

600 - практика
3-4 - к.р. 35-408
1 - 9/3
400 - экзамен

1. Вектора и действия над ними.
2. Прямая и плоскость в пространстве.
3. Кривые второго порядка.
4. Поверхности второго порядка.

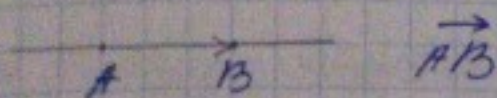
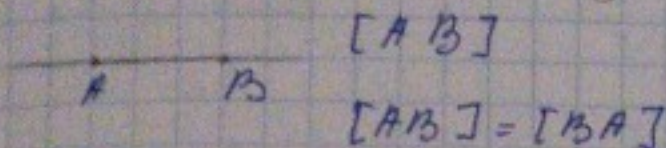
Л-ра.

- Ал. геометрии.

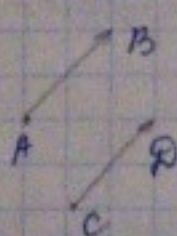
Вектора и действия над ними

04.09.13

1. Направленный отрезок



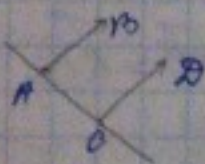
соотношения равенства между отрезками:



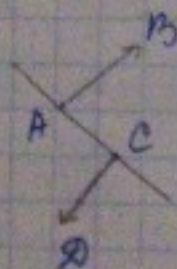
$\vec{AB}$
 $\vec{CD}$

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{AB}| = |\vec{CD}| \\ \vec{AB} \parallel \vec{CD} \end{cases}$$

1). $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ - сонаправл.

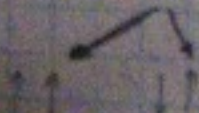


2).

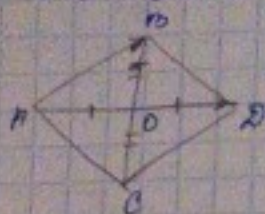


$\vec{AB} \nparallel \vec{CD}$ - противоположнонаправл.

3). $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ - коллинеарные



2. $\vec{AB} = \vec{CD}$, если $ABCD$ - параллелограмм



3. $\vec{AB} = \vec{CD}$ $O = AD \cap BC$ и $AO = OD$, $BO = OC$.

Действия над направ. отрезками

1) Сложение:

• пр-мо Δ (треуг.)

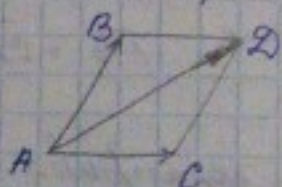
$\vec{AB}, \vec{BC}$



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

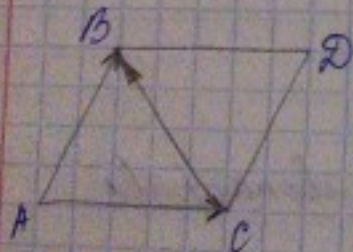
• пр-мо парал-ма.

$\vec{AB}, \vec{AC}$



$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

2) Вычитание:



$$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$$

3) Умножение на число:

$$\vec{AC} = \alpha \cdot \vec{AB} = \begin{cases} 0, \alpha = 0 \\ |\vec{AC}| = \alpha \cdot |\vec{AB}|; \vec{AC} \parallel \vec{AB}, \alpha > 0 \\ |\vec{AC}| = |\alpha| \cdot |\vec{AB}|; \vec{AC} \parallel \vec{AB}, \alpha < 0 \end{cases}$$

$\vec{AA} = 0$, нулевой

* Векторы
направ.



- свой

1) * $\vec{a}$
 $\vec{a} =$

2) Слож
 $\vec{a} = \{$

Th

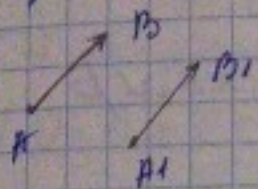
Сумм
будет

! Эвклидовы векторные
пространства



Вектор

* Вектором называется класс эквивалентности направленных отрезков.



$$\vec{a} = \{ \vec{AB} \} = \{ \vec{AB}, \vec{A_1B_1}, \dots \}$$

- свободные вектора - связанные (начало в одной общей точке)
(радиус-вектора)

1) * $\vec{a} = \{ \vec{AB} \}, \vec{b} = \{ \vec{CD} \}$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$$

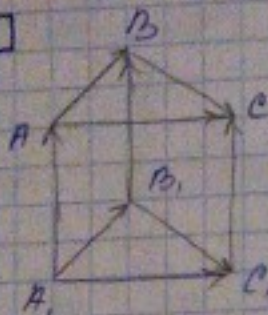
2) Сложение

$$\vec{a} = \{ \vec{AB} \}, \vec{b} = \{ \vec{CD} \} \quad \vec{a} + \vec{b} = ?$$

Th-теорема

$$\begin{aligned} \text{Th} \quad \left. \begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{A_1B_1} \\ \vec{BC} &= \vec{B_1C_1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{AC} &= \vec{A_1C_1} \\ \vec{AB} + \vec{BC} &\parallel \vec{A_1B_1} + \vec{B_1C_1} \end{aligned} \end{aligned}$$

Сумма пар равных направленных отрезков будет равна сумме равнонаправленных отрезков (результативности)



$$\left\{ \begin{aligned} \vec{AB} = \vec{A_1B_1} &\Rightarrow AB \parallel A_1B_1, - \text{параллельны} \\ &\Rightarrow \vec{A_1A} = \vec{B_1B} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{BC} = \vec{B_1C_1} &\Rightarrow BC \parallel B_1C_1, - \text{пар. - и.} \\ &\Rightarrow \vec{B_1B} = \vec{C_1C} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{B_1B} = \vec{C_1C}$$

$$\vec{A_1A} = \vec{C_1C} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{A_1C_1}$$



$$* \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \{ \vec{AB} + \vec{CD} \}$$

3) Умножение на число (скаляр)

Th

$$\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$$

$$\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{A_1C_1} = \lambda \cdot \vec{A_1B_1}$$

$$\Rightarrow \vec{AC} = \vec{A_1C_1}$$

□ ...

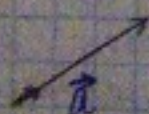
$$* \vec{a} = \{ \vec{AB} \}, \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} = \{ \lambda \cdot \vec{AB} \}$$

4) Модуль вект.

$$\vec{a} = \{ \vec{AB} \}, |\vec{a}| = |\vec{AB}|$$

Орт. (единичный) вектор

$\vec{a}$

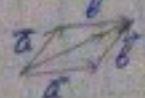


$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

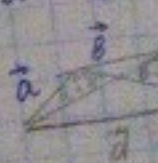
$$|\vec{e}_a| = \left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = 1$$

5). Свойств

$$- \vec{a} + \vec{b} =$$



$$- \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) =$$



$$- \exists \text{ ней}$$

$$\exists \theta = \vec{0}$$

$$- \text{сумм}$$

$$\forall \vec{a}$$

$$\vec{a}$$

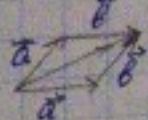
$$- \lambda$$

$$- (\lambda \cdot \vec{a})$$

$$- \lambda$$

5). Свойства линейных операций

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность



- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ - ассоциативность



- $\exists$ нейтрального элемента (нулевого)

$\exists \vec{0} = \vec{0} \in V$ - линейное пространство векторов

$$\forall \vec{a} \in V \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

- существование обратного эл.
($\exists$)

$$\forall \vec{a} \in V \quad \exists -\vec{a}, \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-1) \cdot \vec{a}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

- дистрибутивность по
внутр. операции
- " - по внешн. операции

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} - \text{ассоциативность}$$

Линейная зависимость векторов

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \parallel \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{b}| \end{cases}$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \quad \vec{b} = \beta \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\exists \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \mu \vec{a} + \nu \vec{b} = \vec{0}, \quad \mu, \nu \neq 0 \quad - \text{линейно зависимы}$$

$$* \{ \vec{a}_i \}_{i=1}^N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1 \dots N, \text{ то}$$

$\{ \vec{a}_i \}_{i=1}^N$ - линейная независимость.

Системы векторов независимы, если тривиальная линейная комбинация возможна хотя бы при одном отличном от нуля коэффициенте.

11.09.13. $\{ \vec{a}_i \}_{i=0}^n \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{a}_i \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 0 \dots n \Rightarrow \{ \vec{a}_i \}_{i=0}^n$ линейно независимы

Th $\vec{0} \in \{ \vec{a}_i \}_{i=0}^n \Rightarrow \{ \vec{a}_i \}_{i=0}^n$ - линейно зависимость

$$\square \quad \vec{0} = \sum_{i=0}^n 0 \cdot \vec{a}_i \quad \blacksquare$$

Th $\{a_i\}_{i=0}^n$ — неогранич. $\{a_i\}_{i=0}^n$ $\Leftrightarrow \{a_i\}_{i=0}^n$ — л.з. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \{a_i\}_{i=0}^n$ — л.з.

$\square \{a_i\}_{i=0}^n$ — л.з. $\Rightarrow \exists \alpha_i \sum_{i=0}^n \alpha_i a_i = 0$ тогда
 $\sum_{i=0}^n \alpha_i a_i + \sum_{j=n+1}^n 0 \cdot a_j = 0 \quad \blacksquare$

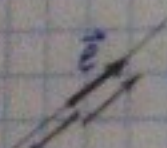
Th Коллинеарность двух векторов $\Leftrightarrow$ их л.з.

$\square 1) \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{a} = \alpha \vec{b}$
 $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ $\alpha \neq 0$

$1 \cdot \vec{a} - \alpha \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ — л.з.

2) $\Leftarrow \vec{a}, \vec{b}$ — л.з. $\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \Rightarrow$
 $(\alpha \neq 0)$

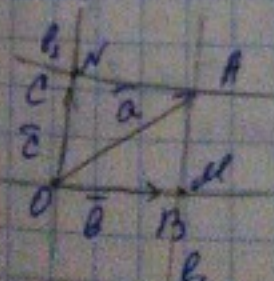
$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\beta}{\alpha} \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \blacksquare$

 $\Rightarrow \forall \vec{a} \parallel \vec{b} \exists \alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$
 $\vec{a} = (\alpha)$

Векторы, лежащие в одной плоскости

Th $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — коллинеарны — л.з.

1) $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — колл. (лежат в 1 пл.)



Лб $\{a_i\}_{i=0}^n$ - подсист. $\{a_i\}_{i=0}^n$. Если $\{a_i\}_{i=0}^n$ - л.з. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \{a_i\}_{i=0}^n$ - л.з.

$$\square \{a_i\}_{i=0}^n \text{ - л.з. } \Rightarrow \exists \alpha_i \sum_{i=0}^n \alpha_i a_i = 0. \text{ тогда}$$

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i a_i + \sum_{j=n+1}^n 0 \cdot a_j = 0 \quad \blacksquare$$

Лб Коллинеарность двух векторов. $\Leftrightarrow$ их л.з.

$$\square 1) \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$$

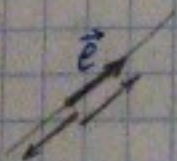
$\vec{a}, \vec{b} \neq 0 \quad \alpha \neq 0$

$$1. \vec{a} - \alpha \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ - л.з.}$$

$$2). \Leftarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ - л.з. } \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$$

$(\alpha \neq 0)$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\beta}{\alpha} \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \blacksquare$$



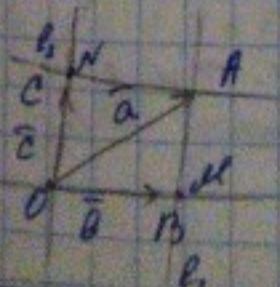
$$\Rightarrow \forall \vec{a} \parallel \vec{e} \quad \exists \alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}$$

$$\vec{a} = (\alpha)$$

векторы, лежащие в одной плоскости

Лб $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - коллинеарны - л.з.

$$1) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - колл. (лежат в 1 м.).}$$



доопределение

$$l_1 \parallel OC; M = l_1 \cap OB$$

$$l_2 \parallel OB; N = l_2 \cap OC$$

$ONAM$ - паралл.-се.

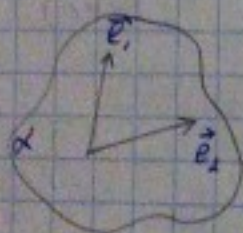
$$\vec{ON} + \vec{OM} = \vec{OA}$$

$$\vec{OM} \parallel \vec{b} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \vec{OM} = \alpha \cdot \vec{b}$$

$$\vec{ON} \parallel \vec{c} \Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} \mid \vec{ON} = \beta \cdot \vec{c}$$

$$\beta \cdot \vec{c} + \alpha \cdot \vec{b} = \vec{a}$$

$$1 \cdot \vec{a} - \alpha \cdot \vec{b} - \beta \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad \blacksquare$$



$$\forall \vec{a} \in \alpha \exists \nu, \mu \in \mathbb{R} \quad \vec{a} = \nu \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$$

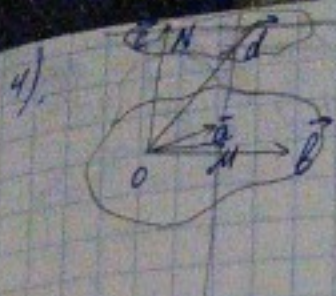
$$\underline{\vec{a} = (\nu, \mu)}$$

Th. $\{a_i\}_{i=1}^n$ - л.з.

$$\square \quad 1). \vec{a} \in \{a_i\}_{i=1}^n \Rightarrow \text{л.з.}$$

$$2). \exists i, j: \vec{a}_i \parallel \vec{a}_j \Rightarrow \text{л.з.}$$

$$3). \exists i, j, k: \vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_k - \text{линейн.} \rightarrow \text{л.з.}$$



$$e \parallel OC; \quad \mu = e, \quad n \perp \alpha$$

$$\beta \parallel \alpha \quad N = \beta \cap OC$$

$$\begin{cases} \vec{OD} = \vec{ON} + \vec{OM} \\ \vec{ON} = \nu \vec{c} \\ \vec{OM} = \mu \vec{a} + \beta \vec{b} \end{cases}$$

$$\vec{d} = \nu \vec{c} + \mu \vec{a} + \beta \vec{b} \quad \blacksquare$$

* 1) Базис — линейная независимая система векторов, содержащая max возможное количество векторов для данного пространства.

* Полная система векторов — если любой вектор из пространства можно представить в виде линейной комбинации по данной системе.

* 2) Базис — полная система, содержащая min количество векторов для данного пространства.

* 3) Базис — линейно независимая полная система векторов.

* Размерность $\dim V$ — количество векторов в базисе.

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - базис $\Rightarrow \forall \vec{a} \in V$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

$$= a_1 \vec{e}_1 + a_3 \vec{e}_3 + a_2 \vec{e}_2 \quad \vec{a} = (a_2, a_3, a_1).$$

$\Rightarrow$ треб. упоряд.

Th. Разложение $\vec{a}$ на базис $\{\vec{e}_i\}$ - единственно
 $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ - базис, $\forall \vec{a} \in V \exists! \alpha_i \in \mathbb{R}$

$$\vec{a} = \sum \alpha_i \vec{e}_i$$

$$\square \nearrow \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_i\}_{i=1}^n$$

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{e}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \vec{e}_i = \vec{0} \nearrow \text{так как } \{\vec{e}_i\} \text{ л.н.з.}$$

Th. $\vec{a}, \vec{b}, \{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{e}_i = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

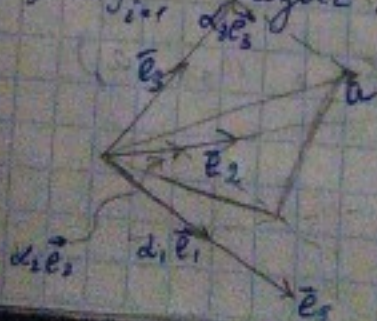
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \text{ то } c_i = \alpha_i + \beta_i$$

$$\vec{d} = \lambda \vec{a}, \text{ то } d_i = \lambda \alpha_i$$

□, ■

Проекция

$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ - базис. $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$



$$\alpha_i \vec{e}_i = P_{R_i} \vec{a}$$

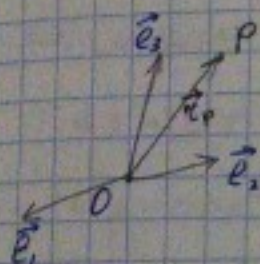
$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = P_{R(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \vec{a}$$

Th $P_R(\vec{a} + \vec{b}) = P_R \vec{a} + P_R \vec{b}$

$$P_R(\lambda \vec{a}) = \lambda P_R \vec{a}$$

□ ... ▣

Система координат



$$r, P \leftrightarrow \vec{r}_P$$

$$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n - \text{базис } V$$

$$\vec{r}_P = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

$$r, P \leftrightarrow \vec{r}_P \leftrightarrow (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

1) r, O - начало координат

2) $(2, 0, 0)$
 $(0, 3, 0)$
 $(0, 0, 4)$ } координатные линии (оси)

3) Коорд. линии - прямые $\rightarrow$ прямоугольная система координат

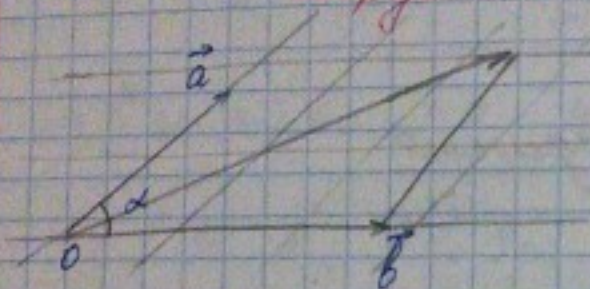
LARKY

$$\left. \begin{aligned} &4) \quad (\alpha, \beta, 0) \\ &\quad (\alpha, 0, \beta) \\ &\quad (0, \alpha, \beta) \end{aligned} \right\}$$

координатная плоскость (аффинная, декартова)
поверхность (сферическая, полусферическая, цилиндрическая)

18.09.13.

Аффинная система координат



$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = (\alpha, \beta)$$

Декартова с.к.

