

Легенко Игорь Николаевич

Лангау-Либман "Теор. мех."

10.02.11.

8.50 ауд. 301 5 х 45 мин
сб. 2-3 пары

г-нн Ньютона

класс механика

- сб. ба. большого числа тел (мех. упр. упр. ТТ)
- солм. затм. упр. затм. гв. с планет

Методы класс. мех. + матем.

Сравнение физ., физ. а. кинематика, Механика

при гравит. const.

$c, \hbar, \gamma$ - постоянные мех.
а. сб. нон. Планка

инвариант физ.

принцип

1. Мезоскоп

2. Микроскоп

3. Макроскоп (космос)

закон постулирует упр. ба. мира, он не вывод. са. аналитически.

г-нн Ньютона:

$$\left. \begin{array}{l} c = \infty \\ \hbar = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right\}$$

сравнение
б. представлений

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$$

Лоренц, Пуанкаре, Эйнштейн - релятивистская механика (классическая мех. класс.)

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

П-механика

относительности пространства вр. и длины времени

ОТО - общая теор. относ. $c \neq \infty, \hbar = 0, \gamma \neq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} c \neq \infty \\ \hbar = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right\}$$



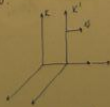
классическая мех.

$$\hbar = 0, c = \infty, \gamma = 0$$

парадокс близости

опр. с помощью, от. дора.

механика с больш. числом тел (абсолют. движение, время и пространство)



1) энергия излуч. квантами

Постулаты квант. мех:

2) корпус. - волн. дуализм Луи де Бройля

$$\epsilon = \hbar \omega \quad p = \hbar k \quad \lambda = \frac{2\pi \hbar}{p}$$

фотон - квант света

фотон - квант звуков. волны

3) неопред. Гейзенберга: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

пр-н дополнительности Бора:

k - волновой вектор

$n \neq 0, c \neq \infty, \gamma = 0$

 релятивистск. квант. мех.

квантовая теор. гравитации?

1. Предел применимости класс. мех.

релятив. квант. теор. грав. ?

2. Описание мат. т. Обобщенные коорд.

мат. т.

матер. точка - мат. разрывы кот. можно пренебречь (распредел.)



r_2

(x_2, y_2, z_2) - ДК

$(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ - сфер. к.

$(\underbrace{r_2, \theta_2, \varphi_2}_{(q_1, q_2, q_3)})$ - обобщенные к.

$\vec{r}_2(t)$

$(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$

$(r_2(t), \theta_2(t), \varphi_2(t))$

$(r_2(t), \theta_2(t), \varphi_2(t))$

$(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$

def: Обобщенные коорд. - величины, кот. задают полож-е мат. точки. этой обобщ. коорд.

Смешанные движения

Общие закономерности, неавтономные и автономные, периодические

def: смешанные движения - совокупность независимых движений систем относительно друг друга, координат.

def: смешанное движение - движение совокупности независимых движений систем относительно друг друга, координат.



$$n = 3N$$

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N}(t)$$

n - смешанное движение

$$q_1(t) \dots q_n(t) \text{ функции}$$

def: движение - совокупность движений, которые происходят относительно смешанного движения.



$$1) \quad z_d = 0$$

$$x_d(t), y_d(t)$$

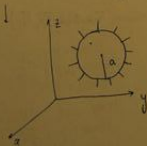
$$2) \quad z_d = 0$$

$$x_d^2(t) + y_d^2(t) = l^2$$

def: закономерные движения - движения относительно смешанного движения.

? $\frac{1}{l_2} \frac{1}{l_2} (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2 = l_0^2 \quad n = 3N$

def: неавтономные движения - движения, происходящие относительно смешанного движения, но не зависящие от времени.



$$z_d(t) \leq a$$

def: автономные движения - не зависят от времени.

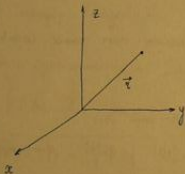
def: периодические - зависят от времени.

$$z_d(t) \leq a(t)$$

Принципы прикладной физики

$t = 0$ нач. сост.

