Доза: 1

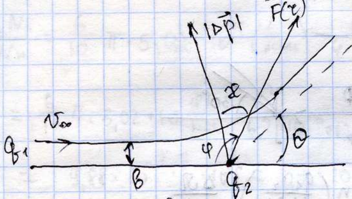
09.09.10.

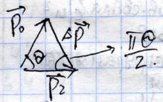
Задача №2.3.

Вывести с помощью законов сохранения энергии и момента импульса формулу

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = (q_1 q_2)/(2bT)$$

(b – прицельный параметр
T = k – кинетич. энергия налет. частицы
q_1 и q_2 – заряды взаимод-щих частиц)





$$|\Delta\vec{p}| = 2p_\infty \sin\frac{\theta}{2}$$

$$|\Delta\vec{p}| = \left|\int F_{\Delta p}\, dt\right| = \int F\cos\varkappa\, dt = \int \frac{q_1 q_2}{r^2(t)}\cos\varkappa(t)\, dt =$$

$$= q_1 q_2 \int \frac{\cos\varkappa(r)}{r^2(t)}\, dt \ominus \left\{ mr^2\dot{\varphi} = mv_\infty b \Rightarrow r^2 = \frac{bv_\infty\, dt}{d\varphi};\right.$$

из зсми $\left.\cos\varkappa(r) = \cos\left\{\varphi - \frac{\pi-\theta}{2}\right\} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} + \varphi\right) = -\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\right\}$

$$\ominus\ q_1 q_2 \int_0^{\theta} -\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\theta}{2}\right)}{bv_\infty}\, d\varphi = \frac{q_1 q_2}{bv_\infty}\cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi-\theta} =$$

$$= \frac{2q_1 q_2}{bv_\infty}\cos\frac{\theta}{2}.$$

$$2p_\infty \sin\frac{\theta}{2} = \frac{2q_1 q_2}{bv_\infty}\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow tg\,\frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{2bk}$$

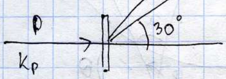
16.09.10.

Задача 2.22.

Узкий пучок протонов с кин. энергией $T = 1{,}0$ МэВ падает нормально на латунную фольгу толщиной $\rho d = 1{,}5$ мг/см^2.
Найти долю протонов, рассеивающихся на углы больше $\theta_0 = 30°$, если массовое отношение меди и цинка в фольге равно соотв но 7 : 3

Дано:
$K_\alpha = T = 1{,}0$ МэВ
$\rho d = 1{,}5$ мг/см^2
$B = 1$
$\theta_1 = \vartheta_0 = 30° = \pi/6$
$\theta_2 = \pi$
$m_{меди} : m_{цинка} = 7 : 3$
фольга : медь к цинку
${}^{24}_{12}Mg \qquad {}^{65}_{30}Zn$

$\dfrac{\Delta N_p}{N_n}$ - ?



$$\frac{\Delta N}{N} = n\left(\frac{q_1 q_2}{4Bk_\alpha}\right)^2 \frac{\Delta\Omega}{\sin^4 \theta/2}$$

$$\begin{cases} 179\, г - A = 6{,}023 \cdot 10^{23}\ 1/моль \\ 1{,}5 \cdot 10^{-3}\, г - n \end{cases}$$

$$n = \frac{6{,}023}{179} 1{,}5 \cdot 10^{-3} \approx \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}}{6 \cdot 3 \cdot 10} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \approx 5{,}02 \cdot 10^{18}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = n\left(\frac{q_1 q_2}{4Bk_\alpha}\right)^2 \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{2\pi \sin\theta\, d\theta}{\sin^4 \theta/2} = 2\pi n \left(\frac{q_1 q_2}{4Bk_\alpha}\right)^2 2\int_{\pi/6}^{\pi} \frac{d \sin\frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} =$$

$$= 4\pi n\left(\frac{q_1 q_2}{4k_\alpha}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \theta/2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi} =$$

$$= -2\pi n\left(\frac{q_1 q_2}{4k_\alpha}\right)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1/4}\right) =$$

$$= 6\pi n\left(\frac{q_1 q_2}{4k_\alpha}\right)^2$$

$$n_1 = \left(\frac{7}{7+3}\right) n \quad ; \quad n_2 = \left(\frac{3}{7+3}\right) n$$

$$\frac{\Delta N_p}{N_n} = \left(\frac{\Delta N_p}{N_n}\right)_m + \left(\frac{\Delta N_p}{N_n}\right)_{цем} = 6\pi n_1 \left(\frac{q_1 q_3}{4k_\alpha}\right)^2 + 6\pi n_2 \left(\frac{q_1 q_4}{4k_\alpha}\right)^2$$

$$\frac{\Delta N_p}{N_n} = 6\cdot\pi\frac{7}{10} n \left(\frac{q_1 q_3}{4k_\alpha}\right)^2 + 6\pi\frac{3}{10} n\left(\frac{q_1 q_4}{4k_\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{6}{10}\pi n \left(\frac{q_1}{4k_\alpha}\right)^2 \left(7q_3^2 + 3q_4^2\right)$$

$$\frac{\Delta N_p}{N_n} = \frac{6}{10}\pi\cdot 5{,}02\cdot 10^{18}\left(\frac{1}{моль}\right)\frac{e^2}{4\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}\,эрг}\frac{(7e^2 12^2 + 3e^2\cdot 30^2)}{4\cdot 1{,}6\cdot 10^6\cdot 10^{-12}} =$$

$$= \frac{6}{10}\pi\cdot 5{,}02\cdot 10^{18}\frac{1}{моль}\frac{e^2}{6{,}2\cdot 10^{-6}\,эрг}\frac{9e^2(7\cdot 4^2 + 3\cdot 10^2)}{6{,}4\cdot 10^{-6}} =$$

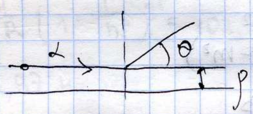
$$= 9{,}88\cdot 10^{-17}\cdot\pi\cdot 10^{13} \approx 2{,}7\cdot 10^{-16}\cdot 10^{13} = 2{,}7\cdot 10^{-3}.$$

Задача 2.4.

$k_\alpha = 53$

$\theta = 60^\circ$

$p - ?$



$$tg\frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{2p k_\alpha}$$

$$q_1 = 2e$$

$$q_2 = Ze$$

$$tg\frac{\theta}{2} = \frac{Ze^2}{pk_\alpha}; \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{Ze^2}{p\cdot 1{,}6\cdot 53\cdot 10^{-6}}$$

$$p = \frac{3Ze^2}{\sqrt{3}\cdot 84{,}8\cdot 10^{-6}} = \frac{Ze^2\cdot 10^6}{48}$$

$Z = 92$

$$p = \frac{92\cdot(4{,}8\cdot 10^{-10})^2\cdot 10^6}{48} = 44{,}16\cdot 10^{-14}\,см.$$

Доза: 2

Задача №2.35

В спектре некоторых водородоподобных ионов длина волны третьей линии серии Бальмера равна 108,5 нм. Найти энергию связи электрона в основном состоянии этих ионов.

$\lambda = 108{,}5$ нм
$n = 5$
Бальмер.

$E_n - ?$

$$E_n = -\frac{hCR}{n'^2} z$$

$$R_z = R \cdot z^2$$

$$k = R_z\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = Rz^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} = Rz^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = Rz^2 \frac{n^2 - m^2}{m^2 n^2}$$

$$Rz^2 = \frac{m^2 n^2}{\lambda(n^2 - m^2)}$$

$$E_n = -\frac{hc}{n'^2} \frac{m^2 n^2}{\lambda(n^2 - m^2)}$$

$hc = 1{,}24 \cdot 10^{-6}$ м эВ

$n' = 1$
$m = 2$

$$E_n = \frac{1{,}24 \cdot 10^{-6}}{1} \frac{4 \cdot 25}{108{,}5 \cdot 10^{-9}(25 - 4)} =$$

$$= 0{,}0544 \cdot 10^3 = 54{,}4 \text{ эВ}$$

Задача №2.32.

Какие линии содержит спектр поглощения атомарного водорода, ~~если известно, что при переходе~~ в основное состояние атом в диапазоне волн

Задача № 2,32

$\lambda_n = 94{,}5$ нм
$\lambda_m = 130$ нм

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_n} = R\left(1 - \frac{1}{n_n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n_n^2} = 1 - \frac{1}{\lambda_n R} = 0{,}038$$

$$n_n^2 = 26{,}3 \Rightarrow n_n = 5{,}1$$

$$\frac{1}{\lambda_m} = R\left(1 - \frac{1}{n_m^2}\right)$$

$$\frac{1}{n_m^2} = 1 - \frac{1}{\lambda_m R} = 0{,}3$$

$$n_m^2 = 3{,}3 \Rightarrow n_m = 1{,}82$$

$$n_1: \lambda_1 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{n_1^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1{,}1 \cdot 10^7}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-1} =$$

$= 121{,}2$ нм

$$n_2: \lambda_2 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{n_2^2}\right)^{-1} = 102{,}3 \text{ нм}$$

$n_3: \lambda_3 = 96{,}97$ нм

$n_1: \lambda_4 = 94{,}7$ нм.

задача 1.

Лайман

$$\frac{1}{\lambda_{21}} = R\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \rightarrow$$

$$\lambda_{21} = \frac{1}{R} \cdot \frac{4}{3} = 121,2 \text{ нм}$$

$$\lambda_{31} = \frac{1}{R} \cdot \frac{9}{8} = 102,3 \text{ нм}$$

$$\lambda_{41} = \frac{1}{R} \cdot \frac{16}{15} = 96,97 \text{ нм}$$

$$\lambda_{51} = \frac{1}{R} \cdot \frac{25}{24} = 94,7 \text{ нм}$$

Пашен ~~Бальмер~~.

$$\frac{1}{\lambda_{43}} = R\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) \rightarrow$$

$$\lambda_{43} = \frac{144}{7R} = 1870,1 \text{ нм}$$

$$\lambda_{53} = \frac{225}{16R} = 1278,4 \text{ нм}$$

Бальмер

$$\frac{1}{\lambda_{32}} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \rightarrow$$

$$\lambda_{32} = \frac{36}{5R} = 654,55 \text{ нм}$$

$$\lambda_{42} = \frac{16}{3R} = 484,8 \text{ нм}$$

$$\lambda_{52} = \frac{100}{21R} = 432,9 \text{ нм}.$$

$\boxed{\text{Доза: 3}}$

задача № 2.36 в тетради по практике. за 25.09.10.

2,45

Вычислить отношение массы протона к массе электрона, если известно, что отношение постоянных Ридберга тяжелого и легкого водорода $\eta = 1,000272$, а отношение масс ядер $n = 2,00$.

$$\frac{R_2}{R_1} = \eta \qquad \eta = 1,000272 \qquad \frac{m_{e1}}{m_{e2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m_e}{m_p} - ?$$

$$R_1 = R_\infty \left(1 + \frac{m_e}{m_{e1}}\right)^{-1}$$

$$R_2 = R_\infty \left(1 + \frac{m_e}{m_{e2}}\right)^{-1}$$

$$\frac{1 + \frac{m_e}{m_p}}{1 + \frac{m_e}{m_p}} = \eta$$

$$1 + \frac{m_e}{m_p} = \left(\eta + \frac{\eta}{2}\frac{m_e}{m_p}\right)$$

$$\frac{m_e}{m_p}\left(1 + \frac{\eta}{2}\right) = \eta - 1$$

$$\frac{m_e}{m_p} = \frac{\eta - 1}{1 - \eta/2}$$

$$\frac{m_e}{m_p} = 0,000544 \quad ; \quad \frac{m_p}{m_e} = 1838$$

2,46

Найти для легкого и тяжелого водорода разность:
а) энергий связи электронов в основных состояниях
б) первых потенциалов возбуждения
в) длин волн резонансных линий

Дано: H_Λ, H_m	
ΔE - ? ΔU_1 - ? $\Delta\lambda_p$ - ?	

$$E_\Lambda = \left(1+\frac{m_e}{m_p}\right)^{-1} 13{,}6\ эВ$$

$$E_m = \left(1+\frac{m_e}{2m_p}\right)^{-1} 13{,}6\ эВ$$

$$E_\Gamma - E_\Lambda = 13{,}6\ эВ\left[\left(1+\frac{m_e}{2m_p}\right)^{-1} - \left(1-\frac{m_e}{m_p}\right)^{-1}\right] =$$

$$= 0{,}003696\ эВ$$

$$U_{1\Lambda} = \frac{1}{e}\,\frac{3}{4}\cdot 13{,}6\left(1+\frac{m_e}{m_p}\right)^{-1} = 10{,}194454\ В$$

$$U_{1\Gamma} = \frac{1}{e}\,\frac{3}{4}\cdot 13{,}6\left(1+\frac{m_e}{2m_p}\right)^{-1} = 10{,}197226\ В$$

$$\Delta U = 0{,}002772\ В$$

$$\lambda_\Lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E_2 - E_1} = 1220{,}6636\ \AA$$

$$\lambda_\Gamma = 1220{,}3318\ \AA$$

$$\Delta\lambda = 0{,}3318\ \AA$$

2,26.

Дано: H	
$r^{(1)}$ - ? $v^{(1)}$ - ? $T^{(1)}$ - ? $E'_{св}$ - ? $\lambda^{(1)}$ - ?	

$$r_n = \frac{n^2}{z} r_1 \quad ; \quad v_n = \frac{ze^2}{\hbar^2 n}$$

$$E_n = -\left(\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\right)\frac{z^2}{n^2}$$

$H \qquad r^{(1)} = r_1 = 0{,}53\ \AA$

$$v^{(1)} = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{(4{,}8)^2\cdot(10^{-10})^2}{1{,}05\cdot 10^{-27}} = 2{,}19\cdot 10^{8}\ см/с$$

$r^{(2)} = 4r_1 = 2,12\,A^\circ$

$v^{(2)} = \frac{v^{(1)}}{2} = 1,09 \cdot 10^8 \ \frac{см}{с}$

$T^{(1)} = E_{cb}^{(1)} = \frac{m_e v^{(1)2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 10^{-28} (2,19 \cdot 10^8)^2 = 13,6$ эВ

$U_1 = \frac{1}{e}\left(E^{(2)} - E^{(1)}\right) = \frac{13,6 \text{ эВ}}{e}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10,2$ В

$\lambda = \frac{2\pi \hbar c}{E^{(2)} - E^{(1)}} \rightarrow \lambda_p = 1220\,A^\circ$

Доза: 4

1.44

Найти max кинетическую энергию фотоэлектронов, вырываемых с поверхности лития электромагнитным излучением, напряженность электрической составляющей которого меняется во времени по з-ну:
$k = a(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t$, где a - постоянная,
$\omega = 6{,}0\cdot10^{14}\ c^{-1}$; $\omega_0 = 3{,}60\cdot10^{15} c^{-1}$

Дано:
$k = a(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t$
$a = const$
$\omega = 6{,}0\cdot10^{14}\ c^{-1}$
$\omega_0 = 3{,}60\cdot10^{15} c^{-1}$

$k_{e max}$ - ?

$$k = a\cos\omega_0 t + a\cos\omega t\cos\omega_0 t = a\cos\omega_0 t + \frac{a}{2}\cos(\omega+\omega_0)t + \frac{a}{2}\cos(\omega-\omega_0)t$$

$$k_{e max} = \frac{a}{2}\cos(\omega+\omega_0)t$$

$$k_{e max} = h\nu - A$$

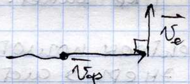
$$\nu = \frac{1}{T};\ T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$k_{e max} = \frac{h}{2\pi}(\omega+\omega_0) - A = \hbar(\omega+\omega_0) - A$$

$k_{e max} = 0{,}55$ эВ.

