int L^+ \bar{\psi}(x) \psi dx = \int (L^+ \bar{\psi})^* \psi dx =$$

$$= \int (L^+ \bar{\psi})^* \psi dx = \int \bar{\psi}^* \psi dx =$$

$$= \left[\int \bar{\psi}^* \psi dx \geq 0 \right] !!!$$

#

$$L^+ L \geq 0$$

 φ

$$\int \bar{\varphi}(r) L^+ (L \varphi(r)) dr \geq 0$$

$$\int \bar{\varphi}(r) L^+ \varphi dr \geq 0$$

$$\int L^+ \bar{\varphi} \varphi dr \geq 0$$

$$\int \overbrace{(L^+)^*}^L \varphi(r) \varphi dr \geq 0$$

$$\int \varphi^2 dr \geq 0$$

#

$$\hat{f}^2 = c \hat{f}$$

$$\hat{f}(\hat{f}\varphi) = c \hat{f}\varphi$$

$$\hat{f}^2 \varphi = c \hat{f}\varphi$$

$$f^2 = c$$

$$f = 0, f = c$$

$$f \in \mathbb{C} \text{ — const}$$

Дано: # 1.29, # 1.31 (Б)

05.03.

Тренировка #4

1.27

Оператор $\hat{f}$, N -собственнозначенПоказать, что $\hat{f}^N$ выражается через $\hat{f}, \hat{f}^2, \dots, \hat{f}^{N-1}$
и рассмотреть ~~то~~ эрмитов оператор.Решение:Покажем, что они во вместе образуют линейно независимую систему из N векторов.Пусть $\hat{f}^N$ есть N -кратное значение
всех операторов.

$$\hat{f}^N = \sum_{i=0}^{N-1} C_i \hat{f}^i$$

Подставим по формуле собственного значения φ и получим:

$$\begin{aligned} \hat{f}^N \varphi &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} C_i \hat{f}^i \right) \varphi \\ &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} C_i f^i \right) \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^N &= \sum_{i=0}^{N-1} C_i f_1^i \rightarrow \text{получили уравнение} \\ f_2^N &= \sum_{i=0}^{N-1} C_i f_2^i \\ &\vdots \\ f_n^N &= \sum_{i=0}^{N-1} C_i f_n^i \end{aligned}$$

Мат. стили

Запишем определитель этой системы:

$$\Delta = \det \|f_i^j\| \neq 0 \quad \text{if } f_i \neq f_j$$

$f_i \neq 0$

Найдем C_i представим в нашей форме $\rightarrow$ посмотрели что это действительно существует!

Тогда наша система уравнений:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N-1} C_i f_i = 0} \quad \text{!!! это каноническое} \\ \text{... нулевое собственное значение}$$

Представим наше ур-е в виде:

$$(f-f_1)(f-f_2) \dots (f-f_n) = 0$$

См. предыдущий блок

Итак,

$$\begin{cases} f^3 - C_0 - C_1 f - C_2 f^2 = 0 \\ (f-f_1)(f-f_2)(f-f_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f^3 - \underbrace{(f_1 + f_2 + f_3)}_{C_1} f^2 + \underbrace{(f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)}_{-C_1} f - \underbrace{(f_1 f_2 f_3)}_{C_0} &= 0 \end{aligned}$$

Распишем оператор зеркального отражения

$$\hat{f} = \left[\hat{I} \psi(x) = \psi(-x) \right]$$

А если наоборот $\hat{a} \psi(x) = \psi(x)$

$$\psi_n(x) = I_n^2 \psi_n(x)$$

$$\begin{cases} \hat{I} \psi(x) = \psi(-x) \\ \hat{I} \psi(x) = I_n \psi(x) \end{cases}$$

$$\hat{I} \psi(x) = I_n \psi(x)$$

$$\begin{cases} \hat{I}^2 \psi(x) = \hat{I} \psi(-x) = \psi(x) \\ I^2 \psi(x) = \hat{I} I_n \psi(x) = I_n^2 \psi(x) \end{cases}$$

$$\hat{I}^2 \psi(x) = \hat{I} I_n \psi(x) = I_n^2 \psi(x)$$

$$\hat{f}_n = \hat{I}^2$$

1.31.

В состоянии ψ , величина $\hat{A}$ имеет определенное значение a , а величина $\hat{B}$ имеет определенное значение b .
 $\hat{A}$ коммутирует с $\hat{B}$: коммутируют

Решим:

$$[\hat{A}\psi = A\psi]$$

$$[\hat{B}\psi = B\psi]$$

Пусть A и B не коммутируют

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

В состоянии ψ собственные функции

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi = \hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi =$$

$$= \hat{A}B\psi - \hat{B}A\psi = \hat{A}B\psi - A\hat{B}\psi \neq 0,$$

$$\hat{A}\hat{B}\psi \neq \hat{B}\hat{A}\psi$$

$$\hat{A}\psi \neq A\psi$$

тогда A и B не могут быть A , то
 и значит ψ не является собственным

ψ и является собственным ψ и.

$$\hat{A}\hat{B}\psi \neq \hat{B}\hat{A}\psi$$

$$\hat{B}\hat{A}\psi \neq \hat{A}\hat{B}\psi$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

операторы не коммутируют
 или, наоборот, операторы не коммутируют
 и в состоянии, соответствующем A
 оператор $\hat{B}$ не является собственным

Предположим, что ψ есть собственное состояние

$$\hat{A} = \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$\hat{B} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad [\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

$\psi = \cos x$ - стоячая волна.
 под действием $\hat{B}\psi = \frac{\hbar^2}{2m} \cos x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = -\sin x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = -\cos x$$

$$\hat{B}\psi = \cos x \sim \psi$$

Если оператор коммутирует с оператором, то он имеет собственное значение в данном состоянии

Доца #2

1.125

Оператор $\hat{F}$ вида $\hat{F} = F(\hat{f})$, где $F(x)$ - некоторая функция переменной x , представляемая в виде ряда $F(x) = \sum C_n x^n$, можно понимать как оператор равный $F = \sum C_n \hat{f}^n$. Используя это определение, найти второй вид следующих операторов.

а) $\hat{T}_a = \exp(a \frac{d}{dx})$

$$\hat{F}(x) = \sum C_n x^n$$

$$F(x) = e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

$$\hat{T}_a = \sum a^n \frac{(\frac{d}{dx})^n}{n!} = \sum \frac{a^n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n$$

$$\hat{T}_a \psi(x) = \sum \frac{a^n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \psi(x) = \sum \frac{a^n}{n!} \psi^{(n)}(x) = \psi(x+a)$$

1.14

Доказать следующие соотношения:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

$$e^{\pi \hat{A}} \hat{B} e^{-\pi \hat{A}} = \hat{F}$$

$$\frac{d\hat{F}}{d\pi} = \hat{A} e^{\pi \hat{A}} \hat{B} e^{-\pi \hat{A}} - e^{\pi \hat{A}} \hat{B} \hat{A} e^{-\pi \hat{A}} =$$

$$= e^{\pi \hat{A}} [\hat{A}, \hat{B}] e^{-\pi \hat{A}};$$

$$\frac{d^2 \hat{F}}{d\pi^2} = e^{\pi \hat{A}} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] e^{-\pi \hat{A}}$$

$$\frac{d^n \hat{F}}{d\pi^n} = e^{\pi \hat{A}} [\hat{A} [\dots \hat{A} [\hat{A}, \hat{B}]] \dots] e^{-\pi \hat{A}}$$

$$\text{Значит } e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{F}(\pi=1) = \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \hat{F}}{d\pi^n} \right)_{\pi=0}$$

$$= \hat{B} + \frac{1}{1!} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

1.15

В форме интегрального оператора $\hat{L}$ можно рассмотреть как линейный интегральный оператор т.е. $\Phi(\xi) = \hat{L}\Psi(\xi) = \int L(\xi, \xi') \Psi(\xi') d\xi'$, где $L(\xi, \xi')$ ядро оператора $\hat{L}$ (ξ - независимость переменных, представляемых). как ядро оператора $\hat{L}^2, \hat{L}^3, \dots$

связаны с операторами $\hat{L}(\xi, \xi')$, $\hat{L}(\xi, \xi')$?
 Их можно считать операторами $\hat{I}, \hat{U}_c, \hat{T}_a$
 $\hat{x} = x, \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Операторы $\hat{I}, \hat{U}_c, \hat{T}_a$.

$$\begin{cases} \hat{I}\psi(x) = \psi(-x) \\ \hat{U}_c \psi(x) = \psi(cx) \\ \hat{T}_a \psi(x) = \psi(x+a) \end{cases}$$

$$\hat{L}(\xi, \xi') = [\hat{L}(\xi, \xi')]^*$$

$$\hat{L}^T(\xi, \xi') = \hat{L}(\xi', \xi)$$

$$\hat{L}^+(\xi, \xi') = \hat{L}(\xi, \xi')^{+m}$$

$$\hat{U}_c \psi(x) = \psi(cx) = \int_{-m}^{+m} \delta(cx-x') \psi(x') dx'$$

Отсюда: $\hat{U}_c(x, x') = \delta(cx-x')$

$$\hat{I}_c \psi(x) = \psi(-x) = \int_{-m}^{+m} \delta(-x-x') \psi(x') dx'$$

$$\hat{I}_c \psi(x) = \psi(-x) = \int_{-m}^{+m} \delta(-x-x') \psi(x') dx'$$

$$\hat{I}_c(x, x') = \delta(-x-x') = \delta(x+x')$$

$$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x+a) = \int_{-m}^{+m} \delta(x+a-x') \psi(x') dx'$$

$$\hat{T}_a(x, x') = \delta(x+a-x') = \delta(x'-x-a)$$

$$\hat{X}(x, x') = x \delta(x-x') \text{ — это оператор } \hat{x}$$

$$P(x, x') = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') \text{ — это оператор } \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Коммутаторы:

