Домашние задания
по атомно-ядерной физике
студентки 3-го курса
физико-технического факультета
группы ЯТ-31
Самиховой Инны

Задача 2.3

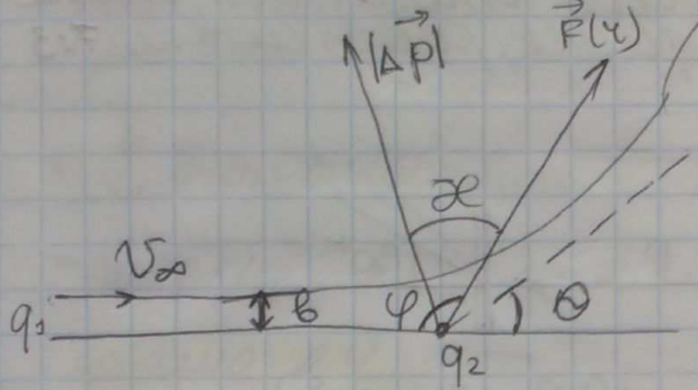
Вывести с помощью законов сохранения энергии и момента импульса формулу

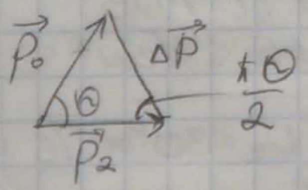
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = (q_1 q_2)/(2bT)$$

b - приц. параметр

$T=K$ - кинет. энергия налет. частицы

q_1, q_2 - заряды взаимод. частиц





$$|\Delta\vec{p}| = 2p_\infty \sin\frac{\Theta}{2}$$

$$|\Delta\vec{p}| = \left|\int F_{\Delta p}\, dt\right| = \int F\cos\varkappa\, dt = \int \frac{q_1 q_2}{r^2(t)}\cdot\cos\varkappa\, dt = q_1 q_2 \int \frac{\cos\varkappa(r)}{r^2(t)}\, dt = \left\| m r^2 \dot\varphi = m v_\infty b \Rightarrow r^2 = \frac{b v_\infty dt}{d\varphi} \right\| \text{ из ЗСМИ:}$$

$$\cos\varkappa(r) = \cos\left\{\varphi - \frac{\pi-\Theta}{2}\right\} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2} + \varphi\right) = -\sin\left(\varphi + \frac{\Theta}{2}\right) \Big\| = q_1 q_2 \int_0^{\Theta} -\frac{\sin(\varphi + \frac{\Theta}{2})}{b v_\infty}\, d\varphi =$$

$$= \frac{q_1 q_2}{b v_\infty} \cos\left(\varphi + \frac{\Theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi-\Theta} = \frac{2 q_1 q_2}{b v_\infty}\cos\frac{\Theta}{2}$$

$$2p_\infty \sin\frac{\Theta}{2} = \frac{2q_1 q_2}{b v_\infty}\cos\frac{\Theta}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{2bK}$$

Задача 2.22

Узкий пучок протонов с кинет. энергией $T = 1{,}0$ МэВ падает нормально на латунную фольгу толщиной $\rho d = 1{,}5$ мг/см^2. Найти долю протонов, рассеивающихся на углы больше $\Theta_0 = 30°$, если массовое отношение меди (Cu) и цинка (Zn) в фольге равно соотв-но 7:3

Дано:

$K_\alpha = T = 1{,}0$ МэВ

$\rho d = 1{,}5$ мг/см^2

$b = 1$

$\Theta_1 = \upsilon_0 = 30° = \pi/6$

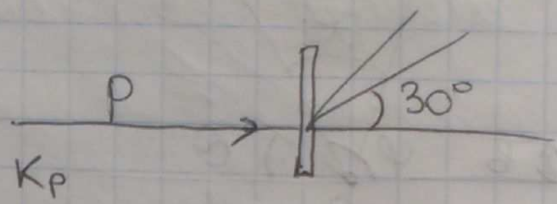
$\Theta_2 = \pi$

$m_{меди} : m_{Zn} = 7:3$

Фольга: медь к цинку

$Cu \quad {}^{65}_{30}Zn$

$\frac{\Delta N_p}{\Delta N_n}$ — ?



$$\frac{\Delta N}{N} = n\left(\frac{q_1 q_2}{4bK_\alpha}\right)^2 \frac{\Delta\Omega}{\sin^4\Theta/2}$$

$$\begin{cases} 179\text{ г} - A = 6{,}023\cdot10^{23}\ 1/\text{моль} \\ 1{,}5\cdot10^{-3}\text{ г} - n \end{cases}$$

$$n = \frac{6{,}023}{179}\cdot 1{,}5\cdot10^{-3} \approx 5{,}02\cdot10^{18}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = n\left(\frac{q_1 q_2}{4bK_\alpha}\right)^2 \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{2\pi \sin\Theta\, d\Theta}{\sin^4\Theta/2} = 2\pi n\left(\frac{q_1 q_2}{4bK_\alpha}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{d\sin\Theta/2}{\sin^3\Theta/2} = 4\pi n\left(\frac{q_1 q_2}{4K_\alpha}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\Theta/2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi} =$$

$$= -2\pi n\left(\frac{q_1 q_2}{4K_\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1/4}\right) = 6\pi n\left(\frac{q_1 q_2}{4K_\alpha}\right)^2$$

$$n_1 = \left(\frac{7}{7+3}\right)n \qquad n_2 = \left(\frac{3}{7+3}\right)n$$

$$\frac{\Delta N_p}{N_n} = \left(\frac{\Delta N_p}{\Delta N_n}\right)_{Cu} + \left(\frac{\Delta N_p}{\Delta N_n}\right)_{Zn} = 6\pi n_1\left(\frac{q_1 q_3}{4K_\alpha}\right)^2 + 6\pi n_2\left(\frac{q_1 q_4}{4K_\alpha}\right)^2$$

$$\frac{\Delta N_p}{N_n} = 6\cdot\pi\,\frac{7}{10}\,n\left(\frac{q_1 q_3}{4K_\alpha}\right)^2 + 6\cdot\pi\cdot\frac{3}{10}\,n\left(\frac{q_1 q_4}{4K_\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{6}{10}\pi n\left(\frac{q_1}{4K_\alpha}\right)^2\left(7q_3^2+3q_4^2\right)$$

$$\frac{\Delta N_p}{N_n} = \frac{6}{10}\pi\cdot 5{,}02\cdot 10^{18}\left(\frac{1}{\text{моль}}\right)\frac{e^2}{4\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{12}\,\text{эрг}}\left(\frac{7e^2 12^2+3e^2 30^2}{4\cdot 1{,}6\cdot 10^6\cdot 10^{12}}\right) =$$

$$= \frac{6}{10}\pi\, 5{,}02\cdot 10^{18}\,\frac{1}{\text{моль}}\,\frac{e^2}{6{,}2\cdot 10^{-2}\,\text{эрг}}\,\frac{9e^2(7\cdot 4^2+3\cdot 10^2)}{6{,}4\cdot 10^{-6}} =$$

$$= 9{,}88\cdot 10^{-17}\pi\cdot 10^{-3} \approx 2{,}7\cdot 10^{-16}\cdot 10^{13} = \underline{2{,}7\cdot 10^{-3}}$$