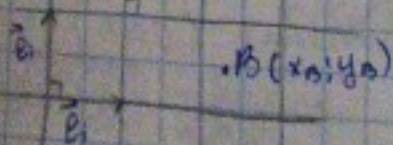
 $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$ - базис

$$|\vec{e}_i| = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$\vec{e}_i \perp \vec{e}_j \quad \forall i \neq j$$

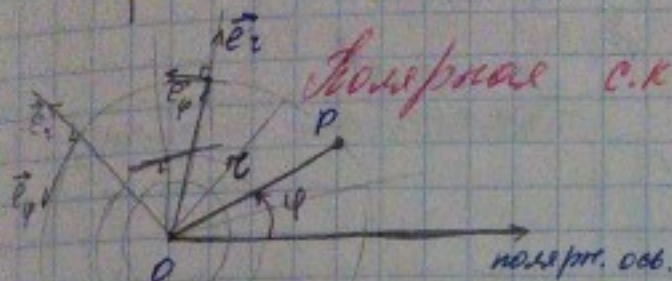
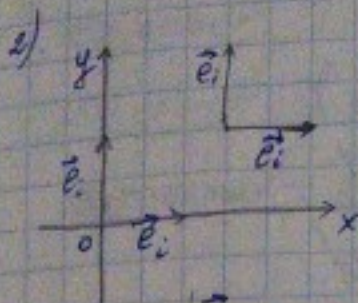
 $A(x_0, y_0)$

$$||AB|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



прямоугольная с.к.

1) Простота вычисления.



$$(x, y) \rightarrow (r, \varphi).$$

~ линии уровня

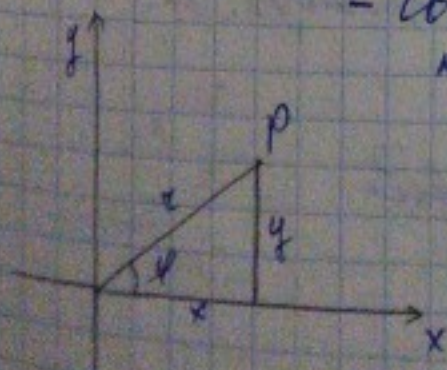
- $r = \text{const}$

- $\varphi = \text{const.}$

~ прямоугол. с.к.

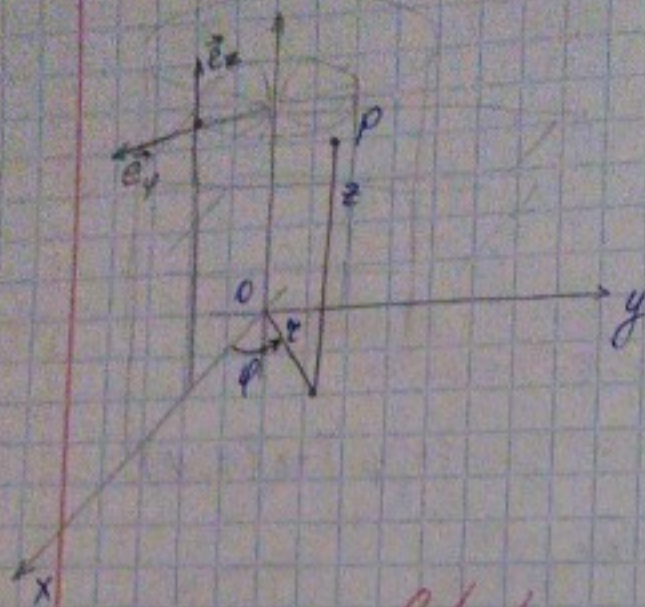
$$\vec{r} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

- связь между координатами:



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ \pi, & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Цилиндрическая с.к.



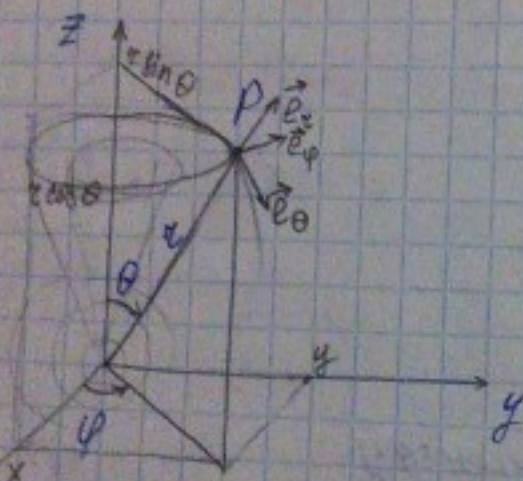
$$(r, \varphi, z).$$

$z = \text{const.}$ - цилиндр.

$\varphi = \text{const.}$

$z = \text{const.}$

Сферическая с.к.



$$\rho \in [0; +\infty)$$

$$\varphi \in [0; 2\pi]$$

$$\theta \in [0; \pi)$$

- прямоуг. с.к.

Связь с декартовыми

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

линии уровн.

$r = \text{const}$ (концентр. сф.),

$\varphi = \text{const}$ (плоскости).

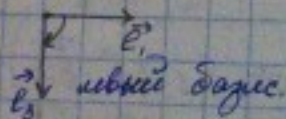
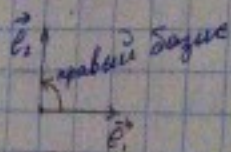
$\theta = \text{const}$ (набор осей координат).

Ориентация базиса

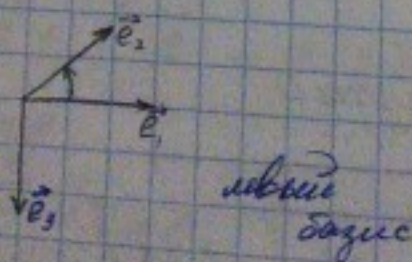
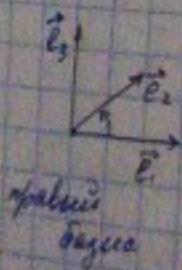
1. Одномерное пространство.

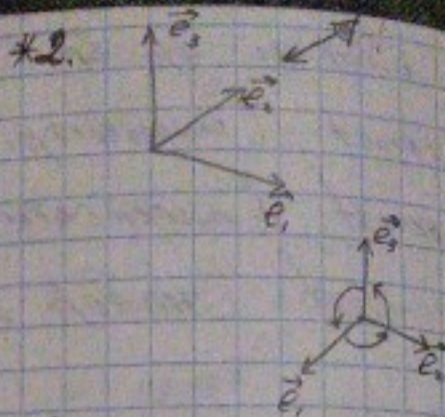
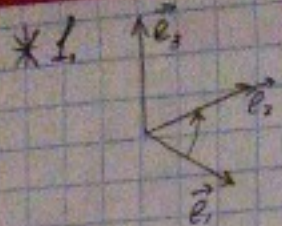


2. Двумерное пространство.



3. Трёхмерное пространство.

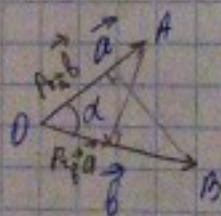
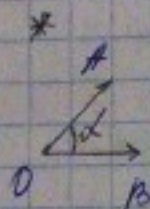
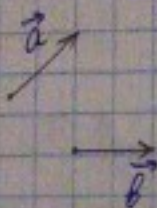




*3. Правило буравчика
(правого винта)

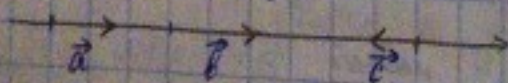
Смешанное произв.

1) Угол



$$\cos \alpha = \cos (\angle (\vec{a}, \vec{b})) = \frac{|\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

1) Одномерный случай



$$*1 \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} +|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, & \vec{a} \uparrow \vec{b} \\ -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, & \vec{a} \downarrow \vec{b} \end{cases}$$

2) Двумерный
 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

*2. 1
 $\vec{a} =$
 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

*3.
Угол

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

1. $\vec{a}$.

2. $(\vec{a}$.

3. $\vec{a}$.

4. α

1). Внутренний скаляр. (3 мерн. — "—).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot R_{\vec{a}} \vec{b}$$

*2. $\{\vec{e}\}$ — базис.

$$\vec{a} = (a_i); \quad \vec{b} = (b_i)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \cdot b_i$$

$$*3. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

Частный случай

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} > 0, \angle(\vec{a}, \vec{b}) - \text{острый} \\ = 0, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \\ < 0, \angle(\vec{a}, \vec{b}) - \text{тупой.} \end{cases}$$

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — коммутат.

2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — дистриб.

3. Положитель. опред.

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a}, \vec{a}) \geq 0 \quad \forall \vec{a} \in V.$$

$$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

4. $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}.$

Скалярное произведение в декартовой базисе

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$ - декарт. базис.

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \dots \\ &= \dots = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \underline{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij}$$

Матрица Грама

$$\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_{i,j=1}^3$$

$$\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

Символ Кронекера

δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

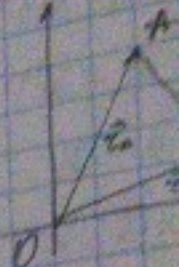
для декарт. базиса

правильно универс.

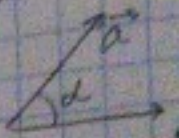
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\sum_{i,j=1}^3 A_i \delta_{ij} = A_j$$

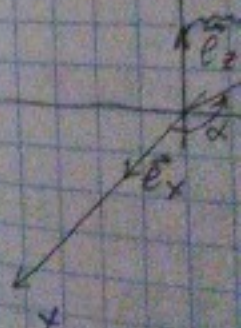
Длина



Угол



$\vec{e}_1$



$\vec{e}_1$

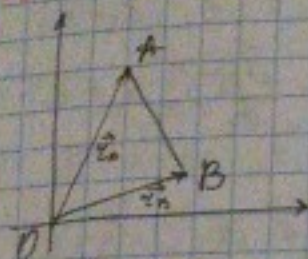
$\vec{e}_2$

$\vec{e}_3$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

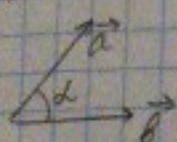
25.09.13

Definición: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$



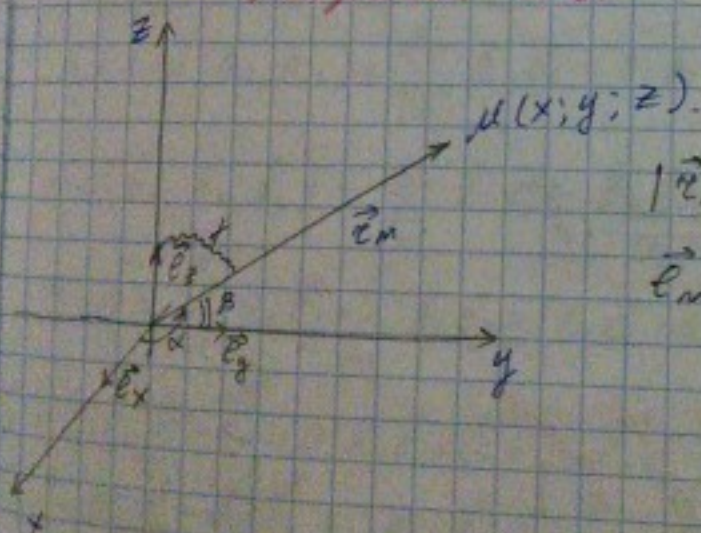
$$AB = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Yon:



$$\cos \alpha = \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Manipul. cos.



$$|\vec{r}_m| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_m = \frac{\vec{r}_m}{r} = \frac{1}{r} (x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

$$\vec{e}_x (1; 0; 0)$$

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_x = \frac{x}{r} = |\vec{e}_m| |\vec{e}_x| \cos \angle(\vec{e}_m, \vec{e}_x) = \cos \alpha$$

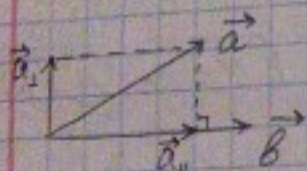
$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_y = \frac{y}{r} = \cos \beta$$

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_z = \frac{z}{r} = \cos \gamma$$

$$\vec{e}_n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Ортонорм.



$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a}_n - ?$$

$$\vec{a}_1 - ?$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$$

$$\vec{a}_{||} \parallel \vec{b} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a}_{||} = \alpha \vec{b}.$$

$$\vec{a} = \alpha \vec{b} + \vec{a}_{\perp} \quad | \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \alpha \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a}_{\perp} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$\vec{a}_{||} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{||} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$$

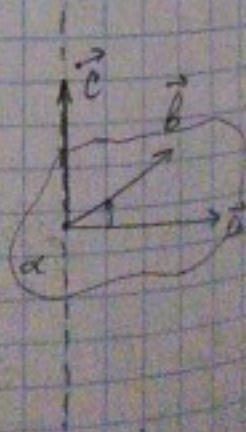
Векторное произв.

$$* \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$$

$$1) \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$2) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка.



$$1) \vec{a} \times \vec{b} =$$

$$2) [\alpha \cdot \vec{a},$$

$$3) (\vec{a} + \vec{b}) \times$$

$$4) \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow$$

$$5) |\vec{a} \times \vec{b}| = S$$

$$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3$$

$$= a_1 b_1 \vec{e}_1 +$$

$$+ a_2 b_2 \vec{e}_2 +$$

$$+ a_3 b_3 \vec{e}_3$$

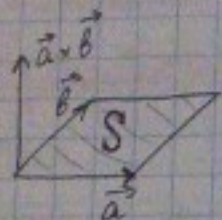
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 +$$

$$+ a_3 b_3 =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

Свойства

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ - антикоммутативность.
- 2) $[\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$ - ассоциативность.
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ - дистрибутивность.
- 4) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$
- 5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\vec{a}\vec{b}}$



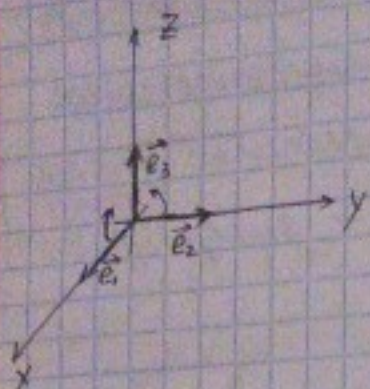
Вект. произв. в дек. базисе.

$$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3, \quad \vec{e}_i = \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \\ &= \cancel{a_1 b_1 \vec{e}_1 \times \vec{e}_1} + a_1 b_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1 b_3 \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + a_2 b_1 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \\ &+ \cancel{a_2 b_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_2} + a_2 b_3 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + a_3 b_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + \\ &+ \cancel{a_3 b_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_2} + \cancel{a_3 b_3 \vec{e}_3 \times \vec{e}_3} = a_1 b_2 \vec{e}_3 - a_1 b_3 \vec{e}_2 - \\ &- a_2 b_1 \vec{e}_3 + a_2 b_3 \vec{e}_1 + a_3 b_1 \vec{e}_2 - a_3 b_2 \vec{e}_1 = \\ &= \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$



$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 a_k(i,j) \vec{e}_k = a_1(i,j) \vec{e}_1 + a_2(i,j) \vec{e}_2 + a_3(i,j) \vec{e}_3$$

$$i=1, j=2. \quad a_1(1,2) = a_2(1,2) = 0$$

$$a_3(1,2) = 1$$

$$a_3(2,1) = -1$$

Тензор Леви-Чивита

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы 1 пара индексов совпадает;} \\ +1, & (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2); \\ -1, & (2,1,3), (1,3,2), (3,2,1). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{ij} a_i b_j \epsilon_{ijk}$$

Определение

1) 2^{го} порядка

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a_3 b_1 - a_1 b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

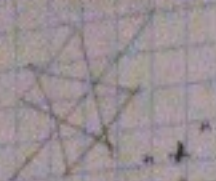
2) 3^{го} порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1) правило Сандерса:

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 -$$

$$- a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$



2)
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + \dots$$

3)
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

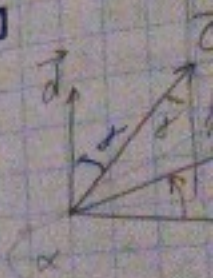
4)
$$(1, 2, -3) \times (4, -5, 7) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix} = (-1, -19, -13)$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

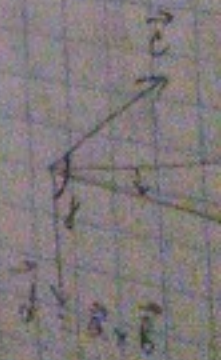
- Ор. ебаїтв

□



$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$$

2)
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$



Смешан, двойное векторное произв.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \cdot \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ — смешанное произв.

$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c}$ — двойной вект.

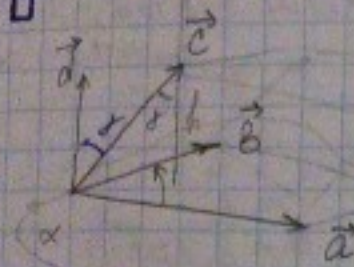
Смешанное произв.

02.10.13.

$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}$

— См. свойство: $[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$ ориентированный (ор.)

□



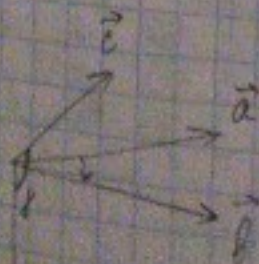
1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$

$|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\vec{a}, \vec{b}}$

$\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cos \gamma = |\vec{d}| h = h S_{\vec{a}, \vec{b}} = V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} > 0,$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая.

2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка.



$\gamma > \frac{\pi}{2}$

$\cos \gamma < 0$

$\vec{d} \cdot \vec{c} = -h |\vec{d}| = -V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$

т.е. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Свойства векторного произведения

1. $[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = [\vec{b} \times \vec{c}] \cdot \vec{a} = [\vec{c} \times \vec{a}] \cdot \vec{b}$
 - циклически переставив на фиксированном объеме

2. $[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = (\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}])$ - коммут.
 $= \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}]$

$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - коллиан. $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

4. $(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \alpha_2 (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$
 - линейность.

