8.09.11

№2.3

Дано:

q_1 налетает на q_2;
приц. пар. — b;
кин. эн-я q_1 — K_α
угол рассеяния

т.д. $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{q_1 q_2}{2 b K_\alpha}$

с помощью з-нов сохр. эн-ии и мом импульса

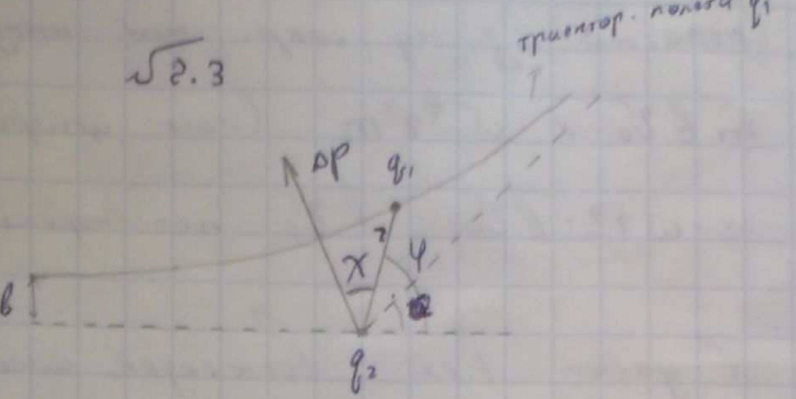


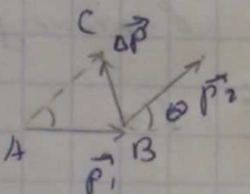
рис. №1

Р-ие

Рассчитаем полный прирост импульса частицы q_1 за время её пролета, исходя из того, что $|\vec{p}_1|$ в нач. пол-ти $=$ $|\vec{p}_2|$ в конце.;

Из равнобедр. ΔABC:

$$|\Delta \vec{p}| = 2 p_0 \cdot \sin\frac{\theta}{2} \qquad \{ p_0 \equiv |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \}$$



С др. стороны по з-ну Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ или $d\vec{p} = \vec{F} dt$

Тогда $|\Delta \vec{p}| = \int F_{\Delta p}\, dt$, где $|\Delta\vec{p}|$ — вышенайденный прирост импульса; интеграл берется по всему пролет. времени; $F_{\Delta p}$ есть проекция силы взаимодействия частиц q_1 и q_2 на ось Δp (см. рис. №1).

Тогда $|\Delta\vec{p}| = \int \frac{q_1 q_2}{r^2} \cos\chi\, dt = \left\{ \omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\varphi}{\omega} \right\} = \int \frac{q_1 q_2}{r^2 \omega} \cos\chi\, d\varphi$

Из рис. №1 $\cos\chi = \left\{ 2(\chi + \varphi - \theta) + \theta = \pi \Rightarrow \chi = \frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\theta}{2} \right\} =$
$= \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right)$;

Согласно з-ну сохр. мом. импульса;

$m b v_0 = \omega r^2 m$ (поле центральное) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \omega r^2 = b v_0$ (v_0 - нач. скорость полета q_1 далеко от q_2)

С учетом всех выкладок, имеем:

$$|\Delta \vec{p}| = -\frac{q_1 q_2}{b v_0} \int_{\pi}^{\theta} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) d\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= + \frac{q_1 q_2}{b v_0} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right)\Big|_{\pi}^{\theta} = \frac{q_1 q_2}{b v_0} \cdot \left\{\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right\} =$$

$$= \frac{2 q_1 q_2}{b v_0} \cos\frac{\theta}{2}$$

С др. стороны, как было показано в начале задачи;

$$|\Delta \vec{p}| = 2 p_0 \sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{2} p_0 b v_0}{\cancel{2} q_1 q_2} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{p_0 b v_0} = \left\{ p_0 = m v_0 ;\ K_\alpha = \frac{m v_0^2}{2} \right\} = \frac{q_1 q_2}{2 b K_\alpha}$$

Итого $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{2 b K_\alpha}}$, ч.т.д.

№2.4 15.09.11

Дано:

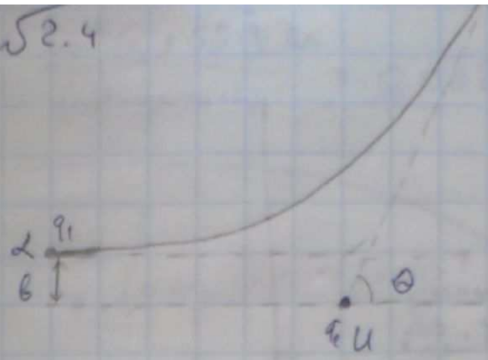
α-частица

$p_\alpha = 53 \frac{МэВ}{c}$ ($c = 3\cdot10^{10}$ см/с)

центр. поля кул. взаимод. – неподвижн. ядро урана

$\theta = 60^\circ$

b - ?



Р-ие

$tg\frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{2b K_\alpha}$; $K_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}$ →

→ $tg\frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2 2m_\alpha}{2b\cdot p_\alpha^2}$ → $\boxed{b = \frac{q_1 q_2 m_\alpha}{p_\alpha^2\, tg\frac{\theta}{2}}}$

α част. – ^4_2He → $q_1 = 2e = 9{,}6\cdot10^{-10}$ СГС$_q$;

$m_\alpha = 4\cdot1{,}67\cdot10^{-24} = 6{,}68\cdot10^{-24}$ г

$p_\alpha = \frac{10^6\, 53\cdot1{,}6\cdot10^{-12}}{3\cdot10^{10}} = 2{,}83\cdot10^{-13}$ г·см/с ; $tg\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt3}$

$^{238{,}03}_{92}U$ → $q_2 = 92\cdot e = 44{,}16\cdot10^{-9}$ СГС$_q$

Тогда $b = \frac{2\cdot92\,(4{,}8\cdot10^{-10})^2\cdot4\cdot1{,}67\cdot10^{-24}\sqrt3}{\left(\frac{53\cdot10^6\cdot1{,}6\cdot10^{-12}}{3\cdot10^{10}}\right)^2} = 6\cdot10^{-11}$ см = 0

$0{,}8\cdot10^{-8}$ м =

№ 8.22

Дано:
протоны;
$K_p = 1$ МэВ
пад. нормальн. на лат. фольгу
толщина $\rho d = 1,5 \cdot \frac{мг}{см^2}$

$\frac{dN}{N}$, расс. от 30° до 180°

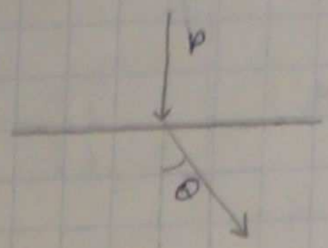
$\frac{m_{Cu}}{m_{Zn}} = \frac{7}{3}$; $\rho_{Cu} = 8,9\ г/см^3$

$\rho_{Zn} = 7\ г/см^3$

$\frac{dN}{N} - ?$

$^{63}_{29}Cu$

$^{64}_{30}Zn$



Р-ие

$$\frac{dN}{N} = n_я \left(\frac{q_1 q_2}{4K_p}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}$$

$$\frac{dN}{N} = n_я \left(\frac{q_1 q_2}{4K_p}\right)^2 \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{2\pi \sin\theta\, d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{8\pi n_я (q_1 q_2)^2}{(4K_p)^2}}_{A} \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}\, d\sin\frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = -\frac{A}{2} \cdot \sin^{-2}\frac{\theta}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi} =$$

$$= -4\pi n_я \left(\frac{q_1 q_2}{4K_p}\right)^2 \pi \{1 - 14,9\} \approx 56\, n_я \left(\frac{q_1 q_2}{4K_p}\right)^2 \pi =$$

$$= 3,5\, n_я \left(\frac{q_1 q_2}{K_p}\right)^2 \pi$$

В соотв. с данным масс. соотношени;

$$(\rho d)_{Cu} = 0,7 \cdot 1,5 = 1,05 \frac{мг}{см^2}; \quad (\rho d)_{Zn} = 0,45 \frac{мг}{см^2}$$

$$n_я = \frac{(\rho d)_{Cu}}{m_{Cu}} + \frac{(\rho d)_{Zn}}{m_{Zn}} = \frac{1,05 \cdot 10^{-3}}{1,67 \cdot 10^{-24} \cdot 63} + \frac{0,45 \cdot 10^{-3}}{1,67 \cdot 10^{-24} \cdot 64} = 1,4 \cdot 10^{19}$$

~~$\frac{dN}{N} = 1,4 \cdot 10^{19} \cdot 3,5 \cdot 3,14 \cdot k$~~

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{dN}{N}\right)_{Cu} + \left(\frac{dN}{N}\right)_{Zn} = 3,5 \cdot 3,14 \cdot 9,9 \cdot 10^{18} \cdot \frac{29^2 \cdot (4,8 \cdot 10^{-10})^4}{(10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12})^2} +$$