$t > 0$ конечное



построим это, if вы знаете как устроено координат. сист. (все внешние возд.) и имеет полн. набор нач. усл., то вы можете полностью определить ее будущее.

$\vec{r}(t) - ?$

$\vec{r}(t)$ - полностью описывает траекторию

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \text{скор.}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{w} - \text{ускорение}$$

В $t = 0$ $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$ в координат. координат. (x, y, z) (v_x, v_y, v_z)
 ~~$\vec{w}(t=0) = \vec{w}_0$?~~ Эксперимент. факт

def: полный набор $\varphi, \dot{\varphi}$, кот. полностью опис. сист. - такой набор, задание котор. в $t = 0$ (полностью опред. сост. сист.) позволяет найти все функц. энт. набора в $\forall t \neq 0$. 3 обобщ. координат. 3 обобщ. скор.

$\vec{r}(t), \vec{v}(t)$ - 6 функц.

$$\{q_1(t), q_2(t), q_3(t)\} \text{ и } \{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t)\}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$$

полн. набор для нач. м.

m - масса мат. точки

$\vec{F}$ - сила по опред. описан. возд. на мат. точку

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

упр-е 2-го пор:

3-ий Ньютона

I 3-ий Ньютон: инерц. сист. отсчета - такая сист. отсч., в кот. законы сохр. мом. импульса или равнодейств. гравит. сил на нее не зависят от выбора нуля

II 3-ий Ньютон: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
 в инерц. сист. отсч. изменение мом. в ед. вр. = силе
 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

III 3-ий Ньютон: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

Определение мех. сист.

def сист. с n телами обобщен $q_1(t), q_2(t) \dots q_n(t)$

мех. сист. с n телами наз. мех. сист., где ком. полных обобщен координат

абст. $\underbrace{q_1(t), q_2(t) \dots q_n(t)}_n + \underbrace{\dot{q}_1(t) \dots \dot{q}_n(t)}_n$ $2n$
 обобщ. коорд. + обобщ. скор.

1. Ньютон
2. Лагранж
3. Гамильтон

оп-я Лагранжа мех. сист.

$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ $2n+1$ незав. перемен.
 $(q, \dot{q}, t)$

формулы класс. мех. в формулы Лагранжа

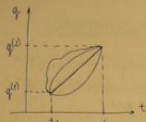
Принцип наименьшего действия:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{\substack{\dot{q} = \text{const} \\ q_{\neq i} = \text{const} \\ t = \text{const}}}$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial t} \right|_{\substack{\dot{q} = \text{const} \\ q = \text{const}}}$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\substack{\dot{q}_{\neq i} = \text{const} \\ q = \text{const} \\ t = \text{const}}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$



пр-н наим. времени

Уменьшить абс. мин. время, ком. ускорения.

пр-н наим. времени

Уменьшить время - время, но ком. ускор. не ком.

$q = q(t)$ задан абсциссой во времени (времени)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

геометрия (функционал от q и $\dot{q}$)

Уменьшить $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ макс., что S мин. (минимизация функционала S)

? $\hookrightarrow$ Минимизация - экстрем. абс. макс. мин.

12.02.11.

$L(q, \dot{q}, t)$ q -а лагранжиана задан ком.

ком. набор не задан
ком. (где ком. m с q и $\dot{q}$)
находим, но одинак. на q и $\dot{q}$

$n=1$

δq -набор возмущения

Ищем $q(t)$ - гами мин S

$$\tilde{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$$

$t=t_1$

$$\tilde{q}(t=t_1) = q^{(1)}$$

$$q(t=t_1) = q^{(1)}$$

$$\delta q(t=t_1) = 0$$

На границах
конс. $\delta q(t) = 0$

$t=t_2$

$$\tilde{q}(t=t_2) = q^{(2)}$$

$$q(t=t_2) = q^{(2)}$$

$$\delta q(t=t_2) = 0$$

Лагранжиан

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt, \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}, \quad \delta \dot{q} = \delta \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt$$

$$\delta q(t=t_1) = 0 = \delta q(t=t_2)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_0 \delta q \, dt = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