Задача 2.4

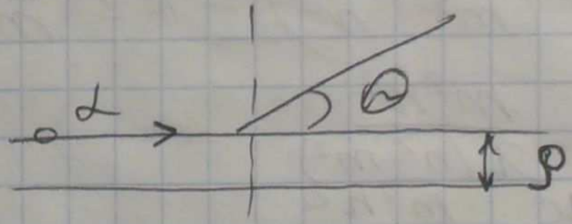
α-частицу с импульсом $p_\alpha = 53$ МэВ/с, (где с – скор. света) рассеялась под углом $60°$ в кулоновском поле неподвижного ядра урана. Найти прицельное расстояние.

Дано:

$K_\alpha = 53$ МэВ

$\Theta = 60°$

$\rho - ?$



$$\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{2\rho K_\alpha}$$

$q_1 = 2e \qquad q_2 = Ze$

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \frac{Ze^2}{\rho K_\alpha} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{Ze^2}{\rho\cdot 1{,}6\cdot 53\cdot 10^{-6}}$$

$$\rho = \frac{3Ze^2}{\sqrt{3}\;1{,}6\cdot 53\cdot 10^{6}} = \frac{Ze^2\cdot 10^6}{48}$$

$z = 92$

$$\rho = \frac{92\,(4{,}8\cdot10^{-10})^2\cdot10^6}{48} \approx 44{,}16\cdot10^{-14}\,(\text{см})$$

Задача 2.35

В спектре некоторых в/п ионов длина волны третьей линии серии Бальмера равна 108,5 нм. Найти энергию связи электрона в основном состоянии этих ионов

Дано:

$\lambda = 108{,}5$ нм

$n = 5$

Бальмер

$E_n - ?$

$$E_n = -\frac{hcR}{n'^2}z$$

$$R_z = R\cdot z^2$$

$$k = R_z\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) = Rz^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} = Rz^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) = Rz^2\frac{n^2-m^2}{m^2n^2}$$

$$Rz^2 = \frac{m^2n^2}{\lambda(n^2-m^2)}$$

$$E_n = -\frac{hc}{n'}\,\frac{m^2n^2}{\lambda(n^2-m^2)}$$

$hc = 1{,}24\cdot10^{-6}$ м эВ

$n' = 1$

$m = 2$

$$E_n = \frac{1{,}24\cdot10^{-6}}{1}\,\frac{4\cdot25}{108{,}5\cdot10^{-9}\,(25-4)} = 0{,}0544\cdot10^{3} = 54{,}4\ \text{эВ}$$

Задача 2.32

Какие линии содержит спектр поглощения

атомарного водорода в диапазоне ваш.

$\lambda_n = 94{,}5\,нм$
$\lambda_m = 130\,нм$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_n} = R\left(1 - \frac{1}{n_n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n_n^2} = 1 - \frac{1}{\lambda_n R} = 0{,}038 \qquad n_n^2 = 26{,}3 \Rightarrow \underline{n_n = 5{,}1}$$

$$\frac{1}{\lambda_m} = R\left(1 - \frac{1}{n_m^2}\right)$$

$$\frac{1}{n_m^2} = 1 - \frac{1}{\lambda_m R} = 0{,}3 \qquad n_m^2 = 3{,}3 \Rightarrow \underline{\underline{n_m = 1{,}82}}$$

$$n_1: \quad \lambda_1 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{n_1^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1{,}1 \cdot 10^7}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-1} =$$

$$= \underline{121{,}2\,нм}$$

$$n_2: \quad \lambda_2 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{n_2^2}\right)^{-1} = \underline{102{,}3\,нм}$$

$$n_3: \quad \lambda_3 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{n_3^2}\right)^{-1} = \underline{96{,}97\,нм}$$

$$n_4: \quad \underline{\lambda_4 = 94{,}7\,нм}$$

Задача 1

Найти в днепах ваш спектр. интервалы, в кот. содержатся серии Лаймана, Бальмера и Пашена для атомарного водорода. Изобразить на шкале ваш их относит. располож. и выделить видимую часть спектра.

Лайман: $\frac{1}{\lambda_{21}} = R\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \Rightarrow$

$$\lambda_{21} = \frac{1}{R} \cdot \frac{4}{3} = 121{,}2 \text{ нм}$$

$$\lambda_{31} = \frac{1}{R} \frac{9}{8} = 102{,}3 \text{ нм}$$

$$\lambda_{41} = \frac{1}{R} \frac{16}{15} = 96{,}97 \text{ нм}$$

$$\lambda_{51} = \frac{1}{R} \frac{25}{24} = 94{,}7$$

Бальмер: $\frac{1}{\lambda_{32}} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \Rightarrow$

$$\lambda_{32} = \frac{36}{5R} = 654{,}55 \text{ нм}$$

$$\lambda_{42} = \frac{16}{3R} = 484{,}4 \text{ нм}$$

$$\lambda_{52} = \frac{100}{21R} = 432{,}9 \text{ (нм)}$$

Пашен: $\frac{1}{\lambda_{43}} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)$

$$\lambda_{43} = \frac{144}{7R} = 1870{,}1 \text{ нм}$$

$$\lambda_{53} = \frac{225}{16R} = 1278{,}4 \text{ нм}$$

Задача 2.45

Вычислить отношение массы протона к массе электрона, если известно, что отношение постоянных Ридберга тяжелого и легкого водорода $\eta = 1{,}000272$, а отношение масс ядер $n=2$ ...