1.48

Фотон с длиной волны $\lambda = 17{,}0$ пм. Вырывает из покоящегося атома электрон энергия связи которого $E_{св} = 69{,}3$ кэВ. Найти импульс, переданный атому в результате этого процесса, если электрон вылетел под прямым углом к направлению налетающего фотона.



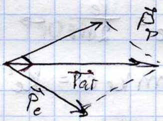
Дано:
$\lambda = 17$ пкм
$E_{св} = 69{,}3$ кэВ

p_e - ?

$$K_e = \frac{hc}{\lambda} - E_{св}$$

$$K_e = \frac{1234 \text{ нм}}{0{,}017 \text{ нм}} - 69{,}3 \cdot 10^3 \text{ эВ} = 3{,}3 \text{ кэВ}$$

$$(\vec{p}_{ат})^2 = (\vec{p}_e)^2 + (\vec{p}_{ф})^2$$



$$p_{ф} = \frac{h\nu}{c}$$

$$p_e = \sqrt{2 m_e K_e}$$

$$p_{ат} = \sqrt{2 m_e K_e + \frac{h^2\nu^2}{c^2}}$$

$$p_{ат} = 96 \text{ кэВ}/c.$$

1,49

Воспользовавшись з-нами сохранения, показать, что свободный электрон не может поглотить фотон.

З-он сохр-е энергии.

$h\nu = mc^2 + K_e$ (K_e – кинет. эн-я сист)

Допустим, что электрон поглотил фотон, тогда полная энергия системы после столкновений.

$E = c\sqrt{p_e^2 + m^2c^2}$; $c\sqrt{p_e^2 + m^2c^2} = K_e + mc^2$

$c^2p_e^2 + m^2c^4 = K_e^2 + 2K_e mc^2 + m^2c^4$

$K_e = \frac{p_e^2}{2m} \rightarrow p_e = \sqrt{2mK_e}$

$2mK_ec^2 = K_e^2 + 2mK_ec^2$

$K_e = 0$, и тогда:

~~[illegible]~~ $h\nu = 0$, следовательно электрон не может поглотить фотон.

Доза 5.

3.1.

Вычислить дебройлевскую длину волны электрона и протона, движущихся с кинет. энергией 1,00 кэВ. При каких значениях кинет. энергии их длина волны будет равна 100 пм?

$E = 1$ кэВ
$\lambda_0 = 1\,A^\circ$

$\lambda_e, \lambda_p - ?$

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}}$$
$$\lambda_p = \frac{h}{p_p} = \frac{h}{\sqrt{2m_p E}}$$

$\lambda_e = 0{,}88\,A^\circ$; $\lambda_p = 0{,}009\,A^\circ$

$E_0 = \dfrac{h^2}{2m\lambda_0^2}$; $E_{0e} = \dfrac{h^2}{2m_e\lambda_0^2} = 150$ эВ

3,7.

Нейтрон с кин. энергией $= 0{,}25$ эВ испытал упругое соударение с первоначально покоящимся ядром атома ^4He. Найти длины волн обеих частиц в их Ц-системе до и после соударения

в сист. ц. : $\vec{P}'_n + \vec{P}'_{He} = 0$

$\vec{P}'_{He} = m_{He}\vec{v}$; $\vec{v}$ - скорость после удара

$\vec{v} = \dfrac{m_n}{m_n + m_{He}}\vec{v}$

$\vec{v} = \dfrac{\vec{P}_n}{m_n + m_{He}}$

$\vec{P}'_{He} = \dfrac{m_{He}\vec{P}_n}{m_n + m_{He}}$; $\lambda'_{He} = \dfrac{h}{p_n}\left[1 + \dfrac{m_n}{m_{He}}\right] = \dfrac{h}{\sqrt{2m_n K_n}}\left[1 + \dfrac{m_n}{m_{He}}\right] \approx$
$= 0{,}7\,A^\circ$

$|p'_n| = |p'_{He}| \Rightarrow \lambda_{He} = \lambda'_n$; $\lambda_n = 0{,}56\,A^\circ$

3.14

Поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой щелью шириной $b = 2.0$ мкм. Найти скорость электронов, если на экране, отстоящем от щели на $l = 50$ см, ширина центрального дифракционного max $\Delta x = 0{,}36$ мм.

$\Delta x = 0{,}36$ мм
$b = 2$ мкм
$l = 50$ см

$E - ?$

$$E = \frac{p^2}{2m_e}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\lambda = b \sin\theta \quad ; \quad \sin\theta = \frac{\Delta x}{2l}$$

$$p = \frac{2hl}{b\Delta x}$$

$$E = \frac{[2lh]^2}{2b^2 m_e \Delta x^2} = \frac{1}{2m_e}\left(\frac{2lh}{b\Delta x}\right)^2$$

$$E = 2{,}6 \text{ эВ}$$

3.22.

Показать, что измерение x-координаты частицы с помощью ~~~~ микроскопа вносит неопределенность в ее импульс Δp_x, такую, что $\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar$. Имейте в виду, что разрешение микроскопа $d = \lambda / \sin\theta$, где λ – дл. волны

$\Delta p_x = p \sin\theta$; $\Delta x \sim b$

$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$; $\Delta p_x = \frac{h}{x} \sin\theta$

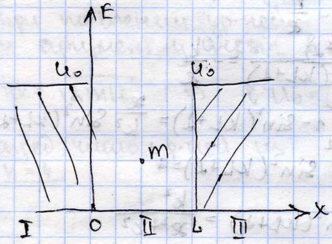
$\lambda = b \sin\theta$

$\Delta p_x = \frac{h}{b} = \frac{h}{\Delta x}$; $\Delta p_x \Delta x = h.$

Доза 6

3.49.

Частица массой m находится в одномерном симметричном потенц. поле. Найти ур-е, определяющее возможные значения энергии частицы в области $E < U_0$



I : $x \leq 0$ $U(x) = U_0 \to \Psi_1$

II : $0 < x < L$ $U(x) = 0 \to \Psi_2$

III : $x \geq L$ $U(x) = U_0 \to \Psi_3$

Запишем ур-е Шредингера: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + U(x)\Psi = E\Psi$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U_0]\Psi_1 = 0 \\ &\Psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_2 = 0 \\ &\Psi_3'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\Psi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &\Psi_1'' + k_1^2 \Psi_1 = 0 \\ &\Psi_2'' + k_2^2 \Psi_2 = 0 \\ &\Psi_3'' + k_3^2 \Psi_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Psi_2 = b \sin(k_2 x + \alpha)$

$\psi_2 = B\sin(k_2x + \alpha)$

$E < U_0 \quad E - U_0 < 0 \to k_1 = i\varkappa \; ; \; k_3 = \varkappa$

$\varkappa = \dfrac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$

$\psi_1'' - \varkappa^2\psi_1 = 0 \quad ; \; \psi_1 = a'e^{-\varkappa x} + ae^{\varkappa x}$

$\psi_3'' - \varkappa^2\psi_3 = 0 \quad ; \; \psi_3 = c'e^{\varkappa x} + ce^{-\varkappa x}$

$x \to \infty \quad e^{-\varkappa x} \to \infty \to a' = 0 \quad , c' = 0$

$\psi_1 = ae^{\varkappa x} \qquad \psi_3 = e^{-\varkappa x}$

св-во непрер-ти:

$x = 0 \quad \psi_1(0) = \psi_2(0) \qquad a = B\sin\alpha$

$x = L \quad \psi_2(L) = \psi_3(L) \qquad B\sin(xL + \alpha) = ce^{-\varkappa L}$

$x = 0 \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \qquad a\varkappa = Bk\cos\alpha$

$x = L \quad \psi_2'(L) = \psi_3'(L) \qquad kB\cos(kL + \alpha) = -\varkappa ce^{-\varkappa L}$

$tg\,\alpha = \dfrac{k}{\varkappa} \qquad tg(kL + \alpha) = -\dfrac{k}{\varkappa}$

$\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \dfrac{k}{\varkappa} \qquad \dfrac{\sin(kL + \alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(kL + \alpha)}} = -\dfrac{k}{\varkappa}$

$1 - \sin^2\alpha = \dfrac{\varkappa^2}{k^2}\sin^2\alpha \qquad 1 - \sin^2(kL + \alpha) = \dfrac{\varkappa^2}{k^2}\sin^2(kL + \alpha)$

$\dfrac{\varkappa^2 + k^2}{k^2}\sin^2\alpha = 1 \qquad \dfrac{\varkappa^2 + k^2}{k^2}\sin^2(kL + \alpha) = 1$

$\sin^2\alpha = \dfrac{k^2}{\varkappa^2 + k^2} \qquad \sin^2(kL + \alpha) = \dfrac{k^2}{\varkappa^2 + k^2}$

$\varkappa^2 + k^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E) + \dfrac{2m}{\hbar^2}E = \dfrac{2m}{\hbar^2}U_0$

тогда $x = 0, x = L, E = U_0$ искл. $\alpha(\alpha = 0) \Rightarrow$

$\sin^2(kL + \alpha) = \dfrac{k^2\hbar^2}{2mU_0}$

$\sin(kL + \alpha) = \dfrac{k\hbar}{\sqrt{2mU_0}}$

3.50.

Воспользовавшись решением предыдущей задачи, найти значение $l^2 U_0$ при котором:
а) энергия основного состояния частицы $E = U_0/2$
б) появляется второй уровень, n-й уровень.
Сколько дискретных уровней содержит данная яма, если $l^2 U_0 = 75\, \hbar^2/m$.

а) основн. сост. соотв. $n = 1$ в ф-ле $kl = n\pi - 2\arcsin \frac{}{\hbar k(\sqrt{2mU_0})}$

реш. предыд. задачи при $E = U_0/2$

$$kl = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l^2 U_0 = \pi^2 \hbar^2/4m$$

$$k = \sqrt{\frac{2U_0}{\hbar}}$$

$$\sqrt{\frac{mU_0}{\hbar}}\, l = \pi - 2\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad U_0 l^2 = \frac{2\hbar^2}{4m}$$

б) $kl = n\pi - 2\arcsin/\hbar k(\sqrt{2mU_0})$
при появлении ур-ней $kl = \pi, 2\pi \ldots (n+1)\pi$
и аргумент у arcsin в этих случаях равен 1.

$$\hbar k = \sqrt{2mU_0} \Rightarrow l^2 U_0 = (n-1)^2 \pi^2 \hbar^2/2m \quad ; n = 2, 3 \ldots$$

опред. число ур-ней из: $n > \sqrt{2ml^2 U_0}/\pi\hbar > n-1$
$\underline{n = 4}$

Доза:7

3.60

Частица массой m и энергией E падает на прямоугольную пот. яму. Найти:
а) коэфф. прозрачности D и коэфф. отраж-я R.
б) значения E, при которых частица будет беспрепятственно проходить через данную яму. Убедиться в том, что это будет происходить при условии $l = n\lambda/2$, где λ - длина волны частицы внутри ямы, $n = 0, 1, 2, ...$

а) $$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx) \\ \psi_2 &= A_2 \exp(i\varkappa x) + B_2 \exp(-i\varkappa x) \\ \psi_3 &= A_3 \exp(ikx) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 \\ kA_1 - kB_1 &= \varkappa A_2 - \varkappa B_2 \end{aligned}\right\}$$

$$A_1 \exp(i\varkappa L) + B_2 \exp(-i\varkappa L) = A_3 \exp(ikL)$$
$$\varkappa A_2 \exp(i\varkappa L) + \varkappa B_2 \exp(-i\varkappa L) = k A_3 \exp(ikL)$$

$$\left.\begin{aligned} 2kA_1 &= (k+\varkappa)A_2 + (k-\varkappa)B_2 \\ 2\varkappa A_2 \exp(i\varkappa L) &= (k+\varkappa) A_3 \exp(ikL) \end{aligned}\right\}$$

$$2\varkappa B_2 \exp(-i\varkappa L) = (\varkappa - k) A_3 \exp(ikL)$$

$$2kA_1 = \frac{(k+\varkappa)^2}{2\varkappa} A_3 \exp(i-(k-\varkappa)L) - \frac{(\varkappa-k)^2}{2\varkappa} A_3 \exp(i(k+\varkappa)L)$$

$$2kA_1 = A_3 \exp(ikL)\left(\frac{k+\varkappa}{2\varkappa}\right)^2 \exp(-i\varkappa L) - \frac{(\varkappa-k)^2}{2x} \exp(i\varkappa L)$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4k\varkappa}{\exp(ikL)(k+\varkappa)^2 \exp(-i\varkappa L)(\varkappa-k)^2 \exp(\varkappa L)}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\exp(ikL) - 2k^2 i \sin(\varkappa L) - 2i\varkappa^2 \sin(\varkappa L) - 4k\varkappa\cos(\varkappa L)}{4k\varkappa}$$

$$\left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \left(\frac{4(k_2^2+\varkappa^2)^2\sin^2(\varkappa L)+16k^2\varkappa^2\cos^2(\varkappa L)}{16k^2\varkappa^2}\right)^{-1}$$

$$D = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \left(\frac{(k^2+\varkappa^2)\sin^2(\varkappa L)+4k^2\varkappa^2\cos^2(\varkappa L)}{4k^2\varkappa^2}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{(k^4+2k^2\varkappa^2+\varkappa^4)\sin^2(\varkappa L)+4k^2\varkappa^2\cos^2(\varkappa L)}{16k^2\varkappa^2}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1+\frac{(k^2-\varkappa^2)\sin^2(\varkappa L)}{4k^2\varkappa^2}\right)^{-1}$$

$$R = 1 - D = \frac{(k^2-\varkappa^2)\sin^2(\varkappa L)}{4k^2\varkappa^2+(k^2-\varkappa^2)\sin^2(\varkappa L)}$$

$$D = \left(1+\frac{U_0^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar}(E+U_0)}\,L\right)}{4E(E+U_0)}\right)$$

б) $\sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar}[E+U_0]}\,L\right)=0$

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[U_0+E]}\,L = (\pi n)^2 \quad ; \quad \frac{2m}{\hbar^2}[E+U_0] = \left(\frac{\pi n}{L^2}\right)^2$$

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2} - U_0$$

Доза! 8

4,63

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+$$
$$+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-U(r)\right]\psi(r,\theta,\varphi)=0$$

Пусть $\psi=R(r)\,\varphi(\theta,\varphi)$

$$\varphi\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-U(r)\right]R\varphi=0$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E-U(r)\right]=const=l(l+1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}R\left[E-U(r)-\frac{\hbar^2}{2mr^2}l(l+1)\right]=0$$

$$\frac{\partial^2R}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-U(r)-\frac{\hbar^2}{2mr^2}l(l+1)\right]R=0$$

$$ER=\left[U(r)+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}\right]R\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]}_{\hat{k}_r}R$$

$$\hat{E}=U(r)+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}+\hat{k}_r$$

$$\hat{k}_r=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$$

Доза 9

№ 4.71.