оказывается, что y — $L(q, \dot{q}, t)$
 задано.

y — лагранжиан для 1-мерной системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \ddot{q}$$

$$y(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}^2} \ddot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \ddot{q}} \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \ddot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, n$$

y — лагранжиан для n -мерной системы

n — число степеней свободы

Интегрируемость y — лагранжиана

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow \psi_i(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = 0 \rightarrow$$

$$L'(q, \dot{q}, t) \quad ? \quad q_i = q_i(t, \underbrace{q_1, \dots, q_n}_n, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_n) = 2n$$

нужны начальные условия

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i}$$

для L и L' — интегрируемые, иначе — нет

$$L' = dL$$

параметры

где

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

где f - функ. кон. и произв. q и t не
нужно зависеть от q и t , следовательно
без связи между q и t , следовательно

ген-м. функ!

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$1) L' = L + \psi(t) = L + \frac{d\psi(t)}{dt} \rightarrow L' \text{ и } L - \text{эквивалентны}$$

$$\psi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

эквивалентность q -с Лангранжа - q -с Ланг. в композиции
нормал. преобразования не тр. добавления и отнятия

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$2) L' = L + \psi_1(q_1) \dot{q}_1$$

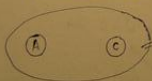
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{d}{dt} f(q, t) \right) = \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} f(q, t) \right)$$

$$\psi_1(q_1) \dot{q}_1 = \frac{\partial \psi_1(q_1)}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 = \frac{d\psi_1(q_1)}{dt}$$

$$L' = L + \frac{d}{dt} \psi_1(q_1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{d}{dt} f(q, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_1} f(q, t) \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 \right) = \frac{\partial f}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \quad \text{и т.д.}$$

Об-во эквивалентности ген-м. Лангранжа
на б-замог-х друг. перемен.



$$L_{AC}(q_A, \dot{q}_A, t)$$

Сист. A на б-замог. с сист. C, ит
сист. A описывается $L_A(q_A, \dot{q}_A, t)$, а q -л
сист. C описывается $L_C(q_C, \dot{q}_C, t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_{Ai}} = \frac{\partial L_A}{\partial q_{Ai}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_{Ci}} = \frac{\partial L_C}{\partial q_{Ci}} \rightarrow q_{Ci} = q_{Ai}(t, q_{A0}, \dot{q}_{A0})$$

$$q_{Ai} = q_{Ai}(t, q_{A0}, \dot{q}_{A0})$$

Вот две q -с Лангранжа
на б-замог. перемен. = одна q -с Лангранжа

Об-во эквивалентности
 q -с Лангранжа

$$L_{Ac}(q_{Ac}, \dot{q}_{Ac}, t) = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_C(q_C, \dot{q}_C, t)$$

repoblegunko gas v
mesto nezgornog-a
sistem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Ac}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_{Ac}}{\partial q_i} \quad \text{jerina } q_i = q_{Ai}, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_{Ai}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Ac}}{\partial \dot{q}_{Ai}} = \frac{\partial L_{Ac}}{\partial q_{Ai}} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_{Ai}} = \frac{\partial L_A}{\partial q_{Ai}} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Ac}}{\partial \dot{q}_{Ci}} = \frac{\partial L_{Ac}}{\partial q_{Ci}} \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_{Ci}} = \frac{\partial L_C}{\partial q_{Ci}}$$

q-a Lagrangiana bžarnog-a
u sistema



$$L_{Ac}(q_A, q_C, \dot{q}_A, \dot{q}_C, t) = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_C(q_C, \dot{q}_C, t) - U_{int}(q_A, \dot{q}_A, q_C, \dot{q}_C, t)$$

q-a Lagrangianu sistema u trenutnom

Sistem A + sistem C ima $q_{Ai}(t)$ i $\dot{q}_{Ci}(t)$ - zagona

$$L_{Aint} = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + \underbrace{L_C(q_C, \dot{q}_C, t)}_{=U(t)} - U_{int}(q_A, \dot{q}_A, \underbrace{q_C, \dot{q}_C}_t, t)$$

$$L_{Aint}(q_A, \dot{q}_A, t) = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) - U_{out}(q_A, \dot{q}_A, t)$$

boživotit. br. nase uvt. C
na sistem A

Opseg dobijenog izraza u dobijenom uvt. Oboju up.
Newtona

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \text{za } i=1, 2, \dots, n \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt} p_i = F_i$$

ovaj z-n Newtona

Матрица переходов системы $y(t)$ в $q(t)$ имеет размер $n \times n$ (матрица квадратная),
 размер n — порядок системы