$$[p_i, x_k] \psi = p_i x_k \psi - x_k p_i \psi = 0$$

$$[\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, [\hat{x} = x]]$$

$$\begin{aligned} &= -i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \psi) - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \text{получили нуль} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \sim \partial' \right\} = -i\hbar \left[\frac{\partial x}{\partial x} \psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \\ &= -i\hbar \delta_{ik} \psi \end{aligned}$$

$$([p_i, x_k] + i\hbar \delta_{ik}) \psi = 0$$

$$[p_i, x_k] = -i\hbar \delta_{ik}$$

$$[p_i, q_k] \sim \delta_{ik}$$

$$[p_i, x_k] \sim i\hbar \delta_{ik} \text{ — канонический}$$

$$[A, B] = i, \quad [x, p_x] = i\hbar$$

$$[A, B^2] = AB^2 - B^2A = AB \cdot B - BBA =$$

$$= \cancel{BBA} (BA+i)B - BBA = BAB -$$

$$= BBA + iB = B(AB-BA) + iB =$$

$$= B[A, B] + iB = 2iB$$

$$[p_x, f(x)] = i\hbar \frac{df}{dx}$$

{ #1

$$[A, B^3] = ABBB - BBBA =$$

$$= (BA+i)BB - BBBA =$$

$$= BABB + iBB - BBBA =$$

$$= iB^2 + B(ABB - BBA) =$$

$$= iB^2 + B(\underbrace{(BA+i)B - BBA}_{2iB}) =$$

$$= iB^2 + 2iB^2 = 3iB^2$$

$$[A^3, B] = -3iA^2$$

#2

$$[X, [X^2, p_x]] \neq$$

$$[X^2, p_x^2]\psi = \cancel{p_x^2 X^2 \psi} - p_x^2 X^2 \psi =$$

$$= \left\{ \hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} \right\} =$$

$$= -\cancel{x^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi} + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 \psi) =$$

$$=$$

$$I + \hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} (2X\psi) + x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} =$$

$$= I + \hbar^2 (2\psi + 2x \frac{\partial \psi}{\partial x}) + x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} =$$

$$\Rightarrow [x^2, p_x^2] = 2\hbar^2 \psi + 4\hbar^2 x \frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$= 2\hbar^2 + 4i\hbar x p_x,$$

$$[X, [X^2, p_x]] = X(2\hbar^2 + 4i\hbar x p_x) -$$

$$= (2\hbar^2 + 4i\hbar x p_x)X = 4i\hbar(x p_x + x p_x X) =$$

$$= 4i\hbar x (x p_x + p_x X) =$$

$$= 4i\hbar X [X, p_x] = -4\hbar^2 X$$

$$i\hbar$$

#3 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ *operator momenta*

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$$

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}$$

$$[\hat{L}_i, \hat{L}'_i] = 0$$

Две простота
взаимно перпендикулярны.

$$[\hat{L}_i, x_k] = i\hbar \epsilon_{ikl} x_l$$

$$[\hat{L}_i, x_k] = i\hbar \epsilon_{ikl} p_l$$

должно быть линейной ф-цией
от импульсов с некоторыми коэффициентами.

$$[\hat{L}_i, r^2] = \hat{L}_i r^2 - r^2 \hat{L}_i = \{r^2, x_k x_k\} =$$

$$= \underbrace{x_k x_k}_{\text{скаляр}} - x_k x_k \hat{L}_i = (x_k \hat{L}_i + i) x_k - x_k \hat{L}_i =$$

$$= x_k \hat{L}_i x_k$$

$$= (i\hbar \epsilon_{ikl} x_l + x_k \hat{L}_i) x_k - x_k x_k \hat{L}_i =$$

$$= x_k i\hbar \epsilon_{ikl} x_l + x_k \hat{L}_i x_k - x_k x_k \hat{L}_i =$$

$$= x_k (x_k \hat{L}_i - x_k \hat{L}_i)$$

$$= x_k (\hat{L}_i x_k - x_k \hat{L}_i) = x_k [\hat{L}_i, x_k] =$$

$$= i\hbar \epsilon_{ikl} x_l x_k$$

Оператор симметричной и антисимметричной частей.

#4

$$[\hat{L}_x, \hat{L}^2 + \rho \hat{p}^2] =$$

$$[\hat{L}_i, \hat{L}^2 + \rho \hat{p}^2] =$$

$$= \hat{L} [1, x_k] + \rho [\hat{L}, p_k] = i\hbar \epsilon_{ikl} x_l + \rho i\hbar \epsilon_{ikl} p_l$$

$$= i\hbar \epsilon_{ikl} x_l + i\hbar \epsilon_{ikl} p_l = i\hbar \epsilon_{ikl} (x_l + \rho p_l)$$

$$= i\hbar \begin{vmatrix} x & 0 \\ y & i\hbar (2z + \rho p_z) \\ z & -i\hbar (2y + \rho p_y) \end{vmatrix}$$

$$[\hat{L}_i, x_k] \sim \epsilon_{ikl}$$



Задача #5:

Покажите, что в системе при наличии до
исконечных операторов в коммутаторе
функции с гамильтонианом операторов
спектр вырожден.

Дога #3

#1.20

Волновой функции соответствуют значения энергии

$$\psi(x) = C \cdot \exp\left(\frac{i p_0 x}{\hbar}\right) \varphi(x) \quad \varphi(x) = \varphi^*(x)$$

показать, что $\langle p_0 \rangle = \langle p \rangle$! $p_0 = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int dx \psi^*(x) \cdot \hat{p} \psi(x) = \int dx C^* \exp\left(-\frac{i p_0 x}{\hbar}\right) \varphi(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \left[\exp\left(\frac{i p_0 x}{\hbar}\right) \varphi(x) \right] = \\ &= \frac{\hbar}{i} \int dx \varphi(x) \left[\frac{i p_0}{\hbar} \varphi(x) + \frac{d\varphi}{dx} \right] dx = \\ &= C^* p_0 \int \varphi^*(x) dx + C^* \frac{\hbar}{i} \int \varphi \frac{d\varphi}{dx} dx = \\ &= p_0 \underbrace{C^* \int \varphi^*(x) dx}_{=1} + C^* \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2} \varphi^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = p_0 \end{aligned}$$

нормировка: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

$\int C^2 \varphi^2(x) dx = 1 \Rightarrow \langle p \rangle = p_0$

#1.23

Показать, что собственная функция оператора $\hat{p}$ является волной

$\hat{p}^2 \psi_0 = a_0 \psi_0 \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$
показать, что $a_0 \geq 0, \forall \psi_0$

справедливая #1.22

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}^2 \rangle &\geq 0 \Rightarrow \hat{p}^2 \rightarrow \hat{p}' \geq 0 \quad \forall \psi_n \\ \langle \hat{L}^2 \rangle &= \int dq \psi^* \hat{L}^2 \psi = \int (\hat{L}^* \psi)^* (\hat{L}^* \psi) dq \geq 0 \\ |\hat{L}^* \psi|^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

#1.25

Найти собственную функцию и соответствующее значение $\hat{p}$ для волновой функции $\psi(x) = \exp(-\beta x)$ $\beta > 0$ $\psi(x) = 0$ для $x > 0$ и $\psi(x) = \exp(-\beta x)$ для $x < 0$.
Рассчитать $\langle p \rangle$ и $\langle p^2 \rangle$ для $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \hat{L} \hat{p} - \beta \hat{x} \\ \hat{p} \psi(x) &= \hat{L} \psi(x) - \beta x \psi(x) = -i \hbar \frac{d}{dx} \psi(x) - \beta x \psi(x) = \hat{p} \psi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(x)}{dx} &= -\frac{i}{\hbar} (\beta x - \hat{p}) \psi(x) \\ \psi(x) &= C \exp \left\{ -\frac{i(\beta x - \hat{p})x}{2\beta} \right\} = \\ &= C \exp \left\{ -i \frac{(\beta x - \hat{p})^2}{2\beta} \right\} \end{aligned}$$

Условие нормировки

$$\int \psi^*(x) \psi(x) dx = \delta(f - f') \quad \text{if } f = f'?$$

$$\begin{aligned} C^2 \int \exp \left\{ \frac{i}{2\beta} [(\beta x - f')^2 - (\beta x - f)^2] \right\} dx &= \\ = \int \exp \left\{ \frac{i}{2\beta} [2\beta x(f' - f) + (f'^2 - f^2)] \right\} dx &= 1 \\ \int \exp \left\{ \frac{i}{2} (f' - f)x \right\} dx &= 2\pi \delta(f - f') \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ортогональность при $f \neq f' \Rightarrow C = (2\pi)^{-1/2}$

предельные случаи:

1) $\beta \rightarrow 0$; $\psi_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{i(\beta x - f)^2}{2\beta} \right\}$; $\hat{p} = \hat{p}$

$\frac{\beta x^2}{2} - \hat{p} x$
как нормировка?

1. Почему не нормировка?
2. Как нормировка?

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \psi_\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\exp\left\{i \frac{(\rho x - \hbar)^2}{2\rho\hbar}\right\}}{\sqrt{2\pi\hbar}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{i \frac{1}{2} y\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{i \frac{1}{2\hbar} y\right\}$$

Доца #4 ✓

#1.29

Привести операторы $\hat{A}, \hat{B}, \hat{L}$ удовлетворяют каноническим соотношениям, показать, что оператор $\hat{L}$ порождает вращение

$$[\hat{A}, \hat{L}] = 0$$

$$[\hat{B}, \hat{L}] = 0$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$

$$\hat{B} = \hat{B}^\dagger$$

$$\hat{L} = \hat{L}^\dagger$$

$$\hat{L}\psi_i = L_i \psi_i$$

где $\psi_i \rightarrow$ собственные функции

$$\hat{A}\hat{L}\psi_i - \hat{L}\hat{A}\psi_i = 0$$

$$\hat{L}_i \hat{A}\psi_i - \hat{L}\hat{A}\psi_i = 0 \Rightarrow \hat{L}(\hat{A}\psi_i) = L_i(\hat{A}\psi_i)$$

$\varphi = \hat{A}\psi_i \rightarrow$ также собственная функция $\hat{L}$, с тем же значением L_i

или $\hat{L} \rightarrow$ инвариантен, то

$$\hat{A}\psi_i = \hat{A}_i \psi_i$$

$$\hat{B}\psi_i = \hat{B}_i \psi_i$$

тогда

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi_i = (\hat{A}_i\hat{B}_i - \hat{B}_i\hat{A}_i)\psi_i = 0$$

$\forall \psi_i \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0$
 то выполняются условия
 если L_i есть волновые функции
 соответствующим значениям соответствуют
 несколько собственных функций.