доказ. $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i; \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i; \quad \vec{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \vec{e}_i$

$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1, c_2, c_3) =$

$= (\vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}) \cdot (c_1, c_2, c_3) =$

$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Двойное векторное произведение

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

↑
пр-но равенства
(провернуть)

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\square [\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} \in \mathcal{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} = \mu \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad | \cdot \vec{c}$$

$$([\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = 0 = \mu(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \lambda(\vec{b} \cdot \vec{c}) \Rightarrow$$

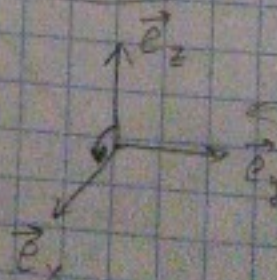
$$\Rightarrow \frac{\mu}{\vec{b} \cdot \vec{c}} = - \frac{\lambda}{\vec{a} \cdot \vec{c}} = \beta$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} = -\beta (\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$[\vec{e}_x \times \vec{e}_y] \times \vec{e}_x = -\beta [\vec{e}_y(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) - \vec{e}_x(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y)] = -\beta \vec{e}_y$$

$$[\vec{e}_x \times \vec{e}_y] \times \vec{e}_x = \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

$$\Downarrow \\ \beta = 1$$



2 способ: по координатам

3 способ: $\vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{b} \in Oxy$

$$\vec{a}(a_1, 0, 0)$$

$$\vec{b}(b_1, b_2, 0)$$

$$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$$

4 способ: (тензорный)

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} = \sum_{i,j,k} \sum_{l,m,n} \epsilon_{ijk} b_j a_i \epsilon_{klm} c_l \vec{e}_m =$$

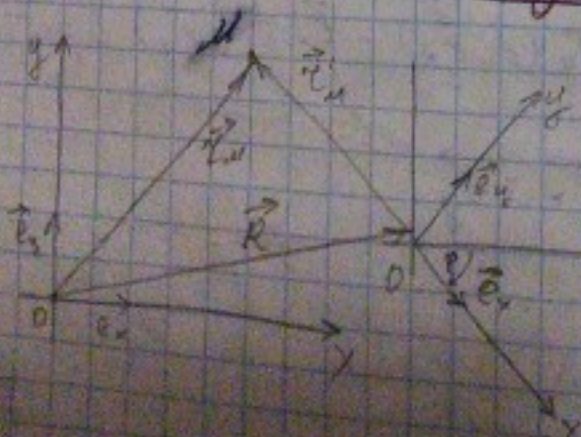
$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum \epsilon_{ijk} a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j c_l \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \cdot \vec{e}_m = \dots$$

$$\delta_{il} \delta_{jm} = \delta_{im} \delta_{jl}$$

Преобразование системы координат



$$\Rightarrow \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

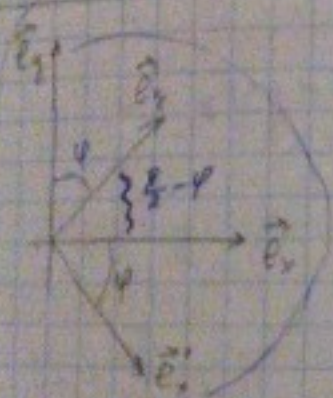
$$\Rightarrow \begin{cases} x' \\ y' \\ z' \end{cases}$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{r} = (x, y); \quad \vec{R} = (X_0, Y_0); \quad \vec{r}' = (x', y').$$

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = X_0\vec{e}_x + Y_0\vec{e}_y + x'\vec{e}_x' + y'\vec{e}_y'$$

$$\begin{aligned} 1) \cdot \vec{e}_x & \begin{cases} x = X_0 + x'\vec{e}_x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y'\vec{e}_x \\ y = Y_0 + x'\vec{e}_x'\vec{e}_y + y'\vec{e}_y'\vec{e}_y \end{cases} \Rightarrow \\ 2) \cdot \vec{e}_y & \end{aligned}$$



$$\vec{e}_x'\vec{e}_x = |\vec{e}_x'| |\vec{e}_x| \cdot \cos \varphi = \cos \varphi$$

$$\vec{e}_y'\vec{e}_x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

$$\vec{e}_x'\vec{e}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$$

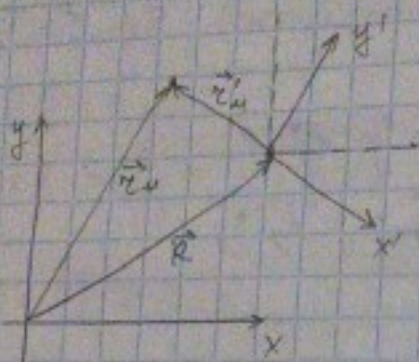
$$\vec{e}_y'\vec{e}_y = \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = X_0 + x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y = Y_0 - x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - X_0 = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y - Y_0 = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$$

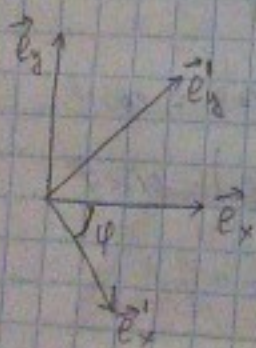
$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \varphi - (y - y_0) \sin \varphi \\ y' = (x - x_0) \sin \varphi + (y - y_0) \cos \varphi \end{cases}$$



$$\vec{R} = (x_0; y_0)$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + x' \vec{e}_x' + y' \vec{e}_y'$$



$$\begin{aligned} \text{II)} \quad & \begin{cases} \vec{e}_x' = \alpha_{xx} \vec{e}_x + \alpha_{xy} \vec{e}_y \\ \vec{e}_y' = \alpha_{yx} \vec{e}_x + \alpha_{yy} \vec{e}_y \end{cases} \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y \\ & p = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{pmatrix} \text{ - матрица } \end{aligned}$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x' = \cos \varphi = \alpha_{xx}$$

$$\vec{e}_x' \cdot \vec{e}_y = \alpha_{xy} = -\sin \varphi$$

$$\vec{e}_y' \cdot \vec{e}_x = \alpha_{yx} = \sin \varphi$$

$$\vec{e}_y' \vec{e}_y = \angle y y' = \cos \varphi$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x' = \cos \varphi \vec{e}_x - \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_y' = \sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \end{cases} \quad P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = X_0 \vec{e}_x + Y_0 \vec{e}_y + x' (\cos \varphi \vec{e}_x - \sin \varphi \vec{e}_y) + y' (\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y)$$

$$\vec{e}_x: x = X_0 + x' \cos \varphi + y' \sin \varphi$$

$$\vec{e}_y: y = Y_0 - x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

$$f(x, y) = \tilde{f}(x', y')$$

Преобразование в пространстве

$$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n \rightarrow \{\vec{e}_i'\}_{i=1}^n$$

$$\vec{e}_i \vec{e}_k = \delta_{ik}$$

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^n d_{ij} \vec{e}_j$$

$$\vec{r}_0 = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i; \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n X_i \vec{e}_i; \quad \vec{r}_m' = \sum_{i=1}^n x_i' \vec{e}_i'$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n X_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n x_i' \vec{e}_i'$$

$$x_k = X_k + \left(\sum_{i=1}^n x_i' \vec{e}_i' \right) \vec{e}_k = X_k + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i' d_{ij} \vec{e}_j \right) \vec{e}_k =$$

$$= X_k + \sum_{i,j=1}^n x_i' d_{ij} \delta_{jk} = X_k + \sum_i d_{ik} x_i'$$

$$\left\{ X_k \Rightarrow X_k + \sum_{i=1}^n x_i' d_{ik} \right\}$$

$$* \begin{cases} x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

Преобразование
вектора

$$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^2, \quad \vec{a} = (a_1; a_2) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

$$\downarrow$$

$$\{\vec{e}_i'\}_{i=1}^2, \quad \vec{a} = (a_1'; a_2') - ?$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1' \vec{e}_1' + a_2' \vec{e}_2' = a_1' (\cos \varphi \vec{e}_1 - \sin \varphi \vec{e}_2) + a_2' (\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) \\ &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_1' \cos \varphi + a_2' \sin \varphi \\ a_2 = -a_1' \sin \varphi + a_2' \cos \varphi \end{cases} \end{aligned}$$

* Вектор-упорядоченный набор чисел преобразующийся при преобразовании базиса по определенному закону

* скаляр (инвариант) - величина, что не преобразуется (не измен.) при преобр. ск.

f - инв - скаляр

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \rightarrow \vec{a}' = (a_1', a_2')$$

Длина:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(a_1' \cos \varphi + a_2' \sin \varphi)^2 + (-a_1' \sin \varphi + a_2' \cos \varphi)^2} \\ &= \sqrt{(a_1')^2 + (a_2')^2} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2)$$

$$\kappa: \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 =$$

$$= (a_1' \cos \varphi + a_2' \sin \varphi)(b_1' \cos \varphi + b_2' \sin \varphi)$$

$$b_1' \sin \varphi + b_2' \cos \varphi = a_1' b_1' + a_2' b_2'$$

$$K \begin{cases} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{cases}$$

Зерк. пр.

Реш:

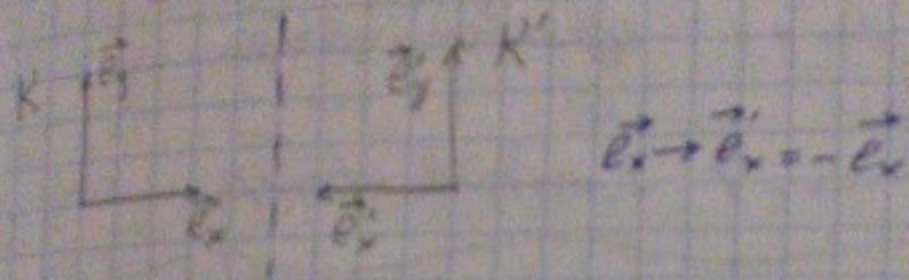
Преобр.

det

$$= a_1' \sin \varphi + (-a_1' \sin \varphi + a_1' \cos \varphi) (-b_1' \sin \varphi + b_1' \cos \varphi) = a_1' b_1' + a_1' b_1'$$

Преобразование

ортогональное преобразование (ортогональное)



$$\begin{cases} x = -x' = -1 \cdot x' + 0 \cdot y' \\ y = y' = 0 \cdot x' + 1 \cdot y' \end{cases}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = -\vec{e}_1' = 1 \cdot \vec{e}_1' + 0 \cdot \vec{e}_2' \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_2' = 0 \cdot \vec{e}_1' + 1 \cdot \vec{e}_2' \end{cases}$$

Зерк. преобр.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Линейное $\vec{a} \rightarrow 0$ $K' \rightarrow K$

Зерк. преобр. $\rightarrow$ скалярное.

Преобр. $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n \rightarrow \{\vec{e}_i'\}_{i=1}^n$

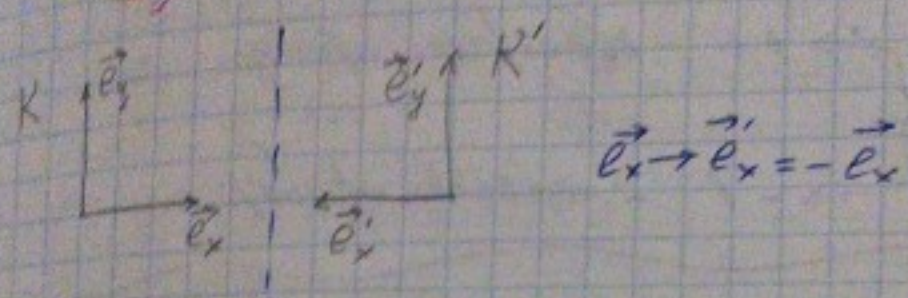
задается:

$$\det P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 - \text{ортогональны.}$$

(не меняют расстояния между т. (метрика))

$$= a'_1 v'_1 + a'_2 v'_2$$

Преобразование измененный ориентации (зеркальная)



*
$$\begin{cases} x = -x' = -1 \cdot x' + 0 \cdot y' \\ y = y' = 0 \cdot x' + 1 \cdot y' \end{cases} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = -\vec{e}'_x = 1 \cdot \vec{e}'_x + 0 \cdot \vec{e}'_y \\ \vec{e}_y = \vec{e}'_y = 0 \cdot \vec{e}'_x + 1 \cdot \vec{e}'_y \end{cases}$$

Зерк. преобр.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Реш: $\varphi \rightarrow 0 \quad K' \rightarrow K$

2). зерк. преобр. $\rightarrow$ скачки.

Преобр. $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n \rightarrow \{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ задается:

$$\det P = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = 1 \text{ - ортогональны.}$$

матрицей P .
(не меняют расстояния между P . (метрика))

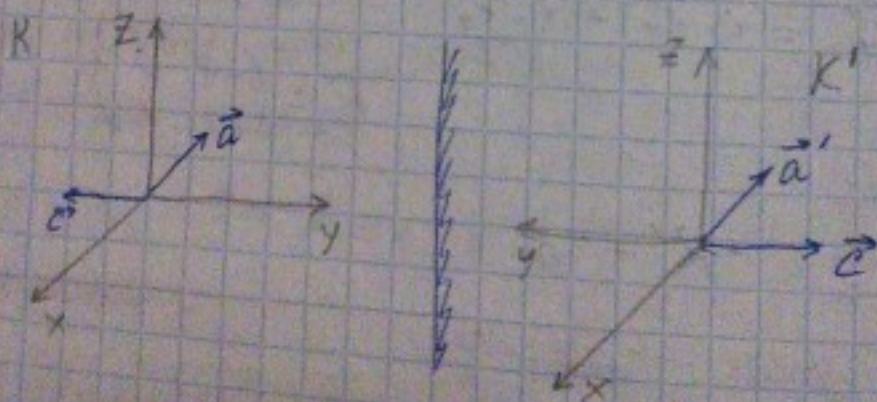
поворот: $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$

зерк. преобр. $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\det P \rightarrow \begin{cases} +1 & \text{— собствен. преобр.} \\ -1 & \text{— несобств. преобр.} \end{cases}$

Поларные, аксиальные
вектора.
Псевдоскаляр.

$\vec{e}_y \rightarrow \vec{e}'_y = -\vec{e}_y$ — расм. зерк. преобр.



$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \rightarrow (a_1, -a_2, a_3)$$

$$\text{Pr: } \vec{a} = (a_1, 0, 0) \quad \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{b} = (0, 0, b_2)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = (0, -a_1 b_2, 0)$$

c_y

$$\text{Pr: } \vec{a}' = (a'_1, 0, 0) = (a_1, 0, 0)$$

$$\vec{b}' = (0, 0, b'_2) = (0, 0, b_2)$$

$$\vec{c}' = \vec{a}' \times \vec{b}' = \vec{a} \times \vec{b} = (0, -a_1 b_2, 0)$$

c'_y

$$! c'_y = c_y !$$

Поларные вектора $\rightarrow$ обобщение направл. отрезков.

Аксиальные вектора $\rightarrow$ обобщ. понятие вращения.

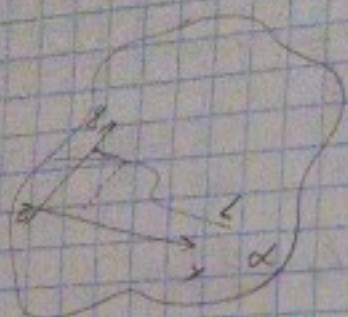
Поларный вектор $\cdot$ Аксиальный = псевдоскаляр
вектор

Псевдоскаляр - комбинация чисел...

Пр: смеш. произвед.

Линия на плоскости

$$\Phi(x, y) = 0 \text{ — уравнение кривой } L$$



кривая L — ГИТ коор. которые удовлетв. $\Phi(x, y) = 0$

* Кривая назыв. алгебраической, если $\Phi(x, y)$ — алгебр. ф-ция $\rightarrow \Phi(x, y) = \sum_{k, l} a_{kl} x^k y^l, k, l \in \mathbb{N}$
 Σ — конечная

* Порядок кривой $n = \max\{k, l\}$

* Трансцендентные кр. — не алгебр. кр.

Варианты $\rightarrow \Phi(x, y) = 0 \rightarrow y = f(x)$
 $\rightarrow \Phi(r, \varphi) = 0$
 $\rightarrow \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in T$

Th: Порядок линии сохр. при ортог. преобр.

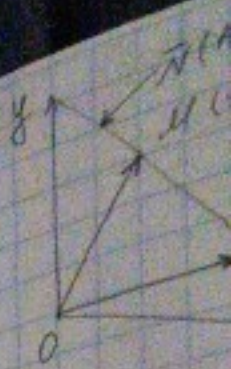
Линии 1^{го} порядка.
 Прямые на плоскости



Выберем ск. ох и в.

$$l: y = 0 \Rightarrow \forall \text{ ск. } l: Ax + By + C = 0$$

(*) общее уравн. прямой



$$A(x - x_0)$$

$$(x - x_0)$$

$$(A, B) =$$

$$2. Ax + By$$

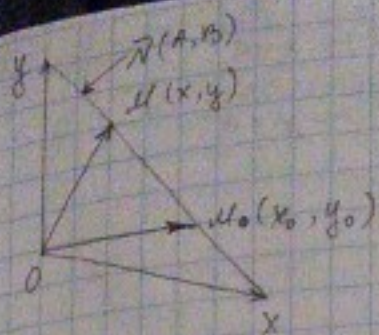
Неполно

$$A, B, C \neq$$

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Рассм. дек. ск.

$$Ax + By + C = 0$$

$$\exists M_0(x_0, y_0) \in l:$$

$$Ax_0 + y_0 B + C = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0) = \vec{M_0 M}$$

$$(A, B) = \vec{N}$$

$$\vec{N}(\vec{r} \vec{r}) = 0$$

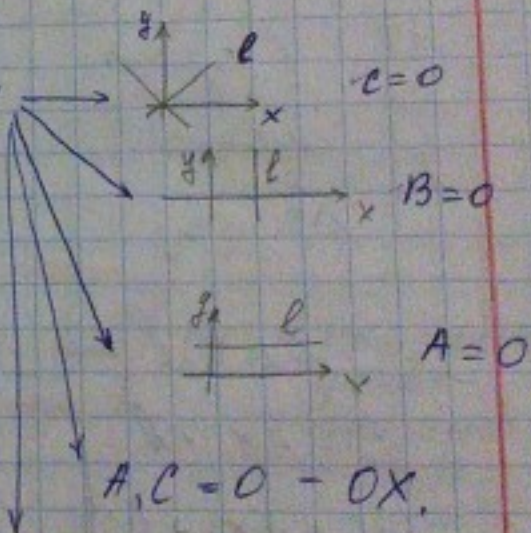
(2) нормальное уравн. пр.