Используя подстановку $R(r) = \frac{\varkappa(r)}{r}$, найти асимптотический вид радиальной части волновой ф-ции, $R(r)$, для связанных состояний в кул. поле ядра
а) на больших б) малых расст-ях.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - U(r) - \frac{\hbar^2}{2mr^2} l(l+1)\right] R = 0$$

в кул. поле ядра:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2Z}{r_1 r} R - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2mE}{\hbar^2} R = 0$$

Пусть $R = \frac{\varkappa(r)}{r}$.

$$\frac{dR}{dr} = \frac{\varkappa' r - \varkappa}{r^2} = \frac{\varkappa'}{r} - \frac{\varkappa}{r^2}, \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \left(\frac{\varkappa'}{r}\right)' - \left(\frac{\varkappa}{r^2}\right)' = \frac{\varkappa'' r - \varkappa'}{r^2} - \frac{\varkappa' r^2 - 2\varkappa r}{r^4}$$

$$\frac{\varkappa''}{r} + \cancel{\frac{\varkappa'}{r^2}} - \cancel{\frac{\varkappa'}{r^2}} + \frac{2\varkappa}{r^3} + \frac{2\varkappa}{r^2} - \frac{2\varkappa}{r^3} + \frac{2Z}{r_1 r^2}\varkappa - \frac{l(l+1)\varkappa}{r^3} + \frac{2mE}{\hbar^2}\frac{\varkappa}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \varkappa'' + \varkappa\left(\frac{2Z}{r_1 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) = 0$$

а) При $r \to 0 \Rightarrow \varkappa'' + \varkappa\left(-\frac{l(l+1)}{r^2}\right) = 0$

Решение ищем в виде $\varkappa = Ar^{\alpha}$

$$A\alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} - Ar^{\alpha-2}(l+1)l = 0$$

$$\alpha(\alpha-1) = l(l+1)$$

$$\alpha^2 - \alpha - l(l+1) = 0$$

$$D = 1 + 4l(l+1) =$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{4\cdot l(l+1)+1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4l^2+4l+1}}{2} = \frac{1 \pm (2l+1)}{2}$$

$\alpha_1 = l+1$

$\alpha_2 = -l$

$\chi_1 = Ar^{l+1}$; $R_1 = Ar^{l}$

$\chi_2 = Ar^{-l}$; $R_2 = Ar^{-l-1}$

Из. усл-я огранич. в нуле

$R = Ar^{l}$

б) При $r \to \infty$ $\chi'' + \chi \cdot \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$

$\chi'' - \frac{2m|E|}{\hbar^2}\chi = 0$; $\omega^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$

$\chi = Ae^{\omega r} + Be^{-\omega r}$

$R = \frac{A}{r}e^{\omega r} + \frac{B}{r}e^{-\omega r}$

Из усл-я огр-ти в ∞

$R = \frac{B}{r}e^{-\omega r}$

Доза 10

5.1.

Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома Na, у которого квантовые дефекты основного терма 3S и терма 3P равны соответственно 1,37 и 0,88.

(потенциал ионизации)

$E_{ион} = |E_{30}| = \frac{13,6}{(3-1,37)^2}$ эВ $= 5,2$ эВ

$E_{31} = -\frac{13,6}{(3-0,88)^2}$ эВ $= -3,03$ эВ

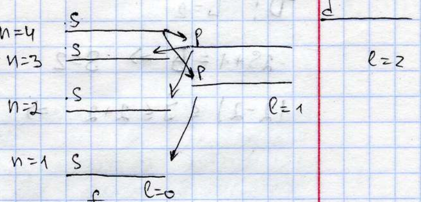
$e\varphi_1 = E_{3,1} - E_{3,0} = -3,03 + 5,2 = 2,17$ эВ — (первый пот.-циал возбуждение)

5,4.

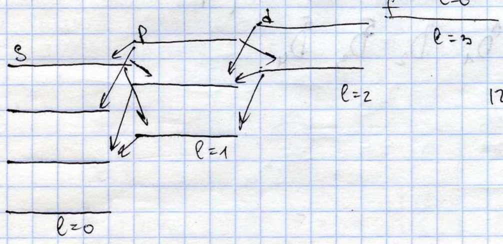
Сколько спектральных линий, разрешенных правилами отбора, возникает при переходе атомов лития в основное состояние из состояние:
а) 4S б) 4P

а) 4S ; $\Delta l = \pm 1$

6 переходов.



б) 4P



12 переходов.

Доза 11

5.15.

Найти возможные значения полных механических моментов эл-ых оболочек атомов ^4P и ^5D

Решение:

^4P : $L=1$

$2S+1=4 \Rightarrow S=\frac{3}{2}$

$|1-\frac{3}{2}| \leq J \leq 1+\frac{3}{2} \Rightarrow J=\begin{cases}1/2\\3/2\\5/2\end{cases}$

$^4P_{1/2}$ $^4P_{3/2}$ $^4P_{5/2}$

^5D : $L=2$

$2S+1=5 \Rightarrow S=2$

$|2-2| \leq J \leq 2+2 \Rightarrow J=\begin{cases}0\\1\\2\\3\\4\end{cases}$

$^5D_0$ $^5D_1$ $^5D_2$ $^5D_3$ $^5D_4$

Доза 12

5.28.

а) $m_\ell = (2\ell+1)\cdot m_s(2)$

$N_{эл}(\ell) = 2(2\ell+1)$ - число эл-ов.

б) $N_{эл}(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2(2\ell+1) = 2\left(1+3+5\ldots+(2n-1)\right) =$

$= 2\,\dfrac{n(1+2n-1)}{2} = 2n^2.$

$\boxed{\text{Доза 13}}$

5.55.

Используя з-он Мозли, вычислите длины волн и энергии фотонов, соответствующих K_α-линиям алюминия и кобальта

$^{27}_{13}Al$

$^{59}_{27}Co$

K_α

λ-?

$$h\nu_{K_\alpha} = 10{,}2 \text{ эВ} (z-1)^2$$

Co: $z = 27 \Rightarrow$

$$h\nu_{K_\alpha} = 10{,}2 \text{ эВ} (27-1)^2 = 6{,}9 \text{ кэВ}$$

$$\lambda = \frac{1240}{6{,}9 \cdot 10^3} = 179 \text{ нм}.$$

Al: $z = 13 \Rightarrow$

$$h\nu_{K_\alpha} = 1{,}47 \text{ кэВ}$$

$$\lambda = 844 \text{ нм}.$$

5.58.

Для элементов конца периодич. системы поправка в з-не Мозли значительно отличается от единица.

Убедится в этом на примере олова, цезия и вольфрама, длины волн K_α-линий которых соответственно 49,2; 40,2; 21,0 пм.

$\lambda_{K_\alpha} = 49{,}2 \Rightarrow Sn$; $z = 50$

$\lambda_{K_\alpha} = 40{,}2 \Rightarrow Cs$: $z = 55$

$\lambda_{K_\alpha} = 21{,}0 \Rightarrow W$: $z = 74$

пм.

---

n-?

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{h\nu_{K_\alpha}} = \frac{hc}{\sqrt{10{,}2(z-n)^2}}$$

$$n = z - \sqrt{\frac{hc}{10{,}2\lambda_{K_\alpha}}}$$

Sn: $n = 50 - \sqrt{\frac{1240}{10{,}2 \cdot 49{,}2 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}29$

Cs: $n = 55 - \sqrt{\frac{1240}{10{,}2 \cdot 40{,}2 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}008$

W: $n = 74 - \sqrt{\frac{1240}{10{,}2 \cdot 21 \cdot 10^{-3}}} = -2{,}09$

5,59.

Определить напряжение на рентгеновской трубке с никелевым антикатодом, если разность длин волн k_α-линий и коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра увеличилась в 3 раза. Какой элемент исп. в кач. катода.

$$\lambda_{k\alpha} - \lambda_{кв4} = 0{,}84\ Å$$

$$\lambda_{кв4} = \frac{hc}{eV_{зеп}} \quad и \quad \lambda_{k\alpha} = \frac{hc}{10{,}2\ эВ\,(Z-1)^2} \Rightarrow$$

$$V = \left(\frac{hc}{0{,}84\ Å} + 10{,}2\ эВ\,(Z-1)^2\right)\frac{1}{e} = \left(\frac{1240}{0{,}84} \cdot 10 + 10{,}2(28-1)^2\right) =$$

$$= 22{,}198\ кэВ.$$

5,67.

Найти кинет. энергию эл-ов, вырываемых с К-обол. атомом молибдена k_α-излуч-ем серебра.

Ag: $Z = 47$

Mo:

ф-ла энерг: $E_{k\alpha} = E^k_{св} + E_{ф/е}$

$$h\nu_{k\alpha} = 10{,}2(47-1)^2 = 21{,}6\ кэВ$$

$$E^k_{св} = \frac{hc}{\lambda_{к\text{-края}}};$$

$$k = h\nu_{k\alpha} - \frac{hc}{\lambda_к} = 21{,}6 - \left(\frac{1240}{61{,}9} \cdot 1000\right) = 1{,}55\ кэВ$$

Доза 14

7.2.

$\Delta E_j = E_j(j+1) - E_j(j) = 7,86 \cdot 10^{-3}$ эВ

$d_{HCl} = 1,275 \cdot 10^{-10}$ м $\qquad \mu = 1,624 \cdot 10^{-27}$

$$\Delta E_j = \frac{\hbar^2}{2\mu d^2}\left[j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)\right]$$

$j_2 = j_1 + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta E_j = \frac{2\hbar^2}{2\mu d^2}(j_1+1) - \frac{\hbar^2(j_1+1)}{\mu d^2}$$

$j_1 = 7,86 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,624 \cdot 10^{-27} \cdot 1,275^2 \cdot 10^{-20} = 2$

$j_2 = 3$

7,14

$E_D = 2,48$ эВ

$d = 1,938 \cdot 10^{-10}$ м

$x = ?$

$$E_D = \frac{h\nu_0}{4x}(1-2x)$$

$\nu_0 = \bar{\nu} c$

$4x E_D = h\bar{\nu}c - 2h\bar{\nu}cx$

$\bar{\nu} = 564,0$ см$^{-1}$ $= 5,64 \cdot 10^4$ м$^{-1}$

$x = h\bar{\nu}c / (4E_D + ch\bar{\nu}c)$

$$x = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 5,64 \cdot 10^{4} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{4 \cdot 1,6 \cdot 2,48 \cdot 10^{-19} + 2 \cdot 6,626 \cdot 564 \cdot 3 \cdot 10^{-22}} = 0,007$$

$x_{cer} = 0,07$

Перелік задач з атомно-ядерної фізики, які пропонуються для студентів 3-го курсу ФТФ та ФЕФ в 5-му семестрі 2009/2010 навчального року

Тема 1. Модель атома за Томсоном. Формула та модель атома Резерфорда.

<u>Аудиторне заняття 1.</u>

2.1. Виходячи з томсоновської моделі атома, визначити:
а) радіус атому водню, якщо його енергія іонізації дорівнює 13.6еВ;
б) частоту коливань електрона, якщо радіус атому водну дорівнює r. При якому значенні r довжина хвилі випроміненого світла дорівнює 600нм?

Вказівки.

2.5 α–частинка з кінетичною енергією K_α налітає з прицільним параметром 0,9 10^{-11} см на нерухо ядро свинцю. Знайти:
а) модуль прирощення вектора імпульсу розсіяної α–частинки, якщо K_α =2,3 МеВ.
б) при якому значенні K_α модуль прирощення вектора імпульсу розсіяної α–частинки буде максимальним для даного прицільного параметра. Який при цьому кут розсіювання?

Вказівки.

2.16. Вузький пучок протонів з кінетичною енергією 100 кеВ падає нормально на золоту фольгу товщиною 1.0 мг/см^2. Розсіяні під кутом 60^o протони реєструє лічильник, круглий вхідний отвір якого має площу 1.0см^2, і знаходиться на відстані 10см від фольги та орієнтований перпендикулярно до падаючих на нього протонів. Яка доля розсіяних протонів попадає в отвір лічильника?

Вказівки.

2.17. Знайти поперечний переріз ядра атома золота, який відповідає розсіянню протонів з кінетичною енергією K_p *=1,2 МеВ* в інтервалі кутів від $\Theta=\pi/3$ до π.

Вказівки.

<u>Домашнє завдання 1.</u>

2.2. На яку мінімальну відстань приблизиться α–частинка (ядро атому $^{4}_{2}He$) з кінетичною енергією K_α=40 кеВ (при лобовому зіткненні):
а) до нерухомого атому свинцю $^{207}_{82}Pb$;
б) до первісно нерухомому ядра $^{7}_{3}Li$?

Вказівки.