$+ 4{,}2\cdot10^{13}\cdot3{,}5\cdot3{,}14\cdot\dfrac{30^2\cdot(4{,}8\cdot10^{-10})^4}{(10^6\cdot1{,}6\cdot10^{-12})^2} = 0{,}00276 = 27{,}6\cdot10^{-4}$

Ответ: $\dfrac{\Delta N_{рас}}{N_{пад}}\Big|_{от\ 30^\circ до\ 180^\circ} = 27{,}6\cdot10^{-4}$

ДОЗ № 2

Задача № 1

Найти спектр. интервалы λ, в кот. содерж. серии Лаймана, Бальмера, Пашена для ${}^1_1H$. Изобразить их на шкале длин волн и выделить видимую часть ($400 \div 750$ нм)

Р-ие: Обобщ. ф-ла Бальмера: $k = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

Для серии Лаймана: $k^Л = \frac{1}{\lambda^Л} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, $n = 2, 3, \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^Л = \dfrac{1}{R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1^2 n^2}{R(n^2 - 1^2)}$

$n = 2 \Rightarrow \lambda^Л_1 = \dfrac{4}{1{,}1\cdot10^7\cdot3} = 121{,}21$ нм;

$\Rightarrow$ серия Лаймана $90{,}91 \div 121{,}21$ нм

$n = \infty \Rightarrow \lambda^Л_1 = \dfrac{1}{R} = 90{,}91$ нм

Для серии Бальмера: $\lambda^Б = \dfrac{2^2 n^2}{R(n^2 - 2^2)}$, $n = 3, 4, \ldots$

$n = 3 \Rightarrow \lambda^Б_1 = 654{,}55$ нм

$\Rightarrow$ серия Бальмера $363{,}64 \div 654{,}55$ нм

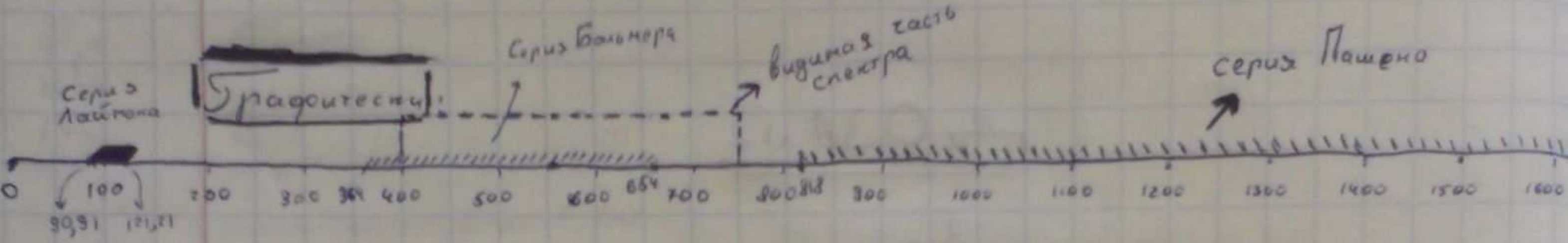
$n = \infty \Rightarrow \lambda^Б_2 = 363{,}64$ нм

Для серии Пашена: $\lambda^{П} = \dfrac{3^2 n^2}{R(n^2-3^2)}$, $n = 4, 5, \ldots$

$n = 4 \Rightarrow \lambda_1^{П} = 1870,13$ нм

$\Rightarrow$ серия Пашена $818,18 \div 1870,13$ нм

$n = \infty \Rightarrow \lambda_2^{П} = 818,18$ нм



2.35

Некот. в/п ион. в 3-й линии серии Бальмера $\lambda_3^{Б} = 108,5$ нм.

Найти энергию связи е и ядра в осн. состоянии E_1 - ?

Р-ие: из прошлой задачи $\dfrac{1}{\lambda^{Б}} = R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{m^2}\right)$, $m = 3, 4, 5 \ldots$

Эта ф-ла в отношении ^1_1H. В отношении в/п атома с зарядом ядра Ze. Задача - найти Z.

1) $\dfrac{m_e v^2}{r} = \dfrac{Ze^2}{r^2}$; 2) $\dfrac{m_e v^2}{2} - \dfrac{Ze^2}{r} = E$; 3) $m_e v r = \hbar n \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{Ze^2}{m_e v^2} \Rightarrow + \cancel{m_e} v \dfrac{Ze^2}{\cancel{m_e} v^{\cancel{2}}} = \hbar n \Rightarrow$

$\Rightarrow v = + \dfrac{Ze^2}{\hbar n}$; $r = + \dfrac{\cancel{Ze^2}\, \hbar^2 n^2}{m_e Z^2 e^4}= \dfrac{\hbar^2 n^2}{m_e Z e^2} \Rightarrow$

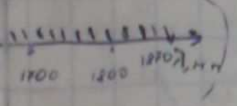
$\Rightarrow E = \dfrac{m_e}{2} \cdot \dfrac{Z^2 e^4}{\hbar^2 n^2} - \dfrac{Z e^2\, m_e Z e^2}{\hbar^2 n^2} = - \dfrac{m_e}{2} \cdot \dfrac{Z^2 e^4}{\hbar^2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$

Из фотоэффекта: $h\nu = E_m - E_n = \dfrac{hc}{\lambda}$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_m}{hc} - \frac{E_n}{hc} = \frac{m_e}{2}\,\frac{e^4 z^2}{\hbar^2 hc}\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right\} =$$

$=$ { получаем обобщ. ф-лу Бальмера для в/п атома, с учетом, что $\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 hc} = R$ } $= z^2 R\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_3^6} = z^2 R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow z = \sqrt{\frac{1}{\lambda_3^6 R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = -Rhcz^2;$$

$$E_1 = -1{,}1\cdot10^5 \cdot 3\cdot10^{10} \cdot 4 \cdot 6{,}62\cdot10^{-27} \cdot \frac{1}{1{,}6\cdot10^{-12}} = -54{,}45\ эВ$$

Ответ $|E_1| = 54{,}45$ эВ (у $^4_2He^+$)

ДОЗ №3

2.47

Дано:
мюзоатом H
$m_\mu = 207 m_e$

а) λ рез. линии?
б) E_1 - ?

а) $E_1 = -\frac{\mu}{2}\cdot\frac{e^4}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2} = \{n=1\} = -\frac{\mu}{2}\cdot\frac{e^4}{\hbar^2}$

$\mu = \frac{m_\mu \cdot m_p}{m_\mu + m_p}$ {решаем задачу для случая, когда у мюзоатома H ~~его~~ ядро состоит из p}.

$\mu = \frac{207\cdot 9{,}1\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}}{207\cdot 10^{-27} + 1{,}67\cdot 10^{-24}} = 1{,}84\cdot 10^{-25}$

$|E_1| = \frac{(4{,}8\cdot 10^{-10})^4}{(1{,}3\cdot 10^{-27})^2}\,\frac{1{,}84\cdot 10^{-25}}{2}\cdot\frac{1}{1{,}6\cdot 10^{-12}} = 2{,}52$ кэВ

б) $E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda_p} \Rightarrow \lambda_p = \frac{hc}{E_{2\to 1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\lambda_p = \frac{3\cdot 10^{10}\cdot 6{,}63\cdot 10^{-27}}{2522\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}} = 0{,}$~~

$E_{2\to 1} = 0{,}75|E_1| \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_p = \frac{3\cdot 10^{10}\cdot 6{,}63\cdot 10^{-27}}{2522\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}75} = 0{,}65$ нм

Ответ: $|E_1| = 2{,}52$ кэВ; $\lambda_p = 0{,}65$ нм

2.26

Дано:

H, ядро неподвижное

а) r_1, r_2 - ?

б) K_e - ? E_1 - ? (в осн. сост.)

в) $E_{2\to1}$ - ? λ_p - ?

Р-ие

а) $r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{e^2 m_e}$

$r_1 = \frac{(1,1\cdot10^{-27})^2}{(4,8\cdot10^{-10})^2\cdot 10^{-27}} \approx 5,25\cdot10^{-9}$ см

$r_2 = 5,25\cdot10^{-9}\cdot 4 = 2,1\cdot10^{-8}$ см

б) $K_{e_1} = \frac{m_e v_1^2}{2} = \left\{ v_n = \frac{e^2}{\hbar n} \right\} = \frac{m_e e^4}{\hbar^2 n^2 2} = \{n=1\} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}$

$K_{e_1} = \frac{10^{-27}\cdot(4,8\cdot10^{-10})^4}{2\cdot(1,1\cdot10^{-27})^2\cdot 1,6\cdot10^{-12}} \approx 13,7$ эВ

$|E_{св_1}| = \frac{m_e}{2}\cdot\frac{e^4}{\hbar^2} = K_{e_1} = 13,7$ эВ;

в) $E_{2\to1} = 0,75\cdot E_1 = 10,3$ эВ;

$\lambda = \frac{hc}{E_{2\to1}} = \{$см. пр. зад.$\} = \frac{6,63\cdot10^{-27}\cdot3\cdot10^{10}}{10,3\cdot1,6\cdot10^{-12}} = 1206,9$ нсм $\approx$

$\approx 120,7$ нм

Ответ: а) $r_1 = 5,25\cdot10^{-9}$ см; $r_2 = 2,1\cdot10^{-8}$ см;

б) $K_{e_1} = E_{св} = 13,7$ эВ;

в) $\lambda = 120,7$ нм; $E_{2\to1} = 10,3$ эВ

2.45

Дано:

D – ~~H~~ тяж. Н легк. – Н

$\frac{R_D}{R_H} = 1{,}000272$

$\frac{m_D}{m_H} = 2$

$\frac{m_p}{m_e}$ – ?