Задача #6

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\psi(x,0) = \dots$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) \text{ в нерелятивистском пределе}$$

в координатном представлении:

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

в импульсном представлении:

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + U\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right)$$

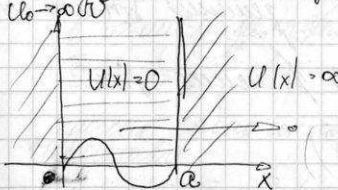
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \text{ диф. ур-е с раздельно-переменными}$$

$$U(x) = U_0 + \alpha x + \beta x^2 + \dots$$

$$\psi \rightarrow \psi - e^{-\frac{i}{\hbar} U_0 t}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} (U_0 + V_0) t}$$

и потенциал приравнен к нулю, то получается потенциальный ящик.



стены не пропускают => граничные условия равны 0

Подставим граничные условия для нашей задачи

$$j = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{d\bar{\psi}}{dx} - \bar{\psi} \frac{d\psi}{dx} \right) \Big|_{\dots} = 0$$

$$\psi \frac{d\bar{\psi}}{dx} \Big|_{\dots} = \bar{\psi} \frac{d\psi}{dx} \Big|_{\dots}$$

$$\frac{\bar{\psi}'}{\bar{\psi}} = \frac{\psi'}{\psi} = C \in \mathbb{R} \text{ логарифмическая производная}$$

$$\frac{d}{dx} \psi' = C\psi, \quad C - действительная константа$$

разделим на $i\hbar$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) = -i\hbar C \frac{\psi}{\psi} = -i\hbar C$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{\psi}'}{\bar{\psi}} \right) = -i\hbar C \frac{\bar{\psi}}{\bar{\psi}} = -i\hbar C$$

$$\boxed{\psi(0) = \psi(a) = 0} \text{ 2 граничных условия}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = E \psi \quad k^2$$

$$\psi'' + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

решение $\sin$ или $\cos$

выберем в качестве решения $\sin$.

$$\psi \sim A \sin(kx + \delta)$$

$$x=0: \psi = A \sin kx$$

$$x=a: k a = \pi n, k = \frac{\pi n}{a} \Rightarrow \psi = A \sin \frac{\pi n x}{a}$$

Находимся с условиями нормировки.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 = \int_0^a A^2 \sin^2 \frac{\pi n x}{a} dx =$$

$$= A^2 \int_0^a \frac{1 - \cos \frac{2\pi n x}{a}}{2} dx = A^2 \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right);$$

$$k_n = \frac{\pi n}{a}, E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$$

получается только 1 период $\sin$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V(x) \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

используем
исходные
граничные условия.

исходные граничные условия.

$$\psi \sim \sum_n e^{i k_n x} (A_n e^{-i E_n t} + B_n e^{i E_n t})$$

в φ -м ψ не различается

$$\psi \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

плоская волна и является решением Ур. Шредингера.

$$\psi(x, t) = \sum_n i C_n \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

$$|C_n|^2$$

Число волн ψ при измерении (зависит от энергии).

В квантах проявляется δ -н сохранение энергии.

$$x \rightarrow -x$$

так посмотреть на относительную фазу.

1) сдвигаем на $a/2$

2) $x \rightarrow x$ зеркальное отражение

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$$

$$k_n = \frac{\pi n}{a}; E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m};$$

$$\sin \frac{\pi n x}{a} \rightarrow \sin \frac{\pi n}{a} (y + a/2) = \sin y, a/2 \Rightarrow$$

$$= \sin\left(\frac{\pi n y}{a} + \frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} y = -y \\ y = y \end{cases}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi n y}{a} + \frac{\pi n}{a}\right)$$

Если n четное $\rightarrow$ $\sin$ остается $\rightarrow$ вычисляем $\dots$

Если n нечетное $\rightarrow$ сдвиг поворота $\rightarrow$ $\rightarrow$ вычисляем $\dots$

$$\xi = \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) (-1)^{n+1}$$

$$\psi(x) = \dots$$

$$\psi = Ax(x-a)$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$$

$$\bar{E} = \int_0^a \psi^* \frac{p^2}{2m} \psi dx = \int_0^a \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \frac{p^2}{2m} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx$$

$$= \frac{2}{a} \frac{p^2}{2m} \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \frac{p^2}{2m} \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{p^2}{2m}$$

$$= \left(\frac{h^2 k_n^2}{2m}\right) \frac{p_n^2}{2m}$$

$$\int_0^a \psi^* \frac{p^2}{2m} \psi dx = \int_0^a \left(\frac{p^2}{2m}\right) \psi^2 dx = \int_0^a \left(\frac{p^2}{2m}\right) \psi^2 dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{p^2}{2m}\right) \psi^2 dx$$

2.4 A

$$\psi = Ax(x-a)$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\frac{e^{i\pi n - i p a}}{\frac{i\pi n}{a} - \frac{i p}{h}} + \frac{e^{-i\pi n - i p a}}{\frac{i\pi n}{a} + \frac{i p}{h}} - \frac{1}{\frac{i\pi n}{a} - \frac{i p}{h}} \frac{1}{\frac{i\pi n}{a} + \frac{i p}{h}} \right]$$

$$\bar{E} = \sum_n E_n / C_n^2$$

$$\psi = \sum_n C_n \psi_n$$

$$|C_n|^2$$

$$\int_0^a A^2 x^2 (x-a)^2 dx = \int_0^a A^2 x^2 (a^2 - 2ax + x^2) dx =$$

$$= A^2 \left(\frac{a^5}{5} + \frac{a^5}{3} - \frac{2a^5}{4} \right) = A^2 a^5 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{A^2 a^5}{30}$$

$$Ax(x-a) = \sum_n C_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) / \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$$

$$\int_0^a Ax(x-a) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = \sum_n C_n \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = C_n =$$

$$= \frac{A \sqrt{\frac{2}{a}}}{0} \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx - a A \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a x \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx$$

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n / C_n^2$$

$$\begin{aligned} & \text{Don't forget } x \neq 0 \\ & |\psi(x)|^2 dx \\ & |\psi(p)|^2 dp \\ & \psi(p) = \int_0^a \psi(x) e^{-\frac{i}{h} p x} dx = \\ & = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \exp\left[-\frac{i}{h} p x\right] dx \end{aligned}$$

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2$$

$$\bar{\epsilon}^2 = \sum \epsilon_n^2 / C_n^2 \quad \text{дисперсия}$$

$$\Delta \epsilon^2 = \bar{\epsilon}^2 - \bar{\epsilon}^2$$

↑ среднее арифметическое
дисперсия

или квадрат отклонения

Практика #7

1. Ограничим область

Найти $V(x) = -\lambda \delta(x)$, $\lambda > 0$

Найти волновые ф.и.

опишем ур-е Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \lambda \delta(x) \psi = \epsilon \psi$$

$$\left. \begin{aligned} x \in (-\infty; +\infty) \\ \psi \in \mathbb{R}; \quad \psi(\pm\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{задача на граничных условиях}$$

Решим:

в виде преобразования Фурье:

$$\text{образ: } \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

$$\text{образ: } \varphi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

подставим преобразование Фурье в наше ур-е Шредингера:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \varphi(k) \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \lambda \delta(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} = \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

$$= \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \quad | \times e^{-ik'x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i(k-k')x} \varphi(k) \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{i(k-k')x} \frac{dk}{2\pi} =$$

$$= \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{i(k-k')x} \frac{dk}{2\pi}$$

проинтегрируем по x .

$$\left\{ \begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = 1 \end{aligned} \right.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k-k') \varphi(k) \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) \frac{dk}{2\pi} =$$

$$= \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) \delta(k-k') \frac{dk}{2\pi}$$

$$\frac{\varphi(k') \hbar^2 k'^2}{2m} - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) \frac{dk}{2\pi} = \epsilon \varphi(k')$$

интегральное ур-е для определения $\varphi(k')$

$$\varphi(k) = \frac{2\epsilon}{\hbar^2 k^2 - \epsilon} = \varphi(k) \quad \text{образ обратный}$$

подставим в наше уравнение и получим ответ:

$$= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{i}{\rho} \int_0^{\pi} e^{i\rho \cos\phi + i \sin\phi - i\rho} d\phi = 0$$

И вот для времени нулевой сложности
он был $\int_{\gamma} \delta \eta$ он отрицателен $\rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$
он был $\nearrow$ расходился.

$$\begin{aligned} & \oint \frac{e^{iy} dy}{y^{1+a}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy} dy}{y^{1+a}} = 2\pi i \operatorname{Res}_{y=i0} \frac{e^{iy}}{y^{1+a}} = \\ & = \frac{2\pi i \operatorname{Res}_{y=i0} e^{iy}}{-\frac{2\pi i}{y^{1+a}}} \left(\frac{1}{y-i0} - \frac{1}{y-i0} \right) = \\ & = + \frac{\pi}{a} \operatorname{Res}_{y=i0} \frac{e^{iy}}{y-i0} = \frac{\pi}{a} \lim_{y \rightarrow i0} (y-i0) \frac{e^{iy}}{(y-i0)} = \\ & = \frac{\pi}{a} e^{-a}, \text{ morga} \end{aligned}$$

$$\left\{ \dots + \frac{C-1}{x} + C + C_1 x + \dots \right\} / x x$$

$$\psi(x) = \frac{LC}{2\pi} \frac{2m}{\hbar^2} |x| \frac{\pi}{|x|} \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m\epsilon}} \cdot e^{(x)} \sqrt{-\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}$$

уравнение Шрёдингера

Найдя терпимости нашей частную.