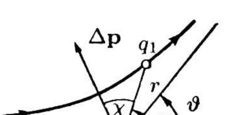
В першому випадку, оскільки ядро нерухоме, задача розв'язується в лабораторній системі координат. В момент зупинки α–частинки її кінетична енергія повністю переходить в потенційну $K_a = 2Ze^2 / r_{\min}$. Звідки: $r_{\min} = 2Ze^2 / K_\alpha = 5.9 \cdot 10^{-10}$ см .
В другому випадку маси взаємодіючих ядер порівняльні і задача повинна розв'язується в систем центру мас, де $K_\alpha' = K_\alpha / \left(1 + m_\alpha / m_{Li}\right)$.Тоді мінімальна відстань дорівнює:

$$r_{min} = \left(2Ze^2/K_\alpha\right)\left(1 + m_\alpha/m_{Li}\right) = 3.4 \cdot 10^{-11} см$$

2.3. За допомогою законів збереження енергії та моменту імпульсу вивести формулу зв'язку тангенса кута розсіювання (θ) з параметрами зіткнення зарядженої частинки (q_1), яка налітає з кінетичною енергією (K_α) на нерухоме ядро (q_2) з прицільною відстанню b*:*

$$tg\left(\theta/2\right) = \left(q_1 q_2\right) / \left(2bK_\alpha\right) .$$

Вказівки.



Із закону збереження енергії витікає, що модуль імпульсу розсіяної частинки залишається таким же як до розсіяння. Звідки одержимо модуль приросту вектора імпульсу розсіяної частинки

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = 2p_0 sin\left(\theta/2\right) \qquad (1).$$

З іншого боку, модуль приросту вектора імпульсу дорівнює

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \int F_n dt = \int \frac{q_1 q_2 r\cos\chi}{r^3}dt = q_1 q_2 \int \frac{\sin(\varphi-\theta/2)d\varphi}{r^2\dot{\varphi}}, \qquad (2)$$

Де F_n - проекція вектора сили взаємодії на напрямок вектора Δр. Знаменник підінтегрального виразу згідно закону збереження моменту імпульсу $mr^2\dot{\varphi}=bmv_0$, дорівнює $r^2\dot{\varphi}=-bv_0$, де v_0 - швидкість частинки далеко від ядра. Після інтегрування, одержимо

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = (2q_1q_2/bv_0)cos(\theta/2)\,. \qquad (3)$$

Із рівнянь (1) та (3) отримаємо: $tg\left(\theta/2\right) = \left(q_1q_2\right)/\left(2bK_\alpha\right)$.

2.4. α–Частинка з імпульсом p_α=53 МеВ/*c* (де *c* – швидкість світла) розсіялась під кутом 60° в кулонівському полі нерухомого ядра урану. Найти прицільну відстань.

Вказівки.

Скористуємось формулою зв'язку тангенса кута розсіювання (θ) з параметрами зіткнення зарядженої частинки (q_1), яка налітає з кінетичною енергією (K_α) на нерухоме ядро (q_2) з прицільною відстанню b: $tg\left(\theta/2\right) = \left(q_1q_2\right)/\left(2bK_\alpha\right)$. Звідки $b = \left(q_1q_2\right)/2K_\alpha tg\left(\theta/2\right)$. Остільки $K_\alpha = p_\alpha^{\ 2}/\left(2m_\alpha\right)$, отримаємо

$$b = \left(q_1q_2\right)m/(p^2tg\left(\theta/2\right)) = 0.6 \text{ пм.}$$

2.22. Вузький пучок протонів з кінетичною енергією K_α=1. МеВ падає нормально на латунну фольгу товщиною ρd = 1.5 мг/см². Знайти долю протонів , які розсіялись на кути більше 30°, якщо масове відношення міді ($^{63}_{29}$Cu, ρ_{Cu} =8.9 г/см³) і цинку ($^{64}_{30}$Zn, ρ_{Zn} =7.0 г/см³) у фользі відповідно дорівнює 7:3.

Вказівки.

Скористуємось формулою Резерфорда для відносної кількості частинок ($\frac{dN}{N}$), розсіяних в тілесний кут $d\Omega$ під кутом θ до початкового напрямку їх руху:

$$\frac{dN}{N} = n\left(\frac{q_1q_2}{4K}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)},$$

Де *n* – кількість ядер фольги на одиницю поверхні; *K* – кінетична енергія падаючих частинок. Відносна кількість ядер, які розсіялись на кути більше 30°, визначається інтегралом

$$\eta = n\left(\frac{q_1q_2}{4K}\right)^2\int_{\pi/6}^{\pi}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)}$$

Повна відносна кількість розсіяних частинок буде складатись з кількості частинок розсіяних на ядрах міді (η_{Cu}), та ядрах цинку (η_{Zn}), які визначаються відповідною товщиною фольги: $\left(\rho d\right)_{Cu}$ = 0.7x1.5 мг/см² = 0.105 мг/см² ; $\left(\rho d\right)_{Zn}$ = 0.3x1.5 мг/см² = 0.045 мг/см².

Кількість цих ядер на одиницю поверхні із урахуванням числа Авагадро (N=6,023x10²³ (грам-атом)⁻¹) дорівнює: $n_{Cu} = \left(\rho d\right)_{Cu} N/A_{Cu}$, де A_{Cu} –масове число міді.

Підставляючи чисельні значення, маємо: $n_{Cu} = (0.105x10^{-3}\ \ 6,023x10^{23})/63\ = 10^{18}$ ядер/см².

Відносна кількість протонів розсіяних на ядрах міді

$$\eta_{Cu} = n_{Cu}\left(\frac{q_p q_{Cu}}{4KM\,B}\right)^2 \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)} = 10^{18}\left(\frac{1e29e}{4\cdot 1.0}\right)^2 4\pi\left(\frac{1}{\sin^2(\pi/12)} - \frac{1}{\sin^2(\pi/2)}\right)$$

Тема 2. Водне-подібні атоми. Спектральні серії водню. Комбінаційний принцип Рітца

<u>Аудиторне заняття 2.</u>

2.29. Вирахувати для атомарного водню:
а) довжини хвиль перших трьох спектральних ліній серії Бальмера;
б) мінімальну роздільну здатність λ/δλ спектрального приладу, при якій можна розділити перші N=20 ліній серії Бальмера.

Вказівки:
а) Для знаходження довжини хвилі спектральної лінії серії Бальмера скористуємось формулою для спектроскопічного хвильового числа: $K^{Б} = z^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$, де $n = 3,4,5...$, $K = \frac{1}{\lambda}$, тобто перша спектральна лінія серії Бальмера для атомарного водню знаходиться так: $\lambda = (K^{Б})^{-1} = [1^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2})]^{-1} = 650\,нм$. Так само знаходяться довжини хвиль й для другої і третьої спектральних ліній.

б) Скористуємось формулою для розподільної здатності $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_I - \lambda_{II}} = \frac{(\lambda_{II} + \lambda_I)/2}{\lambda_{II} - \lambda_I}$, тобто для N=20 (це означає прилад повинен відрізняти 20-ю лінію від попередньої – 19) $\lambda_I = \lambda_{19} = 367{,}8343\,нм$; $\lambda_{II} = \lambda_{20} = 367{,}5354\,нм$. $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 1230 = 1.23\cdot 10^3$

2.30. В спектрі випромінювання атомарного водню відомі довжини хвиль двох ліній серії Бальмера: 410,2 та 486,1 нм. До якої серії належить спектральна лінія, хвильове число якої дорівнює різниці хвильових чисел цих ліній? Яка її довжина хвилі?

Вказівки:
Для вирішення цієї задачі потрібно скористуватись комбінаційним принципом Рітца: якщо відомі два хвильових числа однієї серії, то їх різниця буде також хвильовим числом якоїсь лінії іншої серії цього атому. З формули для спектроскопічного хвильового числа серії Бальмера $K^{Б} = z^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$, де $n = 3,4,5...$, $K = \frac{1}{\lambda}$, знайдемо n для двох відомих довжин хвиль: $n_1 = 6$, $n_2 = 4$. Тобто $K = R(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2})$ - це друга лінія Брекета. $K^{Бр} = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = 2627\,нм$.

2.34. У якого водне подібного іона різниця довжин хвиль головних ліній серії Бальмера і Лаймана дорівнює 59,3 нм?

Вказівки:
Запишемо формулу для знаходження хвильового числа головних ліній серій Бальмера і Лаймана: $K_1^{Б} = z^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}) = \frac{5R}{36} z^2$ та $K_1^{Л} = z^2 R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) = \frac{3R}{4} z^2$; $K = \frac{1}{\lambda}$.

Різниця довжин хвиль головних ліній визначається як $\Delta\lambda = \frac{1}{K_1^Б} - \frac{1}{K_1^Л} = \frac{88}{15Rz^2}$, знаходимо $z = \sqrt{\frac{88}{15R\Delta\lambda}}$ 3. Тобто це Li^{++}.

Домашнє завдання 2.

Задача 1. Знайти в довжинах хвиль спектральні інтервали, в яких містяться серії Лаймана, Бальмера і Пашена для атомарного водню. Зобразити на шкалі хвиль їх відносне розташування та виділити видиму частину спектру.

Вказівки:

Для знаходження спектральних інтервалів скористуємось формулами для спектроскопічних хвильових чисел для заданих серій – $K^Л = R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$, $n = 2,3...$; $K^Б = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$, $n = 3,4...$; $K^П = R(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2})$, $n = 4,5...$, згадаємо, що $K = \frac{1}{\lambda}$ та підставимо граничні значення, наприклад для серії Лаймана n дорівнює на лівому краї інтервалу 2, а на правому безкінечність. Для n=2 $\lambda = \left(K^Л\right)^{-1} = \left(R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2})\right)^{-1} = [1.1 \cdot 10^{-2} (1-1/4)]^{-1} = 121.21$ нм,

$n = \infty$ $\lambda = \left(K^Л\right)^{-1} = \left(R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty})\right)^{-1} = [1.1 \cdot 10^{-2}\ 1]^{-1} = 90,91$ нм. Подібно до цього знаходяться інтервали для інших серій. Підказка: видима частина спектру - 400÷750 нм.

2.32. Які лінії містить спектр поглинання атомарного водню в діапазоні довжин хвиль від 94,5 до 130,0 нм?

Вказівки:

В умові задачі вказано, що треба знайти лінії у спектрі поглинання – це означає, що треба використовувати формулу для лінії Лаймана (вона відповідає першому енергетичному рівню) - $K^Л = R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$, де $K = \frac{1}{\lambda}$. Для розв’язання задачі потрібно записати цю формулу двічі для різних λ та виразити n_1 та n_2. $n_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{R\lambda_1}}} = 5,13$ та $n_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{R\lambda_2}}} = 1,823$. Тобто спектр містить 2 (121.6 нм), 3 (120,6 нм), 4 (97,3 нм) та не містить 5 (94,9). Помилка в тому, що ми не враховуємо рух ядра.

2.35. В спектрі деяких водне-подібних іонів довжина хвилі третьої лінії серії Бальмера дорівнює 108,5 нм. Знайти енергію зв’язку електрона в основному стані цих іонів.

Вказівки:

Для розв’язання задачі запишемо формулу спектроскопічного хвильового числа воднеподібних атомів для серії Бальмера: $K^Б = z^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$ $n = 3,4...$. Звідси знайдемо z - заряд ядра атома. $z = [\lambda R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})]^{-1/2}$ та підставимо n=5 (тому що третя лінія, рахуємо починаючи с 3); получимо z=2. Скористаємось формулою для повної енергії зв’язаної системи $E=-z^2\frac{Rhc}{n^2}$, основний стан іона: n=1.

$$E=-4\frac{1.01\times10^{5}\cdot 4.136\cdot 10^{-15}\cdot 3\cdot 10^{11}}{1}=54.47$$ эВ.

Тема 3. Модель воднеподібних атомів згідно теорії Бора.

<u>Аудиторне заняття 3.</u>

2.24. Оцінити час протягом якого електрон упав би на ядро, якщо він рухається по орбіті з радіусом 0,5 10^{-8} см і втрачає енергію згідно з класичною теорією $dE/dt = -\left(2e^2/3c^3\right)a^2$, де *a*-прискорення електрона. Врахувати, що вектор прискорення весь час спрямований до центру атома.

Вказівки:

Запишемо баланс сил діючих на електрон згідно з моделлю атому водню по Бору:

$\frac{m_e v^2}{r}=\frac{ze^2}{r^2}$, оскільки $\frac{v^2}{r}=a$ то знайдемо $a=\frac{ze^2}{mr^2}$. Підставимо а в формулу згідно якої електрон втрачає енергію та розділимо змінні: $dE=-\frac{2e^2}{3c^3}\cdot\frac{z^2e^4}{m^2r^4}dt$. Розпишемо енергію $E=K_e+U=\frac{m_e v^2}{2}-\frac{ze^2}{2}=\frac{ze^2}{2r}-\frac{ze^2}{r}=-\frac{ze^2}{2r}$. Диференціюємо вираз для енергії по r та підставляємо у диференційне рівняння записане вище.

$$\frac{ze^2}{2r^2}dr=-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{z^2e^4}{z^4m^2}dt$$

$$dt=-\frac{3m^2r^2c^3}{4e^4z}dr$$

Час падіння електрона визначається як $\tau=\int_r^0 = \int_0^r\frac{3m^2r^2c^3}{4e^4z}dr=\frac{m^2c^3}{4e^4z}r^3\Big|_0^r \approx 1.317\cdot 10^{-11}c$

2.26. Вважаючи ядро нерухомим вирахувати для іона He^+:

а) радіуси перших двох Боровських орбіт;

б) кінетичну енергію електрона та його енергію зв’язку в основному стані;

в) перший потенціал збудження та довжину хвилі резонансної лінії.

Вказівки:

Розв’язання задачі подібно до розв’язання домашньої задачі номер 2.26д та відрізняється лиш тим, що для гелію z дорівнює двом, а не одиниці.

2.36. Енергія зв’язку електрона в атомі He дорівнює $E_{зв}$=24,6 еВ. Знайти енергію необхідну для послідовного вилучення обох електронів з цього атома.

Вказівки:

Для вилучення першого електрона потрібно затратити енергію зв’язку в атомі He, а для другого – енергію зв’язку He^+. $E_{зв}^{He^+}=\left|-\frac{m_e}{2}\frac{z^2e^4}{\hbar^2}\right|=55$ еВ. $E_{повна}=E_{зв}^{He}+E_{зв}^{He^+}=79,6$ еВ

2.47. Вирахувати для мезоатома водню ((в якому замість електрона рухається мюон, який має той же заряд, але масу в 270 раз більшу):

а) відстань між мюоном і ядром в основному стані;

б) довжину хвилі резонансної лінії;

в) енергію зв’язку в основному стані мезоатомів водню, ядра яких протон і дейтрон.