Р-ие

Из зад. №2.35

$R_\lambda = \frac{m_e}{2} \frac{e^4}{\hbar \hbar^2 c}$; $R_T = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \hbar c} = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} R_\lambda$

Или, переобозначая: $R_\infty \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right) = R$

Тогда $\frac{R_D}{R_H} = \frac{\cancel{R_\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{m_e}{2m_p}} \right)}{\cancel{R_\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{m_e}{m_p}} \right)}$

$m_я(D) = 2m_p$, т.к. $\frac{m_D}{m_H} = \frac{m_p + m_n}{m_p} = 2 \rightarrow m_n = m_p \Rightarrow$

$\Rightarrow m_я(D) = 2m_p \Rightarrow$

$\rightarrow \frac{R_D}{R_H} \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right) = \frac{1}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} \Rightarrow$

$\rightarrow \frac{R_D}{R_H} \left(1 + \frac{m_e}{2m_p} \right) = 1 + \frac{m_e}{m_p}$

$\frac{m_e}{m_p} \left(\frac{R_D}{2R_H} - 1 \right) = 1 - \frac{R_D}{R_H}$

$\frac{m_p}{m_e} = \frac{1 - \frac{R_D}{2R_H}}{\frac{R_D}{R_H} - 1} = 1838$

Ответ: $\frac{m_p}{m_e} = 1838$

2.46

Дано:
D, H

а) $E_1^D - E_1^H$ - ?

б) разницу 1-х пот. возб.

в) $\lambda_D - \lambda_H$ - ?

Р-ие

а) $E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$; $\mu = \frac{m_e m_я}{m_e + m_я}$

$$|E_1^D - E_{1H}| = \frac{e^4 m_e m_p}{2\hbar^2}\left\{\frac{2}{m_e + 2m_p} - \frac{1}{m_e + m_p}\right\} =$$

$$= \frac{1}{1{,}6\cdot 10^{-12}}\frac{(4{,}8\cdot 10^{-10})^4\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}}{2\cdot(1{,}1\cdot 10^{-27})^2}\left\{\frac{2}{10^{-27} + 2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}} - \frac{1}{10^{-27} + 1{,}67\cdot 10^{-24}}\right\} =$$

$$= 3{,}7\cdot 10^{-3}\ эВ$$

б) $$\Delta\varphi_1 = \frac{0{,}75\,|E_{1D} - E_{1H}|}{e} = 2{,}78\cdot 10^{-3}\ В$$

в) $$\lambda_p = \frac{hc}{E_{2\to 1}}$$

$$\lambda_{pD} - \lambda_{pH} = \frac{hc}{0{,}75}\left\{\frac{1}{E_{D1}} - \frac{1}{E_{H1}}\right\} =$$

$$= \left\{E_{D1} = \frac{e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{2m_e m_p}{m_e + 2m_p};\ E_{H1} = \frac{e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{m_e m_p}{m_e + m_p}\right\} =$$

$$= \frac{6{,}63\cdot 10^{-27}\cdot 10^{10}\cdot 3}{0{,}75}\left\{\frac{1}{1{,}995961\cdot 10^{-10}} - \frac{1}{1{,}9950577\cdot 10^{-10}}\right\} = 3{,}62\cdot 10^{-10}\ см$$

Ответ: а) $\Delta E_1 = 3{,}7\cdot 10^{-3}$ эВ;

б) $\Delta\varphi_1 = 2{,}78\cdot 10^{-3}$ В;

в) $\Delta\lambda_p = 3{,}62\cdot 10^{-10}$ м

$u(0,t)=0$

$u_t(0,t)=0$

Л ОЗА №4

№ 1.44

Дано:

напряж. эл. поля

$T = a(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t$;

a - Const; $\omega = 6\cdot10^{14}\ \frac{1}{c}$;

$\omega_0 = 3,6\cdot10^{15}\ \frac{1}{c}$

Фотоэлектроны вырываются с пов-ти Li этим эл. полем

$K_{e\,max}$ - ?

Р-ие

$K_e = h\nu - A$ (по Эйнштейну);

A - работа выхода эл-ов;

для лития $A = 2,39$ эВ;

K_e будет зависить только от ν. Найдем ν при кот. K_e будет max в данных условиях

Распишем напряженность так: $T = a\cos\omega_0 t + a\cos\omega t\cos\omega_0 t =$

$= a\cos\omega_0 t + a\,\frac{1}{2}\{\cos(\omega-\omega_0)t + \cos(\omega+\omega_0)t\} =$

$= a\cos\omega_0 t + \frac{a}{2}\cos(\omega-\omega_0)t + \frac{a}{2}\cos(\omega+\omega_0)t$;

Таким образом наше эл. поле представляет собой супер-позицию 3-х полей с соотв. цикл. частотами: ω_0; $\omega-\omega_0$; $\omega+\omega_0$.

Т.о. в результате воздействия этого поля ~~вырустстия~~ с литием образуются 3 вида электронов с разными K_e.

При этом K_e max будут иметь электроны, получившие воздействие от поля с $\omega+\omega_0$ $\Rightarrow$ $\nu = \frac{\omega+\omega_0}{2\pi}$ $\Rightarrow$

$\rightarrow K_{e\,max} = \frac{h}{2\pi}(\omega+\omega_0) - A = \hbar(\omega+\omega_0) - A$

$K_{e\,max} = 1,05\cdot10^{-27}\cdot(3,6\cdot10^{15} + 6\cdot10^{14}) / 1,6\cdot10^{-12} - 2,39 = 2,75625 - 2,39 = 0,366$

~~ДАНО~~ ЗАДАЧА

Ответ: $K_{e\,max} \approx 0{,}36\,эВ$

№ 1.48

Дано:

$\lambda = 17\,пм$ (фотон)

он вырвал электрон, у кот

$E_{св} = 69{,}3\,кэВ$

электрон вылетел под $90°$ к напр. первонат. движ. фотона

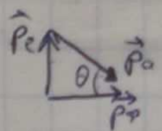
$p_a - ?$ (импульс, переданный атому)

$h\nu$ → • ⇒ p_e, атом, p_a, θ

Э-ие

$$\begin{cases} p_ф = p_a\cos\theta \\ p_a\sin\theta = p_e \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{p}_ф = \vec{p}_a + \vec{p}_e \\ E = K_e + E_{ат} \end{cases}$$



По Эйнштейну $K_e = h\nu - E_{вых}$ ⇒

⇒ $h\nu = h\nu - E_{вых} + E_{ат}$ ⇒ $E_{ат} = E_{вых}$

$$E_{ат} = c\sqrt{p_{ат}^2 + m^2c^2}\ ; \quad \frac{E_{ат}^2}{c^2} = p_{ат}^2 + m^2c^2$$

$$p_{ат} = \sqrt{\frac{E_{ат}^2}{c^2} - m_{ат}^2c^2}\ ?\ ;$$

С др. стороны

$$p_a^2 = p_ф^2 + p_e^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + p_e^2\ ;$$

$$E_e = c\sqrt{p_e^2 + m_e^2c^2}\ ; \quad E_e = K_e + m_ec^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2p_e^2 + \cancel{m_e^2c^4} = K_e^2 + 2K_em_ec^2 + \cancel{m_e^2c^4}$$

$$p_e = \sqrt{\frac{K_e^2}{c^2} + 2K_em_e}\ ; \quad K_e^2 = (h\nu)^2 - 2h\nu E_{вых} + E_{вых}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_e^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{E_{вых}}{c}\right)^2 - \frac{2h\nu E_{вых}}{c^2} + 2m_eh\nu - 2m_eE_{вых} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{ат} = \frac{1}{c}\sqrt{2(h\nu)^2 + 2m_ec^2(h\nu - E_{вых}) - 2h\nu E_{вых} + \left(\frac{E_{вых}}{c}\right)^2} = \frac{1}{c}\cdot\sqrt{(h\nu)^2 + 2m_ec^2(h\nu - E_{вых}) + (h\nu - \ldots}$$

$$p_{\text{ат}} = \frac{\sqrt{(72588)^2 + 2\cdot 0{,}51\cdot 10^6 \cdot 3788 + (3788)^2}}{c} \approx \frac{93\ \text{кэВ}}{c}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } p_{\text{ат}} \approx \frac{93\ \text{кэВ}}{c}}$$

$c = 3\cdot 10^{10}\ \frac{\text{см}}{c}$

№1.49

Показать, что свободный e^- не может поглотить фотон

Δ Пусть e^- поглотил налетающий на него фотон.