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{mc}}{\hbar^2 \sqrt{-\frac{\hbar^2}{mc}}} e^{-\sqrt{-\frac{mc}{\hbar^2}} x} = \mathcal{A}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi(x) = N e^{-|x|/a} \quad \text{полное решение}$$

Коррелирован:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx =$$

$$= 2N^2 \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{N^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1$$

$N = \sqrt{2}$

$\psi(x) = \sqrt{x} e^{-|x|/2}$ менее удобно
найти $\psi(x)$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\epsilon}} = \sqrt{x}$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{d\psi}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ix} dx =$$

$$= \psi(0) = \sqrt{x}$$

$$\int \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\epsilon}} = 1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m\epsilon} = \frac{\hbar^2 x^2}{2m^2}; -\frac{1}{\epsilon} = \frac{2\hbar^2}{2m^2}$$

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 m}{2\hbar^2}$$

$$\langle U \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 (-2\delta(x)) \psi dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 (-2\delta(x)) dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-2|x|/2} dx =$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-|x|} dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-|x|} dx =$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-|x|} dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-|x|} dx =$$

$$= \frac{\hbar^2 m}{2\hbar^2} = \frac{\hbar^2 m}{2\hbar^2}$$

$$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2m} \psi^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-2|x|/2} =$$

попробуем $\psi(x)$ не монотонно
быстро убывает, т.е. $\psi(x)$
уменьшается, но $\psi(x)$ не монотонно

$$\psi = \sqrt{x} e^{-|x|/2}$$

$$= \frac{\hbar^2 x^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} dy = \frac{\hbar^2 x^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \right) =$$

$$= \frac{\hbar^2 m}{2\hbar^2}$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle U \rangle + \langle K \rangle = \frac{\hbar^2 m}{2\hbar^2} - \frac{\hbar^2 m}{\hbar^2} = -\frac{\hbar^2 m}{2\hbar^2} = \epsilon$$

$$\langle E \rangle = \epsilon$$

Но U и K не имеют определенных значений, они "разбросаны"

Гаусово распределение

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi} \hbar} e^{-x/\hbar} / \hbar \rightarrow \delta(x)$$

Логга #5

Доказать, что если $[\hat{f}, \hat{H}] = 0$

$[\hat{g}, \hat{H}] = 0$, то

$[\hat{f}, \hat{g}] \neq 0$, то

энергетический спектр вырожден

$$\hat{f}\psi = f\psi; \hat{H}\psi = E\psi; \hat{g}\psi = g\psi;$$

Так как $\hat{g}$ и $\hat{H}$ коммутируют, то

$$\hat{H}(\hat{g}\psi) = \hat{g}(\hat{H}\psi) = E(\hat{g}\psi), \text{ то есть}$$

g - собственная функция оператора Гамильтона

Одной энергии могут соответствовать несколько собственных функций

$$\psi'' + \left(\frac{2mL}{\hbar^2} \delta(x) \right) \psi = - \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi$$

Const $\left[\frac{1}{\hbar^2} \right]$ Const $\left[\frac{1}{\hbar^2} \right]$

$\int \delta(x) dx = 1$ $\int \delta(x) dx = 1$

одномерный случай

Const барьеров $\Rightarrow$ задачу можно решить!

а в 1D случае:

$$\Delta \psi + \left[\frac{2mL}{\hbar^2} \delta(r) \right] \psi = - \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi$$

сферически симметрично

Задача задана некорректно поставлена $\Rightarrow$ задачу нельзя решить!

мощность барьера $\bar{P} = P \cdot \rho$

поверх: выск. барьера $\frac{1}{\beta^2}$

во 2D случае мы же заменим переменных ψ в δ -Ф-ии

$$\delta(x) = \frac{\delta(x)}{L}$$

$$\delta(r) = \frac{\delta(r)}{\beta^2}$$

выск $\frac{1}{\beta^2}$ барьеров

такие преобразования мы можем получить во 2D случае $\rightarrow$ мы не можем интегрировать это тоже не можем (знаем только энергет. уровни) т.к. у сферических потенциалов не может быть

линейности задан относительно масштаба барьера.

Чтобы найти энергет. уровень мы должны ввести регулярную величину λ - макс. возможный выск.

$$I = \frac{L}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k dk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E} = \frac{L}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dk^2}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E} =$$

$$= \frac{L}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{dk^2}{k^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{L}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \ln \frac{\hbar^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}}{-\frac{2mE}{\hbar^2}} \Big|_{\hbar^2 \rightarrow \infty}$$

$$I = \frac{L}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \ln \left(- \frac{\hbar^2 k^2}{2mE} \right)$$

$$- \frac{\hbar^2 k^2}{2mE} = e^{\frac{4\pi}{L} \frac{\hbar^2}{2m}}, \quad C = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) e^{-\frac{4\pi \hbar^2}{L 2m}} \quad (=)$$

обрезка интеграла $[1]$ регулярна - значит

Момент импульса Траектория #9

Докази
#3.3.
#3.4(1)
#3.7

#3.2 $\hat{L}_i = \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$
 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ } в координатном представлении $\vec{r} \rightarrow (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}})$
 $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ в импульсном представлении.

$[\hat{L}_i, \hat{A}_k] = i \epsilon_{ijk} \hat{A}_j$
 $[\hat{L}_i, \hat{A}_k] = i \epsilon_{ijk} \hat{A}_j$ L - оператор момента импульса.

$\frac{1}{\hat{p}} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ $(\hat{L}, \hat{H}) = 0$

$T_a \psi(x) = \psi(x+a) = e^{\frac{i}{\hbar} a \hat{p}}$
 $T_a = e^{\frac{i}{\hbar} a \hat{p}} \rightarrow T_a \approx 1 + \frac{i}{\hbar} a \hat{p}$

Если $\delta \varphi$ -
только для
исчисления
сопр. 2.

для малых
сдвига
сдвига

Если малое преобр. можно считать в точности
преобр. оператор $\hat{p}$ - генератор
инфинитезимального преобразования
оператор импульса - оператор сдвига
(и есть сопр. величина, св. с тем
преобразованием, и что симметрично
относительно сдвига)

$T_{\delta \varphi} = 1 + \frac{i}{\hbar} \delta \varphi \hat{L}$ вектор $\delta \varphi$ по модулю

Для $\hat{L}$ генер. и есть инвариантность
в отношении относительного
преобразования.

$T_{\delta \varphi} = e^{\frac{i}{\hbar} \delta \varphi \hat{L}}$

$\hat{p}$ - генератор
сдвига
преобр.

$$\textcircled{=} -\mu \exp \left\{ -\frac{4\pi \hbar^2}{L^2 2m} + \ln \frac{\Lambda^2 \hbar^2}{2m\mu} \right\};$$

$$\varepsilon = -\mu e^{-\frac{4\pi \hbar^2}{L^2 2m} + \ln \frac{\Lambda^2 \hbar^2}{2m\mu}} =$$

$$= -\mu e^{-\frac{4\pi \hbar^2}{L^2 2m}}$$

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{L} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2 \hbar^2}{2m\mu}$$

перенормировка
константы
связи.

Должен

$$\left[\frac{\Delta \psi}{[1/M^2]} + \frac{2mL}{\hbar^2} \underbrace{\delta(F)}_{[1/M^3]} \psi = -\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \psi \right]$$

$$L = \frac{2m\mu_0 a^3}{\hbar^2}$$

① $T+U = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{U_0 a}{\Delta x} \sim \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} - \frac{U_0 a}{\Delta x}$

энергия
связи

$\kappa = \frac{1}{\Delta x}$ - волновой вектор.

② $T+U = 2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m(\Delta x)^2} - \frac{U_0 a^2}{(\Delta x)^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} L - U_0 a^2 \\ L \delta(F) = \frac{U_0 a^2}{(\Delta x)^2} \end{array} \right.$

энергия
связи

не можем определить существование
состояния с нулевой энергией

③ $T+U = 3 \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} - \frac{U_0 a^3}{(\Delta x)^3}$

возрастает ли энергия с уменьшением
длины волны? / м.к. имеет мин. энергию

$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$
 $\hat{p}_x \hat{p}_y \psi_1 = \hat{p}_y \hat{p}_x \psi_1$ (1)
 $\hat{p}_x \hat{p}_y \psi_1 = \hat{p}_y \hat{p}_x \psi_1$ (2)
 ① - ② = $[\hat{p}_x, \hat{p}_y] \psi_1$
 2-х компонент
 волновой
 функции

приращение в одну и ту же точку м.д. для
 операторов, тогда совпадает с коммутатором
 операторов.

$[\hat{p}_y, \hat{p}_x] \neq 0$
 $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$
 $[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y] \neq 0$
 if $\text{rot } \vec{A} \neq 0$ if есть магнитное поле.

$A e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} B e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \psi_1 = \psi_2$

коммутатор совпадает в нуль для вычисления
 коммутатора в м.д. м.к.
 в м.д. м.к.
 операторов
 в нуль.

$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$
 $\hat{T}_{\text{оп}} = 1 + \frac{1}{\hbar} \delta \vec{p} \cdot \vec{L}$
 $[\hat{L}_i, \hat{L}_k] =$

$L_x L_y \psi - L_y L_x \psi$
 # 3.6

$i\hbar [L_i, L_k] = \hbar (L_x L_y - L_y L_x) = \hbar (L_x L_y - L_y L_x) =$
 маневры
 маневры

$\hbar [L_i, L_k] = i\hbar \epsilon_{ikl} L_l = L_i L_k - L_k L_i$
 $L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z$

3.4 (a, b)

A) $[\hat{L}_i, r^2] = \hat{L}_i r^2 - r^2 \hat{L}_i =$
 $= \hat{L}_i x_k x_k - x_k x_k \hat{L}_i =$
 $= (i\epsilon_{ikl} x_l + x_k x_l) x_k - x_k x_l L_i =$

$[\hat{L}_i, x_k] = i\epsilon_{ikl} x_l$
 $L_i x_k - x_k L_i = i\epsilon_{ikl} x_l$
 верно для магнитного поля.