Домашнє завдання 3

2.26д. Вважаючи ядро нерухомим вирахувати для атома водню Н:

а) радіуси перших двох Боровських орбіт;

б) кінетичну енергію електрона та його енергію зв'язку в основному стані;

в) перший потенціал збудження та довжину хвилі резонансної лінії

Вказівки:

а) для знаходження радіусів перших двох Боровських орбіт потрібно записати формулу радіуса n-ої стаціонарної орбіти - $r_n = \frac{\hbar}{ze^2 m_e} \cdot n^2$ та підставити в цю формулу n=1,2; для водню z=1. $r_1 = \frac{(1.05\cdot 10^{-27})^2}{1\cdot(4.8\cdot 10^{-10})^2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}}\cdot 1^2 = 5.26\cdot 10^{-9}$; $r_2 = r_1\cdot 2^2 = 2.1\cdot 10^{-8}$

б) для знаходження кінетичної енергії електрона потрібно згадати формулу для кінетичної енергії - $K = mv^2/2$ та записати формулу для швидкості електрону $V_n = \frac{ze^2}{\hbar}\cdot\frac{1}{n}$, тобто

$K = \frac{m_e \cdot z^2 e^4}{2\cdot\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}$, основний стан означає, що z=1.

$K_e^1 = \frac{9.1\cdot 10^{-28}\cdot 1^2\cdot(4.8\cdot 10^{-10})^4}{2\cdot(1.05\cdot 10^{-27})^2}\cdot\frac{1}{1^2} = 2.19\cdot 10^{-11} ерг = 13.69 еВ$ та $E_{зв} = K_e^1$

в) перший потенціал збудження знаходиться, як $V_1 = \frac{|E_1 - E_2|}{e}$ та дорівнює

$V_1 = 13.6\cdot(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) = 10.2\ B$. Довжина хвилі резонансної лінії визначається з співвідношення $eV_1 = h\nu$, від сюди знаходимо ν та згадаємо, що $\lambda = c/\nu$.

$$\lambda = \frac{ch}{eV_1} = \frac{3\cdot 10^{10}\cdot 4.136\cdot 10^{-15}}{10.2} = 121.65 нм$$

2.45. Вирахувати відношення маси протона до маси електрона, якщо відомо, що відношення сталі Рідберга важкого та легкого водню дорівнює 1,000272, а відношення мас ядер 2,00.

Вказівки:

З умов задачі - $\frac{R_D}{R_H} = 1.000272$ та $\frac{m_D}{m_H} = 2$. Запишемо формулу для знаходження сталої Ридберга - $R = R\ (\frac{1}{1+\frac{m_e}{m_я}})$. Перепишемо її для двох даних випадків (важкий та легкий водень) та розділимо один вираз на інший: $\frac{R_D}{R_H} = \frac{(1+\frac{m_e}{2m_p})^{-1}}{(1+\frac{m_e}{m_p})^{-1}} = \frac{2(\frac{m_e}{m_p}+1)}{2+\frac{m_e}{m_p}}$, помножимо навхрест, $2R_D + R_D \frac{m_e}{m_p} = 2(R_H \frac{m_e}{m_p} + R_H)$, знаходимо співвідношення

$$\frac{m_p}{m_e} = [\frac{2(1-2\frac{R_D}{R_H})}{\frac{R_D}{R_H}-2}]^{-1} = 1838.24$$

2.46. Знайти для легкого і важкого водню різницю:
а) в енергіях зв'язку електронів в основних станах;
б) перших потенціалів збудження;
в) довжин хвиль резонансних ліній.

Вказівки:

а) запишемо формулу для визначення енергії зв'язку $E_n = -\frac{z^2 m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{m_e}{m_я}}$. Різниця енергій для легкого та важкого воднів визначається як $\left|E_1^D - E_1^H\right|$ та дорівнює

$$\left|E_1^D - E_1^H\right| = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}[\frac{1}{1+\frac{m_e}{2m_p}} - \frac{1}{1+\frac{m_e}{m_p}}] = 13.6\ [\frac{1}{1+\frac{m_e}{2\ 1836 m_e}}\ \frac{1}{1+\frac{m_e}{1836 m_e}}] = 3.7\ \ 10^{-3}$$

б) різниця перших потенціал збудження знаходиться, як

$$\left|V_{1D} - V_{1H}\right| = \frac{\left|E_{1D} - E_{1H}\right|}{e}[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}] = 3.7\cdot 10^{-3}\ \ 3/4 = 2.78\cdot 10^{-3}$$

. Довжина хвилі резонансної лінії як $\left|\lambda_D - \lambda_H\right| = \frac{ch}{e\left|V_{1D} - V_{1H}\right|} = \frac{3\cdot 10^{10}\ \ 6.62\ \ 10^{-27}}{2.78\cdot 10^{-3}} = нм$

Тема 4. Корпускулярні властивості електромагнітного випромінювання. Фотоелектричний ефект та ефект Компотна.

<u>Аудиторне заняття 4.</u>

1.42. Мідну кульку віддалену від других предметів опромінюють електромагнітними променями з довжиною хвилі λ =200 нм. До якого максимального потенціалу зарядиться кулька?

1.45. Електроди вакуумного фотоелементу (один цезієвий, другий мідний) замкнуті зовні закоротко. Цезієвий електрод опромінюють моно-енергетичним випромінюванням. Знайти:
а) довжину хвилі випромінювання, при якій з'явиться фотострум;
б) максимальну швидкість фотоелектронів, які підлітають до мідного електроду якщо довжина хвилі випромінювання дорівнює 220 нм.

1.51. Вузький пучок рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі λ падає на розсіювальну речовину. Знайти λ, довжини хвиль зміщених складових випромінювання розсіяного під кутами $\theta=60^o$ та $\theta=120^o$, відрізняються друг від друга в два рази.

1.54. Фотон з енергією 0,46 МеВ розсіявся під кутом 120^0 на нерухомому вільному електроні. Знайти:
а) енергію розсіяного фотона;
б) кінетичну енергію електрона.

1.56. При опроміненні речовини рентгенівським випромінюванням з довжиною хвилі λ знайдено, що максимальна кінетична енергія комптонівських електронів $T_{макс}$=0,44МеВ. Визначити λ.

<u>Домашнє завдання 4</u>

1.44. Знайти максимальну кінетичну енергію фотоелектронів вирваних з поверхні літію електромагнітним випромінюванням, напруженість електричної складової якого змінюється з часом по закону: T=a(1+cosωt) cosω$_0$t, де *a* –стала; $\omega=6\cdot10^{14}$ с$^{-1}$; $\omega_0=3{,}6\cdot10^{15}$ с$^{-1}$.

Вказівки:

Запишемо формулу Ейнштейна для фотоефекту $K_e = h\nu - A_{out}$.Для літію $A_{out} eB = 2.39$.

Перепишемо формулу для визначення напруженості

$$T = a(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t = a\cos\omega_0 t + a\cos\omega t\cos\omega_0 t = a\cos\omega_0 t + a\frac{\cos(\omega-\omega_0)t+\cos(\omega+\omega_0)t}{2} =$$

$$= a\cos\omega_0 t + \frac{a}{2}\cos(\omega t-\omega_0 t) + \frac{a}{2}\cos(\omega t+\omega_0 t)$$

Вибираємо максимальне значення частоти, $\omega+\omega_0$ та підставляємо його у першу формулу.

$K_{\max} = h / 2\pi(\omega+\omega_0) - A_{out} = \hbar(\omega+\omega_0) - A_{out}$, це дорівнює

$K_{\max} eB = 1.05 \cdot 10^{-27} \cdot (6\ 10^{14}\ \ 3.3\ 10^{15})\ \ 2.39\ \ 0.36$

1.48. Фотон з довжиною хвилі λ =17 пм вириває із нерухомого атому електрон. Енергія зв'язку якого $E_{зв}$=69,3 кеВ. Знайти імпульс переданий атому в результаті такого процесу, якщо електрон вилетів під прямим кутом до напряму нелітаючого фотону.

1.49. Користуючись законами збереження показати що вільний електрон не може поглинути фотон.

Тема 5. Хвилі де-Бройля. Співвідношення невизначеностей.

<u>Аудиторне заняття 5.</u>

3.2. При збільшенні енергії електрона на 200 еВ його дебройдівська довжина хвилі змінилася в два рази. Знайти початкову довжину хвилі електрона.

3.9. +3.10. Релятивістська частинка з масою спокою m_0.має кінетичну енергію K. Знайти:

а) дебройлівську довжину хвилі частинки;

б) значення K, при яких похибка в довжині хвилі визначеної згідно нерелятивістської формули не перевищує 1% для електрона та протона.

в) знайти кінетичну енергію при якій дебройдівська довжина хвилі електрона дорівнює його комптонівській довжині хвилі.

3.23. Впевнитись, що вимірювання x- координати частинки за допомогою мікроскопу (рис 3.1) привносить невизначеність до її імпульсу Δp_x таку, що $\Delta x\,\Delta p_x \ge h/2\pi$. Майте на увазі, що розділення мікроскопу d=λ /sin θ, де λ - довжина хвилі використаного світла.

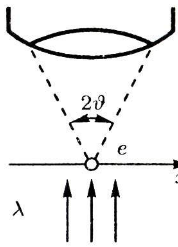


Рис. 3.1

3.26. Оцінити невизначеність в швидкості електрона в атомі водню припускаючи що розмір атома порядку 10^{-8} см. Порівняти одержане значення зі швидкістю електрона на першій Боровській орбіті.

<u>Домашнє завдання 5</u>

3.1. Визначити дебройлівську довжину хвилі електрона та протона, які рухаються з кінетичною енергією 1,0 кеВ. При яких значеннях кінетичної енергії їх довжина хвилі буде дорівнювати 100 пм?

Вказівки:

Запишемо формулу для довжини хвилі у класичному (нерелятивістському випадку)

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{K \cdot 2m}}$.Знайдемо для електрона $\lambda = \frac{4.136\cdot10^{-15}}{\sqrt{1\cdot10^{3}\cdot 2\cdot 9.1\ \ 10^{-28}/(1.6\cdot10^{-12})}} = 38.8\,пм$.

Таким самим чином знаходиться довжина хвилі й для протона.

Для знаходження кінетичної енергії при відомої довжини хвили потрібно виразити з цієї формули $K = \frac{h^2}{2\lambda^2 m}$.

3.7. Нейтрон з кінетичною енергією K_n=0,25 еВ пружно зіткнувся з первісно нерухомим ядром атому ^{4}He. Знайти довжини хвиль обох частинок в їх Ц - системі до та після зіткнення.

3.14. Потік моно енергетичних електронів падає нормально на діафрагму з вузькою щілиною шириною b=2,0 мкм. Знайти енергію електронів, якщо на екрані на відстані від щілини l=50 см ширина центрального дифракційного максимуму становить Δx=0,36 мм.
3.22. Показати, що вимірювання *x* – координат частинок за допомогою вузької щілини шириною *b* вносить невизначеність до їхніх імпульсів Δp_x – таку, що $\Delta x \Delta p_x \geq h$.

Тема 6. Розвязування рівняння Шредінгера для заданого потенціалу

Аудиторне заняття 6.

3.47. Частинка з масою m знаходиться в одновимірному потенційному полі *U(x)* показаному на малюнку 3.3, де $U(0)=\infty$. Знайти:

а) рівняння яке визначає можливі значення енергії частинки в області $E < U_0$; привести його до виду

$$\sin kl = \pm kl(\hbar/\sqrt{2ml^2U_0}), \ k=\sqrt{2mE}/\hbar$$

Показати за допомогою графічного вирішення цього рівняння що можливі значення енергії частинки створюють дискретний спектр:

б) мінімальні значення величини $l^2 U_0$ при яких з'являються перший та n–й дискретні рівні. Скільки рівнів містить яма для якої $l^2 U_0 = 75\hbar^2/m$?

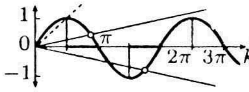


Рис. 6

Вказівки:

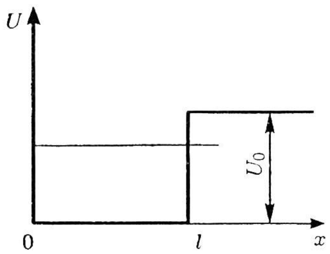


Рис. 3.3

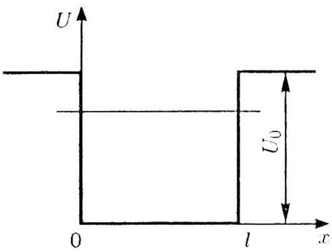


Рис. 3.4

3.48. В попередній задачі енергія єдиного рівня $E = U_0/2$. Скориставшись рішенням цієї задачі визначити:

а) значення $l^2 U_0$ такої ями;

б) найбільш вірогідне значення координати частинки та зобразити приблизний графік залежності $\psi^2(x)$;

в) вірогідність знаходження частинки в області $x > l$.

Вказівки:

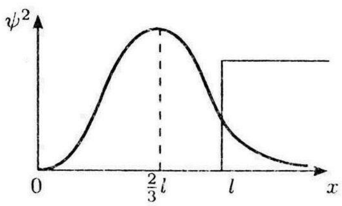


Рис. 7

Домашнє завдання 6

3.49. Частинка з масою m знаходиться в одновимірному симетричному потенційному полі *U(x)* показаному на малюнку. Знайти рівняння, яке визначає можливі значення енергії частинки в області $E<U_0$; привести його до виду

$$kl = n\pi - 2\arcsin(\hbar k/\sqrt{2mU_0}), \ k=\sqrt{2mE}/\hbar, \text{ а } n \text{ - ціле число.}$$

Показати за допомогою графічного вирішення цього рівняння що можливі значення енергії частинки створюють дискретний спектр

Вказівки:

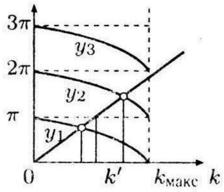


Рис. 8

3.50. Скориставшись рішенням попередньої задачі визначити значення $l^2 U_0$ при якому:
а) енергія основного стану частинки та зобразити $E = U_0/2$:
б) з'явиться другий та n – й дискретні рівні. Скільки дискретних рівнів містить яма для якої $l^2U_0 = 75\hbar^2/m$?