Тогда $h\nu = K_e$; $p_\phi = \frac{h\nu}{c} = p_e$

С др. стороны из соотношения $\mathcal{E}_e = c\sqrt{p_e^2 + m_0 c^2}$; $\mathcal{E}_e = K_e + m_0 c^2$, как показывалось в прошлой задаче:

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{K_e^2 + 2K_e m_0 c^2} ;$$

Подставляя $K_e = h\nu$ получаем:

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{(h\nu)^2 + 2h\nu m_0 c^2} = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \cancel{\frac{2h\nu m_0 c^2}{c^2}}\ 2h\nu m_0 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \Rightarrow 2h\nu m_e = 0$$

~~ЧТД~~ Из этого соотношения следует, что $\nu = 0 \Rightarrow$ фотона и не было, но это противоречит условию задачи, что и доказывает наше истинное утверждение $\blacktriangle$

Д 031 №5

№3.1

Дано:
$e - p$;
$K_e = K_p = 1$ кэВ

а) λ_e - ? λ_p - ?
б) $\lambda_e = \lambda_p = 100$ пм
K_e - ? K_p - ?

Решение: а) с учетом, что K_e и K_p небольшие, воспользуемся нерелятивистской ф-лой $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}$

Для электрона: $\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e K_e}} = \frac{6{,}6\cdot 10^{-27}}{\sqrt{2\cdot 10^{-27}\cdot 10^{3}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}}} \approx 37$ пм

Для протона: $\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2m_p K_e}} = \frac{6{,}6\cdot 10^{-27}}{\sqrt{2\cdot 10^{3}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}}} \approx 0{,}9$ пм

б) Обращая задачу, имеем $K = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow K_e = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2} = \frac{(6{,}6\cdot 10^{-27})^2}{2\cdot 10^{-27}\cdot (10^{-8})^2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}} = 0{,}14$ кэВ;

$K_p = \frac{h^2}{2m_p\lambda^2} = \frac{(6{,}6\cdot 10^{-27})^2}{2\cdot (10^{-8})^2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}} = 0{,}082$ эВ

Ответ: а) $\lambda_e = 37$ пм; $\lambda_p = 0{,}9$ пм;

б) $K_e = 0{,}14$ кэВ; $K_p = 0{,}082$ эВ

№3.7

Дано:
$K_n = 0{,}25$ эВ
ядро гелия ^4He с $v_0 = 0$
~~...~~ упругое столкновение

λ_0 - ? { длины волн ~~...~~ частиц до и после столкн. в ц-системе ЦМ.

В с. Ц.М. $|p_{n0}| = |p_{He0}| = |p'_{n0}| = |p'_{He0}|$

$\lambda_0 = \frac{h}{|p'_{n0}|}$;

$K^*_{n0} = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{m_n}{m_{He}}\right)}$; $|p^*_{n0}| = \sqrt{2mK^*_{n0}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2m_n K_n}}\sqrt{1+\frac{m_p}{m_{He}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{6{,}6\cdot10^{-27}}{\sqrt{2\cdot 1{,}64\cdot10^{-24}\,0{,}25\cdot1{,}6\cdot10^{-11}}}\cdot\sqrt{1{,}25} = 6{,}4\cdot10^{-11}\ \text{см}$$

Ответ: $\lambda_0 = 0{,}064$ нм

№3.14

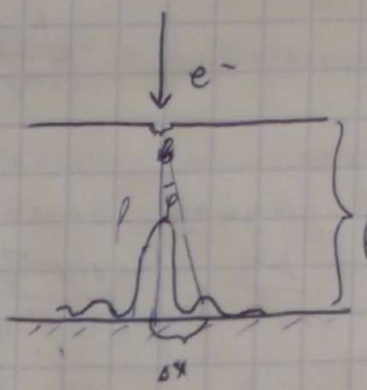
Дано:

$b = 2$ мкм

$l = 50$ см

$\Delta x = 0{,}36$ мм

K_e – ?



Р-ие: $b\sin\varphi = \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow b\,\mathrm{tg}\,\varphi = \lambda$

$b\cdot\frac{\Delta x}{l} = \lambda$;

С др. стороны по де-Бройлю: (не рел. случай):

4.18

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{\sqrt{2K_e m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_e = \frac{h^2}{2m_e\lambda_e^2} = \frac{h^2 l^2}{2m_e b^2\Delta x^2} = \frac{(6{,}6\cdot10^{-27})^2\cdot(50)^2}{2\cdot10^{-27}\cdot(2\cdot10^{-4})^2(0{,}036)^2\cdot1{,}6\cdot10^{-12}} =$$

$= 0{,}66$ эВ

ДЗ 1 №6

№3.49

Дано:

част. с массой m и E

$E < U_0$

распр. пот. показ. на рис №1

а) т.д. $kl = \pi n - 2\arcsin\left(\hbar k / \sqrt{2mU_0}\right)$

$k = \sqrt{2mE}/\hbar$, n - цел. числ.

б) Показ., что E прин. только дискр. знач. (графически)

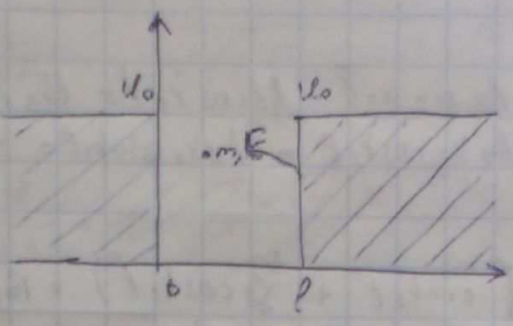


рис. №1

а) $U = U_0$, $x \in (-\infty; 0)$ $\Rightarrow \Psi_1$

$U = 0$, $x \in [0, l]$ $\Rightarrow \Psi_2$

$U = U_0$, $x \in (l; +\infty)$ $\Rightarrow \Psi_3$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\Psi_1 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2} E \Psi_2 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\Psi_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = i\,\varkappa = i\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)} = k_3 \\ k_2 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Psi_1'' - \varkappa^2 \Psi_1 = 0 \\ \Psi_2'' + k^2 \Psi_2 = 0 \\ \Psi_3'' - \varkappa^2 \Psi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_1 = A_1 e^{\varkappa x} + B_2 e^{-\varkappa x} & , x \in (-\infty; 0) \\ \Psi_2 = A_2 \sin k_2 x + B_2 \cos k_2 x & , x \in [0, l] \\ \Psi_2 = A_3 e^{\varkappa x} + B_3 e^{-\varkappa x} & , x \in (l, +\infty) \end{cases}$$

Из св-ва Ψ она должна быть всюду конечна, т.е.

$B_2 = A_3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Psi_1 = A_1 e^{\varkappa x} \\ \Psi_2 = A_2 \sin k_2 x + B_2 \cos k_2 x \\ \Psi_3 = B_3 e^{-\varkappa x} \end{cases}$$

Воспользуемся свойствами непрерывности Ψ и Ψ':

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_2(l) = \psi_3(l) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \\ \psi_2'(l) = \psi_3'(l) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = B_2 \\ A_2 \sin k_2 l + B_2 \cos k_2 l = B_3 e^{-\varkappa l} \\ \varkappa A_1 = k_2 A_2 \\ A_2 k_2 \cos k_2 l - B_2 k_2 \sin k_2 l = -\varkappa B_3 e^{-\varkappa l} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 \sin k_2 l + A_1 \cos k_2 l = B_3 e^{-\varkappa l} \\ A_2 k_2 \cos k_2 l - A_1 k_2 \sin k_2 l = -\varkappa B_3 e^{-\varkappa l} \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{k_2}{\varkappa} A_2$$

$$A_2 = \frac{\varkappa}{k_2} A_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 \left(\sin k_2 l + \frac{k_2}{\varkappa} \cos k_2 l \right) = B_3 e^{-\varkappa l} \\ A_2 \left(k_2 \cos k_2 l - \frac{k_2^2}{\varkappa} \sin k_2 l \right) = -\varkappa B_3 e^{-\varkappa l} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin k_2 l + \frac{k_2}{\varkappa} \cos k_2 l}{k_2 \cos k_2 l - \frac{k_2^2}{\varkappa} \sin k_2 l} = -\frac{1}{\varkappa}$$

$$\sin k_2 l + \frac{k_2}{\varkappa} \cos k_2 l = \frac{k_2^2}{\varkappa^2} \sin k_2 l - \frac{k_2}{\varkappa} \cos k_2 l$$

$$\cos k_2 l \left[\frac{k_2}{\varkappa} + \frac{k_2}{\varkappa} \right] = \sin k_2 l \left[\frac{k_2^2}{\varkappa^2} - 1 \right] = \frac{2k_2}{\varkappa} \cos k_2 l;$$