Матр. эквив. к n матриц. уравн. $2n-1$ уравнений $y(t)$ в $q(t)$

$$\begin{matrix} ? \\ n \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_1(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ q_2 = q_2(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ \vdots \\ q_n = q_n(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{array} \right. \quad n \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = \dot{q}_1(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ \dot{q}_2 = \dot{q}_2(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ \vdots \\ \dot{q}_n = \dot{q}_n(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{array} \right.$$

$(t+t_0) = f_2(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1})$

$2n-1$ уравн. $y(t)$ в $q(t)$

$$n-1 \left\{ \begin{array}{l} q_2 = q_2(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ \vdots \\ q_n = q_n(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{array} \right. \quad n \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = \dot{q}_1(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ \vdots \\ \dot{q}_n = \dot{q}_n(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{array} \right.$$

$$n-1 + n = 2n-1$$

$$C_1 = C_1(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$C_2 = C_2(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$C_{2n-1} = C_{2n-1}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$2n-1$ уравн. $y(t)$ в $q(t)$

$$1) \quad q_1(t) \dots q_n(t), \dot{q}_1(t) \dots \dot{q}_n(t) \\ L(q, \dot{q}, t)$$

$$2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow \psi(\dot{q}, q, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_1}{\partial q_i} ; \quad L_1 = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

$$4) \quad \textcircled{A} \quad \textcircled{C} \quad L_{AC} = L_A + L_C$$

Энергия мех. системы

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L; \quad E(q(t), \dot{q}(t), t) \quad \frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{dL}{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\cancel{\dot{q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \cancel{\dot{q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t), t) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

если брать сгруппированно $L = L(q(t), \dot{q}(t))$ тогда $\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$

~~if бр сгруппированно, то энергия абс-
импартна, т.е. не мена.~~

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = \text{const}$$

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = \text{const}$$

$$1) \quad \textcircled{A} \quad \textcircled{C} \quad L_{AC} = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_C(q_C, \dot{q}_C, t)$$

$$E_{AC} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_A} \dot{q}_{Ai} \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_{Ai}} - L_A}_{E_A} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_C} \dot{q}_{Ci} \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_{Ci}} - L_C}_{E_C}$$

т.е. то
сгруппированно
энергия.
if cum. не бранный
то норма энергия =
сгруппированно.

$$L_{A \rightarrow C} = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_C(q_C, \dot{q}_C, t) - U_{int}(q_A, \dot{q}_A, q_C, \dot{q}_C, t) ?$$

$$E_{A \rightarrow C} = E_A + E_C + E_{int} \quad E_{int} = U_{int}(q_A, q_C, t)$$

а) A in C

A в поле C

$$L_{A in C} = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) - U_{int}(q_A, t)$$

$$E_{A in C} = E_A + U_{int}(q_A, t)$$

Матрица масс

$$\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t) \equiv \vec{v}(t)$$

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

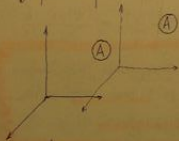
символизм
Определение ∇ от скал. ф.
по базису:

$$\psi(\vec{r})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \vec{j}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \vec{j}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \vec{j}_3$$

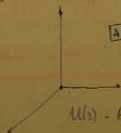
def Изотропизация с сим. отн.

изотропизация времени $\rightarrow$ пробегим $\times$
изотропизм пр. то



макс. сим. отн., в
которой время изотропно,
протир-то - изотропно и
изотропно.