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{(A, B)}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \text{орт. нормали.}$$

$$\underline{2.} \quad Ax + By + C = 0$$

Нормальное уравн. прямой:

$$A, B, C \neq 0.$$

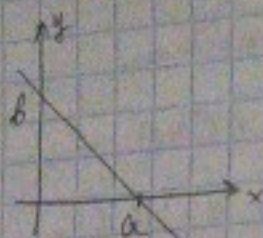


$$Ax + By = -C \quad | : C$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(3) уравн. прямой в отрезках



$$y=0: 0x \Rightarrow x=a$$

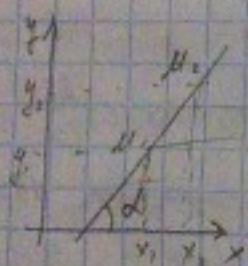
$$x=0: 0y \Rightarrow y=b$$

3. $Ax + By + C = 0$

$$By = -Ax - C \quad | : B$$

$$y = \underbrace{-\frac{A}{B}}_k x - \underbrace{\frac{C}{B}}_b = kx + b$$

$y = kx + b$ (4) уравн. прямой с
заданными коэф.



k - угл. коэф.

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

$$M_1, M_2 \in l \Rightarrow$$

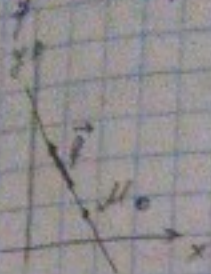
$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

4. Пусть $M_0 = (x_0, y_0) \in l$, $\vec{q} = (m, n) \neq 0$
 $\vec{q}$ - направляющий вектор.



$$M(x, y)$$

$$\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$$

$$\vec{M_0M} \parallel \vec{q} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{M_0M} = \vec{q}t$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0 + \vec{q}t$$

(5) вект.-параметр
 ур. прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

(6) - параметр
 ур. прямой.

Исключаем параметр t .

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

(7) канонич.
 уравн.
 прямой.

5. $M_1, M_2 \in l \Rightarrow \vec{M_2M_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \vec{q}$

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1}$$

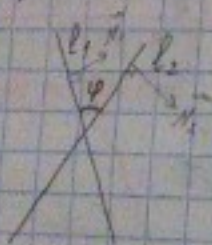
(8) ур. прямой
 через 2 задан. точки

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (9)$$

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1) + \\ y = y_1 + (y_2 - y_1) + \end{cases} \quad (10)$$

Взаимное расположение
прямых

1) Пересечение



$$\angle \varphi = \angle(l_1, l_2) = \angle(N_1, N_2).$$

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

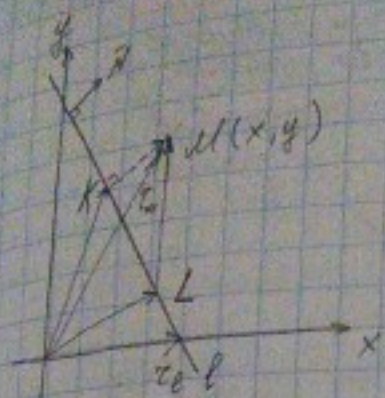
$$2). l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \\ A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

$$3). l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

параллельно

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$$

Взаимное расположение точки и прямой



$$l: Ax + By + C = 0$$

$$M(x, y)$$

$$MK \perp l$$

KM — определяет откос. перпендику.

$$\vec{KM} \parallel \vec{n}$$

$$\vec{KM} = r_M \cdot \vec{n}$$

r_M — отклон. т.
от прямой.

$$\vec{KM} = r_M \cdot \vec{n} \quad | : \vec{n}$$

$$\vec{KM} \cdot \vec{n} = r_M$$

выберем $L \in l$

$$L(x_L, y_L)$$

$$Ax_L + By_L + C = 0$$

$$\vec{KM} = \vec{LM} - \vec{LK}$$

$$r_M = \vec{n} \cdot (\vec{LM} - \vec{LK}) = \vec{n} \cdot \vec{LM} - \vec{n} \cdot \vec{LK} =$$

$$= \vec{n} \cdot (\vec{r}_M - \vec{r}_L)$$

$$\vec{n} \perp \vec{LK}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_M = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot (x, y) = \frac{(A, B) \cdot (x, y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax + By}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

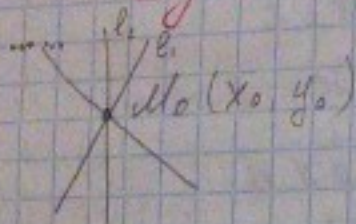
$$\vec{n} \cdot \vec{r}_L = \frac{(A, B) \cdot (x_L, y_L)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_L + By_L}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$r_M = \frac{Ax + By}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$l: p_{\text{нн}} = 0$$

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (1) \text{ нормированное уравнение прямой.}$$

Связь прямых



$$M_0 \in l_i \Rightarrow A_i x_0 + B_i y_0 + C_i = 0$$

Рассм. 2 прямые из пучка, тогда:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall l \in \text{пучка} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha (A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

уравн. пучка прямых.

$$1) \Phi(x)$$

$$2) \Phi(y)$$

* Умнож. на 1, чтобы получить $\forall M_0$

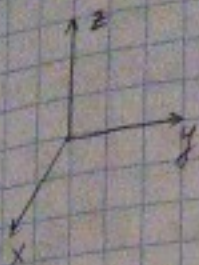


$$* \begin{cases} \Phi(x) \\ \Phi(y) \end{cases}$$

Уравнение поверхности

23.10.13.

$\Phi(x, y, z) = 0$ - ур. поверхн.

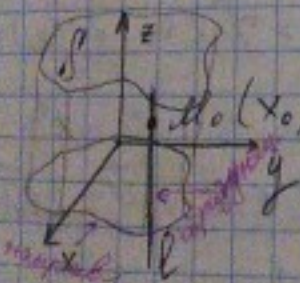


1) $\Phi(x) = 0 \rightarrow$ набор $\parallel$ пл. (плоскостей)
пл $\parallel YOZ$.

2) $\Phi(x, y) = 0 \rightarrow$ поверхн. - свл. цилиндром
с осевой $\parallel OZ$.

* Цилиндр. поверхность S с осью $\parallel OZ$ -
наз. такой поверхностью, для которой верно
следующее.

$\forall M_0(x_0, y_0, z_0) \in S, l \parallel OZ, M_0 \in l \Rightarrow l \in S$



$S: \Phi(x, y) = 0$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi(x_0, y_0) = 0$

$l: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + dt \end{cases}$

$\Rightarrow \forall M(x_0, y_0, \tilde{z}) \in l$

также $\Phi(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow M \in S$

* $\begin{cases} \Phi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ - направляющая кривая.

* Гомогенность уравнения — линейный оператор

и однородное $u_0 \in S$.

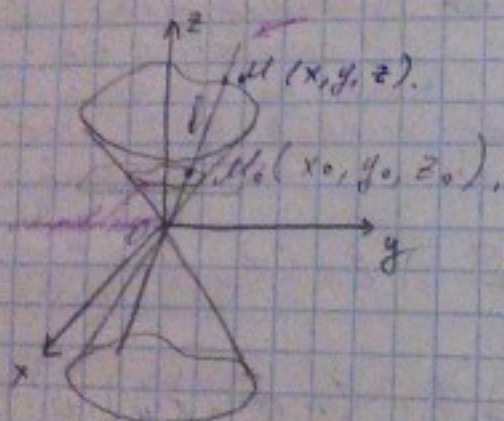
3) * $\Phi(x, y, z)$ — равно сферическая функция

т.е. $\Phi(kx, ky, kz) = k^n \Phi(x, y, z)$

т.е. $\Phi(x, y, z)$ — сферическая Φ (любой

$\Phi(x, y, z) = 0 \rightarrow$ задает коническую поверхность с вершиной в 0.

* Конус поверхности S с вершиной в начале ОЗ
такой что: $\forall M_0(x_0, y_0, z_0) \in S, \ell$, содержащий
О и M_0 полностью лежит на пов. S .



$$S: \Phi(x, y, z) = 0$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$$

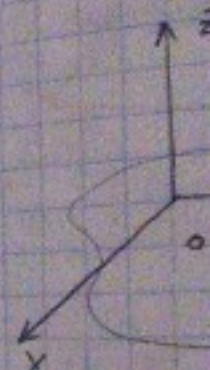
$$\ell: M \in \ell: \vec{OM} \parallel \vec{OM_0} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \vec{OM} = \lambda \vec{OM_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \lambda (x_0, y_0, z_0).$$

$$M: \Phi(x, y, z) = \Phi(2x_0, 2y_0, 2z_0) \in 2^n \Phi(x_0, y_0, z_0)$$

$$= 0 \Rightarrow M \in S \Rightarrow \ell \in S.$$

4) Поверхность



$$Ax + By$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

Рассм. M

$$A(x - x_0)$$

Поверхности

т.е. $\forall M \in S$

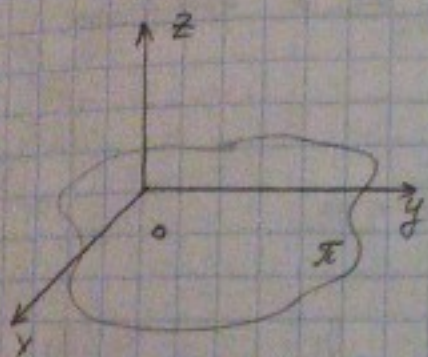
4) Поверхность вращения $\Phi(x, y, z) = 0$



$$x^2 = y_0^2 = x^2 + y^2 = \text{const}$$

$\Phi(x^2 + y^2, z) = 0$ - пов.
вращ. относ осей OZ

Алгебраическая поверхность 1^{го} порядка.
Плоскость



$\pi: z = 0$ - ур. 1^{го} пор.

$\forall$ дек. с.к. $\pi: Ax' + By' + Cz' + D = 0$

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

$Ax + By + Cz + D = 0$ - общее ур. плоск. (1)

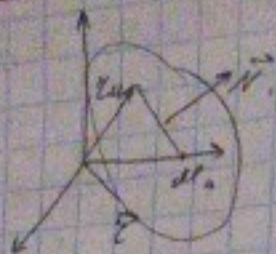
$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

Рассм. $M(x, y, z) \in \pi \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Получим $\vec{N} = (A, B, C) \Rightarrow \vec{N} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ - вект. ур. плоскости (2)

т.е. $\forall M \in \pi, \vec{r}_M - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$

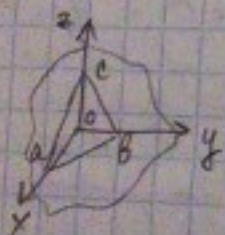


$$Ax + By + Cz = -D \quad | : -D$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

$\underbrace{-\frac{D}{A}}_a \quad \underbrace{-\frac{D}{B}}_b \quad \underbrace{-\frac{D}{C}}_c$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{— ур. п. в отрезках}$$



уравнение
ур-е плоскости проход. чрез 3 заданные
т. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$.

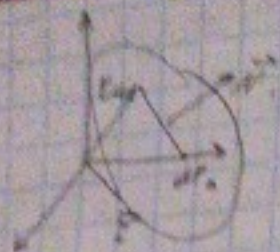


$$\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \text{ — коллинеарны}$$

$$\Rightarrow M \in \pi$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

ур. п. прох. чрез
3 т.



$$Ax + By + Cz = -D \quad | : -D$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

$\underbrace{-\frac{D}{A}}_{=a} \quad \underbrace{-\frac{D}{B}}_{=b} \quad \underbrace{-\frac{D}{C}}_{=c}$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{— ур. м. в отрезках} \quad (3)$$



уравнение
ур. — в плоскости прох. через 3 заданные
т. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$



$$\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \text{ — коллинеарны}$$

$$\Rightarrow M \in \pi$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

ур. м. прох. через
3 т.

(4)

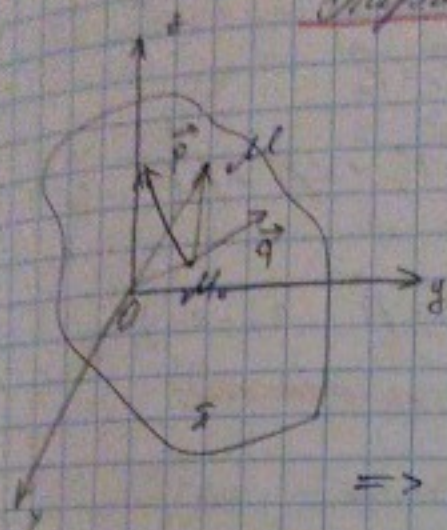
тогда берем записи:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Параметрич. ур. пл.

Реш. (= 3 мет.).

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{q}$$



$$\vec{p}, \vec{q} \in \pi$$

$$\vec{p} \times \vec{q}$$

$$\forall M \in \pi \quad \vec{M_0M} \in \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists! \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{M_0M} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q}.$$

$$\vec{M_0M} = \vec{r_M} - \vec{r_0}$$

$$\vec{r_M} = \vec{r_0} + \alpha \vec{p} + \beta \vec{q}$$

- вект. параметр.
ур. пл.

$\vec{p}, \vec{q}$ - направляющие век. пл.

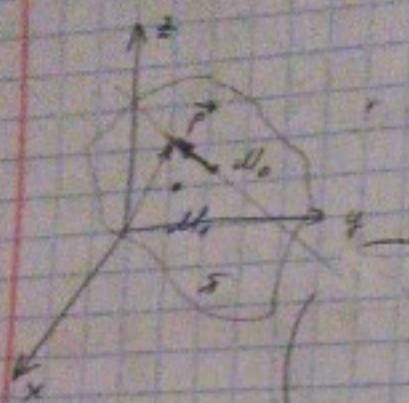
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

тогда запись (5):

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha p_x + \beta q_x \\ y = y_0 + \alpha p_y + \beta q_y \\ z = z_0 + \alpha p_z + \beta q_z \end{cases}$$

- параметр. ур. пл.

Частн. случай.



$$\vec{r} \in \pi$$

$$M_0 \in \pi$$

$$M_1 \in \pi$$

вект. норм.

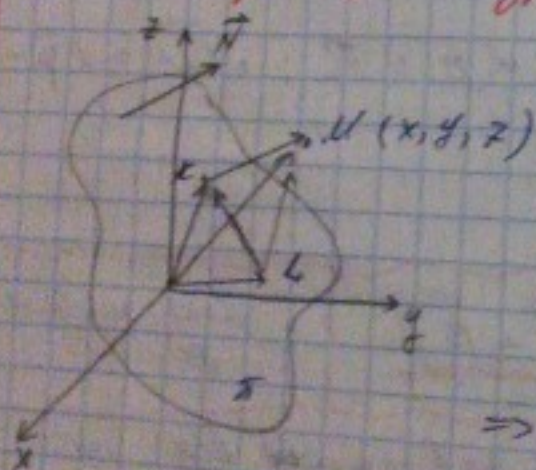
$$\vec{q} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \alpha \vec{r} + \beta (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$$

связь вт.

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{r}, \vec{r}_1 - \vec{r}_0) = 0.$$

Нормиров. ур. плоскости:



ρ_M - отклонение

$$\vec{r}_M \perp \pi \rightarrow \vec{r}_M \parallel \vec{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \rho_M \vec{r}_M = \rho_M \cdot \vec{n} \mid \cdot \vec{n}$$

$$\rho_M = \vec{r}_M \cdot \vec{n} \mid \cdot \vec{n} = \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Рассм. $L \in \pi$ $\vec{r}_M = \vec{r}_L - \vec{r}_K$

$$\vec{r}_K \in \pi \Rightarrow \vec{r}_K \perp \vec{n}.$$

$$\rho_M = \vec{r}_L \cdot \vec{n} = (\vec{r}_L - \vec{r}_K) \cdot \vec{n} = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

если $N \neq 0$, $\rho_M = 0$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

1. ρ_M

2.

Rem:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

нормиров.
ур. м.

⑥

Линия, связка плоскостей

① Линия — обшая прямая l .

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\pi_1, \pi_2 \in \text{линии} \Rightarrow$

$$\text{Ур. линии: } \alpha (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \beta (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

② Связка — обшая т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

ур. связки:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}$$

Прямая в пространстве

Реш. Ур. кривой γ в пр-ве задается:

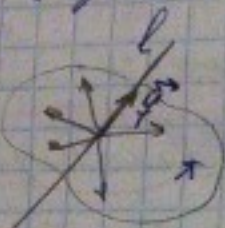
$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

1) Общее ур. прямой.