$$\operatorname{tg} k_2 l = \frac{2k_2}{\varkappa} \cdot \frac{\varkappa^2}{k_2^2 - \varkappa^2} = \frac{2k_2 \varkappa}{k_2^2 - \varkappa^2};$$

$$\sin^2 k_2 l = \frac{tg^2 k_2 l}{1+tg^2 k_2 l} = \frac{4k_2^2\varkappa^2}{(k_2^2-\varkappa^2)^2\left(1+\frac{4k_2^2\varkappa^2}{(k_2^2-\varkappa^2)^2}\right)} = \frac{4k_2^2\varkappa^2}{(k_2^2-\varkappa^2)^2+4k_2^2\varkappa^2} =$$

$$= \frac{4k_2^2\varkappa^2}{k_2^4+\varkappa^4-2k_2^2\varkappa^2+4k_2^2\varkappa^2} = \frac{4k_2^2\varkappa^2}{(k_2^2+\varkappa^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin k_2 l = \pm\frac{2k_2\varkappa}{k_2^2+\varkappa^2} =$$

$$= \frac{(k_2+\varkappa)^2}{k_2^2+\varkappa^2} - 1;$$

Д.п. пуст: $\psi_2 = A_2\sin(k_2 x+\alpha)$; $\psi_1 = A_1 e^{\varkappa x}$; $\psi_3 = B_3 e^{-\varkappa x}$

$$\begin{cases} A_1 = A_2\sin\alpha \\ \varkappa A_1 = k_2 A_2\cos\alpha \\ A_2\sin(k_2 l+\alpha) = B_3 e^{-\varkappa l} \\ k_2 A_2\cos(k_2 l+\alpha) = -\varkappa B_3 e^{-\varkappa l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\,\alpha = \frac{k_2}{\varkappa} \\ tg(k_2 l+\alpha) = -\frac{k_2}{\varkappa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{k_2^2}{\varkappa^2\left(1+\frac{k_2^2}{\varkappa^2}\right)} = \frac{k_2^2}{k_2^2+\varkappa^2} \\ \sin^2(k_2 l+\alpha) = \frac{k_2^2}{k_2^2+\varkappa^2} \end{cases}$$

$$\frac{k_2^2}{k_2^2+\varkappa^2} = \frac{k_2^2\hbar^2}{2mE-2mE+2mU_0} = \frac{k_2^2\hbar^2}{2mU_0} \Rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\frac{k_2\hbar}{\sqrt{2mU_0}}, \quad \sin(k_2 l+\alpha) = \mp\frac{k_2\hbar}{\sqrt{2mU_0}}$$

$$\boxed{tg\,\alpha = -tg(k_2 l+\alpha)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ α может быть в 1-й, 3-й четвертях, а $k_2 l+\alpha$ — в разных четвертях

Пусть $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{k_2\hbar}{\sqrt{2mU_0}}$; $k_2 l + \arcsin\frac{k_2\hbar}{\sqrt{2mU_0}} = -\arcsin\frac{k_2\hbar}{\sqrt{2mU_0}} + \pi n \Rightarrow (n=1,2,3,\ldots)$

$$\Rightarrow \boxed{k_2 l = \pi n - \arcsin\frac{k_2\hbar}{\sqrt{2mU_0}}}$$

$, n = 1,2,3,\ldots$ — числа соотв. кол-ву дискр. ур-й

№3.50

Из прошл. зад. $l^2 U_0$ - ? а) $E = U_0/2$ - эн-я осн. сост.

б) $l^2 U_0 = 75\, \hbar^2/m$ n - ?

Р-ие: а) из ф-лы $k_1 l = n\pi - 2\arcsin\left(\frac{\hbar k_2}{\sqrt{2mU_0}}\right)$ при $n=1$ мы имеем осн. состояние;

$\cancel{k_2 = \sqrt{2mE} = \sqrt{2m\frac{U_0}{2}}}$

$$\sin k_2 l = \frac{2k_2\varkappa}{k_2^2+\varkappa^2} = \frac{k_2\hbar}{mU_0}\sqrt{2m\frac{U_0}{2}} = \frac{\sqrt{2m\frac{U_0}{2}}\,\hbar}{\hbar\sqrt{mU_0}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 l = \pi/2 = \frac{1}{\hbar} l\sqrt{mU_0} \Rightarrow (n=1)$$

$$\Rightarrow \boxed{l^2 U_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{4m}}$$

б) Из ф-лы $k_2 l = \underbrace{n\pi - 2\arcsin\left(\frac{\hbar k_2}{\sqrt{2mU_0}}\right)}_{y}$ имеем графики зав-ти y от k_2

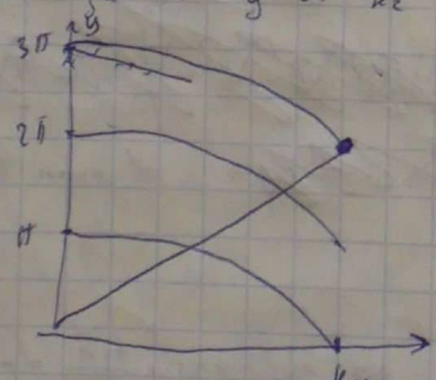


рис. №2

$n = 1, 2, \ldots$ - n-е уровни

Например 3-й ур-нь появ-ся когда $n=3$ и $\arcsin(\ldots)=0$ (см. рис. №2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hbar k_2 = \sqrt{2mU_0}$; $k_2 l = (n-1)\pi$ — усл. появл. n-го ур-я $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar} l = (n-1)\pi \Rightarrow \boxed{U_0 l^2 = \frac{(n-1)^2\pi^2\hbar^2}{2m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1) < \sqrt{\frac{2mU_0l^2}{\pi^2\hbar^2}} < n \quad ; U_0 l^2 = 75\frac{\hbar^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1) < \sqrt{\frac{2\cancel{m}\,75\cdot\cancel{\hbar^2}}{\cancel{m}\,\pi^2\cancel{\hbar^2}}} = 3{,}9 < n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{n = 4}$, т.е. при $U_0 l^2 = 75\frac{\hbar^2}{m}$ яма будет иметь 4 дискр. ур-я , т.е. почти появился 5-й ур-нь

Ответ: а) $U_0 l^2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{4m}$;

б) $U_0 l^2 = \frac{(n-1)^2\pi^2\hbar^2}{2m}$ => появится n-й дискр. ур-нь ;

при $U_0 l^2 = 75\frac{\hbar^2}{m}$ в наличии 4 дискр. ур-я

ЗАДАЧА №7

№3.60

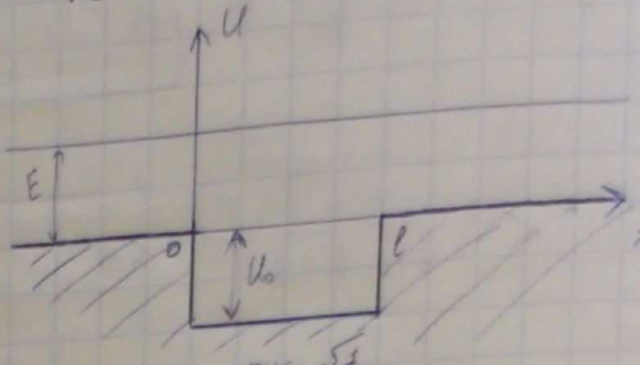


рис. №1

Дано:

част. с m, E; распр. поз. показ. на рис. №1

а) D, R — ? (коэфф. прозр. и отражения)

б) $D=1 \Rightarrow E$ — ? и д.з., это случ. при $\ell = n\lambda/2$, где λ — длина волны част. в середине ямы

Р-ие: Запишем распредел. потенциала во всех обл.

$$\begin{cases} U=0, & x\in(-\infty;0) \\ U=-U_0, & x\in[0,\ell] \\ U=0, & x\in(\ell;+\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E+U_0)\psi_2 = 0 \\ \psi_3'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_3 = 0 \end{cases}$$

Обозначая $k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$; $k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+U_0)}$, ~~где~~ получ. р-я ур-й:

$$\begin{cases} A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} = \psi_1 \\ A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x} = \psi_2 \\ A_3 e^{ik_1x} + B_3 e^{-ik_1x} = \psi_3 \end{cases}$$

Из тех сообр., что член e^{ik_1x} опис. проходящую, а e^{-ik_1x} — отраженную волны и того, что у ψ_3 отражаться неоткуда (обратной волны нет) мы заключаем, что $B_3=0$. Тогда

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} \\ \psi_2 = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x} \\ \psi_3 = A_3 e^{ik_1x} \end{cases}$$

а) Используя условия непрерывности ψ и ψ', получаем:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 - k_2 B_2 \\ A_2 e^{ik_2 l} + B_2 e^{-ik_2 l} = A_3 e^{ik_1 l} \\ k_2 A_2 e^{ik_2 l} - k_2 B_2 e^{-ik_2 l} = k_1 A_3 e^{ik_1 l} \end{cases}$$