изотропизм пр. то $\rightarrow$ та же пр. с
паттернами (нем. близинности)



пр. то изотропно
изотропно

$U(z)$ - функция

изотропизация - процесс с $\parallel$ б. пр. m

изотропизация - процесс с $\parallel$ б. пр. m и $\parallel$ б. пр. n

$$\underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_n, \underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_n$$

$$L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow$$

$$\Psi(\dot{q}_i, q_i, t) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_i}{\partial q_i}$$

$$L_i = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

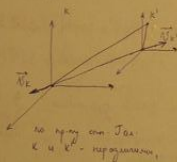
$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \cdot p_i - L$$

Мом. м. система - мех. сист.

$$\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t) \equiv \vec{v}(t) \quad L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad \text{здесь лагранжиан берётся относительно а. п. л. системы}$$

нр. то однородно, изотропно, т. однородно
б. неизм. с. о. $L(\vec{v}) \quad \vec{v} = \text{const}$ б. ин. с. о. м.



но нр. м. с. о. $\vec{v}$
 $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ - неизотропно

$$\vec{v}_K = -\vec{v}_{K'}$$

$$\vec{v}_K \cdot t + \vec{r} = \vec{r}'$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_K$$

$$L = \Psi(\vec{v}) = \Psi(\sqrt{\vec{v}^2}) = \Psi(v^2)$$

$$L_K = \Psi(v^2) \quad L_{K'} = \Psi(v'^2)$$

б. нр. м. с. о. лап.
то б. нр. м. с. о.
неизотропно.

$$K: \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi(v^2)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \Psi(v^2)}{\partial \vec{r}}$$

$$K': \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi(v'^2)}{\partial \vec{v}'} = \frac{\partial \Psi(v'^2)}{\partial \vec{r}'} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi((\vec{v} + \vec{v}_K)^2)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \Psi((\vec{v} + \vec{v}_K)^2)}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{r}', \vec{v}' \rightarrow \vec{r}, \vec{v} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \Big|_t = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

$$v'^2 = (\vec{v} + \vec{v}_K)^2 = v^2$$

$$? \rightarrow \Psi(v'^2) = \Psi((\vec{v} + \vec{v}_K)^2) = \Psi(v^2) + \frac{d}{dt} f(\vec{r}, t)$$

$$\text{Поскольку } \vec{v}_K = \vec{E}, \text{ где } \vec{E} \rightarrow 0$$

$$\Psi(\vec{v} + \vec{E}) = \Psi(v^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{E} + E^2) = \Psi(v^2) + \frac{\partial \Psi(v^2)}{\partial v^2} 2\vec{v} \cdot \vec{E} + \dots$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \text{const} \quad \psi(x) = \text{const} \cdot x$$

$$\psi(v^2) = \text{const} \cdot v^2 \quad \text{const} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{\partial \Psi(v^2)}{\partial v^2} = \text{const}$$

2) а Лагранжа по времени. покажем, что лагранжиан
 постоянен

$$n = n_0 - n_{\text{ст}} = 3 - 2 = 1 \quad L = (q, \dot{q}, t)$$

$$L = \frac{m \dot{\bar{r}}^2}{2} - U_{\text{ст}}(\bar{r}, t) \quad \bar{r} = \bar{r}(q) \quad \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dq} \cdot \dot{q}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\bar{r}}{dq} \right)^2 \dot{q}^2 - U_{\text{ст}}(\bar{r} = \bar{r}(q), t)$$

↓

$\equiv \alpha(q) \cdot \text{эквив. масса}$

Обобщенная кин-е + потенциал энергии? (цена)

21.02.11.

2/3 а Найдем ф-ю Лагранжа для маятника по времени. покажем.