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Реш: Нормали $\vec{n}$ для плоскостей в пр-ле π .



$$\pi \perp l$$

$$\forall \vec{n} \in \pi, \vec{n} \perp l$$

$\vec{q}$ - направл. вект. $\Rightarrow \forall M \in l, \vec{M_0M} \parallel \vec{q} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{q} \times (\vec{r}_M - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{- вект. ур. прям.}$$

Канонич. ур.

$$\vec{M_0M} \parallel \vec{q} \Rightarrow \frac{x-x_0}{q_x} = \frac{y-y_0}{q_y} = \frac{z-z_0}{q_z}$$

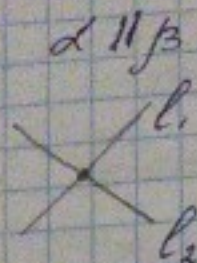
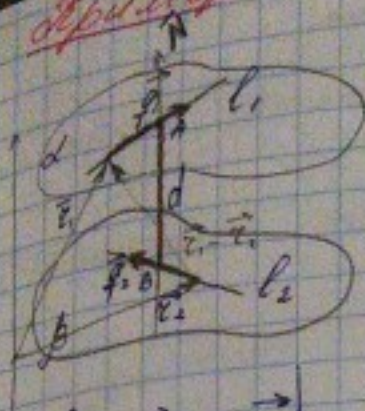
Реш: при $q_i = 0 \Rightarrow x-x_i = 0 \Rightarrow \underline{x=x_i}$

Ур. прямой через 2 зад. т.

$$\vec{r}_0, \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{q} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Пример скрещ. прямых.



$$l_1: \vec{r}_1, \vec{q}_1$$

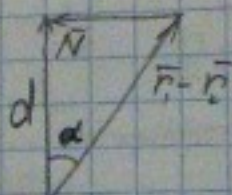
$$l_2: \vec{r}_2, \vec{q}_2$$

$d = ?$

1) Определим общий перпендикуляр.

$$\vec{N} = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2$$

2)



$$d = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| |\cos \alpha| = \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| |\vec{N}| |\cos \alpha|}{|\vec{N}|} =$$

$$= \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{N})|}{|\vec{N}|} =$$

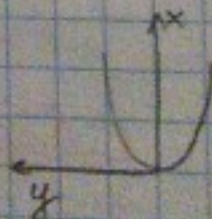
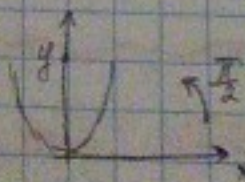
$$= \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2)|}{|\vec{q}_1 \times \vec{q}_2|} = d$$

1. Кривые 2-го порядка

1. Парабола

$$y = x^2$$

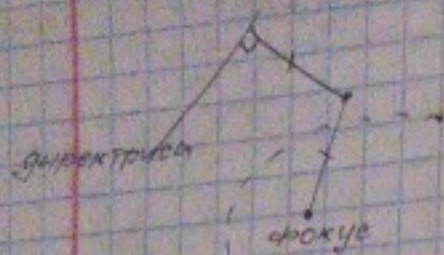
$$y = ax^2 + bx + c$$



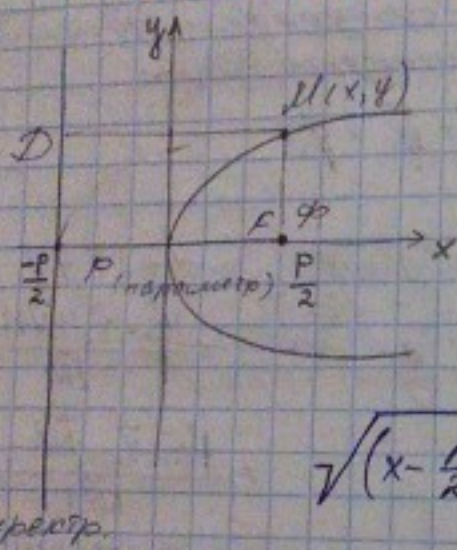
$$x = y^2$$

2) Парабола - г.м.т. (ГМТ) удовл. условию: расстоянию до выдел. прямой (директриса) = расстоянию до выдел. точки (фокус).

$$z_{\text{дир}} = z_{\text{фокус}}$$



Канонич. с.к.



$M \in \text{парабола} \Rightarrow |FM| = |MN|$

$$F(\frac{p}{2}, 0)$$

$$D(-\frac{p}{2}, y)$$

$$M(x, y)$$

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

- канонич.
уравн.
параболы.

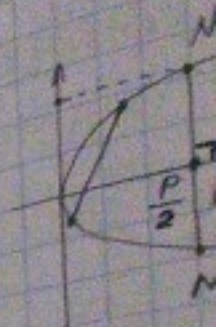
Свойства параболы

1) $y \leftrightarrow -y$ - не меняет ур. $\Rightarrow \exists$ ось симметрии (OX) параболы (ось параб.)

2) $p \neq 0$ $y^2 = 2px$ $y_1 \neq y_2 \neq 0$
 $x_1 = x_2$

парабола

3) Фокус



* Эллипс
2. задан

$$|MF_1|$$

$$F_2(-c)$$

Канонич.

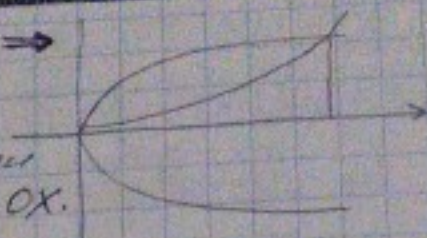
$$M(x, y)$$

$$F_1(c, 0)$$

$$F_2(-c, 0)$$

$$2px = k^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{2p}{k^2} \Rightarrow$$

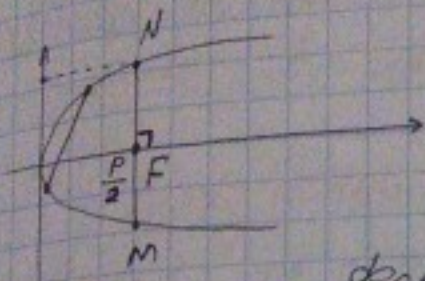
парабола примен. к оси Ox .



3) Фокальная хорда, фок. параметр.

NM - фок. хорда.

NF - фок. парам.



$$NF = y \left(x = \frac{p}{2} \right) = \sqrt{2p} \frac{p}{2} = p$$

фок. параметр - p

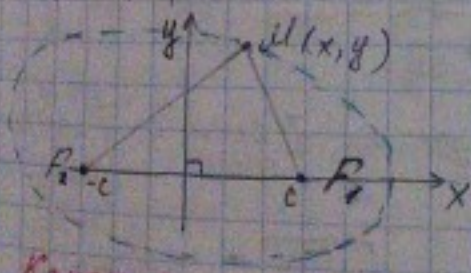
2. Эллипс

* Эллипс - ГМТ, сумма расст. от которых до 2 заданных, постоянна, называемых фокусами.

$$|MF_1| + |MF_2| = \text{const} = 2a$$

$$\Rightarrow a > c$$

$$|F_1F_2| = 2c$$



Канонич. с.р. $M \in \text{эллипса} \Rightarrow$

$$M(x, y) \quad |MF_1| + |MF_2| = 2a$$

$$F_1(c, 0)$$

$$F_2(-c, 0)$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc$$

$$a^2[x^2 + 2xc + c^2 + y^2] = (a^2 + xc)^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$$

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\text{Пусть } a^2 - c^2 = b^2$$

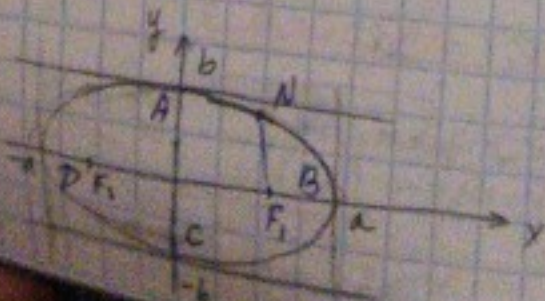
$$x^2 \frac{b^2}{a^2} + y^2 = b^2 \quad | : b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \begin{array}{l} \text{— канонич.} \\ \text{уравн.} \\ \text{эллипса.} \end{array}$$

Свойства эллипса

1) $\left. \begin{array}{l} x \leftrightarrow -x \\ y \leftrightarrow -y \end{array} \right\}$ не меняет. ур. $\Rightarrow \exists$ 2 осн. $\Rightarrow \exists$ центр симм. (центр эллипса)

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \Rightarrow |y| \leq b$
аналогично $|x| \leq a$.



A, B, C, D — верш. прямоуго.

← осев. прямоуго.

2) для параметра

$$p = |F_1 N| = y(x=c) = \left| b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right|_{x=c} = b \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$$

$$= b \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} = b \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

a - большая

b - малая

Окружность. Эксцентриситет.

$$|F_1 F_2| = 0, \text{ т.е. } c = 0$$

$$|MF_1| + |MF_2| = 2|MF| = 2a \Rightarrow |MF| = a$$

получим

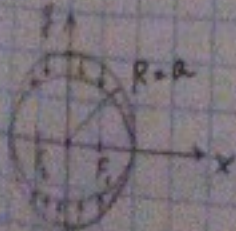
$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Преобр. масштаб

$$\begin{cases} y \rightarrow y' = ky \\ x \rightarrow x' = x \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(ky)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{k^2}} = 1$$

$(ak)^2$



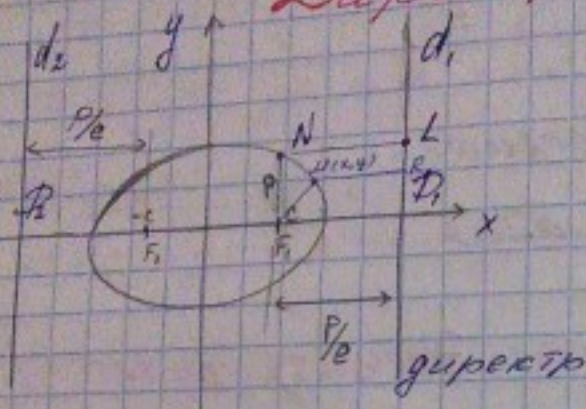
Эксцентриситет

$$e = \frac{|F_1 F_2|}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} < 1$$

где c - малая

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Директриса



прямая $d_1 \perp Ox$
на расc. $F_1 d_1 = \frac{p}{e}$

Найдем x_2 - ?

$$x_2 = x_{F_1} + F_1 d_1 = c + \frac{p}{e} = c + \frac{b^2}{ae} = c + \frac{a^2 - c^2}{ae} = \frac{ae + a^2 - c^2}{ae}$$

$$= \frac{a}{e}$$

$$x_2 = \frac{a}{e}$$

директриса $x = \pm \frac{a}{e}$

Рассм. т. N.

$$\frac{F_1 N}{|N L|} = \frac{p}{p/e} = e$$

$$b^2 = a^2 - c^2 e^2$$

Прямая d_1 т. $M(x, y) \in$ эллипсу $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$

$M(x, y)$
 $F_1(c, 0)$
 $L(\frac{a}{e}, y)$

$$\frac{x^2}{a^2} +$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

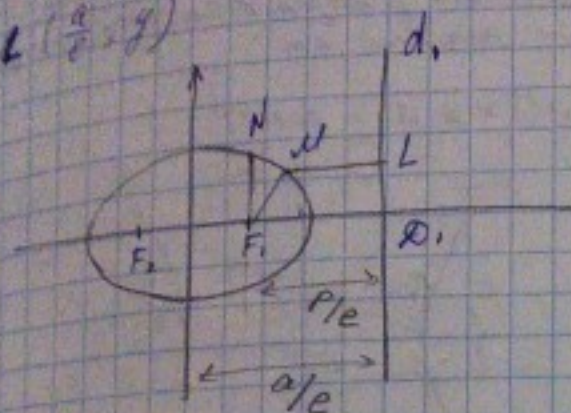
$$e^2 =$$

$$p =$$

$$= e -$$

$$= e \sqrt{}$$

$M(x, y)$
 $F_1(c, 0)$
 $L(\frac{a}{e}, y)$



$$\frac{|M/F_1|}{|F_1L|} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{x - \frac{a}{e}} = \dots = e!$$

$$D_1 = x d = \frac{a}{e}$$

DE. 11, 13

$$F_1 D_1 = \frac{r}{e}$$

$$\frac{|F_1 M|}{|M L|}$$

$$M(x, y)$$

$$F_1(c, 0)$$

$$L(\frac{a}{e}, y)$$

$$\frac{|F_1 M|}{|M L|} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{e} - x} =$$

$$= e \cdot \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{a - x e} =$$

$$= e \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}}{a - x e} = e \cdot \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) - 2xc + b^2 + c^2}}{a - x e} =$$

$$= e \cdot \frac{\sqrt{x^2 e^2 - 2x e a + a^2}}{a - x e} = e \cdot \frac{\sqrt{(x e - a)^2}}{a - x e} = e = \text{const.}$$

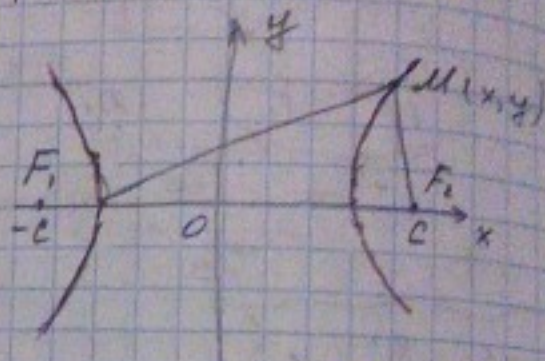
Гипербола

*1. Гипербола — ГМТ, разность расстояний от которых до двух заданных (называемых фокусами) постоянна и равно $2a$.

$$|F_1 M| - |F_2 M| = 2a = \text{const.}$$

$$|F_1 F_2| = 2c$$

Каноническое уравнение:



$$|F_1 M| - |F_2 M| = 2a$$

$$c > a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 c^2 - 2xc a^2 + a^4 = a^2 [x^2 - 2xc + c^2 + y^2]$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2 y^2 = a^2 c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\text{Пусть } c^2 - a^2 = b^2$$

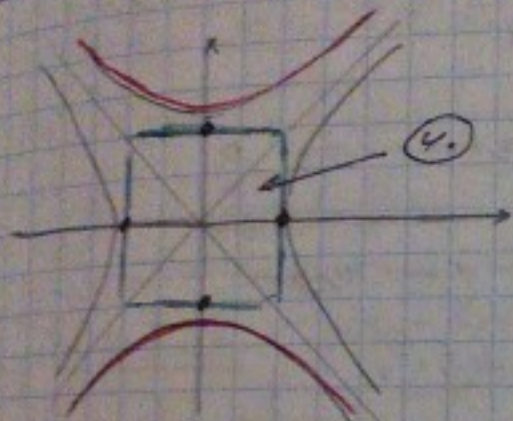
$$x^2 b^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad | : a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{— Канон. уравн. гиперболы (для обеих ветвей).}$$

СВ-ба гиперболы.

① $\left. \begin{matrix} x \leftrightarrow -x \\ y \leftrightarrow -y \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{не меняет} \\ \text{знака} \end{matrix} \Rightarrow \exists \text{ ось симметрии.}$
 $OX, OY \Rightarrow \exists \text{ центр симметрии } (0, 0)$

② $\text{пр. } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ - гипербола, сопряжена данной.



③ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$

$y = \pm \frac{b}{a} x \left[1 - \left(\frac{a}{bx} \right)^2 \right]^{1/2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \pm \frac{b}{a} x$

$y = \pm \frac{b}{a} x$ - асимптоты гиперболы.

$\left. \begin{matrix} |x| \leq a \\ |y| \leq b \end{matrix} \right\} \text{основной} \\ \text{прямоугольник.}$

$x = \pm a$

$y = \pm b$ - вершины гиперболы.

④ $a = b$

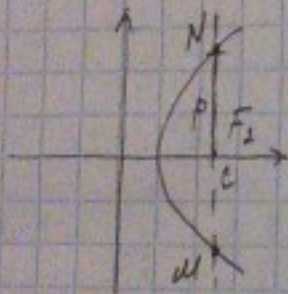
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 - \text{равнобочная гипербола.}$$

Эксцентриситет

$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

⑤ Фокальный параметр p .



NM - фок. хорда

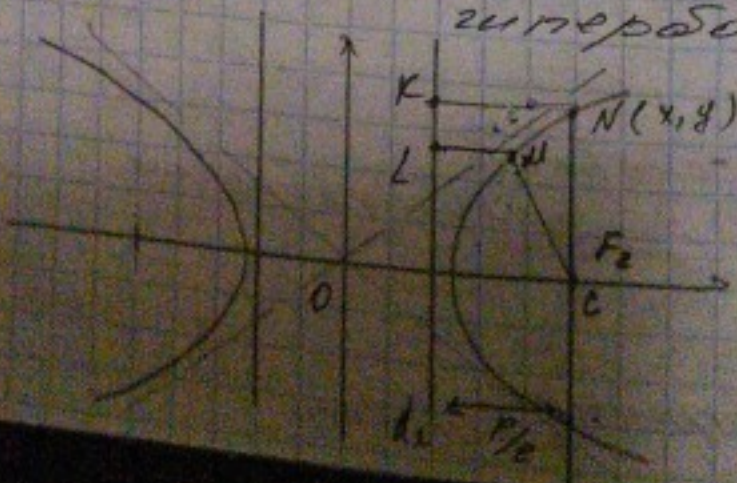
$$NM \perp F_2F_1$$

$$p = \frac{1}{2} NM = F_2N$$

$$p = y_N(x=c) = b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = b \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Директриса
гиперболы



Две F_1, F_2

прямые F_1, F_2 не рассог. $\frac{P}{e}$ от F_2 .

$$NF_2 = P$$

$$NK = \frac{P}{e}$$

$$\frac{NF_2}{NK} = \frac{P}{P/e} = e.$$

Найдем $D_2 = Xd_2 - ?$

$$Xd_2 = XF_2 - F_2 D_2 = c - \frac{P}{e} = c - \frac{b^2}{ae} = \frac{c(ae) - b^2}{ae} =$$

$$= \frac{c^2 - b^2}{ae} = \frac{a^2}{ae} = \frac{a}{e}$$

$$Xd = \pm \frac{a}{e} \quad \text{— уравнение директрисы.}$$

Рассмотрим г. М в гиперб. $M(x, y)$.

$$\frac{|F_2 M|}{|M L|} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{x - \frac{a}{e}} = e \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{xe - a} =$$

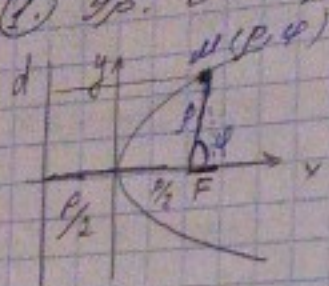
$$= e \frac{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1)}}{xe - a} = e \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{b^2}{a^2}) - 2xc + c^2 - b^2}}{xe - a} =$$

$$= e \frac{\sqrt{x^2 e^2 - 2xae + a^2}}{xe - a} = e \frac{\sqrt{(xe - a)^2}}{xe - a} = e = \text{const.}$$

12. Гипербола — ГМТ $\frac{|MF|}{|MD|} = \text{const} = e > 1$.

Общие св-ва кривых второго порядка

1. Ур. в полярных коорд.



полуправ с.к.
начало в фокусе F
полуправ ось по Ox.

Из общего опред:

$$\frac{MF}{MD} = e.$$

$$MF = r.$$

$$MD = r + r \cos \phi$$

$$\frac{MF}{MD} = e \Rightarrow \frac{r}{r \cos \phi + r} = e$$

$$r = er + r e \cos \phi$$

$$r(1 - e \cos \phi) = er \Rightarrow$$

$$r(\phi) = \frac{er}{1 - e \cos \phi}$$

- ур-е
кривых
2-го порядка
в полярной
с.к.

$$d = \frac{r}{e}$$

1. эллипс $e < 1$

$$1 - e \cos \phi > 0$$

$\forall \phi \in [0, 2\pi]$ $\exists$ точка кривой.



2) Парабола $e = 1$.