Эта сист. ур-й эквивалентна сист. ур-й из задачи о пот. барьере => записываем сразу $D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$:

$$D = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2}\right)^2 \sin^2 k_2 l}$$

Вспоминая, что $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+U_0)}$, имеем:

$$D = \frac{1}{1 + \left(\frac{-2m(E+U_0) + 2mE}{2 \cdot \sqrt{4m^2 E(E+U_0)}}\right)^2 \sin^2 k_2 l} = \frac{1}{1 + \frac{4m^2 U_0^2}{\cancel{16} 4 m^2 E(E+U_0)} \sin^2 k_2 l} =>$$

$$=> \boxed{D = \left(1 + \frac{U_0^2 \sin^2 k_2 l}{4E(E+U_0)}\right)^{-1}}$$

$$R = 1 - D = \frac{\cancel{1} + \frac{U_0^2 \sin^2 k_2 l}{4E(E+U_0)} - \cancel{1}}{1 + \frac{U_0^2 \sin^2 k_2 l}{4E(E+U_0)}} = \boxed{\frac{1}{1 + \frac{4E(E+U_0)}{U_0^2 \sin^2 k_2 l}} = R}$$

б) $D = 1$ {по усл. частица проходит пот. яму беспрепятственно} =>

$$=> \frac{U_0^2 \sin^2 k_2 l}{4E(E+U_0)} = 0 => \begin{cases} U_0 \neq 0 \\ E \neq 0 \end{cases} => \sin k_2 l = 0 => k_2 l = \pi n, \; n = 1, 2, \ldots$$

{ $n \neq 0$, т.к. тогда $k_2 = 0$, (~~E≠0~~), либо $l = 0$, но в данной задаче это невозможно }

Подставляя выр-е для k_2 получаем:

$$\frac{\sqrt{2m(E+U_0)}}{\hbar} = \frac{\pi n}{l};$$

$$\boxed{E = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ml^2} - U_0}$$

С др. стороны: $l = \frac{\pi n \cancel{\hbar}\, h}{2\pi\sqrt{2m(E+U_0)}} = \frac{nh}{2\sqrt{2m(E+U_0)}} = \frac{n\lambda}{2}$

Ответ: а) $D = \left(1 + \frac{U_0^2 \sin^2 k_2 l}{4E(E+U_0)}\right)^{-1}$

$R = \left(1 + \frac{4E(E+U_0)}{U_0^2 \sin^2 k_2 l}\right)^{-1}$

б) $E_n = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ml^2} - U_0$, $n = 1, 2, \ldots$ $(D = 1)$

8.11.11

1 ОЗА 59

№4.71

Дано:

$U(r) = -\frac{Ze}{r}$

$R(r) = \chi(r)/r$ - исп. замену

$R(r)$ - ? при

а) $r \to \infty$

б) $r \to 0$

Р-ие

Ур-е для R выглядит сл. образом:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \cdot \frac{dR}{dr}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E + \frac{ez}{r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]R = 0$$ или

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{2zR}{r_1 r} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = \gamma^2 R,$$ где

$$\gamma = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}; \quad r_1 = \frac{\hbar^2}{me}$$

Делаем предложенную нам замену. $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$. Тогда:

$$\cancel{\frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2}} \frac{d}{dr}\left(-\frac{\chi(r)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r^2}\right) + \frac{2z\chi}{r_1 r^2} - \frac{l(l+1)\chi}{r^3} = \frac{\gamma^2\chi}{r};$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{d\chi}{dr}} + \cancel{\frac{2\chi}{r^3}} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{d\chi}{dr}} - \cancel{\frac{2\chi}{r^3}} + \left(\frac{2z}{r_1 r^2} - \frac{l(l+1)}{r^3}\right)\chi = \frac{\gamma^2\chi}{r}$$

Домножая на r и перенося все в левую часть, имеем:

$$\boxed{\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(\frac{2z}{r_1 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \gamma^2\right)\chi = 0}$$

а) $r \to \infty$ оставляем слагаемые, кот. не явл $O(1)$, а также все производные χ по r (из-за их неизвестного поведения):

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\chi = 0;$$ Т.к. $E<0$ (в данных условиях), то

$$\chi = A\cdot e^{kr} + B e^{-kr},$$ где $k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$.

Из условия конечности волновой ф-ии имеем $A = 0 \rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R(r) \propto \frac{1}{r} e^{-kr}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$

б) $r \to 0 \Rightarrow$ оставляем $\frac{d^2\chi}{dr^2}$ и $\frac{l(l+1)}{r^2}$ (как наиболее значимые) $\Rightarrow \frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\chi = 0$

Ищем р-ие в виде $\chi = A r^{\alpha}$: $(A \neq 0)$

$$\alpha(\alpha-1) A r^{\alpha-2} - \frac{l(l+1)}{r^2} A r^{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1) = l(l+1) \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - l(l+1) = 0,$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+4(l+1)l}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4l^2+4l+1}}{2} = \frac{1 \pm (2l+1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = l+1 \\ \alpha_2 = -l \end{cases}$$

$$\Rightarrow \chi = A \cdot r^{-l} + B r^{l+1} \Rightarrow R = \frac{A}{r^{l+1}} + B r^{l}$$

Опять из-за конечности R (у нас $r \to 0$) имеем, что $A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R \propto r^{l}}$

Ответ: а) $r \to \infty \Rightarrow R \propto \frac{1}{r} e^{-\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\, r}$;

б) $r \to 0 \Rightarrow R \propto r^{l}$

ДОЗ № 10

№ 5.1

Дано:
Na
$\sigma_0 = 1,37$
$\sigma_1 = 0,88$

eV_1 – ? (1 пот. возбужд.)
$e\varphi_и$ – ? (пот. иониз.)

Р-ие: $E_{n,l}^{Na} = -\dfrac{13,6\,эВ}{(n-\sigma_l)^2}$

Для натрия 1 e^- нах. на ур-не, соотв. кв. числу $n=3$.

а) 1-й пот. возбужд.: $eV_1 = |E_{3,0}| - |E_{3,1}| =$

$$= \frac{13,6\,эВ}{(3-\sigma_0)^2} - \frac{13,6\,эВ}{(3-\sigma_1)^2} = 2,09\,эВ$$

б) Эн-я ионизации = эн-ии связи.

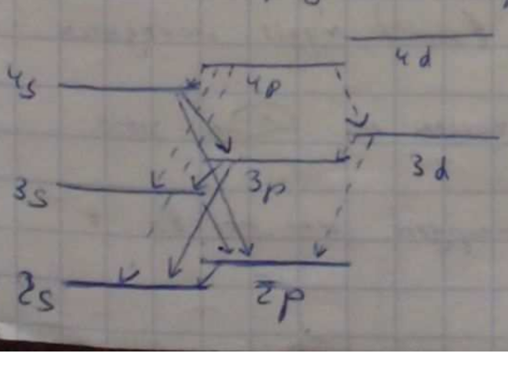
$$e\varphi_и = |E_{30}| = \frac{13,6\,эВ}{(3-\sigma_0)^2} = \frac{13,6\,эВ}{(3-1,37)^2} = 5,12\,эВ$$

Ответ: $eV_1 = 2,09\,эВ$; $e\varphi_1 = 5,12\,эВ$

№ 5.4

Сколько переходов возможно в атоме лития Li из состояний а) 4s; б) 4p в основное.

Р-ие представлено графически (из 4s – прям. лин.; из 4p – пунктиром)



а) 6 переходов

б) 6 перех. из случ. а) и 6 перех. пункт. ---

⇒ итого 12 переходов

Д/З 3.11

№3.28

Атом с n орбитами. Найти max кол-во электронов с одинаковыми а) l; б) n.

Р-ие: Условие, накладываемое на орбит. кв. число l следующее $l = 0, 1, \dots, n-1$. Согласно принципу запрета Паули в атоме нет 2-х e^- с одинаков. кв. числами (n, l, m_l, m_s).