$\frac{R_2}{R_1} = \eta$

$\eta = 1{,}000272$

$\frac{m_{e_1}}{m_{e_2}} = 1/2$

$\frac{m_e}{m_p}$ — ?

$$R_1 = R_\infty\left(1 + \frac{m_e}{m_{e_1}}\right)^{-1}$$

$$R_2 = R_\infty\left(1 + \frac{m_e}{m_{e_2}}\right)^{-1}$$

$$\frac{1 + \frac{m_e}{m_p}}{1 + \frac{m_e}{m_p}} = \eta$$

$$1+\frac{m_e}{m_p}=\left(\eta+\frac{\eta}{2}\frac{m_e}{m_p}\right)$$

$$\frac{m_e}{m_p}\left(1+\frac{\eta}{2}\right)=\eta-1$$

$$\frac{m_e}{m_p}=\frac{\eta-1}{1-\eta/2}$$

$$\frac{m_e}{m_p}=0{,}000544 \qquad \frac{m_p}{m_e}=1838$$

Задача 2.46

Найти для лёгкого и тяжелого водорода разность: а) энергий связи электронов в основных состояниях

б) первых потенциалов возбуждения

в) длин волн резонансных линий

Дано: $H_л$; $H_т$

ΔE – ?

ΔU_1 – ?

$\Delta\lambda_p$ – ?

$$E_л=\left(1+\frac{m_e}{m_p}\right)^{-1}\cdot 13{,}6\ эВ$$

$$E_т=\left(1+\frac{m_e}{2m_p}\right)^{-1}\cdot 13{,}6\ эВ$$

$$E_т-E_л=13{,}6\ эВ\left[\left(1+\frac{m_e}{2m_p}\right)^{-1}-\left(1-\frac{m_e}{m_p}\right)^{-1}\right]=$$

$$=0{,}003696\ эВ$$

$$U_{1л}=\frac{1}{e}\cdot\frac{3}{4}\cdot 13{,}6\left(1+\frac{m_e}{m_p}\right)^{-1}=10{,}194454\ В$$

$$U_{1т}=\frac{1}{e}\cdot\frac{3}{4}\cdot 13{,}6\left(1+\frac{m_e}{2m_p}\right)^{-1}=10{,}197226\ В$$

$$\Delta U=0{,}002772\ В$$

$$\lambda_л=\frac{2\pi\hbar c}{E_2-E_1}=1220{,}8636\ Å \qquad \lambda_т=1220{,}3318\ Å$$

$$\Delta\lambda=0{,}3318\ Å$$

Задача 2.26 (а)

Считая ядро неподвижным вычислить для атома водорода H:
а) радиусы первых двух боровских орбит
б) кинетическую энергию электрона и его энергию связи в основном состоянии
в) первый потенциал возбуждения и длину волны резонансной линии.

Дано: H

$r^{(1)}$ - ?
$v^{(1)}$ - ?
$T^{(1)}$ - ?
$E^{1}_{св}$ - ?
$\lambda^{(1)}$ - ?

$$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1 \qquad v_n = \frac{Ze^2}{\hbar^2 n}$$

$$E_n = -\left(\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\right)\frac{Z^2}{n^2}$$

H: $r^{(1)} = \underline{0{,}53\ A^\circ}$

$$v^{(1)} = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{4{,}8^2 \cdot 10^{-20}}{1 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-27}} = \underline{2{,}19 \cdot 10^8\ (см/с)}$$

$$r^{(2)} = 4 \cdot r_1 = \underline{2{,}12\ A^\circ}$$

$$v^{(2)} = \frac{v^{(1)}}{2} = \underline{1{,}09 \cdot 10^8\ см/с}$$

$$T^{(1)} = E^{(1)}_{св} = \frac{m_e v^{(1)2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28} (2{,}19 \cdot 10^8)^2 =$$
$$= \underline{13{,}6\ эВ}$$

$$U_1 = \frac{1}{e}\left(E^{(2)} - E^{(1)}\right) = \frac{13{,}6\ эВ}{e}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10{,}2\ В$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E^{(2)} - E^{(1)}} \Rightarrow \lambda_p = 1220\ A^\circ$$

Задача 1.44

Найти MAX кинетическую энергию фотоэлектронов вырываемых с поверхности лития ЭМ излучением напряженность электрической составляющей которого меняется во времени по закону: $K = a(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t$, где

a - постоянная

$\omega = 6{,}0\cdot10^{14}\,c^{-1}$; $\omega_0 = 3{,}60\cdot10^{15}\,c^{-1}$

Дано:

$K = a(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t$

$a = const$

$\omega = 6{,}0\cdot10^{14}\,c^{-1}$

$\omega_0 = 3{,}6\cdot10^{15}\,c^{-1}$

$K_{e\,max}$ - ?

$$K = a\cos\omega_0 t + a\cos\omega t\cos\omega_0 t = a\cos\omega_0 t + \frac{a}{2}\cos(\omega+\omega_0)t + \frac{a}{2}\cos(\omega-\omega_0)t$$

$$K_{e\,max} = \frac{a}{2}\cos(\omega+\omega_0)t$$

$$K_{e\,max} = h\nu - A$$

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$K_{e\,max} = \frac{h}{2\pi}(\omega+\omega_0) - A = \hbar(\omega+\omega_0) - A$$

$$K_{e\,MAX} = 0{,}55\ эВ$$

Задача 1.48

Фотон с длиной волны $\lambda = 17.0$ пм вырывает из покоящегося атома электрон, энергия связи которого $E_{св} = 69{,}3$ кэВ. Найти импульс, переданный атому в результате этого процесса, если электрон вылетел под прямым углом к направлению налетающего фотона.

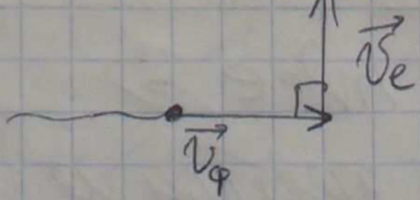
Дано:

$\lambda = 17$ пм

$E_{св} = 69{,}3$ кэВ

---

p_e - ?