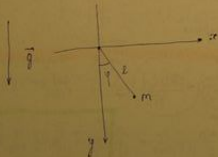
б) Найдем ур-е Лагранжа, применив то же, что мы уже знаем
 обобщ. коорд

$\vec{F} = m\vec{g}$ однородная сила (не зависит от координат)

$$-\frac{\partial U_{\text{ст}}}{\partial \vec{r}} = m\vec{g} \quad U_{\text{ст}} = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$$

$$z=0 \quad \text{1 см. от центра}$$

$$x^2 + y^2 = l^2$$



$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$$

$$x = l \sin \varphi$$

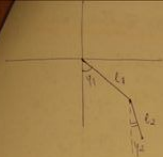
$$y = l \cos \varphi$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \varphi < \pi \sin \varphi \neq y$$

$$\varphi = \varphi(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

$$h = 6 - 4 = 2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = l_2^2$$

$$\vec{v}_a = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d\vec{r}_a}{dt}$$

$$v_a^2 = \vec{v}_a \cdot \vec{v}_a = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$T = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} =$$

$$= \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$T = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^N m_a \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \right) \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$a_{ij}(q) = a_{ji}$$

metrisch, symmetrisch, positiv definit

$$a_{ij}(q) = \sum_{a=1}^N m_a \left(\frac{\partial x_a}{\partial q_i} \frac{\partial x_a}{\partial q_j} + \frac{\partial y_a}{\partial q_i} \frac{\partial y_a}{\partial q_j} + \frac{\partial z_a}{\partial q_i} \frac{\partial z_a}{\partial q_j} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = \frac{\partial x_a}{\partial q_i} \vec{e}_x + \frac{\partial y_a}{\partial q_i} \vec{e}_y + \frac{\partial z_a}{\partial q_i} \vec{e}_z$$

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U_{in}(q) - U_{out}(q,t)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_j + \sum_i \frac{1}{2} a_{ii} \dot{q}_i =$$

$$= \sum_j \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) \dot{q}_j = \sum_j a_{ij} \dot{q}_j$$

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j$$

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U_{in}(q) + U_{out}(q,t) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U_{in}(q) + U_{out}(q,t)$$

$$\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t), \quad \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N = \dot{\vec{r}}_N \quad L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \quad (a=1, \dots, N) \quad L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - U_{int}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$L(\vec{r}(t), \vec{v}(t)) = \text{const} \quad \text{umiejętność glówna} \quad \text{if } N=2 \quad U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} + U_{int}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \text{const}$$

emp 26.1.1.
a & any
ogólnie np. ka
palcu
na
miejscu E u
napr. E u
p. d. nap. am
magnetyczny.

1. Comparing new and old results with new m & group of
? $\rightarrow (L + \delta L = L)$

$$L(\vec{r}_1 + \epsilon, \vec{r}_2 + \epsilon, \dots, \vec{r}_N + \epsilon, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N) = L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N)$$

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N) + \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \epsilon = L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N)$$

$$\epsilon \cdot \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \rightarrow \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0, \quad \sum_{a=1}^N \vec{F}_{a, in} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = - \frac{\partial U_{in}}{\partial \vec{r}_a} = \vec{F}_{a, in}$$

$$N=2 \quad \vec{F}_{2, in} + \vec{F}_{1, in} = 0 \quad \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0 \quad \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0 \quad \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \vec{p}_a = 0$$

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a = \text{const} \quad \left\| \delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a = \epsilon \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \right\|$$

2. Comparing new and old results with new group & group of

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - U_{in}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) - U_{ext}(y_a, z_a) \quad \vec{E}(x, y, z)$$

$$\sum_{a=1}^N \epsilon_x \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0 \quad \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0 \quad \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial v_{ax}} \right) = 0 \quad P_x = \sum p_{ax} = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = 0 \quad \frac{d}{dt} \epsilon_x P_x + \frac{d}{dt} \epsilon_y P_y = 0 \quad \epsilon_x \frac{dp_x}{dt} + \epsilon_y \frac{dp_y}{dt} = 0 \quad \text{If } \epsilon_x = 0, \epsilon_y \neq 0$$

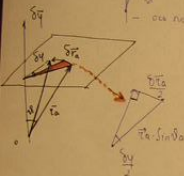
$$\epsilon_y \frac{dp_y}{dt} = 0 \Rightarrow p_y = \text{const}$$

$$\text{If } \epsilon_y = 0, \epsilon_x \neq 0$$

$$\epsilon_x \frac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow p_x = \text{const}$$

$\vec{\omega}$ - вектор поворота (задан осью поворота)