Усл-я следующие: $l = 0, \dots, n-1$; $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$; $m_s = \pm 1/2$

а) Пусть мы зафиксировали l. тогда m_l может принимать значения от 0 до $\pm l$, т.е. $2l+1$ штук значений. С учетом того, что $m_s = \pm 1/2$ $\boxed{N_{ol}(l) = 2(2l+1)}$

?
$(n-l) \cdot 2(2l+1)$

Именно такое кол-во (max) электронов может содержатся на l орбитале

б) Смотрим какое число электронов (max) будет находится на орбите n, т.е. обладать кв. числом n. Для этого с учетом, что $l = 0, 1, \dots, n-1$ просуммируем max кол-во e^- по всем орбиталям одной оболочки:

$$N_{en}(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2(2\ell+1) = 2\,[\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{n}] = \cancel{2}\cdot\frac{(2n-1+1)n}{\cancel{2}} = \underline{\underline{2n^2}}$$

Ответ: а) $N_e(\ell) = 2(2\ell+1)$

б) $N_{en}(n) = 2n^2$

ДОЗ № 11

№ 5.15

Состояния атома: ^4P ; ^5D. Найти все возможные зн... полных мех. моментов эл. оболочек

Р-ие: а) $^4P \Rightarrow 2S+1 = 4 \Rightarrow S = \frac{3}{2}$; $L = 1$;

$|S-L| \le J \le S+L \Rightarrow \frac{1}{2} \le J \le \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow J = 1/2;\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\,\hbar = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \\ \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar \\ \frac{\sqrt{35}}{2}\hbar \end{cases}$$

— это все возможные знач-я модуля вектора полн. мех. мом. эл. оболочек

б) $^5D \Rightarrow 2S+1 = 5 \Rightarrow S = 2$; $L = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le J \le 4 \Rightarrow J = 0; 1; 2; 3; 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{J}| = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{2}\hbar \\ \sqrt{6}\hbar \\ 2\sqrt{3}\hbar \\ 2\sqrt{5}\hbar \end{cases}$$

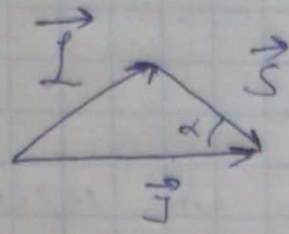
Ответ: $^4P \Rightarrow |\vec{J}_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$; $|\vec{J}_2| = \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$; $|\vec{J}_3| = \frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$

$^5D \Rightarrow |\vec{J}_1| = 0$; $|\vec{J}_2| = \sqrt{2}\hbar$; $|\vec{J}_3| = \sqrt{6}\hbar$; $|\vec{J}_4| = 2\sqrt{3}\hbar$; $|\vec{J}_5| = 2\sqrt{5}\hbar$

№ 5.25

Дано:
$2S+1=5$
$N(m_J)=7$

символ. сост-?
$\cos\alpha_{max}$ - ?



Р-ие: $|\vec{L}|^2 = |\vec{J}|^2 + |\vec{S}|^2 - 2|\vec{J}||\vec{S}|\cos\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{-|\vec{L}|^2 + |\vec{J}|^2 + |\vec{S}|^2}{2|\vec{J}||\vec{S}|}}$$

$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\,\hbar$
$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\,\hbar$ По усл $2S+1=5 \Rightarrow S = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow |\vec{S}| = \sqrt{6}\,\hbar$
$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\,\hbar$

$N(m_J) \equiv 2J_{max}+1 = 7 \Rightarrow J_{max} = 3 \Rightarrow |\vec{J}| = 2\sqrt{3}\,\hbar;$

$\Rightarrow 1 \leq L \leq 5$

Чтоб α была max, $|\vec{L}|$ должно быть большим (см. рис.) $\Rightarrow L_{max} = 5 \Rightarrow |\vec{L}| = \sqrt{30}\,\hbar$

Символ. состояния: $^5L_{max\,3}$

$\cancel{\cos\alpha}$ $\cos\alpha_{max} = \frac{12+6-30}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}} = -0,707 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{max} = 135°$

Ответ: $\alpha_{max} = 135°$

Д ОЗ А №12

$\boxed{5.55}$

Дано:

а) Al ($z=13$)

б) Co ($z=27$)

$\lambda_ф - ?$

$h\nu_ф - ?$

По з-ну Мозли $h\nu_ф = 10{,}2 эВ (z-1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ а) $h\nu_ф(Al) = 10{,}2 \cdot 12^2 = 1{,}47 кэВ$

$\lambda_ф(Al) = \frac{1234}{1{,}47 кэВ} = 0{,}840 нм = 840 пм$

б) $h\nu_ф(Co) = 10{,}2 \cdot 26^2 = 6{,}9 кэВ$

$\lambda_ф(Co) = \frac{1234}{6{,}9 кэВ} = 0{,}179 нм = 179 пм$

Ответ: Al: $h\nu_ф = 1{,}47 кэВ$; $\lambda_ф = 840$ пм

Co: $h\nu_ф = 6{,}9 кэВ$; $\lambda_ф = 179$ пм

7

$\boxed{5.58}$

Задача: в общем случае $h\nu_ф = 10{,}2 эВ (z-n)^2$. Убедиться в этом и найти n для олова ($z=50$); цезия ($z=55$); вольфрама ($z=74$), причем $\lambda_ф^о = 49{,}2$ пм; $\lambda_ф^ц = 40{,}2$ пм; $\lambda_ф^в = 21$ пм

Р-ие: считаем соответствующие эн-ии фотонов K_α линий:

$h\nu_ф^о = 25{,}2 кэВ$; $h\nu_ф^ц = 30{,}8 кэВ$; $h\nu_ф^в = 59{,}0 кэВ$

$n = z - \left(\frac{h\nu_ф}{10{,}2}\right)^{1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $n^о = 0{,}29$

$n^ц = 0{,}008$

$n^в = -2{,}08$

?

Ответ: поправки в ф-ле Мозли для олова, цезия, вольфрама таковы: $n^о = 0{,}29$; $n^ц = 0{,}008$; $n^в = -2{,}08$

5.59

Дано:

антикатод – Ni ($Z=28$)

$\lambda_{K\alpha} - \lambda_{K.г} = 0,84$ Å

$V_{уск}$ – ?

Р-ие: $eV_{уск} = h\nu_{к.г}$ – (Вк.с.р.с. e^- полностью теряет свою эн-ю, кот. идет на рентген-изл-е).

$h\nu_{кг} = \frac{1240}{\lambda_{кг}} = \frac{1240}{\lambda_{K\alpha} - 0,084\ нм}$;

$h\nu_{K\alpha} = 10,2\cdot 8(Z-1)^2 \approx 7,4358$ кэВ →

→ $\lambda_{K\alpha} = \frac{1240}{h\nu_{K\alpha}\ эВ} = 0,167$ нм →

→ $h\nu_{кг} = \frac{1240}{0,083\ нм} \approx 15$ кэВ ⇒

⇒ $V_{уск} = 15$ кВ

Ответ: $V_{уск} = 15$ кВ

5.67

Дано:

Ag ($Z=47$)

Mo ($Z=42$)

$K_\alpha(Ag)$ излучение атакует Mo

$\lambda_K(Mo) = 61,9$ пм

(край K-полосы погл.)

$K_e(Mo)$ – ?

{кин. эн. э., вырв. с К обол. Mo}

Р-ие: $h\nu_{K\alpha}(Ag) = 10,2\cdot 8(47-1)^2 =$

$E^K_{св}(Mo) = \frac{1240}{0,0619}$;

$K_e(Mo) = h\nu_{K\alpha}(Ag) - E^K_{св}(Mo) =$

$= ~~15~~$ 21,58 кэВ – 20,032 кэВ = $~~15~~$ 1,55 кэВ

Ответ: $K_e(Mo) \approx 1,55$ кэВ

Generated by CamScanner from intsig.com

Практика

Возбужд. сост. молекул: колеб. и вращ. возбуждения

7.1

Найти с помощью таблиц приложения для молекул H_2 и NO

а) энергию, необходимую для возбуждения их на 1-й вращательный ур-нь $l_r = 1$.

б) Угл. скор. вращения сост. с $l_r = 1$

Р-ие

$$E_{вр} = E_r^{м} = \frac{l_r(l_r+1)\hbar^2}{2I}; \quad I = \mu d^2, \text{ где } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

H_2: $m_1 = m_2 = 1$ а.е.м.

$d = 0{,}743 \cdot 10^{-8}$ см

NO: $m_1 = 14$ а.е.м.; $m_2 = 16$ а.е.м.

$d = 1{,}15 \cdot 10^{-8}$ см

а) $\Delta E_r = E_r(1) - E_r(0)$

$$\Delta E_r = \frac{1(1+1)\hbar^2}{2I} - \frac{0(0+1)\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{I}$$

$\underline{H_2}$: $I = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} d^2 = \frac{1}{2}(0{,}741 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24} г = 4{,}53 \cdot 10^{-41}$ кг$\cdot$м^2

$$\Delta E_r = \frac{(1{,}1 \cdot 10^{-27})^2}{4{,}53 \cdot 10^{-44}} = 2{,}64 \cdot 10^{-14} \text{ эрг} = 1{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$$

$\underline{NO}$: $I = \frac{14 \cdot 16}{14+16}(1{,}15 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24} г = 10^{-39}$ кг$\cdot$м^2

$$\Delta E_r = \frac{(1{,}1 \cdot 10^{-27})^2}{10^{-39}} = 1{,}21 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$$

(б) $E_r = \frac{I\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_r}{I}}$ $l_r = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{H_2}$: $\omega = 3,4 \cdot 10^{13}$ c^{-1}

$\underline{NO}$: $\omega = 1,5 \cdot 10^{12}$ c^{-1}

7.9

Найти энергию, необходимую для возбужд. молекул H_2 и J_2 из основного состояния на 1-й колебательный ур-нь ($v = 1$). Во ск. раз эта эн-я больше эн-ии возбуждения этих молекул на 1-й вращ. ур-нь ($l_r = 1$)

Р-ие

$$E_v^{\nu} = \left(v + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 \left[1 - x\left(v + \frac{1}{2}\right)\right]$$

(а) $\Delta E_v = E_v(1) - E_v(0) = \frac{3}{2} h\nu_0 \left[1 - x \cdot \frac{3}{2}\right] - \frac{1}{2} h\nu_0 \left[1 - \frac{x}{2}\right] =$

$= h\nu_0 - \frac{9}{4} h\nu_0 x + \frac{h\nu_0 x}{4} = h\nu_0 - 2h\nu_0 x = h\nu_0 (1 - 2x)$

$\underline{H_2}$: $K = 4395,2\ см^{-1} = \tilde{\nu}$ $x = 28,5 \cdot 10^{-3}$ отн. ед.