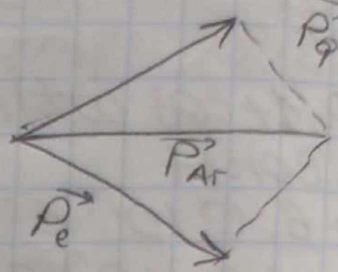
$$K_e = \frac{hc}{\lambda} - E_{св}$$

$$K_e = \frac{1234}{0{,}017} - 69{,}3\cdot10^{3}\ эВ = 3{,}3\ кэВ$$

$$(\vec{p}_{ат})^2 = (\vec{p}_e)^2 + (\vec{p}_ф)^2$$

$$p_ф = \frac{h\nu}{c} \qquad p_e = \sqrt{2m_e K_e}$$

$$p_{ат} = \sqrt{2m_e K_e + \frac{h^2\nu^2}{c^2}}$$



$$p_{ат} = 96 \ кэВ/c$$

Задача 1.49

Воспользовавшись законами сохранения, показать, что свободный электрон может поглотить фотон

<u>ЗС.Э</u> $\quad h\nu = m_e c^2 + K_e \quad$ (K_e - кинет.эн. сис-мы)

Допустим, что электрон поглотил фотон тогда полная энергия системы после столкновений

$$E = c\sqrt{p_e^2 + m^2c^2} \qquad c\sqrt{p_e^2+m^2c^2} = K_e + mc^2$$

$$c^2p_e^2 + m^2c^4 = K_e^2 + 2K_e mc^2 + m^2c^4$$

$$K_e = \frac{p_e^2}{2m} \rightarrow p_e = \sqrt{2mK_e}$$

$$2mK_e c^2 = K_e^2 + 2mK_e c^2$$

$K_e = 0$ и тогда: $h\nu = e \Rightarrow$

следовательно электрон не может поглотить фотон

5

Задача 3.1

Вычислить де-Бройлевскую длину волны электрона и протона, движущихся с кинетич. энергией 1,00 кэВ. При каких значениях кинет. энергии их длина волны будет равна 100 пм?

$E = 1$ кэВ
$\lambda_0 = 1\,A^\circ$

$\lambda_e - ?\ \lambda_p - ?$

$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}}$

$\lambda_p = \frac{h}{p_p} = \frac{h}{\sqrt{2m_p E}}$

$\lambda_e = 0{,}88\,A^\circ$ $\lambda_p = 0{,}009\,A^\circ$

$E_0 = \frac{h^2}{2m\lambda_0^2}$; $E_{0e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda_0^2} = 150$ эВ

Задача 3.7

Нейтрон с кинет. энергией $= 0{,}25$ эВ испытал упругое соударение с первоначально-покоящимся ядром атома ^4He. Найти длины волн обеих частиц в их центр. системе до и после соударения.

в системе ц: $\vec{p}_n' + \vec{p}_{He}' = 0$

$\vec{p}_{He}' = m_{He}\vec{v}$, $\vec{v}$ - скорость после удара

$\vec{v} = \frac{m_n}{m_n + m_{He}}\vec{v}$ $\vec{v} = \frac{\vec{p}_n}{m_n + m_{He}}$

$\vec{p}_{He}' = \frac{m_{He}\vec{p}_n}{m_n + m_{He}}$

$\lambda_{He}' = \frac{h}{p_n}\left[1 + \frac{m_e}{m_{He}}\right] = \frac{h}{\sqrt{2m_n K_n}} \times$

$|\vec{p}_n'| = |\vec{p}_{He}'| \Rightarrow \lambda_{He} = \lambda_n'$

$\times \left[1 + \frac{m_n}{m_{He}}\right] \simeq 0{,}7\,A^\circ$

$\lambda_n = 0{,}56\,A^\circ$

Задача 3.14

Поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой щелью шириной $b = 20$ мкм. Найти скорость электронов если на экране, отстающем от щели на $l = 50$ см, ширина центрального дифракционного max $\Delta x = 0,36$ мм

$\Delta x = 0,36$ мм
$b = 20$ мкм
$l = 50$ см

$E - ?$

$$E = \frac{p^2}{2m_e}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\lambda = b \sin\Theta \quad ; \quad \sin\Theta = \frac{\Delta x}{2l}$$

$$p = \frac{2hl}{b\Delta x}$$

$$E = \frac{[2lh]^2}{2b^2 m_e \Delta x^2} = \frac{1}{2m_e}\left(\frac{2lh}{b\Delta x}\right)^2$$

$E = 2,6$ эВ

Задача 3.22

Показать, что измерение x-координат частиц с помощью микроскопа вносит неопределенность в ее импульс Δp_x такую, что $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$. Иметь ввиду, что разрешение микроскопа $d = \lambda / \sin\Theta$, где λ – длина волны

$\Delta p_x = p \sin\Theta \quad ; \quad \Delta x \sim b \quad ;$

$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} \quad ; \quad \Delta p_x = \frac{h}{x} \sin\Theta \qquad \lambda = b \sin\Theta$

$\Delta p_x = \frac{h}{b} = \frac{h}{\Delta x}$

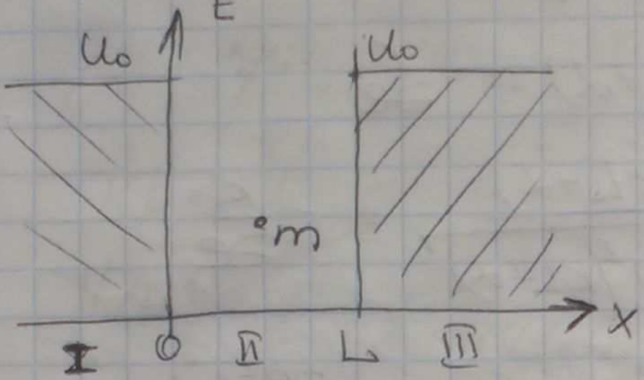
$$\boxed{\Delta p_x \Delta x = h}$$

Generated by CamScanner from intsig.com

6

Задача 3.49

Частица массой m находится в одномерном симметр. потенц. поле. Найти ур-ие, определяющее возможные значения энергии частицы в области $E<U_0$