$x_k (i\epsilon_{ikl} x_l + x_k x_l) - x_k x_l L_i =$
 $x_k (L_i x_k - x_k L_i) = x_k [L_i, x_k] =$
 $x_k i\epsilon_{ikl} x_l = 0$

$$[L_i, \vec{p}] = -i\hbar \vec{p} \times \vec{e}_i$$

$$[L_i, \vec{p}] = \vec{L} \vec{p} - \vec{p} \vec{L}$$

$$= L_i p_k x_k - p_k x_k L_i =$$

$$= (i\epsilon_{ikl} p_l + p_k L_i) x_k - p_k x_k L_i \quad \textcircled{=}$$

$$\begin{cases} [L_i, p_k] = i\epsilon_{ikl} p_l \\ L_i p_k - p_k L_i = i\epsilon_{ikl} p_l \end{cases}$$

$$\textcircled{=} i\epsilon_{ikl} p_l x_k + p_k L_i x_k - p_k x_k L_i =$$

$$= i\epsilon_{ikl} p_l x_k + p_k (L_i x_k - x_k L_i) =$$

$$\begin{aligned} &= i\epsilon_{ikl} p_l x_k + p_k i\epsilon_{ikl} x_l = \\ &= i\epsilon_{ikl} (p_l x_k + p_k x_l) = \end{aligned}$$

симметричная часть тензора \$p_k x_l\$
\$p_k x_l\$ — симметричный тензор

$$= i\epsilon_{ikl} \cdot 0 = 0$$

$$b) [L_i, x_k x_l] = L_i x_k x_l - x_k x_l L_i =$$

$$= (i\epsilon_{ikl} x_l + x_k L_i) x_l - x_k x_l L_i \quad \textcircled{=}$$

$$([L_i, x_k] x_l + x_k L_i x_l - x_k x_l L_i) = i\epsilon_{ikl} x_l x_k$$

$$\textcircled{=} i\epsilon_{ikl} x_l x_k + x_k L_i x_l - x_k x_l L_i =$$

$$= i\epsilon_{ikl} x_l x_k + x_k [L_i, x_l] =$$

$$= i\epsilon_{ikl} x_l x_k + x_k i\epsilon_{ilp} x_p =$$

$$= i\epsilon_{ikl} x_l x_k + i\epsilon_{ikl} x_l x_k = i\epsilon_{ikl} x_l x_k -$$

$$- i\epsilon_{ikl} x_l x_k = i\epsilon_{ikl} x_l x_k \quad \textcircled{=}$$

канонический преобразование с бесконечно малым параметром

§ 3.2

канонический преобразование с бесконечно малым параметром

③

34
44

§ 3.12

Задача #10

015.04.10

\$\psi_m\$

\$\psi_m \sim N P_e^m |\cos \theta| e^{im\phi}\$

\$\hat{L}_x, \hat{L}_y\$

\$\hat{L}_z \psi_m = m \psi_m\$

\$\hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2\$

\$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \hat{L}_z \hat{L}_\pm - \hat{L}_\pm \hat{L}_z = \hat{L}_z (\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y) - (\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y) \hat{L}_z =$$

$$= \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z + i(\hat{L}_z \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_z) = [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + i[\hat{L}_z, \hat{L}_y] =$$

$$= i\hat{L}_y + \hat{L}_x = \hat{L}_+$$

$$i\hat{L}_z \hat{L}_y = i\hat{L}_y \hat{L}_z$$

$$l_z l_z - l_z l_z = l_z$$

$$(l_z l_z = l_z l_z + l_z l_z = l_z / (l_z + 1))$$

$$\boxed{l_z l_z \psi_m = l_z / (l_z + 1) \psi_m = l_z / (m+1) \psi_m = (m+1) l_z \psi_m}$$

$$l_x = \int d\Omega \bar{\psi}_m \hat{l}_x \psi_m = -i \int d\Omega \bar{\psi}_m [l_y, l_z] \psi_m \ominus$$

$$\{ [l_y, l_z] = i(l_z l_x - l_x l_z) = i l_x \}$$

$$\ominus - i \int d\Omega \bar{\psi}_m (l_y l_z - l_z l_y) \psi_m =$$

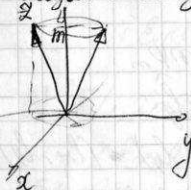
$$= -i \int d\Omega \bar{\psi}_m l_y l_z \psi_m + i \int d\Omega \bar{\psi}_m l_z l_y \psi_m =$$

$$= -i m \int d\Omega \bar{\psi}_m l_y \psi_m + i m \int d\Omega \bar{\psi}_m l_y \psi_m = 0$$

$$\bar{l}_x = \bar{l}_y = 0 \quad a; \quad \bar{l}_z = m$$

аналогично.

орбит. момент - вектор, у нас есть проекция
на ось z, но куда пох и куда пох
сказать нельзя... аргументы



Найдем теперь сферич. координаты $(l_x^2 = l_y^2)$
с помощью поворотов - повороты
операторов.

$$\bar{l}_x^2 - \bar{l}_y^2 = 0$$

$$l_z^2 = (\hat{l}_x + i \hat{l}_y)^2 = \hat{l}_x^2 - \hat{l}_y^2 + i(\dots)$$

антисимметричные

$$\hat{l}_z^2 = \int d\Omega \bar{\psi}_m l_z^2 \psi_m = \int d\Omega \bar{\psi}_m \underbrace{l_z^2}_{(m+1) l_z} \psi_m =$$

$$= 0$$

$$\bar{l}_x^2 = (\bar{l}_x + i \bar{l}_y)^2 = \underbrace{\bar{l}_x^2 - \bar{l}_y^2}_{Re} + i \underbrace{(\dots)}_{Im}$$

$$\bar{l}_x^2 = \bar{l}_y^2$$

можно ли сделать еще одно преобразование
переход к сдвину:

$$\begin{cases} \bar{l}_z = \int d\Omega \bar{\psi}_m l_z \psi_m = 0 \\ \bar{l}_x = \bar{l}_x + i \bar{l}_y = 0 \end{cases}$$

3.15

В состоянии с заданой заданностью $\psi = A e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$
Найдем энергию, импульс, момент
(какого значения $\mathbf{p}$?)

$$\psi = A e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}_m} e^{i \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r}} \psi_{\mathbf{p}_m}$$

$$\hat{l}_z \psi_m = m \psi_m$$

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i m \varphi}$$

предположим, что A -перпендикулярно
мгновенной.

$$\hat{x}, \hat{p}_x \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \hat{x}}$$

$$\hat{\phi}, \hat{p}_z \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\phi} \hat{p}_z}$$

фактически
увеличили импульс.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \rightarrow$$

$$i\hbar \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} = \hat{H} \psi$$

$$\psi(t+\Delta t) = \psi(t) - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H} \psi =$$

$$= (1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}) \psi(t)$$

$$\psi(t+\Delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} \psi(t) \quad \text{приближённое}$$

уравнение Шрёдингера

#3.15

параметры нашей функции равны

$$\psi = A \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{A}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-k)\varphi}$$

$$\times e^{-ik\varphi} = \frac{A}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-2k)\varphi} = \psi$$

$$\psi = \sum_{m=0}^n \frac{1}{2} C_n^m e^{im\varphi}$$

$$f_m = \int \psi \psi^* d\varphi$$

Упростили нашу функцию и можем перейти к A .

$$\int_0^{2\pi} |\psi|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{A^2 \cos^2 \varphi}{2} \right) d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^{2\pi} e^{i(2n-2k)\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^{2\pi} e^{i(2n-2k)\varphi} d\varphi = \frac{A^2}{2\pi} \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^{2\pi} e^{i2\pi n \varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{2\pi}$$

$$\omega_m = \left| \frac{A^2 \pi}{2\pi} C_n^k \right|^2 = \frac{A^2 \pi}{2\pi} (C_n^k)^2 =$$

$$= \frac{(C_n^k)^2}{C_n^n} \left\{ \begin{matrix} n-2k=m \\ k=\frac{n-m}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{(C_n^{\frac{n-m}{2}})^2}{C_n^n}$$

заданный параметр; т.е. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

#3.

Дога #10: 3.11, 3.15, 3.20
3.13, 3.12/15

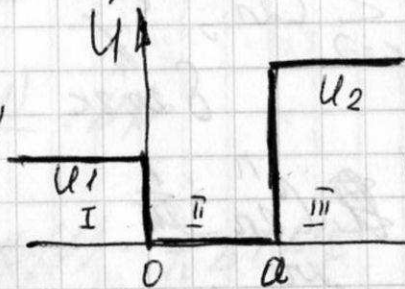
Доза #7

#2.20

Найти условия существования
состояний дискретного спектра

Определить уровни энергии для частицы
в поле:

$$U(x) = \begin{cases} U_1, & x < 0 \\ 0, & x \in [0, a] \\ U_2, & x > a \end{cases}$$



Рассмотрим
предельный
случай $U_0 = \infty$

Дискретные уровни при $E < U_1$;

При $x < 0$: $\psi_1 = C_1 \exp(-\alpha_1 x)$

Для $x < a$: $\psi_2 = C_2 \sin(k_1 + \delta)$ $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

При $x > a$: $\psi_3 = C_3 \exp(-\alpha_2 x)$ $\alpha_2 = \sqrt{\frac{2m(U_2 - E)}{\hbar^2}}$

Запишем граничные условия:

$\psi_1 = \psi_2|_{x=0}$ $\psi_2 = \psi_3|_{x=a}$ в непрерывных функциях

$\psi_1' = \psi_2'|_{x=0}$ $\psi_1' = \psi_2'|_{x=a}$ в производных

$C_1 = C_2 \sin \delta$; $C_2 \sin(k_1 a + \delta) = C_3 \exp(-\alpha_2 a)$

$C_1 \alpha_1 = C_2 k_1 \cos(\delta)$ $C_2 k_1 \cos(k_1 a + \delta) = C_3 (-\alpha_2) \exp(-\alpha_2 a)$

$\alpha_1 = k_1 \cot \delta$ $k_1 \cot(k_1 a + \delta) = -\alpha_2$

Анализ того что получилось при $E < U_1$
туннельный эффект, туннельная проводимость
дискр. спектры

~~тогда~~ $\alpha_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} U_1 - k^2}; \alpha_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} U_2 - k^2}$

$$\sin \delta = \frac{k \hbar}{\sqrt{2m U_1}}; \sin(k\alpha + \delta) = -\frac{k \hbar}{\sqrt{2m U_1}};$$

$$k\alpha = k\pi - \arcsin \frac{k \hbar}{\sqrt{2m U_1}} - \arcsin \sqrt{\frac{2m U_1}{\hbar^2}}$$

условие сохранения энергии.