 плоскость, $\perp$ оси поворота
 δ - угол между осью пов. и радиус-вект., который задает направление вращения



$$\delta \bar{\pi}_a = [\delta \bar{y}, \bar{\pi}_a] \quad \delta \bar{V}_a = [\delta \bar{y}, \bar{V}_a]$$

$$L(\vec{r}_1 + \delta \vec{r}_1, \vec{r}_N + \delta \vec{r}_N, \vec{V}_1 + \delta \vec{V}_1, \vec{V}_N + \delta \vec{V}_N) = L(\vec{r}_1, \vec{r}_N, \vec{V}_1, \vec{V}_N)$$

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_n, \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_n) = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a + \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{\omega}_a} \delta \vec{\omega}_a = L(\vec{r}_1, \vec{r}_n, \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_n)$$

$$\sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial r_a} [\vec{\psi}, \vec{\tau}_a] + \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} [\vec{\psi}, \vec{v}_a] \right)_{\vec{v}_a = \vec{p}_a} \right) = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \tau_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$$

$$\sum_{a=1}^N (\vec{p}_a \cdot [\delta \vec{q}, \vec{\tau}_a] + \vec{p}_a \cdot [\delta \vec{q}, \vec{\bar{\tau}}_a]) = 0 \quad \sum_{a=1}^N (\delta \vec{q} \cdot [\vec{r}_a, \vec{p}_a] + \delta \vec{q} \cdot [\vec{\bar{r}}_a, \vec{\bar{p}}_a]) = 0$$

$$\sum_{a=1}^N \delta \vec{y} \left(\underbrace{[\vec{\pi}_a, \vec{p}_a]} + [\vec{U}_a, \vec{p}_a] \right) = 0 \quad \sum_{a=1}^N \delta \vec{y} \frac{d}{dt} [\vec{\pi}_a, \vec{p}_a] = 0 \quad \delta \vec{y} \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N [\vec{\pi}_a, \vec{p}_a] = 0$$

$$\frac{d}{dt} [\overline{\tau_a}, \overline{\rho_a}]$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0 \quad \vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \text{const}$$

МОНИТОРИНГ

Сохранение проекции мом. импульса на ось симметрии пр-ва

зона

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a V_a^2}{2} - U_{in}(\vec{r}_1, \vec{r}_N) - U_{out}(\vec{z}_a)$$

$$\rightarrow u(z) \delta y(a, 0, \delta y_z) L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a V_a^2}{2} - U_{in}(\vec{r}_1, \vec{r}_N) - U_{out}(\vec{z}_a, z)$$

при повороте в плоскости x, y м.е. осей z , L не меняется

$$\delta y \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0 \quad \frac{d}{dt} \delta y \underbrace{\sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a]}_{\vec{M}} = 0 \quad \frac{d}{dt} \delta y_z M_z = 0$$

$$\delta y_z \frac{dM_z}{dt} = 0, \quad M_z = \text{const}$$

$$\text{сохр.: } M_z = \text{const}, P_x = \text{const}, P_y = \text{const}$$

$$E = \text{const}$$

Преобразование импульса при повороте от одной осью, м.е. з. пр.

$$\vec{p} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a \quad \vec{p} = \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_a' + \vec{v}_k'$$

$$\vec{p} = \sum_{a=1}^N m_a (\vec{v}_a' + \vec{v}_k') = \underbrace{\sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a'}_{\vec{p}'} + \vec{v}_k' \sum_{a=1}^N m_a$$

$$\vec{p} = \vec{p}' + \mu \vec{v}_k'$$

$$\mu = \sum_{a=1}^N m_a \quad \text{полная масса}$$

Система центра импульсов.