$\exists \varphi = 0$ при кот. $\cos \varphi = 1$.

$$p(\varphi) = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$$

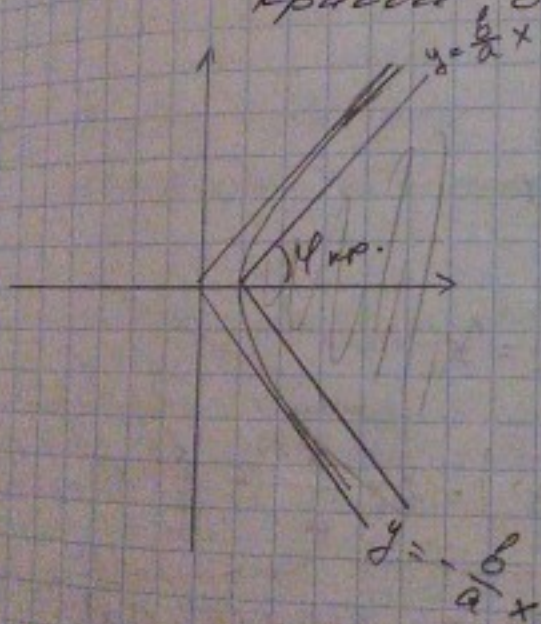
$$1 - \cos \varphi = 0 \Rightarrow \nexists p(0)$$

3) Гипербола. $e > 1$

$$b \geq a$$

$\exists$ диапазон углов $[\varphi_{кр}, \varphi_{кр}]$ при котором $p < 0$

Кривой в этом секторе нет.



$$\varphi_{кр}: 1 - e \cos \varphi_{кр} = 0$$

$$\cos \varphi_{кр} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_{кр} = \frac{\sin^2 \varphi_{кр}}{\cos^2 \varphi_{кр}} =$$

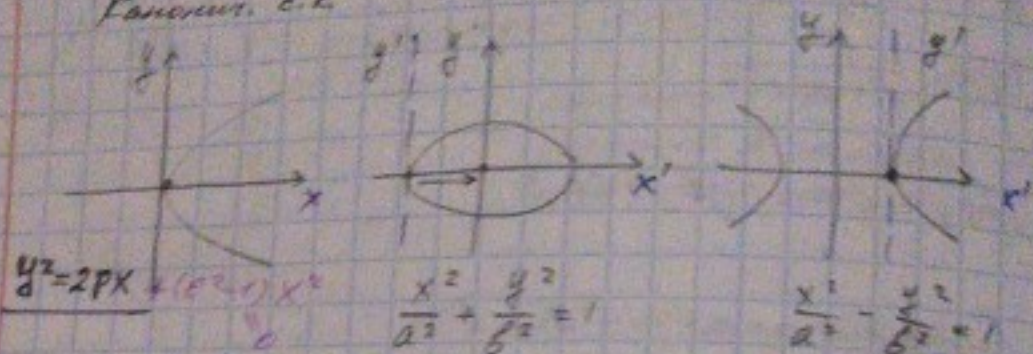
$$= \frac{1 - \cos^2 \varphi_{кр}}{\cos^2 \varphi_{кр}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^2}{\left(\frac{1}{e^2}\right)} =$$

$$= e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_{кр} = \frac{b}{a} \quad \text{|| асимптота}$$

② 3р. при вершине.

Канонич. с.к.



$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$$

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$$

Эллипс

$$\begin{cases} x \rightarrow x - a = x' \\ y' = y \end{cases}$$

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2xa - x^2) = 2x \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$y^2 = 2px - (1 - e^2)x^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$$

Гипербола

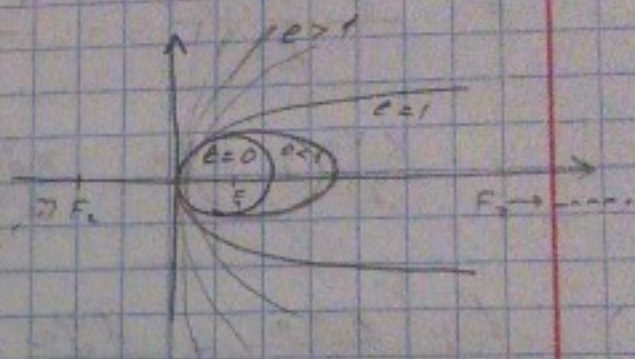
$$\begin{cases} x \rightarrow x + a = x' \\ y' = y \end{cases}$$

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

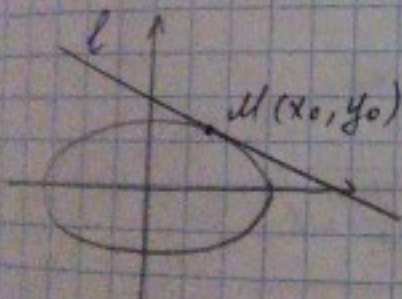
$$\frac{x^2 + 2ax + a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2}{a^2} (x^2 + 2ax) = 2x \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$$



③ Касательные к кривым 2^{го} порядка.



$$\text{Эллипс: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$M(x_0, y_0)$$

l-касат.

$$l: y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$k = y'(x_0)$$

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$y' = \frac{b}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{-2x}{a^2}$$

$$y'(x_0) = \frac{-bx_0}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}}$$

all $(x_0, y_0) \in \text{эллипса} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = \frac{y_0}{b}$$

$$y - y_0 = \frac{-bx_0}{a^2 \cdot \frac{y_0}{b}} (x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y - y_0)y_0}{b^2} = - \frac{x(x - x_0)}{a^2}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$\ell: \boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

Аналогично:

Гипербола:

$$\ell: \boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

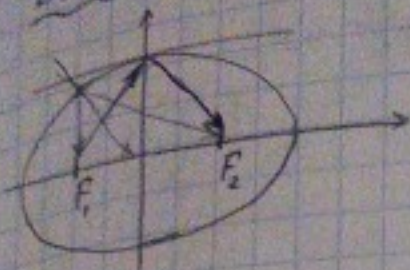
Парабола:

$$\ell: \boxed{yy_0 = p(x + x_0)}$$

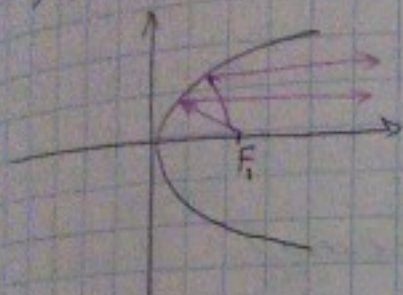
④ Оптические свойства

13.11.13

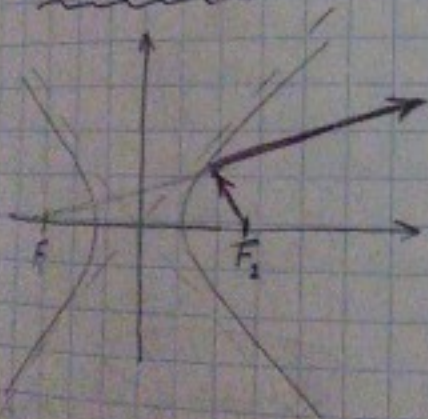
Эллипс



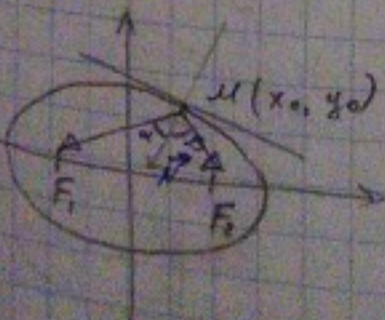
Парабола



Гипербола



Эллипс



$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$F_1 = (-c, 0)$$

$$F_2 = (c, 0)$$

$$\vec{MF}_1(-c-x_0, -y_0)$$

$$\vec{MF}_2(c-x_0, -y_0)$$

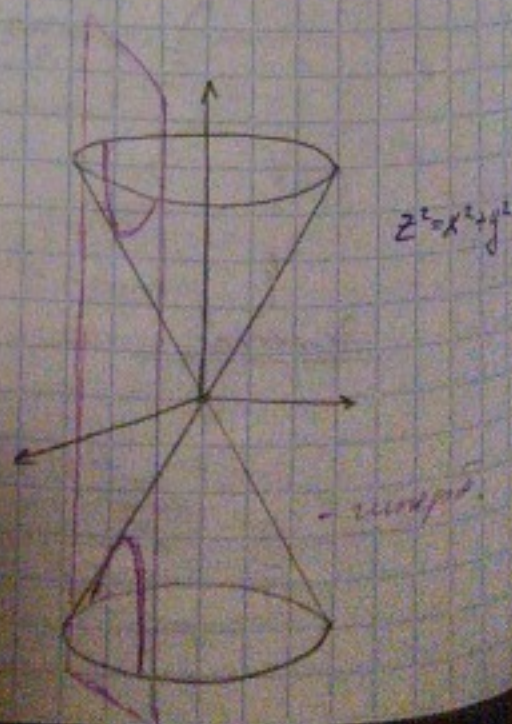
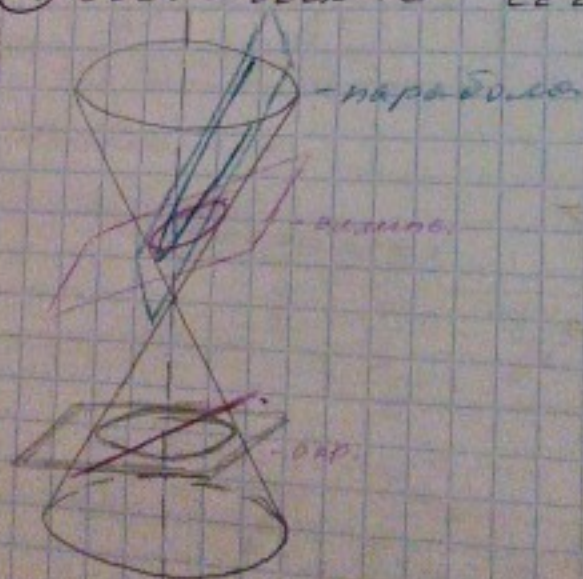
гипербол. $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

$$\vec{N} = \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2} \right)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{MF}_1 \cdot \vec{N}|}{|\vec{MF}_1| \cdot |\vec{N}|}$$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{MF}_2 \cdot \vec{N}|}{|\vec{MF}_2| \cdot |\vec{N}|}$$

⑤ Конические сечения.



Шаг 2 Даргоуэлла

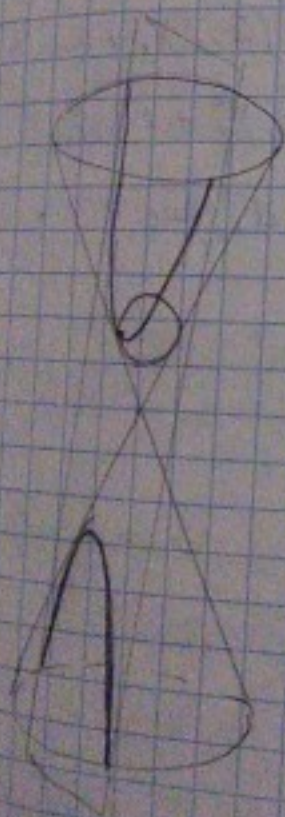


$$BC = \text{const.}$$

$$BC = AB + AC \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} AB &= AF_1 - \text{const.} \\ AC &= AF_2 - \text{const.} \end{aligned} \right\} 2 \text{ касат.}$$

$$\Rightarrow \forall A \in \text{кривой} \quad AF_1 + AF_2 = BC = \text{const.}$$



$x^2 + y^2$

Общая теория кр. 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

1. Сдвиг центра.

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & a_{11}(x_1 + x_0)^2 + 2a_{12}(x_1 + x_0)(y_1 + y_0) + \\ & + a_{22}(y_1 + y_0)^2 + 2a_{13}(x_1 + x_0) + 2a_{23}(y_1 + y_0) + a_{33} = 0 \\ & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x_1 + \\ & + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y_1 + (a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + \\ & + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}) = 0. \end{aligned}$$

$$b_{11} = a_{11}$$

$$b_{12} = a_{12}$$

$$b_{22} = a_{22}$$

$$b_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$$

$$b_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$$

$$b_{33} = \dots$$

* Кривая наз. кр. центр. типа если:

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

Общая теория кр. R^{2n} периода

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

1. Замена переменных.

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & a_{11}(x_1 + x_0)^2 + 2a_{12}(x_1 + x_0)(y_1 + y_0) + \\ & + a_{22}(y_1 + y_0)^2 + 2a_{13}(x_1 + x_0) + 2a_{23}(y_1 + y_0) + a_{33} = 0 \\ & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x_1 + \\ & + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y_1 + (a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + \\ & + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}) = 0. \end{aligned}$$

$$b_{11} = a_{11}$$

$$b_{12} = a_{12}$$

$$b_{22} = a_{22}$$

$$b_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$$

$$b_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$$

$$b_{33} = \dots$$

* Кривая наз. кр. центр. типа если;

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

центр, точка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$b_{12} = 0$$

$$b_{22} = 0$$

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$$

$$a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$$

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = -a_{13}$$

$$a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = -a_{23}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{11} \\ -a_{23} & a_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$I_0 = \frac{-a_{13}a_{22} + a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

2. Поворот.

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{cases}$$

$$a_{11}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)^2 + 2a_{12}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) \cdot$$

$$(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) + a_{22}(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi)^2 +$$

$$+ 2a_{23}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) + 2a_{23}(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) + a_{33} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & x_1^2 (a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) + \\
 & + 2x_1 y_1 (-a_{11} \cos \varphi \sin \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \\
 & + a_{22} \cos \varphi \sin \varphi) + y_1^2 (a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi - \\
 & + a_{22} \cos^2 \varphi) + 2x_1 (a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi) + 2y_1 (-a_{13} \sin \varphi + \\
 & + a_{23} \cos \varphi) + a_{33} = 0.
 \end{aligned}$$

Поворот: $a_{11} = a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi$
 $+ a_{22} \cos \varphi \sin \varphi = 0.$

$$-\frac{1}{2} a_{11} \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi + a_{22} \frac{1}{2} \sin 2\varphi = 0.$$

$$\boxed{\tan 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}}$$

Переход к каноническому св.

20.11.13

①. Поворот на угол φ : $\tan 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$

$$b_{11} x_1^2 + b_{22} y_1^2 + 2b_{13} x_1 + 2b_{23} y_1 + b_{33} = 0$$

1). Пусть $b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0$. Кривые центр.

$$b_{11} (x_1^2 + 2 \frac{b_{13}}{b_{11}} x_1) + b_{22} (y_1^2 + 2 \frac{b_{23}}{b_{22}} y_1) + b_{33} =$$

$$\begin{aligned}
 & = b_{11} (x_1^2 + 2 \frac{b_{13}}{b_{11}} x_1 + (\frac{b_{13}}{b_{11}})^2 - (\frac{b_{13}}{b_{11}})^2) + b_{22} (y_1^2 + 2 \frac{b_{23}}{b_{22}} y_1 + \\
 & + (\frac{b_{23}}{b_{22}})^2 - (\frac{b_{23}}{b_{22}})^2) + b_{33} = b_{11} (x_1 + \frac{b_{13}}{b_{11}})^2 + b_{22} (y_1 + \frac{b_{23}}{b_{22}})^2 - \\
 & - \frac{b_{13}^2}{b_{11}} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}} + b_{33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 = x_1 + \frac{b_{13}}{b_{11}} \\ y_1 \rightarrow y_2 = y_1 + \frac{b_{23}}{b_{22}} \end{cases} \text{ Тогда:}$$

$$b_{11}x_2^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33} - \frac{b_{13}^2}{b_{11}} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{- привед.} \\ \text{ф. кр. центр.} \\ \text{типа} \end{array}$$

$$2) \quad b_{11} = 0, \quad b_{22} \neq 0. \quad \begin{array}{l} \text{- кривые парабол.} \\ \text{типа} \end{array}$$

$$b_{22}y_1^2 + 2b_{13}x_1 + 2b_{23}y_1 + b_{33} = 0$$

$$b_{22}\left(y_1^2 + 2\frac{b_{23}}{b_{22}}y_1 + \left(\frac{b_{23}}{b_{22}}\right)^2 - \left(\frac{b_{23}}{b_{22}}\right)^2\right) + 2b_{13}x_1 + b_{33} = 0$$

$$b_{22}\left(y_1 + \frac{b_{23}}{b_{22}}\right)^2 + 2b_{13}x_1 + b_{33} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}} = 0$$

$$3) \quad b_{13} \neq 0.$$

$$b_{22}\left(y_1 + \frac{b_{23}}{b_{22}}\right)^2 + 2b_{13}\left(x_1 + \frac{b_{23}}{2b_{13}} - \frac{b_{23}^2}{2b_{13}b_{22}}\right) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 = x_1 + \frac{b_{23}}{2b_{13}} - \frac{b_{23}^2}{2b_{13}b_{22}} \\ y_1 \rightarrow y_2 = y_1 + \frac{b_{23}}{b_{22}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{22}y_2^2 + 2b_{13}x_2 = 0$$

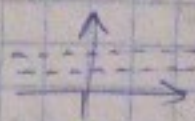
- привед.

параб. типа.

Доп.

$$2.2) \quad b_{13} = 0$$

$$b_{12} y_1^2 + b_{22} - \frac{b_{23}^2}{b_{11}} = 0 \Rightarrow y_2 = \pm \sqrt{\frac{b_{23}}{b_{11}} - \frac{b_{22}}{b_{11}}}$$



Теория инвариантов.

$$1. \quad I_1 = a_{11} + a_{22}$$

Проверка: $c_{11} + c_{22} = a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi = a_{11} + a_{22}$

$$2. \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Проверка

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} &= c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = (a_{11} \cos^2 \varphi + a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) (a_{11} \sin^2 \varphi - a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \cos^2 \varphi) - \\ &- \left(\frac{1}{2} (a_{22} - a_{11}) \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi \right)^2 = a_{11}^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \\ &- a_{11} a_{12} \cos^2 \varphi \sin 2\varphi + a_{11} a_{22} \cos^4 \varphi + a_{11} a_{12} \sin^2 \varphi \sin 2\varphi - \\ &- a_{12}^2 \sin^2 2\varphi + a_{12} a_{22} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi + a_{11} a_{22} \sin^4 \varphi - \end{aligned}$$

$$\frac{b_{12}}{b_{21}}$$

$$-a_{11} a_{22} \sin^2 \varphi \sin 2\varphi + a_{12}^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} (a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 \varphi - a_{12}^2 \cos^2 2\varphi - a_{12} (a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi = -\sin 2\varphi$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

Розміри

$$3). \bar{I}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$4). \bar{I}_1 = a_{11} + a_{22} = \overset{\text{шур}}{Sp} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \overset{\text{суг}}{Tr} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

5. Билинвариант

$$\bar{I}_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Инвариант относительно поворотов и
НЕ инвариантен не сохр. при // переносах.