Левая сторона монотонно растет, а правая монотонно спадает, поэтому необходимо найти при $k = \sqrt{\frac{2m U_1}{\hbar^2}}$ правая сторона была меньше π чем левая или $a \sqrt{\frac{2m U_1}{\hbar^2}} > \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}; n=1$

В яме существует хотя бы один уровень энергии при $U_1 = U_2 = U_0; \arcsin \frac{\hbar k}{\sqrt{2m U_0}} = \frac{n\pi - k\alpha}{2};$

делаем замену $\xi = \frac{k\alpha}{2}$

Для четных $n: \cos \xi = \pm 1; \gamma = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{a^2 m U_0}};$

также ξ , при которых $f(\xi) > 0$

для четных $n: \sin \xi = \pm 1; f(\xi) < 0$

$$E = \frac{2C \hbar^2}{m a^2}$$

#2.22 Частица находится в прямоугольной потенциальной яме. Вычислить среднюю силу, действующую на стенку, находящуюся на расстоянии x от центра ямы.

$$F = - \frac{dU}{dx}$$

$U_0 \rightarrow \infty$; поскольку яма бесконечно-глубокая

$$F = - \frac{dU}{dx} = U_0 [\delta(x) - \delta(x-a)]$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

16.04.10.

$$\hat{L}_y = \int d\Omega \psi_m \hat{L}_y \psi_m [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \psi_m =$$

$$= \left\{ [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z = i \epsilon_{xyz} \hat{L}_y \right\}$$

$$= -i \int d\Omega \psi_m (\hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z) \psi_m =$$

$$= \int d\Omega \bar{\psi}_m \hat{L}_z \hat{L}_x \psi_m - \int d\Omega \bar{\psi}_m \hat{L}_x \hat{L}_z \psi_m =$$

$$\int d\Omega \hat{L}_z^T \bar{\psi}_m \hat{L}_x \psi_m \int d\Omega \bar{\psi}_m \hat{L}_x \psi_m$$

$$= \int d\Omega \bar{\psi}_m \hat{L}_z \psi_m \int d\Omega \bar{\psi}_m \hat{L}_x \psi_m$$

$$m \int d\Omega \bar{\psi}_m \hat{L}_x \psi_m =$$

$$= 0!!!$$

матрица $\hat{L}_x^2 = \hat{L}_y^2$:

$$\Delta \hat{L}_x = \hat{L}_x + i \hat{L}_y; \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = [\hat{L}_z, \hat{L}_x + i \hat{L}_y] =$$

$$= [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + i [\hat{L}_z, \hat{L}_y] =$$

$$= \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z + i \hat{L}_z \hat{L}_y - i \hat{L}_y \hat{L}_z =$$

$$= i \epsilon_{xyz} \hat{L}_y + i^2 \epsilon_{zyx} \hat{L}_x = \underline{i \hat{L}_y + \hat{L}_x} = \hat{L}_+$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_+] = \hat{L}_+$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_-] = -\hat{L}_-$$

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ - \hat{L}_+ \hat{L}_z = \hat{L}_+$$

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ = \hat{L}_+ + \hat{L}_+ \hat{L}_z = \hat{L}_+ (\hat{L}_z + 1) \psi_m$$

$$\hat{L}_z (\hat{L}_+ \psi_m) = (\hat{L}_+ (\hat{L}_z + 1) \psi_m) = \hat{L}_+ (m+1) \psi_m = (m+1) (\hat{L}_+ \psi_m)$$

$$L_z (\psi_m) = (m+1) (L_z \psi_m)$$

$$L_z \psi_m = \psi_{m+1}$$

$$L_z \psi_m = \psi_{m-1}$$

$$\begin{aligned} \overline{L_x} \overline{L_y} &= 0 \\ \overline{L_x} + i \overline{L_y} \end{aligned}$$

$$\overline{L_z} = \int d\Omega \overline{\psi_m} L_z \psi_m = \int d\Omega \overline{\psi_m} (L_x + i L_y) \psi_m = 0$$

$$\int d\Omega \overline{\psi_m} \psi_{m+1} = 0, \text{ т.к. все ортогональны}$$

$$\overline{L_z}^2 = \int d\Omega \overline{\psi_m} (L_x + i L_y)^2 \psi_m = \int d\Omega \overline{\psi_m} [L_x^2 + L_y^2 + i(L_x L_y + L_y L_x)] \psi_m =$$

$$= \int d\Omega \overline{\psi_m} \hat{L}_z \hat{L}_z \psi_m = 0$$

$\psi_{m+1}, \text{ все ортогональные}$

$$0 = \hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2 + i(L_x L_y + L_y L_x)$$

$$\hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2 = 0$$

#3.15

$$\psi(\varphi) = A \cos^n \varphi = \sum_m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

$$\hat{p} \psi_p = p \psi_p$$

$$\psi_p \sim e^{ip_0 x} = \psi_p(x)$$

$$\hat{p} \psi_p = p \psi_p$$

$$\hat{p} \psi_p = p \psi_p$$

$$\psi(x) = \sum p \psi_p(x);$$

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

$$|a_p|^2 = \omega_p;$$

$$|a_m|^2 = \omega_m$$

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos^n \varphi e^{-im\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^n e^{-im\varphi} d\varphi = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ik\varphi} e^{-im\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ik\varphi - im\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(k-m)\varphi} d\varphi =$$

собств. ф-ии момента «выражены» в виде интеграла ортогонального.

$$\textcircled{2} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 2\pi \delta_{k,m} = \frac{A \sqrt{2\pi}}{2^n} C_n^m;$$

$k = \frac{m+n}{2}$

A - нормировочная const; а необходимо малые.

$$\int_0^{2\pi} A \cos^n \varphi d\varphi = 1 = \frac{A}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{A}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \delta_{k,n} = \frac{A}{2^n} C_n^n$$

$$\omega_m = A^2 \frac{2\pi}{2^n} (C_n^m)^2 = \frac{1}{C_n^n} (C_n^m)^2$$

3

Тармука #16

#3.20. показать, что $[l_i, f] = 0$

$$[l_i, f] = 0$$

$$\langle l, m | f | l, m \rangle \neq 0$$

при $m \neq m'$
и они не вырождены.

$$\int d\Omega \psi_{lm}^* \hat{f} \psi_{lm}$$

$$[f, l_{\pm}] = 0$$

$$[f, l_z] = 0$$

$$f l_z = l_z f$$

l_m -состояния с орт. значениями момента

$$\hat{l}^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle$$

$$\hat{l}_z |l, m\rangle = m |l, m\rangle$$

$$\langle l, m' | f l_z | l, m \rangle = \langle l, m' | l_z f | l, m \rangle$$

$$\langle l, m' | f m | l, m \rangle = \langle l_z \psi_{lm'} | f | \psi_{lm} \rangle$$

$$m \langle l, m' | f | l, m \rangle = m' \langle l, m' | f | l, m \rangle$$

$$m = m' \quad \text{if} \quad \langle l, m' | f | l, m \rangle \neq 0$$

это означает, что состояния с орт. значениями $m = m'$

$$m \neq m' \quad \langle l, m' | f | l, m \rangle = 0$$

о вырожденных состояниях
может быть 0 или нет. элемент матрицы может быть равен 0

$$|m-m'| \langle 11 \rangle = 0$$

поэтому получим, что $g/m+1 = g/m$

$$\langle m|f|m \rangle = \langle m+1|f|m+1 \rangle$$

$$\langle m+1|f|m+1 \rangle =$$

$$|m+1 \rangle = l_+ |m \rangle$$

$$\langle m+1|m+1 \rangle = \langle l_+ m | l_+ m \rangle =$$

$$\langle m | l_- l_+ | m \rangle \neq 1$$

$$= \langle m | l_- l_+ | m \rangle \neq 1$$

$$\langle m|m \rangle \neq 1$$

найдем норму.

$$l_+ |m \rangle$$

$$l_+ l_- - l_- l_+ = -l_+$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_z^2 + \frac{1}{2}(\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+) \quad \textcircled{=}$$

$$\left\{ \begin{aligned} l_+ l_- - l_- l_+ &= (l_x + i l_y)(l_x - i l_y) - (l_x - i l_y)(l_x + i l_y) \\ &= -i l_y l_x + i l_x l_y - i l_y l_x + i l_x l_y = 2i [l_y, l_x] = \\ &= 2i i l_z = 2 l_z \end{aligned} \right\}$$

$$\odot \quad l_z^2 + l_+ l_- - l_-^2 = l_z^2 + l_- l_+ + l_+^2$$

$l(l+1)$ -состояние спина

$$\left. \begin{aligned} l(l+1) &= m^2 - m + l_+ l_- \\ \hat{l}_+ \hat{l}_- &= l(l+1) - m(m-1) \\ \hat{l}_- \hat{l}_+ &= l(l+1) - m(m+1) \end{aligned} \right\} \text{однородные уравнения}$$

$$l(l+1) = m^2 + m + l_- l_+$$

$$\langle m+1 | m+1 \rangle = \langle l_+ \psi_m | l_+ \psi_m \rangle =$$

$$= \langle m | l_- l_+ | m \rangle = [l(l+1) - m(m+1)] \langle m | m \rangle$$

$$|m+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}} l_+ |m\rangle$$

$$|m-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}} l_- |m\rangle$$

$$\langle m+1 | f | m+1 \rangle = \langle m+1 | f \hat{l}_+ | m \rangle \frac{1}{\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}}$$

$$\langle m | \hat{l}_- \hat{l}_+ | m \rangle =$$

$$\langle m | \hat{l}_- | m' \rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m')}$$

$$m' = m+1 \quad (l_-)_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

[# 3.34]