Тема 7. Проходження частинок крізь потенціальний бар'єр висотою U_0 і шириною L.

Аудиторне заняття 7.

3.61. Частинка з масою m та енергією *E* падає на прямокутний потенційний бар'єр показаний на малюнку 3.7 Знайти:
а) коефіцієнт прозорості D та коефіцієнт відбиття R в випадку $E > U_0$. Впевнитись в тому що одержані вирази співпадають з відповідними формулами попередньої задачі якщо в них змінити знак в U_0. Знайти D при $E \to U_0$.
б) перші три значення *E,* при яких електрон буде проходити через цей бар'єр без перешкоди, якщо U_0.=10, еВ а l = 0,5 нм;
в) коефіцієнт прозорості D в випадку $E < U_0$. Спростити одержаний вираз якщо D<<1;
г) Вірогідність проходження електрона та протона з *E = 5 еВ* через цей бар'єр, якщо U_0.=10, еВ а l = 0,1 нм;

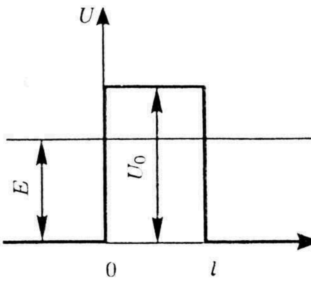


Рис. 3.7

Домашнє завдання 7

3.60. Частинка з масою m та енергією *E* падає на прямокутну потенційну яму показану на малюнку 3.6, де l –ширина ями, а U_0.-її глибина . Знайти:
а) коефіцієнт прозорості D та коефіцієнт відбиття R;
б) значення *E,* при яких частинка буде проходити через цю яму без перешкоди. Впевнитись в тому що це трапиться при умові l = nλ/2, де λ-довжини хвилі частинки всередині ями, n = 0, 1, 2, …

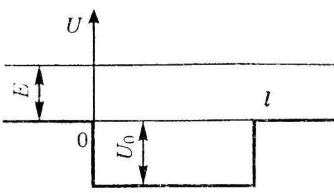


Рис. 3.6

Тема 8. Аналіз розв'язання рівняння Шредінгера в сферичних координатах.

Аудиторне заняття 8.

4.64. Частинка з масою *m* рухається в центральносиметричному потенційному полі *U(r).* Знайти:
а) рівняння Шредінгера для кутової та радіальної частини хвильової функції
ψ (r, θ, φ) = R (r) Y (θ, φ). Вважаючи власні значення оператора L^2 відомими привести рівняння для функції R (r) до вигляду

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U-\frac{L^2}{2mr^2})R=0$$

б) залежність хвильової функції від азимутального кута φ.

4.65. Частинка знаходиться в центральносиметричному потенційному полі в стані, який характеризується хвильовою функцією $\psi(r,\vartheta,\varphi) = R_l(r)Y_{l,m_l}(\vartheta,\varphi)$. Який фізичний зміст функції $\left|Y_{l,m_l}(\vartheta,\varphi)\right|^2$? Скориставшись табл.. 4.1 (набрать эту таблицу!) вирахувати нормувальні коефіцієнти функцій

А) $Y_{1,0}$;

Б) $Y_{2,1}$.

Тема 9. Розв'язання рівняння Шредінгера для водне-подібних атомів. Радіальна складова.

Аудиторне заняття 9.

4.70. Привести рівняння, яке визначає радіальну частину хвильової функції електрона в кулонівському полі ядра Z, до безрозмірного виду. Як одиниці вимірювання взяти атомну одиницю довжини (перший борівський радіус) та атомну одиницю енергії (енергію зв'язку електрона в атомі водню).

Вказівки:

Для розв'язання цієї задачі потрібно записати рівняння Шредінгера для воднеподібних атомів:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2dR}{rdr} + \frac{ze^2 2m}{r\hbar^2}R = -\frac{2m}{\hbar^2}ER$$

та згадати чому дорівнює енергія зв'язку основного стану електрона, перший борівський радіус: $E_{зв} = \left|E_1\right| = \left|-\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\right|$, $r_1 = \frac{\hbar^2}{e^2 m_e}$. Приведемо до безрозмірного виду: $\rho = \frac{r}{r_1}$, $\varepsilon = \frac{E}{E_1}$

та перепишемо рівняння Шредінгера з урахуванням цих змін ($R(r) \quad R(\rho)$):

$\frac{1}{r_1^2}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho r_1^2}\frac{dR}{d\rho} + \frac{ze^2 2m}{\rho r_1 \hbar^2}R = -\frac{2m}{\hbar^2}E_1\varepsilon R$. Помножимо цей вираз на r_1^2 та підставимо значення r_1 і ε :

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \frac{ze^2 2mr_1}{\rho\hbar^2}R + \frac{2mr_1^2}{\hbar^2}E_1\varepsilon R = 0$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \frac{ze^2 2m_e}{\rho\hbar^2}\frac{\hbar^2}{e^2 m_e}R + \frac{2m_e}{\hbar^2}\frac{\hbar^4}{e^4 m_e^2}\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\varepsilon R = 0$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(\frac{2z}{\rho} + \varepsilon\right)R = 0$$

4.72. Електрон в атомі водню перебуває в стаціонарному стані, який описується сферично-симетричною хвильовою функцією $\psi(r) = A(1+ar)e^{\alpha r}$, де *A*, *a* і α - деякі сталі. За допомогою рівняння Шредінгера знайти:

а) сталі *a* і α, а також енергію електрона

а) нормувальний коефіцієнт А.

Вказівки:

Для розв'язання цієї задачі потрібно записати рівняння Шредінгера для воднеподібних атомів:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2d\psi}{rdr}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi-\frac{(l+1)}{r}\psi+\frac{2me^2}{\hbar^2 r}\psi=0$$

і підставити хвильову функцію з умови задачі, для цього спочатку знайдемо першу та другу похідну:

$$\frac{d\psi}{dr}=Aae^{\alpha r}+A\alpha(1+ar)e^{\alpha r}=A(\alpha+a+\alpha ar)e^{\alpha r}$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}=A\alpha(\alpha+a+\alpha ar)e^{\alpha r}+e^{\alpha r}\alpha a=Ae^{\alpha r}(2\alpha a+\alpha^2+a\alpha^2 r)\,.$$

Підставляємо до рівняння Шредінгера:

$$Ae^{\alpha r}[2\alpha a+\alpha^2+a\alpha r]+\frac{2}{r}Ae^{\alpha r}(a+\alpha+\alpha ar)+\frac{2m}{\hbar^2}E\,A(1+ar)e^{\alpha r}+\frac{2me^2}{rh^2}A(1+ar)e^{\alpha r}-$$

$$-\frac{l(l+1)}{r^2}A(1+ar)e^{\alpha r}=0$$

$$Ae^{\alpha r}[2\alpha a+\alpha^2+a\alpha r+\frac{2}{r}(a+\alpha)+2\alpha a+\frac{2mE}{\hbar^2}+\frac{2mEar}{\hbar^2}+\frac{2me^2}{rh^2}+a\frac{2me^2}{h^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{l(l+1)}{r}a]=$$

Вираз під скобками має дорівнювати нулю, тому коефіцієнти при однакових степенях r мають дорівнювати нулю, розпочнемо с найменшого:

$r^{-2}:l(l+1)=0\Rightarrow l=0\,,(l\neq-1)$ тому надалі немає коефіцієнтів , які стояли поряд з l .

$$r^{-1}:2(a+\alpha)+\frac{2me^2}{\hbar^2}=0$$

$$r^{0}:4a\alpha+\alpha^2+\frac{2mE}{\hbar^2}=0$$

$$r^{1}:a\alpha^2+\frac{2mEa}{\hbar^2}=0$$

Маємо систему рівнянь:

$$a+\alpha=-\frac{me^2}{\hbar^2}$$

$$4a\alpha+\alpha^2+\frac{2me^2a}{\hbar^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}=0$$

$$a(\alpha^2+\frac{2mE}{\hbar^2})=0$$

З останнього рівняння: $\alpha^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}$ $(a\neq0)$, скористуємось цим та перепишемо друге рівняння урахував перше:

$$4a\alpha+\alpha^2-2(a^2+\alpha a)-\alpha^2=0$$

$$-2a^2+2\alpha a=0$$

$$a=\alpha$$

Тоді з першого рівняння: $a=-\frac{me^2}{2\hbar^2}=-\frac{1}{2r_1}$. Енергію знаходимо з останнього рівняння системи: $E=-\frac{me^4}{8\hbar^2}=-\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{2^2}$.

Запишемо саму хвильову функцію: $\psi=A(1-\frac{r}{2r_1})e^{\frac{-r}{2r_1}}$. Знайдемо нормувальний коефіцієнт А виходячи з того, що вірогідність знаходження електрона де-небудь дорівнює одиниці:

$\int\limits_V |\psi|^2\, dV = 1$, $dV = 4\pi r^2 dr$. Тобто $\int\limits_0^{\infty} A^2 (1-\frac{r}{2r_1})^2 e^{-\frac{r}{r_1}} 4\pi r^2 dr = 1$. Інтегруємо та получаємо $A = (8\pi r_1^3)^{-1/2}$

Домашнє завдання 9

4.71. Використавши підстановку $R(r) = \chi(r)/r$, знайти асимптотичний вид радіальної частини хвильової функції *R (r)* для зв'язаних станів електрона в кулонівському полі ядра:
а) на великих відстанях від ядра;
б) на малих відстанях від ядра.

Вказівки:
Для розв'язання цієї задачі запишемо рівняння Шредінгера:
$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{2z}{r_1}\frac{R}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = -\frac{2mE}{\hbar^2}R$ та зробимо підстановку $R(r) = \chi(r)/r$. Для цього беремо першу та другу похідні:
$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr} - \chi(r)\frac{1}{r^2}$ та $\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2} - 2\frac{d\chi}{dr}\frac{1}{r^2} + 2\chi(r)\frac{1}{r^3}$. Після підстановки маємо таке рівняння: $[\frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2} - 2\frac{d\chi}{dr}\frac{1}{r^2} + 2\chi(r)\frac{1}{r^3}] + \frac{2}{r}[\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr} - \chi(r)\frac{1}{r^2}] + \frac{2z}{r_1}\frac{\chi}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^3}\chi = -\frac{2mE}{r\hbar^2}\chi$.

Скоротимо та помножимо на r: $\frac{d^2\chi}{dr^2} + (\frac{2z}{rr_1} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2})\chi = 0$.

а) на великих відстанях від ядра – скоротимо члени зі ступеню при *r* нижчою за -1:
$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\chi = 0$$
Рішення цього рівняння має такий вид: $\chi = b_1 e^{-\kappa r} + b_2 e^{\kappa r}$, де $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Із умови обмеженості $R(r)$ маємо: $b_2 = 0$, тому $R(r) \sim \frac{1}{r}e^{-\kappa r}$.

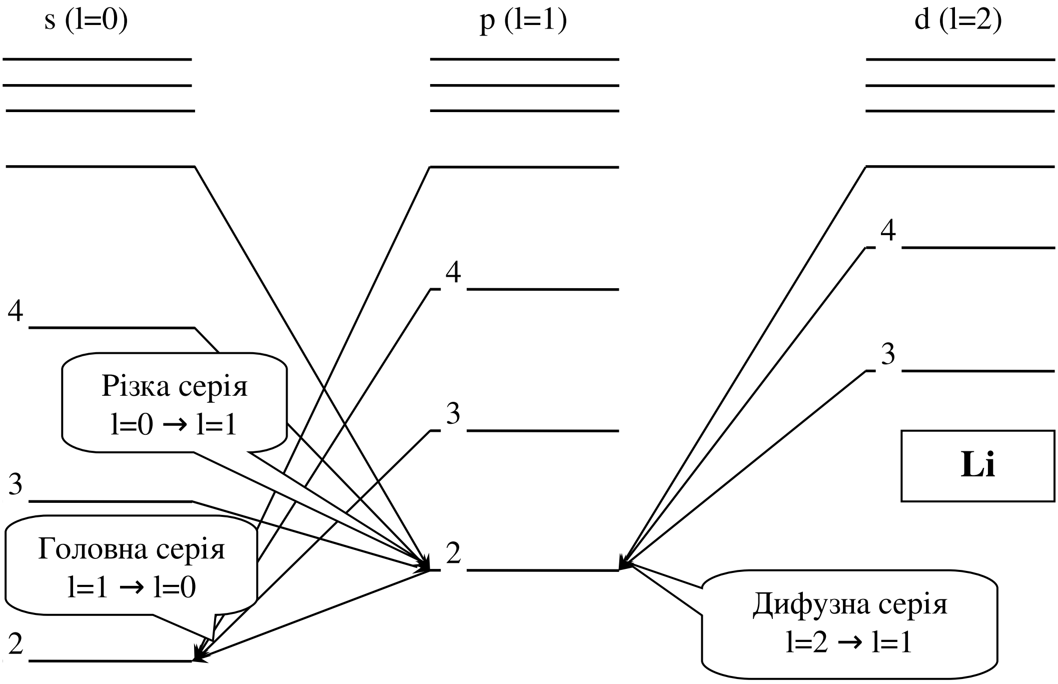
б) на малих відстанях від ядра – скоротимо члени зі ступеню при *r* вищою за -2:
$\frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\chi = 0$. Для цього рівняння шукаємо рішення у виді $\chi = Ar^{\alpha}$. Підставляємо:
$\alpha(\alpha-1)Ar^{\alpha-2} - \frac{l(l-1)}{r^2}Ar^{\alpha} = 0$. Маємо $\alpha_1 = l+1$ та $\alpha_2 = -l$. Викреслюємо α_2 виходячи із умови обмеженості $R(r)$. Тобто $R(r) \sim \frac{1}{r}r^{l+1} = r^l$.

Тема 10. Енергетичні рівні в атомах лужних металів.

Аудиторне заняття 10.

5.2. Вирахувати квантові дефекти S-, P-, та D- термів атому Li, якщо відомо, що енергія зв'язку валентного електрона в основному стані дорівнює 5,39 еВ, перший потенціал збудження 1,85 еВ а довжина хвилі головної лінії дифузної серії 610 нм. Який із перерахованих термів найбільш близький до водне-подібного та чим це зумовлено?

Вказівки:
Зробимо малюнок:



Квантовий дефект – це поправка зв'язана з нецентральністю поля (див. малюнок нижче), яке діє на валентний електрон - σ_l .