Тв. Билинв. $\bar{I}_2^*$ сохран при // переносах, если $\bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 0$.



$$\bar{I}_2^* = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{33} - b_{13}^2 + b_{22}b_{33} - b_{23}^2$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}) - \\ &- (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})^2 + a_{22}(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + \\ &+ 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}) - (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})^2 = \\ &= \cancel{a_{11}^2x_0^2} + \cancel{2a_{11}a_{12}x_0y_0} + a_{11}a_{22}y_0^2 + \cancel{2a_{11}a_{13}x_0} + \cancel{2a_{11}a_{23}y_0} + \end{aligned}$$

$a_{11} \ a_{12}$
 $a_{12} \ a_{11}$

$$\begin{aligned}
 & + a_{11} a_{33} - a_{11}^2 x_0^2 + a_{12}^2 y_0^2 - a_{12}^2 - 2 a_{11} a_{12} x_0 y_0 - 2 a_{11} a_{12} x_0 - \\
 & - 2 a_{12} a_{12} y_0 + a_{11} a_{22} x_0^2 + 2 a_{11} a_{22} x_0 y_0 + a_{22}^2 y_0^2 + 2 a_{12} a_{22} x_0 + \\
 & + 2 a_{12} a_{22} y_0 + a_{22} a_{33} - a_{12}^2 x_0^2 - a_{12}^2 y_0^2 - a_{22}^2 - 2 a_{12} a_{22} x_0 y_0 - \\
 & - 2 a_{12} a_{22} x_0 y_0 - 2 a_{12} a_{22} y_0 = a_{11} a_{33} - a_{12}^2 + a_{22} a_{33} - a_{12}^2 + \\
 & = \tilde{I}_2^*(a) = \underbrace{x_0^2 (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}_{\tilde{I}_1=0} + \underbrace{y_0^2 (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}_{\tilde{I}_2=0} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 x_0 (a_{12} a_{22} - a_{12} a_{22}) + 2 y_0 (a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) = \\
 & = \tilde{I}_2^*(a) + 2 x_0 (a_{12} a_{22} - a_{12} a_{22}) + 2 y_0 \frac{a_{11}}{a_{12}} (a_{12} a_{23} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} a_{13}) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \left\{ \begin{aligned} \tilde{I}_1 &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{12}^2 &= a_{11} a_{22} \end{aligned} \right\} = \tilde{I}_2^*(a) + 2 x_0 (a_{12} a_{22} - a_{12} a_{22}) +
 \end{aligned}$$

$$+ 2 y_0 \frac{a_{11}}{a_{12}} (a_{12} a_{23} - \frac{a_{11} a_{22} a_{13}}{a_{11}}) =$$

$$= \tilde{I}_2^*(a) + (a_{12} a_{22} - a_{12} a_{22}) \left[2 x_0 - 2 y_0 \frac{a_{11}}{a_{12}} \right] =$$

$$= \tilde{I}_2^*(a), \quad \text{т.к.} \quad \tilde{I}_3 = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{13} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) - a_{23} (a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) =$$

$$\tilde{I}_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 &= a_{13} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) - a_{23} \frac{a_{12}}{a_{22}} \left(a_{11} a_{23} \frac{a_{12}}{a_{12}} - a_{13} \frac{a_{12} a_{23}}{a_{12}} \right) \\
 &= a_{13} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) - a_{23} \frac{a_{12}}{a_{22}} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) \\
 &= \frac{1}{a_{22}} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) (a_{13} a_{22} - a_{23} a_{12}) = \\
 &= -\frac{1}{a_{22}} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22})^2 = 0.
 \end{aligned}$$

27.11.13

Общая классификация
кривых 2-го порядка

1. Канон. ур. $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$$y^2 = 2px \rightarrow a_{22} = 1 \quad a_{13} = -p \rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow a_{11} = \frac{1}{a^2}; a_{22} = \frac{1}{b^2}; a_{33} = -1 \rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow a_{11} = \frac{1}{a^2}, a_{22} = -\frac{1}{b^2}, a_{33} = -1 \rightarrow$$

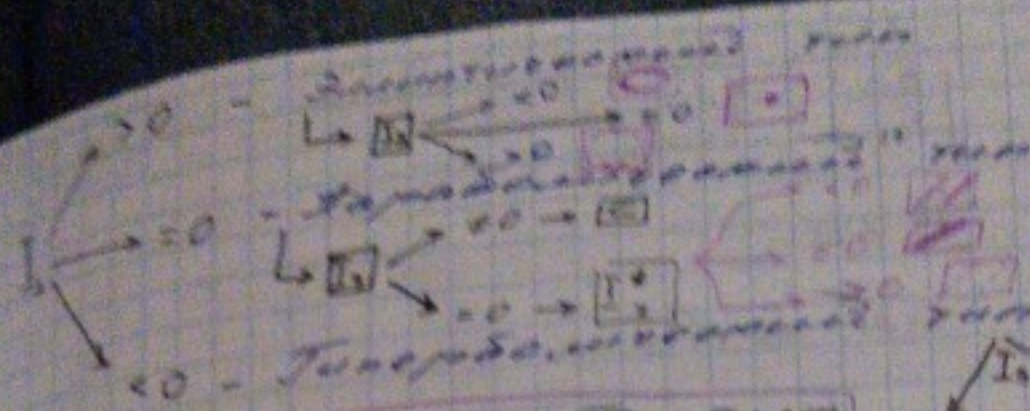
1 этап.

$$\rightarrow I_1 = a_{11} + a_{22} = 1, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix} = -p^2$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad I_2 = \frac{1}{a^2 b^2}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2 b^2}$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \quad I_2 = -\frac{1}{a^2 b^2}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2 b^2}$$

2 этап: Вычисляем I_2



1. Гиперболический тип

$$b_1 x^2 + b_{11} y^2 + b_{33} z^2 = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_{11} \end{vmatrix} = b_1 b_{11} < 0$$

$$\text{if } b_{11} = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix} = b_1 b_{11} b_{33} = I_2 b_{33}$$

$$b_{33} = I_2 / I_1 \Rightarrow b_{33} = 0 \Rightarrow I_3 = 0$$

$$b_1 x^2 + b_{11} y^2 = 0$$

$$|b_1| x^2 - |b_{11}| y^2 = 0$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{|b_1|}{|b_{11}|}} x$$

$y = \pm \sqrt{\frac{|b_1|}{|b_{11}|}} x \rightarrow$ пара пересекающихся кривых.

$$\text{if } b_1 \cdot b_{11} < 0$$

$$\text{sign}(b_1 \cdot b_{11}) = -1$$

$$\text{sign } b_{11} = -\text{sign } b_{33}$$

$$\text{sign}(b_1 \cdot b_{11}) = +1$$

$$|b_1| x^2 - |b_{11}| y^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{\left| \frac{b_{33}}{b_{11}} \right|} - \frac{y^2}{\left| \frac{b_{33}}{b_{22}} \right|} = 1 - \text{равноств. гиперб.}$$

$$\bar{I}_3 \neq 0$$

$$2.3. \quad b_{11} \cdot b_{33} > 0$$

$$\text{sign}(b_{11} \cdot b_{33}) = +1 \quad \text{то:}$$

$$|b_{11}|x^2 - |b_{11}|y^2 + |b_{33}|z^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{\left| \frac{b_{33}}{b_{11}} \right|} - \frac{y^2}{\left| \frac{b_{33}}{b_{22}} \right|} = -1 - \text{сопряж. гиперб.}$$

$$\bar{I}_3 \neq 0.$$

3. Эллиптический тип, $(\bar{I}_2 > 0)$.

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 = 0$$

$$\bar{I}_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} > 0$$

$$\text{т.е. } \text{sign}(b_{11}b_{22}) = +1 \Rightarrow \text{sign}(b_{11}) = \text{sign}(b_{22}) =$$

$$\Rightarrow \text{sign}(b_{11} + b_{22}) = \text{sign}(b_{11}) = \text{sign } \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33} = \bar{I}_1 \bar{I}_2$$

$$b_{33} = \frac{\bar{I}_3}{\bar{I}_2}$$

3.1. Знаки b_{11}, b_{22}, b_{33} совпадают.
 $\text{sign } b_{11} = \text{sign } b_{22} = \text{sign } b_{33}$

$$\text{sign } b_{33} = \text{sign } \bar{I}_1 \Rightarrow \bar{I}_3 > 0$$

$$|b_{11}|x^2 + |b_{22}|y^2 + |b_{33}|z^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{\left|\frac{b_{11}}{b_{33}}\right|} + \frac{y^2}{\left|\frac{b_{22}}{b_{33}}\right|} = -1 \rightarrow \text{комплексный эллипс.}$$

3.2. Знаки b_{11}, b_{22} и b_{33} различны.

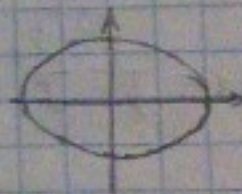
$$\text{sign } b_{11} = \text{sign } b_{22} = -\text{sign } b_{33}$$

$$\text{sign } \bar{I}_1 = -\text{sign } b_{33}$$

$$\bar{I}_3 = b_{33} \bar{I}_1 < 0 \rightarrow \text{sign } \bar{I}_3 < 0$$

0). Тогда $|b_{11}|x^2 + |b_{22}|y^2 - |b_{33}|z^2 = 0$

$$\frac{x^2}{\left|\frac{b_{11}}{b_{33}}\right|} + \frac{y^2}{\left|\frac{b_{22}}{b_{33}}\right|} = 1 - \text{Эллипс.}$$



3.3. $b_{33} = 0$

Тогда $|b_{11}|x^2 + |b_{22}|y^2 = 0$

$$y^2 = \left|\frac{b_{11}}{b_{22}}\right| x^2$$

$$y = \pm \sqrt{\left|\frac{b_{11}}{b_{22}}\right|} \cdot x$$

- пара компл. прямых
 пересек в вещесв. т. $(0, 0)$.

$$b_{33} = 0 \Rightarrow \bar{I}_3 = 0$$



4. Параболический тип. ($I_2=0$)

4.1. Привед. ур. имеет вид:

$$b_{22} y^2 + 2b_{13} x = 0$$

4.2. Привед. ур. имеет вид:

$$b_{22} y^2 + b_{33} z = 0.$$

$$4.1. I_1 = b_{11} + b_{22} = b_{22}, \quad I_2 = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_{22} b_{13}^2 = -I_1 b_{13}^2$$

$$b_{13}^2 = -\frac{I_3}{I_1}$$

$$b_{13} = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = \sqrt{\frac{I_3}{I_1}} \neq 0 \Rightarrow I_3 \neq 0 \rightarrow \text{гиперб.}$$

$$b_{22} b_{13} < 0 \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array}$$

$$b_{22} b_{13} > 0 \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array}$$

$$4.2. I_1 = b_{22} \neq 0, \quad I_2 = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad I_3 = 0 \rightarrow \text{распад прив. ур.}$$

$$I_2 = I_3 = 0 \Rightarrow \text{явл. инвариантом } I_2^*$$

($I_2 = 0$)

$$I_1^* = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & 0 \\ 0 & b_{33} \end{vmatrix} = b_{22} b_{33}$$

a) b_{11} и b_{33} одного знака

$$b_{11} \cdot b_{33} > 0 \Rightarrow \boxed{I_2^* > 0}$$

$$\text{Тогда } |b_{22}|y^2 + |b_{33}| = 0 \rightarrow y^2 = -\left|\frac{b_{33}}{b_{22}}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \pm \sqrt{\left|\frac{b_{33}}{b_{22}}\right|} - \text{пара южных // прямых}$$

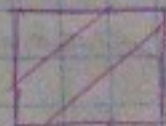


б) b_{11} и b_{33} разного знака

$$b_{11} \cdot b_{33} < 0 \Rightarrow \boxed{I_2^* < 0}$$

$$\text{Тогда } |b_{22}|y^2 - b_{33} = 0 \rightarrow y^2 = \left|\frac{b_{33}}{b_{22}}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \pm \sqrt{\left|\frac{b_{33}}{b_{22}}\right|} - \text{пара веществ // прямых.}$$



$$d = 2 \sqrt{\left|\frac{b_{33}}{b_{22}}\right|} = 2 \sqrt{\frac{b_{11}b_{33}}{b_{22}^2}} = 2 \sqrt{\frac{|I_2^*|}{I_1^2}} - \text{расст. между}$$

$$\text{в) } b_{33} = 0 \Rightarrow \boxed{I_2^* = 0}$$

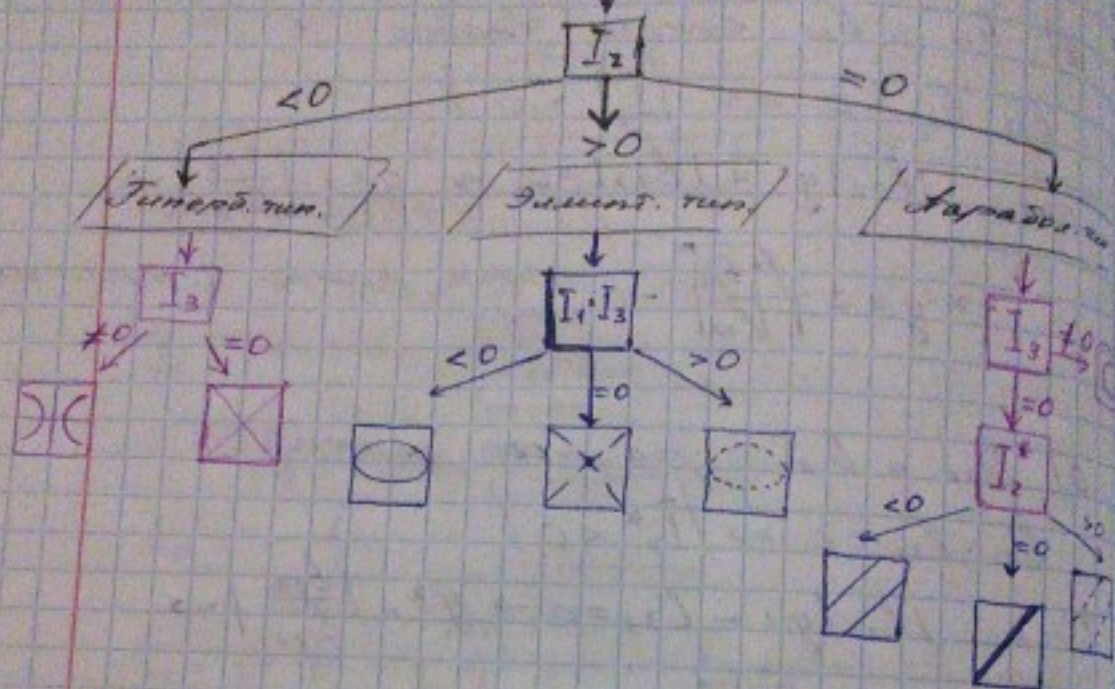
Тогда

$$|b_{22}|y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{пара совпад. веществ. прямых}$$



Классификация

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$



Зам.: При $I_3 = 0$ имеет случай распадающихся кривых.

Определение параметров
кр. 2-го порядка.

1. Парабола

Привед. гр. $b_{22}y^2 + b_{13}x = 0$

Какое-то: $y^2 = 2px$.

$$\Rightarrow p = -\frac{b_{13}}{b_{22}}$$

Выразим через инвар

$$I_1 = b_{11}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = -b_{22}b_{13}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & b_{13} & 0 \\ b_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$b_{13} = \sqrt{\dots}$$

$$p = -\sqrt{\dots}$$

2. Эллипс

$$b_{11}x^2$$

$$I_1 = b_{11} + \dots$$

$$I_2 = b_{11} \cdot b_{22}$$

$$I_3 = b_{11}$$

$$\lambda^2 - I_1$$

$$\lambda_{1,2} = \dots$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$$

$$I_1^2 - \dots$$

1). Эллипс

$$0 < \dots$$

$$\lambda_{a,b} = \dots$$

$$b_{11}x^2$$

$$\text{sign} \dots$$

$$b_{12} = \sqrt{\frac{I_3}{b_{11}}} \Rightarrow \rho = -\frac{1}{I_1} \sqrt{\frac{I_3}{I_1}} = -\sqrt{\frac{I_3}{I_1^3}}$$

$$\rho = -\sqrt{\frac{I_3}{I_1}}$$

2. Задача. Тупердация.

04.12.18

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33} = 0 \quad I_1 \neq 0$$

$$I_1 = b_{11} + b_{22}$$

$$b_{33} = \frac{I_3}{I_1}$$

$$I_2 = b_{11} \cdot b_{22}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b_{11} \cdot b_{22} = I_2 \\ b_{11} + b_{22} = I_1 \end{cases}$$

$$I_3 = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33}$$

$$\boxed{\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0} - \text{характеристический ур-е.}$$

$$\lambda_{1,2} = b_{11}, b_{22}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2})$$

$$I_1^2 - 4I_2 = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} + a_{12}^2) =$$

$$= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = D \geq \forall a_{ij} \in \mathbb{R}$$

1. Задача $I_1 > 0$

$$0 < \lambda_a < \lambda_b$$

$$\lambda_{a,b} = \frac{1}{2} (|I_1| \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2})$$

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + \frac{I_3}{I_1} = 0$$

$$\text{sign } b_{11} = \text{sign } b_{22} = \text{sign}(b_{11} + b_{22}) = \text{sign } I_1$$

$$b_{13} = \sqrt{\frac{I_3}{I_1}} \Rightarrow \rho = -\frac{1}{I_1} \sqrt{\frac{I_3}{I_1}} = -\sqrt{\frac{I_3}{I_1^3}}$$

$$\rho = -\sqrt{\frac{I_3}{I_1}}$$

04.12.13

Тунордана.