$I: x \leq 0 \quad U(x) = U_0 \rightarrow \psi_1$

$II: 0<x<L \quad U(x) = 0 \rightarrow \psi_2$

$III: x \geq L \quad U(x) = U_0 \rightarrow \psi_3$

Запишем ур-ие Шредингера: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E-U_0]\psi_1 = 0 \\ &\psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_2 = 0 \\ &\psi_3'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &\psi_1'' + k_1^2\psi_1 = 0 \\ &\psi_2'' + k_2^2\psi_2 = 0 \\ &\psi_3'' + k_3^2\psi_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\psi_2 = b\sin(k_2 x + \alpha)$$

$E<U_0 \quad E-U_0<0 \Rightarrow k_1 = i\varkappa \qquad k_3 = \varkappa$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar}}$$

$\psi_1'' - \varkappa^2\psi_1 = 0 \ ; \quad \psi_1 = a'e^{-\varkappa x} + ae^{\varkappa x}$

$\psi_3'' - \varkappa^2\psi_3 = 0 \ ; \quad \psi_3 = c'e^{\varkappa x} + ce^{-\varkappa x}$

$x \rightarrow \infty \quad e^{-\varkappa x} \rightarrow \infty \rightarrow a' = 0 \quad c' = 0$

$\psi_1 = ae^{\varkappa x} \qquad \psi_3 = ae^{-\varkappa x}$

свойство неопределенности:

$x=0 \quad \psi_1(0)=\psi_2(0)$ $\qquad a = b\sin\alpha$

$x=L \quad \psi_2(L)=\psi_3(L)$ $\qquad b\sin(kL+\alpha)=ce^{-æL}$

$x=0 \quad \psi_1'(0)=\psi_2'(0)$ $\qquad aæ = bk\cos\alpha$

$x=L \quad \psi_2'(L)=\psi_3'(L)$ $\qquad kb\cos(kL+\alpha)=-æce^{-æL}$

$$tg\,\alpha=\frac{k}{æ} \qquad tg(kL+\alpha)=-\frac{k}{æ}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2 L}}=\frac{k}{æ} \qquad \frac{\sin(kL+\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(kL+\alpha)}}=-\frac{k}{æ}$$

$$1-\sin^2 L=\frac{æ^2}{k^2}\sin^2\alpha \qquad 1-\sin^2(kL-\alpha)=\frac{æ^2}{k^2}\sin^2(kL+\alpha)$$

$$\frac{æ^2+k^2}{k^2}\sin^2\alpha=1 \qquad \frac{æ^2+k^2}{k^2}\sin^2(kL+\alpha)=1$$

$$\sin^2\alpha=\frac{k^2}{æ^2+k^2} \qquad \sin^2(kL+\alpha)=\frac{k^2}{æ^2+k^2}$$

$$æ^2+k^2=\frac{2m}{\hbar^2}(U_0-E)+\frac{2m}{\hbar^2}E=\frac{2m}{\hbar^2}U_0$$

точки $x=0$; $x=L$; $E=U_0$; искл. α $(\alpha=0)$ $\Rightarrow$

$$\sin^2(kL+\alpha)=\frac{k^2\hbar^2}{2mU_0}$$

$$\sin(kL+\alpha)=\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_0}}$$

Задача 3.50

Воспользовавшись решением предыдущей задачи найти значение L^2U_0, при котором:

а) энергия основного состояния частицы $E=U_0/2$

б) появляется второй уровень, n-тый уровень

Сколько дискретных уровней содержит данная яма, если $l^2U_0 = \frac{75\hbar^2}{m}$

а) основное состояние соотв. $n=1$, в формуле

$$kl = \pi n - \frac{2\arcsin}{\hbar k(\sqrt{2mU_0})}$$

реш. предыдущ. задачи при $E = U_0/2$

$$kl = \pi/2 \Rightarrow l^2U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{4m} \qquad k = \sqrt{\frac{2U_0}{\hbar}}$$

$$\sqrt{\frac{mU_0}{\hbar}}\,l = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/2 \qquad l^2U_0 = \frac{2\hbar^2}{4m}$$

б) $kl = \pi n - 2\arcsin / \hbar k(\sqrt{2mU_0})$

при появлении уровней $kl = \pi, 2\pi \ldots (n+1)\pi$ и аргумент у arcsin в этих случаях равен 1

$$\hbar k = \sqrt{2mU_0} \Rightarrow l^2U_0 = \frac{(n-1)^2\pi^2\hbar^2}{2m} \qquad n = 2, 3 \ldots$$

опред. число уровней ну: $n > \sqrt{2ml^2U_0}\,\pi\hbar > n-1$

$\underline{n=4}$

Задача 3.60

Частица массой m и энергией E падает на прямоугольную потенц. яму. Найти:

а) коэф. прозрачности D и коэф. отражения R

б) значение E, при кот. частица будет беспрепятственно проходить ч/з данную яму. Убедиться, что это будет происходить при условии

7

$l = n\lambda/2$, где λ – длина волны частицы внутри ямы $n = 0, 1, 2 \ldots$

а) $\psi_1 = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx)$

$\psi_2 = A_2 \exp(i\varkappa x) + B_2 \exp(-i\varkappa x)$

$\psi_3 = A_3 \exp(ikx)$

$$\begin{rcases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ kA_1 - kB_1 = \varkappa A_2 - \varkappa B_2 \end{rcases}$$

$A_1 \exp(i\varkappa L) + B_2 \exp(-i\varkappa L) = A_3 \exp(ikL)$

$\varkappa A_2 \exp(i\varkappa L) + \varkappa B_2 \exp(-i\varkappa L) = kA_3 \exp(ikL)$

$$\begin{rcases} 2kA_1 = (k+\varkappa) A_2 + (k-\varkappa) B_2 \\ 2\varkappa A_2 \exp(i\varkappa L) = (k+\varkappa) A_3 \exp(ikL) \end{rcases}$$