Запишемо формулу для енергії на n-му рівню з ураховуючи вище сказаний ефект:

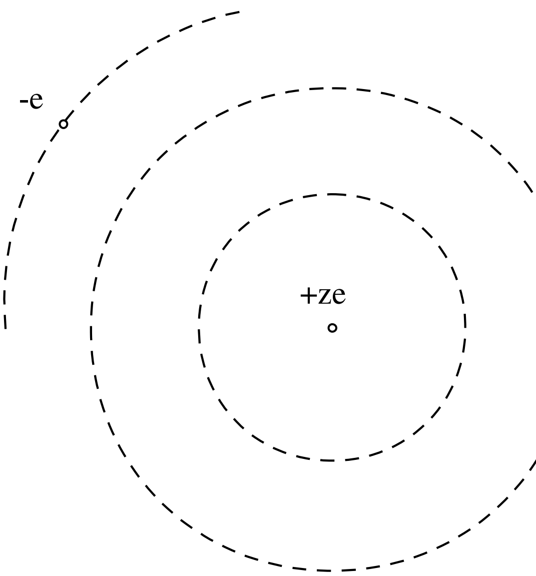
$$E_{n,l}^{щм} = -\frac{13.6eB}{(n-\sigma_l)^2} .$$

З умови задачі енергія зв'язку електрона в основному стані дорівнює $E_{зв} = \left|E_{2,0}\right| = 5.35\, eB$,

звідси ми знайдемо $\sigma_0 = 2 - \sqrt{\frac{13.6}{E_{2,0}}} = 0.41$.

Перший потенціал збудження $e\Delta\varphi = 1.85\, eB$. З іншого боку $\left|E_{1,0}\right| - \left|E_{2,0}\right| = e\Delta\varphi$. Звідси

$$\sigma_1 = 2 - \sqrt{\frac{13.6}{5.35 - 1.85}} = 0.04 .$$



Довжина хвилі головної лінії дифузної серії $\lambda_{г.л.} = 610 нм$ - це різниця енергій рівнів (2, 1) та (3, 2): $\left|E_{2,1}\right| - \left|E_{3,2}\right| = \frac{hc}{\lambda}$. Звідси

$$\sigma_2 = 3 - \sqrt{\frac{13.6}{3,54 - \frac{1239,8}{620}}} = 0.00 .$$

Тобто $\sigma_0 = 0.41$, $\sigma_1 = 0.04$, $\sigma_3 = 0.00$.

5.3. Знайти енергію зв'язку у валентного електрона в основному стані атому якщо відомо що довжини хвиль головної лінії різкої серії та її коротковхвильової границі відповідно дорівнюють 813 та 349 нм.

Вказівки:

Використаємо довжину хвилі головної лінії різкої серії $\lambda_{гл} = 813 нм$, $|E_{2,1}| - |E_{3,0}| = \frac{hc}{\lambda}$; та довжину хвилі короткохвильової границі $\lambda_{кг} = 349 нм$, $|E_{2,1}| - |E_{\infty}| = \frac{hc}{\lambda}$. З цих двох рівнянь, врахувавши, що $|E_{\infty}| = 0$, знайдемо σ_0 аналогічно до попередньої задачі.

Енергія зв'язку знаходиться з формули $E_{зв} = |E_{20}| = \frac{13.6 eB}{(2-\sigma_0)^2} = \frac{13,6}{(2-0,41)^2} = 5,38 eB$.

5.5. Вирахувати для іона Be[+] квантові дефекти S- та P- термів, а також довжину хвилі заголовної лінії різкої серії, якщо відомо що довжини хвиль заголовної лінії головної серії та її короткохвильової границі дорівнюють 321 та 68,8 нм.

Вказівки:
Запишемо формулу для знаходження енергії на n-му рівні з урахуванням поправки:
$E_{n,l\,eф}^{щм} = -z^2 \frac{13.6 eB}{(n-\sigma_l)^2}$. Використовуючи її та записавши рівняння для головної лінії головної серії і короткохвильової границі знайдемо поправки нецентральності поля:
$\frac{1240}{\lambda_{глг}} = |E_{2,0}| - |E_{2,1}|$, $\frac{1240}{\lambda_{кг}} = |E_{2,0}| - |E_{\infty}|$. Ураховуючи $|E_{\infty}| = 0$ отримаємо: $\sigma_0 = 0.28$, $\sigma_1 = 0.04$.

Довжині хвилі головної лінії різкої серії знаходиться із рівняння: $|E_{2,1}| - |E_{3,0}| = \frac{1240}{\lambda_{глр}}$ звідки $\lambda_{глр} = 179,5 нм$.

<u>Домашнє завдання 10</u>

5.1. Знайти потенціал іонізації та перший потенціал збудження атома Na, у якого квантові дефекти основного терму 3S та терму 3P дорівнюють відповідно 1,37 та 0,88.

Вказівки:
Енергія іонізації – це найменша енергія потрібна для того, щоб вирвати електрон із атому й віднести на безкінечність, тобто для натрію (один електрон на зовнішній, третій оболонці)

$$e\varphi_{іон} = |E_{30}| = \frac{13.6 eB}{(3-\sigma_0)^2} = 5.12 eB \Rightarrow \varphi_{іон} = 5.12 B.$$

Перший потенціал збудження це різниця енергій між першим основним рівнем та першим можливим наступним, тобто для натрію:

$$e\varphi_{зб} = |E_{30}| - |E_{31}| = 5.12 - \frac{13.6}{(3-\sigma_1)^2} eB = 2.09 \Rightarrow \varphi_{зб} = 2.09 B.$$

5.4. Скільки спектральних ліній , дозволених правилами відбору, виникає при переході атомів літію в основний стан із станів:
а) 4S;
б) 4P.

Вказівки:
Згідно з правилом відбору $\Delta l = \pm 1$ таких переходів може бути:
а) 6, а саме: 4s → 3p, 4s → 2p, 3p → 3s, 3p → 2s, 3s → 2p, 2p → 2s;
б) 12, а саме: 4p → 4s, 4p → 3s, 4p → 2s, 4p → 3d, 4s → 3p, 4s → 2p, 3d → 3p, 3d → 2p, 3p → 3s, 3p → 2s, 3s → 2p, 3p → 2s.

Тема 11. Квантові характеристики електронів в атомах.

<u>Аудиторне заняття 11.</u>

5.16. Виписати можливі терми атомів які мають крім заповнених оболонок:
а) два електрони *s* та *p*;
б) два електрони p та d;
в) три електрони *s, p,* та *d*.

Вказівки:
а) s-електрон: $l_1 = 0$, $s_1 = 1/2$; р-електрон: $l_2 = 0$, $s_2 = 1/2$.
Вираз $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ накладає обмеження на квантове число L: $|l_1 - l_2| \le L \le l_1 + l_2$.
$1 \le L \le 1 \Rightarrow L = 1$
Вираз $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ накладає обмеження на квантове число S: $|s_1 - s_2| \le S \le s_1 + s_2$.
$0 \le S \le 1 \Rightarrow S = 0,1$
Вираз $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ накладає обмеження на квантове число J: $|L - S| \le J \le L + S$.
Розглянемо можливі варіанти:
L=1, S=0: $1 \le J \le 1 \Rightarrow J = 1$.
L=1, S=1: $0 \le J \le 2 \Rightarrow J = 0,1,2$.
Спектральні терми записуються як ${}^{2S+1}L_J$, тобто в нашому випадку це: ${}^1P_1$ - синглетне P_1, ${}^3P_0$ - триплетне P_0, ${}^3P_1$, ${}^3P_2$.

б) р-електрон: $l_1 = 1$, $s_1 = 1/2$; d-електрон: $l_2 = 2$, $s_2 = 1/2$.
$|l_1 - l_2| \le L \le l_1 + l_2$.
$1 \le L \le 3 \Rightarrow L = 1,2,3$
$|s_1 - s_2| \le S \le s_1 + s_2$.
$0 \le S \le 1 \Rightarrow S = 0,1$
$|L - S| \le J \le L + S$.
Розглянемо можливі варіанти:
L=1, S=0: $1 \le J \le 1 \Rightarrow J = 1 \Rightarrow {}^1P_1$.
L=1, S=1: $0 \le J \le 1 \Rightarrow J = 0,1 \Rightarrow {}^3P_0, {}^3P_1$.
L=2, S=0: $2 \le J \le 2 \Rightarrow J = 2 \Rightarrow {}^1D_2$.
L=2, S=1: $1 \le J \le 3 \Rightarrow J = 1,2,3 \Rightarrow {}^3D_1, {}^3D_2, {}^3D_3$.
L=3, S=0: $3 \le J \le 3 \Rightarrow J = 3 \Rightarrow {}^1F_3$.
L=3, S=1: $2 \le J \le 4 \Rightarrow J = 2,3,4 \Rightarrow {}^3F_2, {}^3F_3, {}^3F_4$.

в) s-електрон: $l_1 = 0$, $s_1 = 1/2$; р-електрон: $l_2 = 1$, $s_2 = 1/2$; d-електрон: $l_3 = 2$, $s_3 = 1/2$.
$|l_1 - l_2 + l_3| \le L \le l_1 + l_2 + l_3$ (зліва має бути найменше значення, справа – найбільше).
$1 \le L \le 3 \Rightarrow L = 1,2,3$
$|s_1 - s_2 + s_3| \le S \le s_1 + s_2 + s_3$.
$1/2 \le S \le 3/2 \Rightarrow S = 1/2, 3/2$
$|L - S| \le J \le L + S$.
L=1, S=1/2: $1/2 \le J \le 3/2 \Rightarrow J = 1/2, 3/2 \Rightarrow {}^2P_{1/2}, {}^2P_{3/2}$.
L=1, S=3/2: $1/2 \le J \le 5/2 \Rightarrow J = 1/2, 3/2, 5/2 \Rightarrow {}^4P_{1/2}, {}^4P_{3/2}, {}^4P_{5/2}$.
Таким самим чином знаходяться терми при L=2,3.

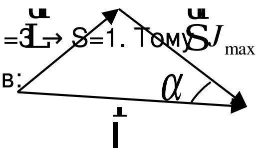
5.19. Визначити можливу мультиплетність:

а) терму $D_{3/2}$;
б) термів атомів Li, Be, та B, якщо збуджуються електрони тільки зовнішніх незамкнутих під оболонок.

Вказівки:
а) $D_{3/2}$ означає, що L=2, J=3/2.

5.22. Знайти кут між спіновим та повним механічними моментами в векторній моделі атома:
а) який знаходиться в стані D з максимально можливим значенням повного механічного моменту;
б) який має крім заповнених оболонок три електрони (*p, d,* та *f*) та який має максимально можливий для цієї конфігурації повний механічний момент.

Вказівки:
а) ^3D означає, що L=2; 2S+1=3 → S=1. Тому $J_{\max} = 3$.



Вирахуємо довжини векторів:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$$
$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$$
$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar = \sqrt{12}\hbar$$

та запишемо теорему косинусів: $L^2 = S^2 + J^2 - 2|\vec{S}||\vec{J}|\cos\alpha$. Виразимо α та підставимо отриманні довжини векторів. $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \alpha = 35°$

б) p-електрон: $l_1 = 1$, $s_1 = 1/2$, $J_{1\max} = 3/2$; p-електрон: $l_2 = 2$, $s_2 = 1/2$, $J_{2\max} = 5/2$; d-електрон: $l_3 = 3$, $s_3 = 1/2$, $J_{3\max} = 7/2$.
$L = l_1 + l_2 + l_3 = 6$, $S = s_1 + s_2 + s_3 = 3/2$, $J = J_1 + J_2 + J_3 = 15/2$.
Аналогічно до попередньої частини знаходимо довжини векторів та кут між ними:

$$|\vec{S}| = \sqrt{\frac{15}{4}}\hbar, |\vec{L}| = \sqrt{42}\hbar, |\vec{J}| = \sqrt{\frac{225}{4}}\hbar \rightarrow \cos\alpha = 0.62 \rightarrow \alpha = 51.7°.$$

5.23. Атом знаходиться в стані ^4F маючи при цьому максимально можливий повний механічний момент. Визначити кратність виродження цього стану по *J*. Який фізичний зміст одержаної величини?

Вказівки:
^4F означає, що L=3; 2S+1=4 → S=3/2; → $J_{\max} = 9/2$.
Кратність виродження по J знаходитися як $2J+1$ та дорівнює 10. Це число станів з різними значеннями m_j.

<u>Домашнє завдання 11.</u>

5.15. Знайти можливі значення повних механічних моментів електронних оболонок атомів в станах ^4P и ^5D

Вказівки:
^4P означає, що L=1; 2S+1=4 → S=3/2; → $1/2 \le J \le 5/2 \quad J = 1/2, 3/2, 5/2$.

Тобто $|\vec{l}\,| = \sqrt{J(J+1)}\hbar = (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}; \frac{\sqrt{35}}{2})\hbar$

^5D означає, що L=2; 2S+1=5 → S=2; → $0 \quad J \quad 4 \quad J \quad 0,1,2,3,4$.

$|\vec{l}\,| = \sqrt{J(J+1)}\hbar = (0; \sqrt{2}; \sqrt{6}; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{5})\hbar$

5.25. Знайти максимально можливий кут між спіновим та повним механічними моментами в векторній моделі атома, який знаходиться в стані з мультіплетністю п’ять та кратністю виродження по *J* сім. Вказати спектральний символ цього стану.

Вказівки:

Мултіплетність п’ять означає, що $2S+1=5 \Rightarrow S=2$, кратність виродження по J сім – $2J+1=7 \Rightarrow J=3$, тому $L_{\max} = 2+3=5$. З цього маємо спектральний символ стану $^5H_3$.

Для знаходження максимально можливого кута між спіновим та повним механічним моментами скористуємось вирішенням задачі 5.22 з аудиторного заняття, тобто знаходимо довжини векторів:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar = \sqrt{30}\hbar$$

$$|\vec{l}\,| = \sqrt{J(J+1)}\hbar = 2\sqrt{3}\hbar$$

та з теореми косинусів знаходимо максимальний кут:

$\cos\alpha = -0.707 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$.

5.28. Знайти максимальне число електронів, які мають в атомі однакові наступні квантові числа:

а) орбітальне квантове число *l;*

б) головне квантове число *n*

Вказівки:

а) Число значень m_l дорівнює $(2l+1)$ помножене на число m_s *(2),* тобто число електронів $N_{ел}(l) = 2(2l+1)$.