(и взаимно ортогональны)

$$\text{Для } \hat{l}_1 \text{ и } \hat{l}_2 \text{ взаимно ортогональны векторы } \hat{l}_1, \hat{l}_2$$

$$\frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1 \hat{l}_1} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2} \rightarrow \text{показать, что они тоже имеют ортогональные проекции (каждый умножить с соответствующим вектором)}$$

$$\frac{\hat{l}_1^2 = (\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2)^2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2 + 2\hat{l}_1 \hat{l}_2} = \frac{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2 + \hat{l}_1 \hat{l}_2 + \hat{l}_2 \hat{l}_1}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2 + 2\hat{l}_1 \hat{l}_2} = \frac{\hat{l}_1^2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2 + 2\hat{l}_1 \hat{l}_2} = \hat{l}_1^2$$

$$l(l+1) = l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1) + 2l_1 l_2$$

$$\hat{l}_1 \hat{l}_2 = \frac{1}{2} \{ l(l+1) - l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1) \}$$

$$\frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1 \hat{l}_1} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2}$$

$$\frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1 \hat{l}_1} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2}$$

$$\frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1 \hat{l}_1} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2} = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2}$$

Результат: 3.26; 3.30; 3.38

Doza #6

#2.4 (5)

Вспомогательная функция $\psi(x)$ для ширинной асимптотической функции $\psi(x) = B \sin^2(\frac{\pi x}{a})$

найти разложение функции $\psi(x)$ в ряд Фурье

и среднее значение E $E = \frac{1}{a} \int_0^a \psi(x) dx$

Пусть $U_0 \rightarrow \infty, K_0 = \frac{a}{2}$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{8}{3a}} \left(\cos \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \right) \quad E < U_0$$

$$\int_0^a \psi(x) \psi(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^a B^2 \sin^4 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx = 1$$

$$B^2 \int_0^a \sin^4 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \frac{a}{\pi} d \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) = 1$$

$$B^2 \int_0^a \cos^3 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \frac{a}{\pi} d \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) = 1$$

$B = \sqrt{\frac{8}{3a}}$ - нормировочный коэффициент

$$\psi(x) = \sum C_n \psi_n(x), \quad \text{где } C_n = \frac{1}{a} \int_0^a \psi(x) \psi_n(x) dx$$

$$\psi(x) = \int_0^a \psi(x) \exp \left(i \frac{\pi p x}{a} \right) dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{i \frac{\pi p x}{a}}$$

$$= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\exp \left(i \frac{\pi p x}{a} \right) - \exp \left(-i \frac{\pi p x}{a} \right)}{2i} e^{i \frac{\pi p x}{a}} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i \frac{\pi p x}{a}}}{\frac{\pi p}{a}} - \frac{e^{-i \frac{\pi p x}{a}}}{-\frac{\pi p}{a}} + \frac{e^{i \frac{\pi p x}{a}}}{\frac{\pi p}{a}} - \frac{e^{-i \frac{\pi p x}{a}}}{-\frac{\pi p}{a}} \right] \Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\frac{e^{i \frac{\pi p a}{a}}}{\frac{\pi p}{a}} - \frac{e^{-i \frac{\pi p a}{a}}}{-\frac{\pi p}{a}} - \frac{e^{i \frac{\pi p a}{a}}}{\frac{\pi p}{a}} + \frac{e^{-i \frac{\pi p a}{a}}}{-\frac{\pi p}{a}} \right]$$

Найдем C_n :

$$a \int_0^a B \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\frac{\pi n x}{a} \right) dx = \sum C_n \delta_{nm} = C_n =$$

$$= -B \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{a}{\pi n} \cos \left(\frac{\pi n x}{a} \right) \Big|_0^a \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \Big|_0^a \frac{a}{\pi n} B \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{a}{\pi n}$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 E_n; \quad E_n = \frac{\hbar^2 K_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2$$

$$|C_n|^2 = \frac{256}{\pi^2} \left(\frac{1}{(n+1)^2 (n+1)^2 \cdot 4} \right), \quad n \text{ - парное}$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{256}{3\pi^2} \frac{1}{(n+1)^2 (n+1)^2 \cdot 4} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 =$$

$$= \left| \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = E_0 \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{256}{3\pi^2} \frac{n^2}{(n+1)^2 (n+1)^2 \cdot 4} E_0 = \frac{4}{3} E_0$$

$$(E)^2 = \frac{16}{9} E_0^2$$

$$(\bar{E}^2) = \sum E_n^2 |C_n|^2 = \frac{256}{3\pi^2} \frac{n^4}{(n+1)^2 (n+1)^2 \cdot 4} E_0 =$$

$$= \frac{16}{3} E_0^2$$

$$\Delta E = \bar{E}^2 - E^2 = \frac{16}{3} E_0^2 - \frac{16}{9} E_0^2 = \frac{48-16}{9} E_0^2 =$$

$$= \frac{32}{9} E_0^2$$

#2.6

Уравнение Шредингера с учетом электромагнитного поля

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \left[\frac{\kappa x^2}{2} - e \mathcal{E} x \right] \psi_n(x) = E_n \psi_n(x),$$

где $U(x) = -e \mathcal{E} x$ - потенциальная энергия частицы в электрическом поле

Заменим $\mathcal{E} = \frac{x}{2} - e \frac{\mathcal{E}_0}{\kappa}$;

$$\frac{x}{2} = \mathcal{E} + e \frac{\mathcal{E}_0}{\kappa}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \left[\kappa x \left(\frac{x}{2} - \frac{e \mathcal{E}_0}{\kappa} \right) \right] \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} + ((2\kappa z + e^2 \frac{e_0}{\kappa}) \kappa z) \psi_n(z) = E_n \psi_n(z)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} + (2\kappa z^2 + 6e^2 z) \psi_n(z) = E_n \psi_n(z)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} = (E_n - 2\kappa z^2 - 6e^2 z) \psi_n(z)$$

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) + (-e^2 e_0^2 \frac{1}{2\kappa}), \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

$$\psi_n(x) = \psi_n^{oa}(z) = \psi_n^{oa}(x - e e_0 \frac{1}{\kappa})$$

$\psi_n^{oa}(x)$ - волновая функция стационарных состояний гармонического осциллятора

Под действием E_{ext} во все время измерений мысленно на систему было приложено.

Doza #9

3.4 10)

Найти оператор

$$[Li, (\hat{p}\hat{r})\hat{p}]$$

$$[Li, (\hat{p}\hat{r})\hat{p}] = Li(\hat{p}\hat{r})\hat{p} - (\hat{p}\hat{r})\hat{p}Li =$$

$$= Li\hat{p}m\hat{r}m\hat{p} - \hat{p}m\hat{r}m\hat{p}Li = Li\hat{p}m\hat{r}m\hat{p} -$$

$$- \hat{p}m\hat{r}m(Li\hat{p} - i\hbar E_{ext}\hat{p}) = Li\hat{p}m\hat{r}m\hat{p} -$$

$$- \hat{p}m\hat{r}mLi\hat{p} + \hat{p}m\hat{r}m i\hbar E_{ext}\hat{p} = (Li\hat{p}m\hat{r}m - \hat{p}m\hat{r}mLi)\hat{p} +$$

$$= ((\hat{p}mLi + i\hbar E_{ext}\hat{p}m)\hat{r}m - \hat{p}m\hat{r}mLi)\hat{p} =$$

$$= (\hat{p}mLi\hat{r}m + i\hbar E_{ext}\hat{p}m\hat{r}m - \hat{p}m\hat{r}mLi)\hat{p} =$$

$$= i\hbar E_{ext}\hat{p}m\hat{r}m\hat{p} + \hat{p}m(Li\hat{r}m - \hat{r}mLi)\hat{p} =$$

$$= i\hbar E_{ext}\hat{p}m\hat{r}m\hat{p} + \hat{p}m i\hbar E_{ext}\hat{p} +$$

$$+ \hat{p}m\hat{r}m i\hbar E_{ext}\hat{p}$$

$$[Li, (\hat{p}\hat{r})\hat{r}] = Li\hat{p}m\hat{r}m\hat{r} - \hat{p}m\hat{r}mLi\hat{r} +$$

$$+ \hat{p}m\hat{r}m i\hbar E_{ext}\hat{r} - (Li\hat{p}m\hat{r}m - \hat{p}m\hat{r}mLi)\hat{r} +$$

$$+ \hat{p}m\hat{r}m i\hbar E_{ext}\hat{r} = (Li\hat{p}m\hat{r}m - \hat{p}m\hat{r}mLi)\hat{r} +$$

$$+ \hat{p}m\hat{r}m i\hbar E_{ext}\hat{r} = i\hbar E_{ext}\hat{p}m\hat{r}m\hat{r} + \hat{p}m i\hbar E_{ext}\hat{r} +$$

$$+ \hat{p}m\hat{r}m i\hbar E_{ext}\hat{r}$$

$$[Li, +a\hat{r} + b\hat{p}] = Li(a\hat{r} + b\hat{p}) - (a\hat{r} + b\hat{p})Li =$$

Comp?