$2\varkappa B_2 \exp(-i\varkappa L) = (\varkappa - k) A_3 \exp(ikL)$

$$2kA_1 = \frac{(k+\varkappa)^2}{2\varkappa} A_3 \exp(i-(k-\varkappa)L) - \frac{(\varkappa-k)^2}{2\varkappa} A_3 \exp((k+\varkappa)L)$$

$$2kA_1 = A_3 \exp(ikL)\left(\frac{k+\varkappa}{2\varkappa}\right)^2 \exp(-i\varkappa L) - \frac{(\varkappa-k)^2}{2x} \exp(i\varkappa L)$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4k\varkappa}{\exp(ikL)(k+\varkappa)^2 \exp(-i\varkappa L)(\varkappa-k)^2 \exp(\varkappa L)}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\exp(ikL) - 2k^2 i \sin(\varkappa L) - 2\varkappa^2 i \sin(\varkappa L) - 4k\varkappa \cos(\varkappa L)}{4k\varkappa}$$

$$\left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \left(\frac{4(k^2+\varkappa^2)^2 \sin^2(\varkappa L) + 16k^2\varkappa^2 \cos^2(\varkappa L)}{16k^2\varkappa^2}\right)^{-1} =$$

$$D = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \left(\frac{(k^2+\varkappa^2) \sin^2(\varkappa L) + 4k^2\varkappa^2 \cos^2(\varkappa L)}{4k^2\varkappa^2}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{(k^4+2k^2\varkappa^2+\varkappa^4)\sin^2(\varkappa L)+4k^2\varkappa^2\cos^2(\varkappa L)}{16k^2\varkappa^2}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1+\frac{(k^2-\varkappa^2)^2\sin^2(\varkappa L)}{4k^2\varkappa^2}\right)^{-1};$$

$$R = 1-D = \frac{(k^2-\varkappa^2)^2\sin^2(\varkappa L)}{4k^2\varkappa^2+(k^2-\varkappa^2)^2\sin^2(\varkappa L)}$$

$$D = \left(1+\frac{U_0^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar}(E-U_0)}\,L\right)}{4E(E-U_0)}\right)$$

б) $\sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar}[E-U_0]}\,L\right)=0$

$$\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[U_0+E]}\,L\right)=(\pi n)^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}[E-U_0]=\left(\frac{\pi n}{L^2}\right)^2$$

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2mL^2}-U_0$$

Задача 4.71

Используя подстановку $R(r)=\frac{\varkappa(r)}{r}$, найти асимптотический вид радиальной части волновой функции $R(r)$ для связанных состояний в кулоновском поле ядра

а) на больших расстояниях

б) на малых расстояниях

$$\frac{\partial^2R}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-U(r)-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\,l(l+1)\right]R=0$$

в кулоновском поле ядра:

9

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{2z}{r_1 r}R-\frac{l(l+1)}{r^2}R+\frac{2mE}{\hbar^2}R=0$$

Пусть $R=\frac{\varkappa(r)}{r}$

$$\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{\varkappa' r-\varkappa}{r^2}=\frac{\varkappa'}{r}-\frac{\varkappa}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}=\left(\frac{\varkappa'}{r}\right)'-\left(\frac{\varkappa}{r^2}\right)'=\frac{\varkappa'' r-\varkappa'}{r^2}-\frac{\varkappa' r^2-2\varkappa r}{r^4}$$

$$\frac{\varkappa''}{r}+\cancel{\frac{\varkappa'}{r^2}}-\cancel{\frac{\varkappa'}{r^2}}+\cancel{\frac{2\varkappa}{r^3}}+\frac{2\varkappa}{r^2}-\cancel{\frac{2\varkappa}{r^3}}+\frac{2z}{r_1 r^2}\varkappa-$$

$$-\frac{l(l+1)}{r^5}\varkappa+\frac{2mE}{\hbar^2}\frac{\varkappa}{r}=0 \Rightarrow$$

$$\varkappa''+\varkappa\left(\frac{2z}{r_1 r}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)=0$$

а) При $r\to 0 \Rightarrow \varkappa''+\varkappa\left(-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)=0$

Решение ищем в виде $\varkappa=Ar^{\alpha}$

$$A\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}-Ar^{\alpha-2}(l+1)l=0$$

$$\alpha(\alpha-1)=l(l+1)$$

$$\alpha^2-\alpha-l(l+1)=0$$

$$D=1+4l(l+1)$$

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{4l(l+1)+1}}{2}=\frac{\sqrt{1\pm 4l^2+4l+1}}{2}=\frac{1\pm(2l+1)}{2}$$

$$\alpha_1=l+1$$

$$\alpha_2=-l$$

$\varkappa_1 = A r^{l+1}$ $\qquad R_1 = A r^{l}$

$\varkappa_2 = A r^{-l}$ $\qquad R_2 = A r^{-l-1}$

Из условие огранич. в нуле

$$\underline{R = A r^{l}}$$

б) При $r \to \infty$ $\quad \varkappa'' + \varkappa \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$

$\varkappa'' - \frac{2m|E|}{\hbar^2}\varkappa = 0$; $\omega^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$

$$X = Ae^{\omega r} + Be^{-\omega r}$$

$$R = \frac{A}{r}e^{\omega r} + \frac{B}{r}e^{-\omega r},$$

Из условие ограниченности в ∞

$$\underline{R = \frac{B}{r}e^{-\omega r}}$$

задача 5.1.

Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждение атома Na, у которого квантовые дефекты основного терма 3S и 3P равны соответственно 1,37 и 0,88

$E_{ион} = |E_{3,0}| = \frac{13,6}{(3-1,37)^2}$ эВ $= \underline{5,2 \text{ эВ}}$

$E_{3,1} = \frac{13,6}{(3-0,88)^2}$ эВ $= \underline{-3,03 \text{ эВ}}$

$eU_1 = E_{3,1} - E_{3,0} = -3,03 + 5,2 = \underline{2,17 \text{ эВ}}$ (первый потенциал возбуждение)

10

Задача 5.4

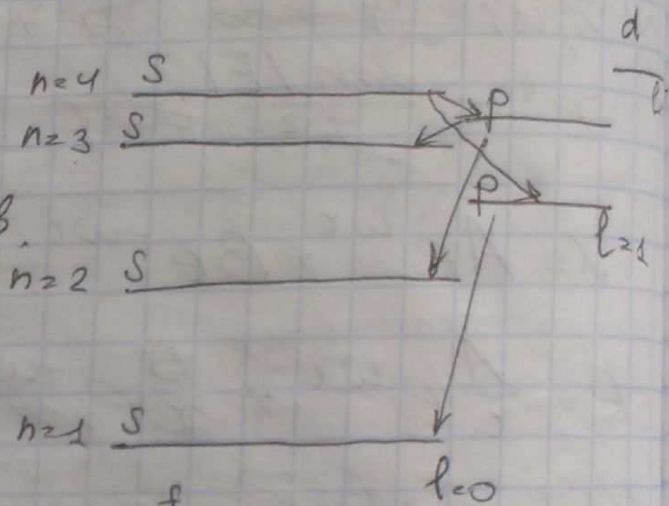
Сколько спектральных линий, разрешенных правилами отбора возникает при переходе атомов лития в основное состояние из состояние:

а) 4S

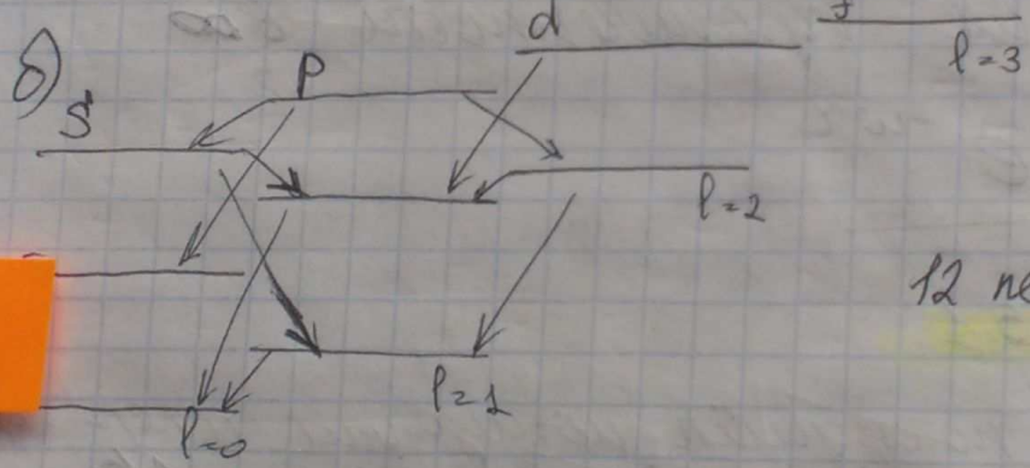
б) 4P

а) 4S : $\Delta l = \pm 1$;

6 переходов.



б)



12 переходов

Задача 5.15

Найти возможные значения полных механических моментов электронных оболочек атомов

^4P и ^5D

Решение: ^4P: $L=1$

$2S+1=4 \Rightarrow S=\frac{3}{2}$

$$|1-\tfrac{3}{2}| \le J \le 1+\tfrac{3}{2} \Rightarrow \quad J = \begin{cases} 1/2 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{cases}$$

$$^4P_{1/2} \quad ^4P_{3/2} \quad ^4P_{5/2}$$

^5D: $L = 2$

$2S+1 = 5 \Rightarrow S = 2$

$$|2-2| \le J \le 2+2 \Rightarrow \quad J = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

$$^5D_0 \quad ^5D_1 \quad ^5D_2 \quad ^5D_3 \quad ^5D_4$$

Задача 5.28

Найти максимальное число электронов, кот. имеют в атоме одинаковые след. квантовые числа: а) орбитальное квантовое число l
б) главное квантовое число n

$$m_l = (2l+1) \cdot m_s(2)$$

$$N_{e_n}(l) = 2(2l+1) \text{ — число эл-ов}$$

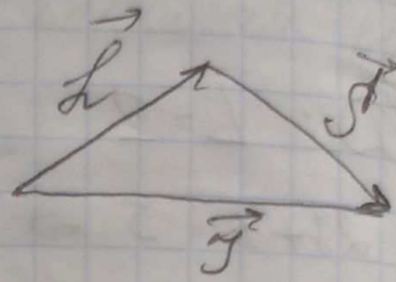
$$N_{e_n}(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2(1+3+5+\ldots+(2n-1)) =$$

$$= 2\,\frac{n(1+2n-1)}{2} = \underline{2n^2}$$

Задача 5.25

Найти MAX возможный угол между спиновым и полным мех. моментами в векторной модели атома, находящегося в состоянии мультиплетность кот. = 3 и кратность вырождения по J = 5

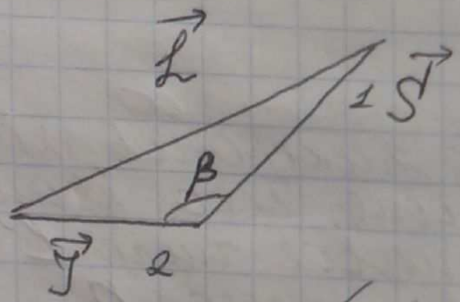
$2S+1=3$	$\Rightarrow S=1$
кр-ть вырожд. по $J=5$	
$(2J+1)=5$	$\Rightarrow J=2$



$$J_{max} = L+S$$

$$|S-J| \le L \le S+J$$

$$1 \le L \le 3$$



$L_{max} = 3$

$S=1; \quad J=2$

$$\cos\beta = \frac{(J^2+S^2-L^2)}{2|\vec{J}||\vec{S}|} = \frac{2\cdot3+1\cdot2-3\cdot4}{2\cdot\sqrt{12}} = -\frac{4}{4\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = 125^\circ$$

12 **Задача 5.55**

Используе закон Мозли, вычислить длина волн и энергии фотонов, соответствующих K_α-линием алюминие и кобальта.

$^{27}_{13}Al$

$^{59}_{27}Co$

K_α | $h\nu'_{K_\alpha} = 10{,}2(z-1)^2$

$\lambda - ?$

Co: $z = 27 \Rightarrow h\nu_{K_\alpha} = 10{,}2\,эВ\,(27-1)^2 =$

$= 6{,}9$ кэВ

$$\lambda = \frac{1240}{6{,}9 \cdot 10^3} = 179 \text{ (нм)}$$

Al: $z = 13 \Rightarrow h\nu_{K_\alpha} = 1{,}47$ кэВ

$$\lambda = 844 \text{ (нм)}$$

Задача 5.58

Для элементов конца период. системы поправка в законе Мозли значительно отличается от единицы. Убедиться в этом на примере олова, цезия и вольфрама, длины волн K_α-линий которых соответственно 49,2; 40,2; 21,0 пм

Дано:

Sn: $z = 50$; $\lambda_{K_\alpha} = 49{,}2$ nm

Cs: $z = 55$; $\lambda_{K_\alpha} = 40{,}2$ nm

W: $z = 74$; $\lambda_{K_\alpha} = 21{,}0$ nm

$n - ?$

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{h\nu_{K_\alpha}} = \frac{hc}{\sqrt{10{,}2(z-n)^2}}$$

$$n = z - \sqrt{\frac{hc}{10{,}2\,\lambda_{K_\alpha}}}$$

Sn: $n = 50 - \sqrt{\frac{1240}{10{,}2 \cdot 49{,}2 \cdot 10^{-3}}} =$

$= 0{,}29$

Cs: $n = 55 - \sqrt{\frac{1240}{10{,}2 \cdot 40{,}2 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}008$

W: $n = 74 - \sqrt{\dfrac{1240}{10{,}2 \cdot 21{,}0 \cdot 10^{-3}}} = \underline{-2{,}09}$

Задача 5.59

Определить напряжение на рентгеновской трубке с никелевым антикатодом, если разность длин волн K_α-линии и коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра увеличилась в 3 раза, какой элемент использ. в качестве катода?

$$\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{K_B} = 0{,}84\ E$$

$$\lambda_{KB_4} = \frac{hc}{eV_{\delta\epsilon\lambda}} \quad \text{и} \quad \lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{10{,}2\ эВ\ (z-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{hc}{0{,}84\ E} + 10{,}2\ эВ\ (z-1)^2\right)\frac{1}{e} = \left(\frac{1240}{0{,}84} \cdot 10 + 10{,}2\ (28-1)^2\right) = 22{,}198\ (кэВ)$$

Задача 5.67

Найти кинетическую энергию электронов вырываемых с K-оболочки атомом Молибдена K_α-излучением серебра

Ag: $z = 47$

Mo:

$$E_{K_\alpha} = E^{K}_{св} - E_{ф/э}$$

$$h\nu_{K_\alpha} = 10{,}2\ (47-1)^2 = 21{,}6\ кэВ$$

$$E^{K}_{св} = \frac{hc}{\lambda_{K\text{-края}}}$$

$$K = h\nu_{K_2} - \frac{hc}{\lambda_K} = 21{,}6 - \left(\frac{1240}{61{,}9} \cdot 1000\right) = 1{,}55 \,(кэВ)$$

Задача 7.2

Найти для молекулы HCl квантовые числа ℓ_r двух соседних вращат. уровней, разницу энергий которых = 7,86 мэВ

$$\Delta E_j = E_j(j+1) - E_j(j) = 7{,}86 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}$$

$$d_{HCl} = 1{,}275 \cdot 10^{-10} \text{ м} \qquad \mu = 1{,}624 \cdot 10^{-27}$$

$$\Delta E_j = \frac{\hbar^2}{2\mu d^2}\left[j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)\right]$$

$$j_2 = j_1 + 1 \Rightarrow \Delta E_j = \frac{2\hbar^2}{2\mu d^2}(j_1+1) - \frac{\hbar^2 (j_1+1)}{\mu d^2}$$

$$j_1 = 7{,}86 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}624 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}275^2 \cdot 10^{-20} = \underline{2}$$

$$j_2 = \underline{3}$$

Задача 7.14

Вычислить коэффициент ангармоничности молекулы Cl_2, если известны ее частота колебаний и энергия диссоциации

$E_D = 2{,}487$ В

$d = 1{,}938 \cdot 10^{-10}$ м

$x = ?$

$$E_D = \frac{h\nu_0}{4\varkappa}(1 - 2x)$$

$\nu_0 = \tilde{\nu} c$

$4 x E_D = h\tilde{\nu}c - 2h\tilde{\nu}cx$

$\tilde{\nu} = 564{,}0\ \text{см}^{-1} = 5{,}64 \cdot 10^4\ \text{м}^{-1}$

$x = h\tilde{\nu}c / (4E_D + ch\tilde{\nu}c)$

$$x = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 5{,}64 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^8}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}48 \cdot 10^{-19} + 2 \cdot 6{,}626 \cdot 564 \cdot 3 \cdot 10^{-27}} = 0{,}007$$

$x_{\text{сеч}} = 0{,}07$

Задача 1.1

$u_\nu = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{t}\right)$

а) $\nu_{max} \sim T$ – ?

б) $M \sim T^4$ – ?

в) $\frac{dU_\nu^x}{d\nu} = 0$

$3\nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \nu^3 \frac{1}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right) = 0$

$\frac{\nu}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right) + 3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) = 0$

$\frac{\nu}{T} = x$

$x f'(x) + 3\cancel{x} f(x) = 0$

$x = \text{const} = b_\nu$

$\nu_{max} = b_\nu T$

б) $M = \frac{c}{4}\int_0^\infty u(\nu)\,d\nu$

$M = \frac{c}{4}\int_0^\infty \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c}{4} T^4 \int_0^\infty \frac{\nu^3}{T^3} f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\left(\frac{\nu}{T}\right)$

$= \frac{ck}{4} T^4 = \sigma T^4$ $\boxed{M = \sigma T^4}$

Задача 1.4

Дано:

$M = 5{,}7 \frac{Вт}{см^2}$

$\lambda - ?$

$M = \sigma T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{M}{\sigma}}$

$\lambda_{max} = \frac{b_\lambda}{T}$

$\lambda_{max} = \frac{b_\lambda}{\sqrt[4]{M/\sigma}} = \frac{0{,}29}{1000} = 29 \cdot 10^{-5}$ (см)

Задача 1.8

Дано:

$\alpha = 7{,}64 \cdot 10^{-12}$ сек K

$T = 2000K$

$\frac{du(\nu)}{d\nu} = 0$

$$u(\nu) = A\nu^3 e^{-\frac{\alpha\nu}{T}}$$

$$\lambda \cdot 3A\nu^2 e^{-\frac{\alpha\nu}{T}} - \frac{\alpha}{T} A\nu^3 e^{-\frac{\alpha\nu}{T}} = 0$$

$$3e^{-\frac{\alpha\nu}{T}} + \nu\left(-\frac{\alpha}{T}\right)e^{-\frac{\alpha\nu}{T}} = 0$$

$$3 - \frac{\alpha}{T}\nu = 0$$

$$\nu_{max} = \frac{3T}{\lambda}$$

$$\nu_{max} = \frac{3 \cdot 2000}{7{,}64 \cdot 10^{-12}} = 0{,}79 \cdot 10^{9}\, c^{-1} = 0{,}79 \text{ ГГц}$$