$\underline{J_2}$: $\tilde{\nu} = 214,6\ см^{-1}$; $x = 2,84 \cdot 10^{-3}$ отн. ед.

Замечание: $\nu_0 = \tilde{\nu} \cdot c$; $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{H_2}$: $\Delta E_v = 6,64 \cdot 10^{-27} \cdot 4395,2 \cdot 3 \cdot 10^{10} (1 - 2 \cdot 28,5 \cdot 10^{-3}) = 8,3 \cdot 10^{-13}$ эрг $= 0,51$ эВ

$\underline{J_2}$: $\Delta E_v = $ —"— $= 2,6 \cdot 10^{-2}$ эВ

(б) $\Delta E_r = \frac{\hbar^2}{I}$; $\underline{H_2}$: $\Delta E_r = 1,6 \cdot 10^{-2}$ эВ

$\underline{J_2}$: $m_1 = m_2 = 127$; $d = 2,7 \cdot 10^{-8}$ см $\Rightarrow I = 63,5 \cdot (2,7 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-24} = 7,7 \cdot 10^{-38}$ кг·м^2 $\Rightarrow \Delta E_r \approx 10^{-5}$ эВ

Т.е. H_2: $\frac{\Delta E_v}{\Delta E_r} \approx 32$

I_2: $\frac{\Delta E_v}{\Delta E_r} \approx 2600$

7.13

Определите max возможное колебат. кв. число, соотв. ему [illegible] и энергию диссоциации 2-х атомной молекулы, собств. частота колеб. которой ω и коэф. ангарм. x. Вычислите эти величины для молекулы H_2.

Р-ие

v_{max} находим из условия $\frac{dE_v}{dv} = 0$ ⇒

ДЗ: 7.7; 7.14

⇒ $v_{max} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}$

$E_0 = E_v(v_{max}) - E_v(0) = [\ldots] = \frac{\hbar\omega}{4}[\ldots]$

Дом. зад-е

§7.2

Дано:
HCl
$\Delta E_r = 7{,}86$ мэВ
$m_1 = 1;\ m_2 = 35;\ d = 1{,}27$ [illegible]

$l_2 - ?$ ($l_{нач} - ?$)

Р-ие: $E_r = \frac{l_r(l_r+1)\hbar^2}{2I}$

$\Delta E_r = E_r(l_2) - E(l_1) = \frac{l_2(l_2+1)\hbar^2}{2I} - \frac{(l_2-1)l_2\hbar^2}{2I} =$

$= \frac{\hbar^2}{2I}\{l_2^2 + l_2 - l_2^2 + l_2\} = \frac{\hbar^2}{I} l_2$ ([illegible])

$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2$ ⇒

⇒ $\boxed{l_2 = \frac{\Delta E_r}{\hbar^2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2}$

$$l_2 = \frac{7,86\cdot10^{-3}\cdot1,6\cdot10^{-12}}{(1,1\cdot10^{-27})^2}\cdot\frac{36}{37}\cdot1,67\cdot10^{-24}\,(1,275\cdot10^{-8})^2 \approx 3$$

Соотв. у мин. ур. я $l_2' = l_2 - 1 = 2$

$$\text{Ответ: } l_2' = 2;\ l_2'' = 3$$

№7.14

Дано: E_D; $\tilde{\nu}$

$x - ?$

Р-ие

$$E_D = E_v(v_{max}) - E_v(0)$$

$$E_v = (v+\tfrac{1}{2})\,h\nu_0\,\{1 - (v+\tfrac{1}{2})x\}$$

В зад. №7.13 было получено соотношение:

$$E_D \approx \frac{h\nu_0}{4}\left[\frac{1}{x} - 2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4E_D}{h\nu_0} + 2 \Rightarrow x = \frac{h\tilde{\nu}c}{4E_D + 2h\tilde{\nu}c}$$

Для Cl_2: $E_0 = 2,48$ эВ; $\tilde{\nu} = 564,9\ см^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{6,64\cdot10^{-27}\cdot564,9\cdot3\cdot10^{10}}{4\cdot2,48\cdot1,6\cdot10^{-12} + 2\cdot6,64\cdot10^{-27}\cdot564,9\cdot3\cdot10^{10}} \approx 7\cdot10^{-3}\ \text{отн. ед.}$$

Ответ: $x = \frac{h\tilde{\nu}c}{4E_0 + 2h\tilde{\nu}c}$

$x \approx 7\cdot10^{-3}$ отн. ед.

ДОЗ А №14

№14

Дано:

$M = 5{,}7\ \frac{Вт}{см^2}$

λ_{max} - ?

Р-ие: согласно определению энерг. светимости $M = \sigma T^4$ и з-ну смещения Вина $\lambda_{max} = \frac{b_\lambda}{T}$, имеем:

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{b_\lambda}{T} = b_\lambda \sqrt[4]{\frac{\sigma}{M}}}$$

С учетом, что $b_\lambda = 0{,}29\ см \cdot К$; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-12}\ \frac{Вт}{см^2 \cdot К^4}$ ⇒

$$\Rightarrow \lambda_{max} \approx 290 \cdot 10^{-6}\ см = 2{,}9\ мкм$$

Ответ: $\lambda_{max} = 2{,}9\ мкм$

№1.9

Дано:

$U(\nu) = A\nu^3 exp(-\frac{\alpha\nu}{T})$

(так принято)

$\alpha = 7{,}64 \cdot 10^{-12}\ с \cdot К$

$T = 2000\ К$

ν_{max} - ?

Наиболее вр. част. изл-я значит ноль произв. ф-ии $U(\nu)$ по ν ⇒

$$\Rightarrow \frac{dU(\nu)}{d\nu} = 3A\nu^2 exp(-\frac{\alpha\nu}{T}) - A\nu^3 \frac{\alpha}{T} exp(-\frac{\alpha\nu}{T}) = 0$$

$$\Rightarrow 3 - \nu_{max}\frac{\alpha}{T} = 0 \rightarrow \nu_{max} = \frac{3T}{\alpha}$$

$$\nu_{max} = \frac{3 \cdot 2000}{7{,}64 \cdot 10^{-12}} = 7{,}85 \cdot 10^{14}\ с^{-1}$$

Ответ: $\nu_{max} = 0{,}785 \cdot 10^{15}\ с^{-1}$

№1.1

Дано:

$u(\nu)=\nu^3 f(\nu/T)$

т.д. а) $\nu_{max}\sim T$

б) $M\sim T^4$

а) аналогично зад. №1.9 ищем ν_{max} сп. обр.:

$$\frac{dU(\nu)}{d\nu}=3\nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right)+\nu^3 f'\left(\frac{\nu}{T}\right)\cdot\frac{1}{T}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\frac{\nu^2}{T^2}f\left(\frac{\nu}{T}\right)+\frac{\nu^3}{T^3}f'\left(\frac{\nu}{T}\right)=0 \qquad \frac{\nu}{T}=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 f(x)+x^3 f'(x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3f(x)+xf'(x)=0$$

Это ур-е справедливо лишь для некот. (и притом ед.) x, т.е.

$x=Const \Rightarrow \frac{\nu_{max}}{T}=Const \Rightarrow \underline{\nu_{max}\sim T}$

б) $$M\equiv\frac{c}{4}\int_0^\infty u(\nu)d\nu=\frac{c}{4}\int_0^\infty\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu=\frac{cT^4}{4}\int_0^\infty\frac{\nu^3}{T^3}f\left(\frac{\nu}{T}\right)d\frac{\nu}{T}=$$

$$=\left\{\frac{\nu}{T}=x;\ d\nu=Tdx;\ \nu=0\to x=0;\ \nu=\infty\to x=\infty\right\}=\frac{cT^4}{4}\underbrace{\int_0^\infty x^3 f(x)dx}_{=Const}\sim T^4$$

Итого $\underline{\underline{M\sim T^4}}$.