2. Задача.

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33} = 0 \quad I_2 \neq 0.$$

$$b_{33} = \frac{I_3}{I_2}$$

$$I_1 = b_{11} + b_{22}$$

$$I_2 = b_{11} \cdot b_{22}$$

$$I_3 = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b_{11} \cdot b_{22} = I_2 \\ b_{11} + b_{22} = I_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0} - \text{характеристич. ур-е.}$$

$$\lambda_{1,2} = b_{11}, b_{22}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2})$$

$$I_1^2 - 4I_2 = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} + a_{12}^2) =$$

$$= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = D \geq \forall a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

1). Задача

$$I_2 > 0$$

$$0 < \lambda_a < \lambda_b$$

$$\lambda_{a,b} = \frac{1}{2} (|I_1| \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2})$$

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$$

$$\text{sign } b_{11} = \text{sign } b_{22} = \text{sign}(b_{11} + b_{22}) = \text{sign } I_1$$

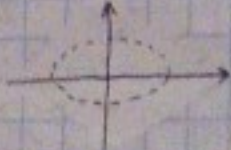
$$b_{11} = \lambda_a \operatorname{sign} I_1$$

$$b_{22} = \lambda_b \operatorname{sign} I_1$$

$$\lambda_a \operatorname{sign} I_1 x^2 + \lambda_b \operatorname{sign} I_1 y^2 + \frac{I_3}{I_1} = 0$$

$$\lambda_a x^2 + \lambda_b y^2 = -\operatorname{sign} I_1 \cdot \frac{I_3}{I_1} = -\frac{|I_3|}{I_1} \operatorname{sign}(I_1)$$

$$\frac{\frac{x^2}{|I_3|}}{\frac{\lambda_a I_1}{\lambda_b I_1}} + \frac{\frac{y^2}{|I_3|}}{\frac{\lambda_b I_1}{\lambda_a I_1}} = -\operatorname{sign}(I_1 I_3)$$

$$I_1 \cdot I_3 > 0 \Rightarrow$$


$$I_1 \cdot I_3 < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = \frac{|I_3|}{\lambda_a I_1}$$

$$b^2 = \frac{|I_3|}{\lambda_b I_1}$$

Опрег. угла поворота.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{D}} S$$

$$S = \pm 1$$

$$\cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{D}} S$$

$$\frac{\sin^2 2\varphi}{1 - \sin^2 2\varphi} = \frac{4a_{12}^2}{(a_{11} - a_{22})^2}$$

$$\sin^2 2\varphi \left[1 + \frac{4a_{12}^2}{(a_{11} - a_{22})^2} \right] = \frac{4a_{12}^2}{(a_{11} - a_{22})^2} \quad | \cdot (a_{11} - a_{22})^2$$

$$\sin^2 2\varphi \cdot D = 4a_{12}^2.$$

Косφφ bij повар поверота:

$$b_{11} = a_{11} \cos^2 \varphi + a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi,$$

$$b_{22} = a_{11} \sin^2 \varphi - a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi$$

$$b_{12} = -a_{11} \cos \varphi \sin \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a_{22} \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \cos \varphi \sin \varphi = a_{12} \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{a_{11} - a_{22}}$$

$$b_{11} = a_{11} \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + a_{12}^2 \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{a_{11} - a_{22}} =$$

$$= \left(a_{11} + \frac{a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \cos^2 \varphi + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \sin^2 \varphi =$$

$$= \left(a_{11} + \frac{a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} =$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \left(a_{11} - a_{22} + \frac{2a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

$$b_{22} = a_{11} \sin^2 \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi - a_{12}^2 \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{a_{11} - a_{22}} =$$

$$= \left(a_{11} + \frac{a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \sin^2 \varphi + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \cos^2 \varphi =$$

$$= \left(a_{11} + \frac{a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} =$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \left(a_{11} - a_{22} + \frac{2a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

Предположим! $I_1 > 0 \Rightarrow b_{11}, b_{22} > 0$

В канон. с.к.

$$b_{11} < b_{22}$$

$$\left(a_{11} - a_{22} + \frac{2a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}}\right) \frac{\cos 2\varphi}{2} < -\left(a_{11} - a_{22} + \frac{2a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}}\right) \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

$$\left(a_{11} - a_{22} + \frac{2a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}}\right) \cos 2\varphi < 0$$

$$\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \cos 2\varphi < 0$$

$$\frac{\cos 2\varphi}{a_{11} - a_{22}} < 0$$

$$\frac{\cos 2\varphi}{a_{11} - a_{22}} = \frac{S}{\sqrt{D}} < 0 \Rightarrow S < 0$$

$$\boxed{S = -1}$$

т.е. Для $I_1 > 0, S = -1$

Аналогично $I_1 < 0, S = +1$

$$\text{sign}(I_1, S) = -1$$

$$\text{sign}(S) = -\text{sign} I_1 \Rightarrow \boxed{\cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{D}} \text{sign}(I_1)}$$

2) Гипербола: $I_2 < 0$

Канон. гипер. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33} = 0$$

$$b_{11}b_{22} < 0$$

$$b_{22} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$b_{11} \cdot \frac{I_2}{I_1} < 0 \Rightarrow \boxed{b_{11}I_2 > 0}$$

$$\text{sign } b_{11} = \text{sign } I_3$$

$$\lambda^{(+)}: \text{sign } \lambda^{(+)} = \text{sign } I_3$$

$$\lambda^{(-)}: \text{sign } \lambda^{(-)} = -\text{sign } I_3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2})$$

$$\text{Das } I_2 < 0 \quad \sqrt{I_1^2 - 4I_2} > |I_1|$$

$$\lambda^{(+)} x^2 + \lambda^{(-)} y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$$

$$|\lambda^{(+)}| x^2 - |\lambda^{(-)}| y^2 - \frac{|I_3|}{I_2} = 0$$

$$\frac{x^2}{\frac{|I_3|}{|\lambda^{(+)} I_2|}} - \frac{y^2}{\frac{|I_3|}{|\lambda^{(-)} I_2|}} = 1$$

$$a^2 = \frac{|I_3|}{|\lambda^{(+)} I_2|}$$

$$b^2 = \frac{|I_3|}{|\lambda^{(-)} I_2|}$$

Вывод угла поворота φ ,

$$\text{Пусть: } I_3 > 0 \Rightarrow b_{11} > 0$$

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \left(a_{11} - a_{22} + \frac{2a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \frac{\cos 2\varphi}{2} > 0$$

$$\cos 2\varphi \cdot \frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} > - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{I_1} \quad ?!$$

$$\frac{\cos 2\varphi}{a_{11} - a_{22}} > - \frac{I_1}{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}$$

$$\frac{S}{\sqrt{D}} > - \frac{I_1}{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2} \Rightarrow (D - 2a_{12}^2) S > -I_1 \sqrt{D}$$

$$\text{sign } S = \text{sign } I_1$$

3) Распадаются, прямые $I_2 = 0$.

- Центр, прямые, $I_2 \neq 0$

$$\exists X_0, Y_0 : \begin{cases} a_{11} X_0 + a_{12} Y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21} X_0 + a_{22} Y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

// переменные

$$X_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{I_2}$$

$$Y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{I_2}$$

$$\begin{cases} x = X_c + X_0 \\ y = Y_c + Y_0 \end{cases} \rightarrow a_{11} X_c^2 + 2a_{12} X_c Y_c + a_{22} Y_c^2 + a_{13} X_0 + a_{23} Y_0 = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} = c_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = I_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{33} = 0$$

Имеем:

$$a_{11} X_c^2 + 2a_{12} X_c Y_c + a_{22} Y_c^2 = 0$$

Левую часть имеем пару прямых, т.е.

$$(d_1 X_c + \beta_1 Y_c)(d_2 X_c + \beta_2 Y_c) = 0$$

$$\begin{cases} d_1 X_c + \beta_1 Y_c = 0 \\ d_2 X_c + \beta_2 Y_c = 0 \end{cases}$$

$$d_1 d_2 X_c^2 + d_1 \beta_2 X_c Y_c + d_2 \beta_1 X_c Y_c + \beta_1 \beta_2 Y_c^2 = 0$$

Имеем 2 случая:

$$\begin{cases} a_{11} = d_1 d_2 \\ 2a_{12} = d_1 \beta_2 + d_2 \beta_1 \\ a_{22} = \beta_1 \beta_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$I. \begin{cases} d_{1,2} = a_{12} \pm \sqrt{-I_2} \\ \beta_{1,2} = a_{22} \end{cases}$$

$$II. \begin{cases} d_{1,2} = a_{11} \\ \beta_{1,2} = a_{12} \pm \sqrt{-I_2} \end{cases}$$

Выводятся радиусы крив.

длн. $\beta_{1,2} \neq 0$

Ур-е прямых

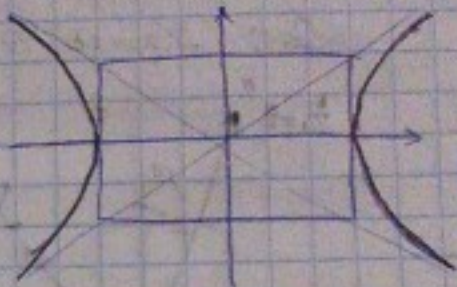
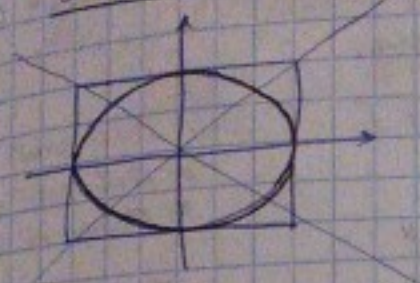
$$\begin{cases} \alpha_1(x - x_0) + \beta_1(y - y_0) = 0 \\ \alpha_2(x - x_0) + \beta_2(y - y_0) = 0 \end{cases}$$

Зам. Ур-е все имеет такой вид

эллипс

$$y = \frac{b}{a}x$$

Гипербола



$$b_{11} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \left(a_{11} - a_{22} + \frac{4a_{12}^2}{a_{11} - a_{22}} \right) \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

11, 12, 13

$b_{12}, \dots$

$$b_{11} \cdot I_3 > 0$$

$$b_{11} \cdot I_3 < 0$$

I_2

$$b_{11} = a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi$$

$$b_{22} = a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi$$

$$b_{12} = \frac{I_1}{2} + \frac{D}{a_{11} - a_{22}} \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{D}} S$$

$$\frac{\cos 2\varphi}{a_{11} a_{12}} = \frac{S}{\sqrt{D}}$$

$$\frac{1}{2}(I_1 + \sqrt{D} S) I_3 > 0$$

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

$$\sqrt{D} > \sqrt{I_1}$$

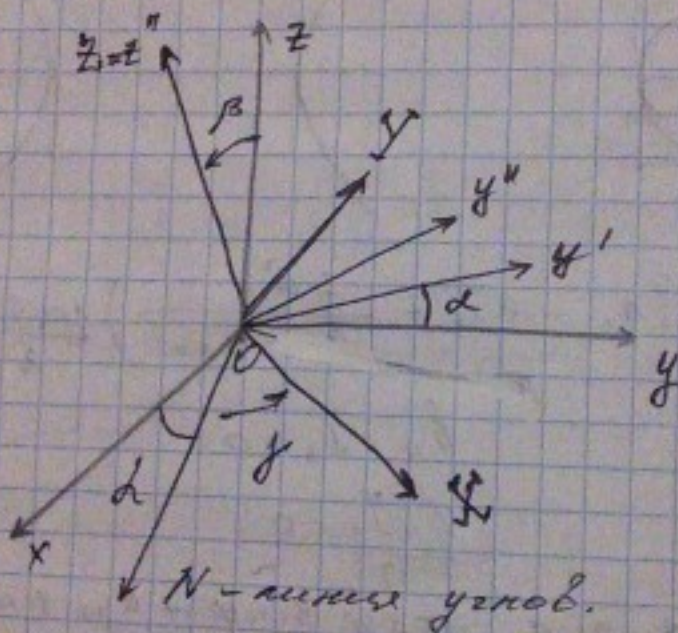
$$\text{sgn } S = \text{sgn } I_3.$$

Поверхности 2^{го} порядка

$$\text{Общее ур: } a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

1. Поворот $\rightarrow$ так чтобы $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$

Пр: углы Эйлера.

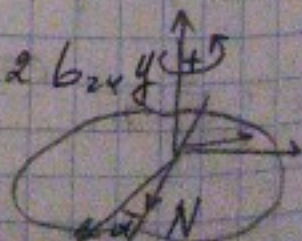


1. Поворот Oz
2. Поворот N
3. Поворот Oz'

α, β, γ

Получим

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{14}x + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44} = 0$$



Далее рассм. вер.

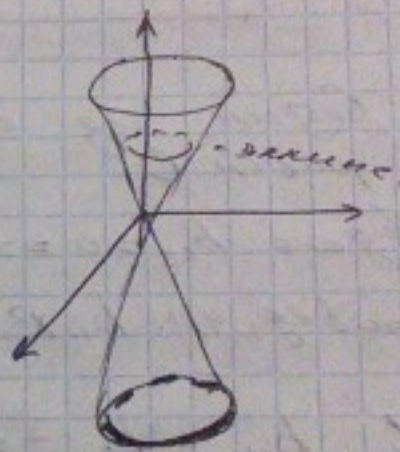
1) Все $b_{ii} \neq 0 \quad i=1, 2, 3 \Rightarrow \parallel$ перенос
Требуем ур. $b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + b_{44} = 0$

1.1. $b_{44} = 0 \Rightarrow b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 = 0$
 однородное ур-е. 2^{го} пор $\Rightarrow$ конус
 все b_{ii} - одного порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad - \text{мнимый конус}$$

b_{ii} - разного порядка:

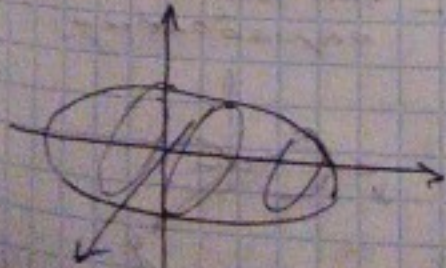
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad - \text{Конус}$$



1.2. $b_{44} \neq 0$
 все b_{ii} - одного знака:
 $i = 1, 2, 3$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

$\nearrow$ эллипсоид
 $\searrow$ мнимый эллипсоид



1.3. $b_{44} \neq 0$, b_{ji} - одного порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

+ однополостный
гиперболоид

- двухполостный
гиперболоид

+



-



2. Один из старших коэф. b_{ii} равен 0.

Пусть $b_{33} = 0 \Rightarrow b_{34} \neq 0$

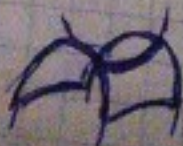
Кривая ур. $b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{34}z = 0$ $\leftarrow b_{44}$

2.1. b_{11} и b_{22} - одного знака

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$
 - Эллиптический
параболоид

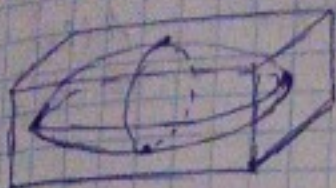
2.2. b_{11} и b_{22} - разных знаков.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$
 - Гиперболический
параболоид



1. Эллипсоид

сл. $|x| \leq a$; $|y| \leq b$; $|z| \leq c$ - основной паралл-г. эллипсоида.



← Умнож. с вершинами

$$\frac{x}{a} \rightarrow \tilde{x}$$

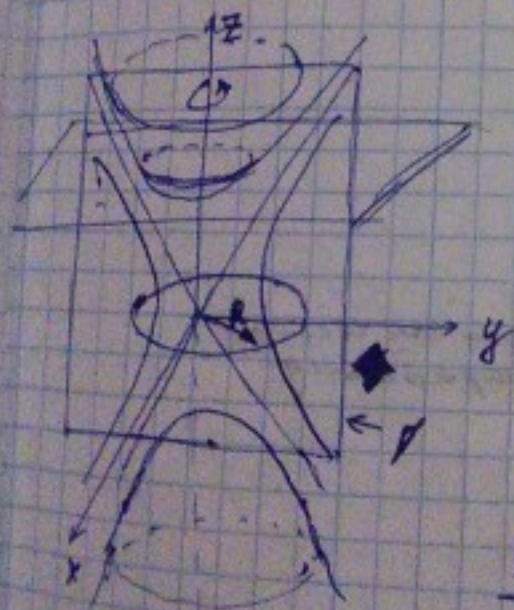
$$\frac{y}{b} \rightarrow \tilde{y}$$

$$\frac{z}{c} \rightarrow \tilde{z}$$

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 1 - \text{сфера}$$

$$a > b > c$$

2. Гиперболоиды.



Плоскость $Y O Z$

Пара сопряж. гипербола

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

$$y \rightarrow R - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

$$x \rightarrow \frac{b}{a} x$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Асимптотически
← конус

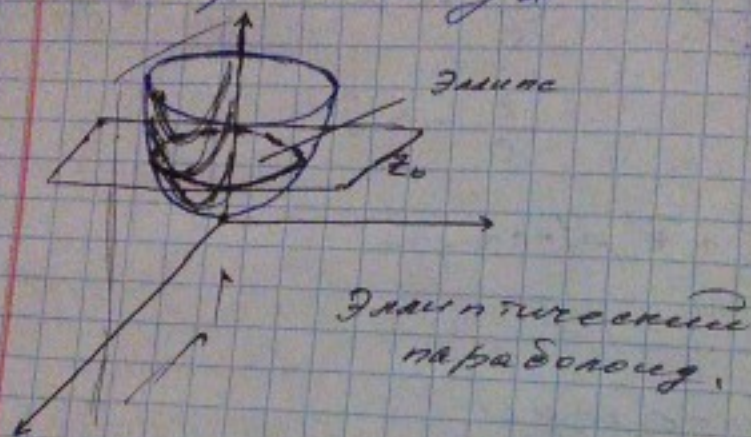
Сечение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}\right)^2} = 1 \rightarrow \text{пол. э.}$$

$$\frac{A(z_0)}{B(z_0)} = \dots$$

3. Параболоиды



Гиперболический параболоид



Линейчатые поверхности — однопл.
гиперб. и гиперб. параб.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\Gamma_{\lambda}: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

$$\Gamma_{\lambda}^*: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$