$$= a(l_1^2 \chi_k - \chi_k l_1) + b(l_1^2 \chi_k - \chi_k l_1) =$$

$$= a i \hbar \epsilon_{ikl} \chi_l + b i \hbar \epsilon_{ikl} p_l$$

#3.3

составим оператор $L^2 = L(L+1)$ по аналогии с радиальным квантовым оператором $L^2 = L(L+1)$ для сферического момента. Тогда из того, что L^2 коммутирует с L_z , получим, что L^2 коммутирует с L_x и L_y .

$$L^2 = L(L+1) \quad m \in [-l, l] \quad \text{возможные значения}$$

и во эти моменты, получим, что компоненты момента радиального момента и сферического момента коммутируют.

$$L^2 = \bar{L}^2 = \bar{L}_x^2 + \bar{L}_y^2 + \bar{L}_z^2 = 3 \bar{L}_z^2$$

Все функции удовлетворяют уравнению, нормальному $\bar{L}_z^2 = (2l+1) \sum m^2 = l(l+1) \frac{1}{3}$, где

$$\sum_{m=0}^l m^2 = \left[\frac{d^2}{da^2} \sum_{m=0}^l e^{am} \right]_{a=0} = \left[\frac{d^2}{da^2} \frac{1-e^{a(l+1)}}{1-e^a} \right]_{a=0}$$

$$= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} = \frac{l(l+1)(2l+1)}{3}$$

$$L^2 = 3 \bar{L}_z^2 = l(l+1)$$

#3.7

Рассмотрим оператор L^2 и оператор L_z . Оператор L^2 коммутирует с L_z , поэтому можно искать общие функции ψ для обоих операторов.

Оператор L^2 коммутирует с L_z , поэтому можно искать общие функции ψ для обоих операторов.

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = i \hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

$$= -i \hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

Рассмотрим нам нужно перейти к системе координат (r, θ, ϕ) , то

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2; \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Заменим.

$$\frac{\partial}{\partial r_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial r}$$

Представим наши новые переменные в L^2 :

$$\hat{L}^2 = -i \hbar^2 \left[\left(R - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \right) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(R + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \right) \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]$$

②

$$\textcircled{1} = \left(R - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \right) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(R - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \right) =$$

$$= R \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} - R \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} r \frac{\partial}{\partial R} +$$

$$+ \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m_1}{m_2 + m_1} \frac{\partial R}{\partial R} + \frac{(m_1 m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial r}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial r} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial r}{\partial R}$$

$$\textcircled{2} = \left(R + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \right) \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(R + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \right) =$$

$$= R \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial R} + R \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} r \frac{\partial}{\partial R} +$$

$$+ \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial R}{\partial R} - \frac{(m_1 m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial r}{\partial r} -$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \frac{\partial r}{\partial r}$$

$$\begin{aligned} L &= -i \{ \textcircled{1} + \textcircled{2} \} = i \left\{ R \frac{\partial}{\partial R} \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} \right\} \\ &= i \left\{ R \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial R} R + \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} \right\} = \\ &= -i \left\{ \left(R \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial R} R \right) + \left(r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} r \right) \right\} = \\ &= -i \{ [R \frac{\partial}{\partial R}] + [r \frac{\partial}{\partial r}] \} \end{aligned}$$

оператор импульса
уравнения с гамильтонианом
импульса и т.д.

оператор импульса
с гамильтонианом
импульса и т.д.

4.29

Задача # 12

29.04.10.

Найти нормированную волновую функцию сферического ядра.

$$\begin{aligned} \psi(r) &= e^{-r/a} \\ \psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \\ \psi(r) &= \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dr' \quad (\textcircled{=}) \end{aligned}$$

$$\textcircled{=} e \int \frac{\delta(r') - |\psi_0(r')|^2}{|r-r'|} dr' = \frac{e}{r} - e \int \frac{|\psi_0(r')|^2}{|r-r'|} dr' =$$

$$= \frac{e}{r} - e \int \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r'/a} \frac{1}{|r-r'|} dr' \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\left\{ \frac{1}{|r-r'|} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^l, & r' < r \\ \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{r'}\right)^l, & r' > r \end{cases} \right\}$$

сферическая
функция
нормированная

$$\textcircled{=} \frac{e}{r} - \frac{e}{\pi a^3} \int \sin \theta d\theta \int_0^\pi e^{-2r'/a} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^l \times r'^2 dr' =$$

$$= \frac{e}{r} - \frac{2e}{a^3} \left(\int_0^r e^{-2r'/a} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_l(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^l r'^2 dr' \right) +$$

$$\left(\int_r^\infty e^{-2r'/a} \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{r'}\right)^l r'^2 dr' \right) \quad (\textcircled{1})$$

$$\textcircled{2} = \int \sin \theta d\theta P_l(\cos \theta) = - \int P_l(\cos \theta) d \cos \theta =$$

$$= \int_{-1}^1 P_l(x) dx = \int_{-1}^1 P_0(x) P_0(x) dx = 2$$

решения есть функции Бесселя $(l+1/2)$ и $(l-1/2)$

$$\begin{aligned} f &\sim J_{l+1/2}(z) \\ &\sim J_{l-1/2}(z) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} f &\sim J_{l+1/2}(z) \\ &\sim J_{l-1/2}(z) \end{aligned}} \right\} \text{наши решения}$$

тогда ~~тогда~~

$$u(z) = \sqrt{z} (C_1 J_{l+1/2}(z) + C_2 J_{l-1/2}(z)) \quad \text{---}$$

$$\{z = kr\}$$

$$\text{---} \sqrt{\frac{\pi z}{2}} (C_1 J_{l+1/2}(z) + C_2 J_{l-1/2}(z)) =$$

коэф-ты ф-ии Бесселя
получаются обратные

$$= C_1 J_l(z) + C_2 Y_l(z) = C_1 J_l(kr) + C_2 Y_l(kr)$$

коэф-ты ф-ии Бесселя

$$\sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{l+1/2}$$

решения для l и $l+1$

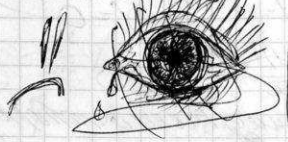
$$\psi = \frac{1}{r} u(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{r} C J_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

осталось найти C ; а потом нормировочного коэффициента C ;

$$J_l(kr) = 0$$

уравнение для нахождения k

Пример:



$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \sin z \\ J_{3/2}(z) &= \frac{\sin z}{z} - \cos z \\ J_0 z &= z \end{aligned}$$

Дога #10

#3.12(5)

Поскольку мы хотим найти ψ_m ортогональные, следовательно m должно быть целым числом. Иначе не получится.

Докажем, что $\langle l_x, l_y \rangle = -\langle l_y, l_x \rangle = i \frac{m}{2}$

$$l_+ = l_x + i l_y \quad l_- = l_x - i l_y$$

$$[l_y, l_z] = i \hbar l_x \times l_z = i \hbar l_x$$

$$[l_x, l_z] = i \hbar l_y \times l_z = -i \hbar l_y$$

$$[l_+, l_-] = [l_x + i l_y, l_x - i l_y] = [l_x, l_x] - [l_x, i l_y] + [i l_y, l_x] - [i l_y, l_x] = -i [l_x, l_y] + i [l_y, l_x] = -i (i \hbar l_z) + i (-i \hbar l_z) = \hbar l_z$$

$$l_z^2 = (l_x + i l_y)^2 = l_x^2 - l_y^2 + i (l_x l_y + l_y l_x)$$

из задачи #3.1(8) известно $l_x^2 = l_y^2 \rightarrow l_x l_y = l_y l_x$

известно, что $[l_x, l_y] = i \hbar l_z = l_y l_x - l_x l_y = i m$

то есть $l_y l_x - l_x l_y = i m$

$$\begin{aligned} \text{так же известно, что } l_z = \int d\Omega \psi_m^\dagger l_z \psi_m = \\ = \int d\Omega \psi_m^\dagger \psi_m l_z = 0 \end{aligned}$$

отсюда $l_z^2 = 0 \rightarrow l_x l_y + l_y l_x = 0$; $l_x l_y = -l_y l_x$

значит $l_x l_y = -l_y l_x = i \frac{m}{2}$

3.13.

В состоянии покоя с определенными значениями
момента импульса l и его проекции m
на ось z . Найти $\overline{lx'}$ и $\overline{ly'}$.

Из задания # 3.12(б) известно, что $\overline{lx^2} = \overline{ly^2}$,
также $\overline{L^2} = \overline{lx^2} + \overline{ly^2} + \overline{l_z^2} \Rightarrow \overline{lx^2} + \overline{ly^2} = \overline{L^2} - \overline{l_z^2} =$

$$= 2\overline{lx^2} = l(l+1) - m^2$$

$$\text{откуда } \overline{lx^2} = \overline{ly^2} = \frac{1}{2}(l(l+1) - m^2)$$

Практика 1

- 1) 1.1
- 2) 1.2
- 3) 1.8, 1.10
- 4) 1.12
- 5) 1.13

Доза 1

- 6) 1.1, 1.2
- 7) 1.3, 1.4, 1.5, 1.6

Практика 2

- 8) 1.19
- 10) 1.22
- 11) 1.27
- 13) 1.31

Доза 2

- 14) 1.12, 1.15
- 16) 2, 3

Доза 3

- 18) 1.20, 1.23, 1.25

Доза 4

- 19) 1.29

20) Практика 6

23) Практика 7

26) Доза 5

27) Практика 8

Практика 9

- 29) 3.2
- 31) 3.6

Практика 10

- 32) 3.12
- 33) 3.15

Практика 7

- 35) 2.20
- 39) 3.15

Практика 11

- 42) 3.34

Доза 6

- 43) 2.4, 2.6

Доза 9

- 44) 3.4
- 45) 3.3, 3.7

Практика 12

- 46) 4.29
- 47) 4.33

Доза 10

- 48) 3.12
- 49) 3.13