б) $N_{ел}(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2\left[1+3+5+...+(2n-1)\right] = 2\frac{n[1+2n-1]}{2} = 2n^2$

Тема 12. **Природа рентгенівських променів. Оже-ефект.**

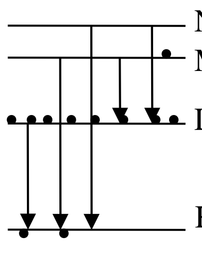
Аудиторне заняття 12.

5.56. Визначити довжину хвилі K_α - лінії елемента періодичної системи, починаючи з якого слід очікувати виникнення *L* – серії характеристичного рентгенівського випромінювання

Вказівки:

Запишемо закон Мозлі:

$h\nu_{k\alpha} = 10.2 \quad (\ \ -1)^2$



Зробимо малюнок. Виникнення L-серії слід очікувати в елементі, який має один електрон на M-оболонці, тобто z дорівнює $2(\mathrm{K})+8(\mathrm{L})+1(\mathrm{M}) = 11$. Це натрій.

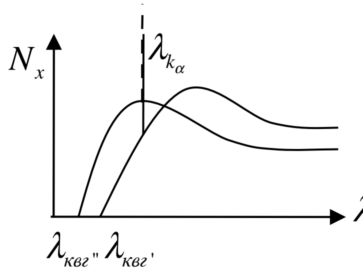
Підставим довжину хвилі $\lambda_{k_\alpha} = \frac{c}{\nu}$ до закону мозлі:

$h\frac{c}{\lambda_{k_\alpha}} = 10.2 \quad (\ \ -1)^2$ и знайдемо λ.

$\lambda_{k_\alpha} = hc/[10.2(z-1)^2] = 1.22$.

5.60. При збільшенні напруги на рентгенівській трубці від 10 до 20 кВ різниця довжин хвиль K_α–лінії та коротковихвильової границі суцільного спектру збільшилась в три рази. Який елемент використовується в якості антикатода.

Вказівки:



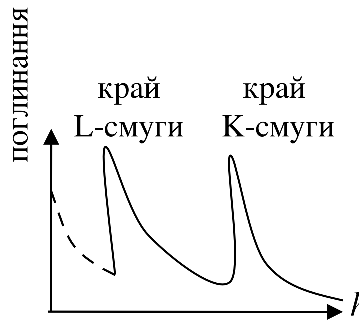
Зробимо малюнок: для різних напруг на рентгенівський трубці маємо різні довжини хвиль коротковихвильової границі та однакову довжину хвилі характеристичного випромінювання.
Запишемо зв'язок між енергією випромінювання та потенціалом на рентгенівській трубці: $h\nu_{квг} = eV_{уск}$ та довжину хвилі характеристичного випромінювання (див. вказівки до 5.56) $\lambda_{k_\alpha} = hc/[10.2(z-1)^2]$.

З умов задачі маємо: $\dfrac{(\lambda_{k_\alpha} - \lambda_{квг'})}{(\lambda_{k_\alpha} - \lambda_{квг''})} = 3$.

Підставимо формули написані вище та отримаємо $z = 29$, тобто антикатод виготовлено з міді.

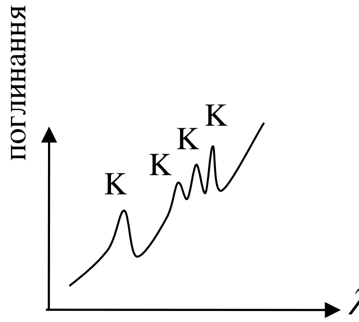
5.62. Які серії характеристичного спектру збуджуються в молібдені та серебрі K_α–випромінюванням срібла?

Вказівки:



Зробимо малюнки.
L-полоса поглинання матиме у своєму склади 3 рівня – один s та два p (за рахунок спін-орбітального розщеплення – $j = 1/2, 3/2$).

Скористуємось таблицею з додавання 2 (Іродов).



		Край смуги поглинання, пм			
z	Елемент	K	L_1	L_2	L_3
47	Срібло	48,6	323,6	351	369,5
42	Молібден	61,9	430,5	471,5	491

Розрахуємо енергію $K_\alpha -$випромінювання срібла:

$h\nu_{K_\alpha} = 10.2(47-1)^2 = 21583$ еВ

та енергії на краях K-смуг молібдену й срібла:

Mo: $E_{зв}^K = \dfrac{hc}{\lambda_K} = 20032$ еВ - енергія зв'язку менша за енергію випромінювання срібла – тому існують усі серії;

Ag: $E_{зв}^K = \dfrac{hc}{\lambda_K} = 25514$ еВ - енергія зв'язку більша за енергію $K_\alpha -$випромінювання срібла – тому не існує K-серія. Перевіримо чи існує L-серія: $E_{зв}^L = \dfrac{hc}{\lambda_{L_1}} = 3831$ еВ, енергія зв'язку L-серії менша за енергію випромінювання – тому існують усі серію крім K-серії.

5.69. При опроміненні атомів криптону рентгенівськими променями з довжиною хвилі λ знайдено, що в деяких випадках вилітає два електрони: фотоелектрон, вивільнений з K-оболонки, та електрон вивільнений внаслідок ефекту Оже з L– оболонки. Енергія зв'язку K- та L– електронів відповідно дорівнює 14,4 та 2,0 кеВ. Вирахувати:
а) кінетичну енергію обох електронів, якщо λ =65 пм;

б) λ , при якій енергії обох електронів однакові.

Вказівки:
а) Запишемо формулу Ейнштейна:

$\frac{hc}{\lambda_x} = E^K_{зв} + K_{ф/е}$, звідси кінетична енергія фотоелектрона

$$K_{ф/е} = \frac{hc}{\lambda_x} - E^K_{зв} = 19.1\ кеВ - 14.4\ кеВ = 4,7\ кеВ.$$

Енергія Оже-електрона знаходиться як:

$$K_{Оже} = (E^K_{зв} - E^L_{зв}) - E^L_{зв} = 14.4\ кеВ - 2\ кеВ - 2\ кеВ = 10.4\ кеВ.$$

б) Із умови: $K_{Оже} = K_{ф/е}$, тому

$\frac{hc}{\lambda_x} - E^K_{зв} = E^K_{зв} - 2E^L_{зв}$, звідси довжина хвилі $\lambda_x = \frac{hc}{2(14.4-2)} = 50 пм$.

Домашнє завдання 12

5.55. Користуючись законом Мозлі, вирахувати довжину хвиль і енергії фотонів, які відповідають K_α - лініям алюмінію (${}_{13}^{27}Al$) і кобальту (${}_{27}^{59}Co$).

Вказівки:
Запишемо закон Мозлі:

$$h\nu_{K_\alpha} = 10.2(z-1)^2\ еВ.$$

Виходячи з нього знаходимо енергію фотонів:

Co: $z = 27 \Rightarrow h\nu_{K_\alpha} = 10.2(27-1)^2\ еВ = 6.9\ кеВ$ та довжину хвилі: $\lambda = \frac{hc}{E} = 179.7 пм$.

Аналогічно і для алюмінію ($z = 13$): $h\nu_{K_\alpha} = 1.47\ кеВ$, $\lambda = 844 пм$.

5.58. Для елементів кінця періодичної системи поправка в законі Мозлі значно відрізняється від одиниці. Впевнитись в цьому на прикладі олова (Z=50), цезію (Z=55) та вольфраму (Z=74), довжини хвиль K_α –ліній яких відповідно дорівнюють 49,2; 40,2; 21,0 пм.

Вказівки:

Довжина хвилі K_α - лінії знаходиться як: $\lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{h\nu_{K_\alpha}} = \frac{hc}{10.2(z-n)^2}$.

Звідси знаходимо поправку $n = z - \sqrt{\frac{hc}{10.2\ \lambda_{K_\alpha}}}$.

Для Sn: $n = 50 - \sqrt{\frac{1240}{10.2 \cdot 49.2 \cdot 10^{-3}}} = 0.29$,

Cs: $n = 55 - \sqrt{\frac{1240}{10.2 \cdot 40.2 \cdot 10^{-3}}} = 0.008$,

W: $n = 74 - \sqrt{\frac{1240}{10.2 \cdot 21 \cdot 10^{-3}}} = -2.09$.

5.59. Знайти напругу на рентгенівській трубці з нікелевим антикатодом (*Z=28*), якщо різниця довжини хвиль K_α - лінії та короткохвильової межі неперервного рентгенівського спектру дорівнює *0,84 A°*.

Вказівки:
Із умови задачі $\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{кхг} = 0.84 Å$. Запишемо вирази для λ_{K_α} і $\lambda_{кхг}$:

$\lambda_{кхг} = \frac{hc}{eV_{прискорення}}$ і $\lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{10.2ев(z-1)^2}$. Підставимо їх в умову та виразимо напругу:

$$Veв = \left(\frac{hc}{0.84Å} + 10.2(z-1)^2\right)\frac{1}{e} = \left(\frac{1240}{0.84}\cdot 10 + 10.2(28-1)^2\right)кеВ = 22.198$$

5.67. Знайти кінетичну енергію електронів вирваних з К- оболонки атомів молібдену K_α – випромінюванням срібла? (Ag, Z=47; Mo: край К-смуги поглинання 61.9 пм)

Вказівки:

Запишемо формулу Ейнштейна: $E_{K_\alpha} = E^K_{зв} + K_{ф/е}$.

Енергія K_α - випромінювання срібла із закону Мозлі дорівнює:

$$h\nu_{K_\alpha} = 10.2(47-1)^2 = 21,6\ кеВ.$$

Енергія зв'язку К-електрона $E^K_{зв} = \frac{hc}{\lambda_{Ккраю}}$.

Кінетична енергія фотоелектрона:

$$K_{ф/е} = h\nu_{K_\alpha} - \frac{hc}{\lambda_{Ккраю}} = 21.6\ кеВ - \left(\frac{1240}{61,9}\ кеВ/1000\right) = 1,55\ .$$

Тема 13. Збуджені стани молекул: електронні, коливальні та обертальні збудження.

Аудиторне заняття 13.

7.1. Знайти за допомогою таблиць Додатку для молекул H_2 та NO:
а) енергію, необхідну для збудження їх на перший обертовий рівень (l_r=1);
а) кутову швидкість обертання с стані з l_r=1.
7.9. Знайти енергію необхідну для збудження молекул H_2 та J_2 з основного стану на перший коливальний рівень (v=1). У скільки разів ця енергія більше енергії збудження даної молекули на перший обертовий рівень (l_r =1)?
7.13. Визначити максимально можливе коливальне квантове число, відповідну коливальну енергію та енергію дисоціації двохатомної молекули, власна частота коливань якої ν а коефіцієнт ангармонійності *x.* Вирахувати ці величини для молекули H_2.
Додаток: Константи двохатомних молекул

Молекула	Масове число	Міжядерна відстань, 10^{-8} см	Частота коливань, *k*, $см^{-1}$	Ангармо-нійность, *x*, 10^{-3}	Енергія дисоціації E_D, еВ
H_2	1	0.741	4395.2	28.5	4.48
N_2	14	1.094	2359.6	6.15	7.37
O_2	16	1.207	1580.4	7.65	5.08
Cl_2	35	1.988	564.9	7.09	2.48
NO	14; 16	1.150	1906	7.55	5.29
HCl	1; 36	1.275	2989.7	17.4	4.43
J_2	127	2.67	214.6	2.84	1.54

Домашнє завдання 13

7.2. Знайти для молекули *HCl* квантові числа l_r двох сусідніх обертових рівнів, різниця енергій яких становить 7,86 меВ.
7.14. Вирахувати коефіцієнт ангармонійності молекули Cl_2, якщо відомі її частота коливань та енергія дисоціації.

Тема 14. Випромінювання твердих тіл. Емпіричні закони випромінювання (Віна, Стефана-Больцмана, Планка).

Аудиторне заняття 14.

1.3. Початкова температура теплового випромінювання T=2000K. На скільки кельвінів змінилася ця температура, якщо найбільш вірогідна довжина хвилі в його спектрі збільшилась на $\Delta\lambda$ =250 нм?
1.5. Сонячний спектр випромінювання близький до спектру абсолютно чорного тіла, для якого найбільш імовірна довжина хвилі $\lambda_m=0,48$ *мкм*. Знайти потужність теплового випромінювання Сонця. Знайти час, протягом якого його маса зменшиться на *1%* (за рахунок теплового випромінювання). Маса сонця 2×10^{30} *кг*, його радіус R=7×10^{8} *м*. Стала в законі Стефана-Больцмана 5,7x10^{12}Вт/(см^{2}K^4), а стала в законі Віна b_λ=0,29см.K. Знайти найбільш імовірну довжину хвилі в спектрі теплового випромінювання з випромінювальною здатністю *5.7 Вт/см*^{2}.(Стала в законі Стефана – Больцмана $\sigma=5,7\times 10^{-8}$ *Вт/м*^{2}*K*^{4}, стала в законі Віна $b_\lambda=0,29$ *см$\cdot$ K).*
1.8. Мідну кульку з радіусом ***r****=1,0* см з чорною поверхнею помістили до вакуумної посудини, температура стінок якої підтримується при $0°K$. Початкова температура кульки $T_0=300°K$. Через який час його температура зменшиться в 1,5 рази? Теплоємність міді ***c****=0,38 Дж/(г K)*, густина $\boldsymbol{\rho}$*=8,9 г/см*^{3}. Стала в законі Стефана-Больцмана σ=5,67x10^{-8} Вт/(м^{2}K^4).

1.16. Перетворити формулу Планка до виду, який відповідає розподілу:
а) по круговим частотам;
б) по довжинам хвиль.
1.19. За допомогою формули Планка визначити числові значення сталих:
а) в законі Віна;
б) в законі Стефана-Больцмана.

Домашнє завдання 14
1.1. Скориставшись формулою Віна [$u_\nu = \nu f(\nu/T)$] показати, що:
а) найбільш вірогідна частота теплового випромінювання $\nu_m \sim T$;
б) енергетична світимість $M \sim T^4$ (закон Стефана-Больцмана).
1.4. Знайти найбільш вірогідну довжину хвилі в спектрі теплового випромінювання з енергетичною світимістю M = 5,7 Вт/см^2.
1.8. Він запропонував наступну формулу для розподілу енергії в спектрі теплового випромінювання $u(\nu) = A\nu^3 exp(-\alpha\nu / T)$, де $\alpha = 7.64\times 10^{12}$ сек$\times$ *K*. Знайти за допомогою цієї формули найбільш імовірну частоту випромінювання для *T=2000 K*