сум. импульс y и z макс. скор. $\vec{v}_k'$, тогда $\vec{p}_c = \vec{p}' = 0$ (нормировка задания)

полный импульс = 0.

$$\vec{p} = 0 + \mu \vec{v}_k' \Rightarrow \vec{v}_k' = \frac{\vec{p}}{\mu}$$

скорость гб-з
сум. импульс
сумма $\vec{v}_k'$ сум. осей

$$\vec{p}' = \vec{p}_k' = 0$$

$$\vec{p} = \mu \vec{v}_k' \quad \vec{v}_k' = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \vec{v}_a}{\sum_{a=1}^N m_a}$$

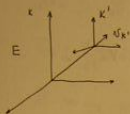
def: центр импульсов н.е. сум.

$$R_{kz} = \frac{\sum_{a=1}^N m_a \vec{r}_a}{\sum_{a=1}^N m_a}$$

Импульс импульс в сум. импульс
импульс поворота

$$\dot{R}_k = \frac{\sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a}{\sum_{a=1}^N m_a} = \vec{v}_k$$

Энергия сист. масс m_a , движущихся относительно друг друга. Выводим.



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_K$$

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} (\vec{v}'_a + \vec{v}_K)^2 + U_{in}$$

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a'^2}{2} + \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}'_a \cdot \vec{v}_K + \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} v_K^2 + U_{in}$$

$$E = E' + \vec{v}_K \cdot \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}'_a + \frac{M \cdot v_K^2}{2}$$

$$E = E' + \vec{v}_K \cdot \vec{p}' + \frac{M v_K^2}{2}$$

$$M = \sum_{a=1}^N m_a$$

$$\vec{p} = 0 \quad \vec{v}_K = \frac{\vec{p}_K}{M}$$

Энергия в сист. импульсов движ. барион.

$$E = E_{бар.} + \frac{M v_K^2}{2}$$

Преобраз. мом. имп. системы в сист. бариона

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \sum_{a=1}^N m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a]$$

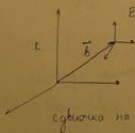
$$\vec{r}_a = \vec{r}_0^{(H)} + \vec{b}$$

б.м. равен
сумме - сума
б.м. разностей

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_0^{(H)} + \vec{b}, \vec{p}_a]$$

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_0^{(H)}, \vec{p}_a] + \sum_{a=1}^N [\vec{b}, \vec{p}_a]$$

$$\vec{M} = \vec{M}^{(H)} + [\vec{b}, \vec{P}]$$



$$U_{int}(r_1, r_2, \dots, r_N)$$

измеряется, но не
определяется



$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{\vec{r}}_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

новии координаты: $\vec{r}_a = \alpha \vec{r}_a'$ $\vec{v}_a = \vec{v}_a'(t)$
 $t = \beta \cdot t'$ $\vec{r}_a = \vec{r}_a'(t)$

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\vec{r}_a'}{dt'} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_a'$$

if α, β const. then U is a function of $\vec{r}_a'$ only. $U = U(\vec{r}_a')$. U is a function of $\vec{r}_a'$ only. U is a function of $\vec{r}_a'$ only.

$$U(\gamma \vec{r}_1, \dots, \gamma \vec{r}_N) = \gamma^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad \vec{r} \rightarrow \gamma \vec{r} \quad k = -1$$

$$U = \frac{\text{const}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

03.03.11

$$L = \psi(\vec{r}, \vec{v}) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{v})}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{v})}{\partial \vec{r}_a} \quad a = 1, 2, \dots, N$$

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(t, c_1, \dots, c_N) \quad \vec{r}_a = \alpha \vec{r}_a' \quad t = \beta t' \quad \vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\vec{r}_a'}{dt'} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_a'$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \psi(\vec{r} = \alpha \vec{r}', \vec{v} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}')}{\partial \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_a'} = \frac{\partial \psi(\vec{r} = \alpha \vec{r}', \vec{v} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}')}{\partial \alpha \vec{r}_a'} \quad \psi(\vec{r} = \alpha \vec{r}', \vec{v} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}') = C \psi(\vec{r}', \vec{v}') (*)$$

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial \psi(\vec{r}', \vec{v}')}{\partial \vec{v}_a'} = \frac{\partial \psi(\vec{r}', \vec{v}')}{\partial \vec{r}_a'}$$

$$\vec{r}_a' = \vec{r}_a'(t', c_1, \dots, c_N)$$

$$U = U_{\text{lin}} + U_{\text{int}} \quad L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{\vec{r}}_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

if U is a function of $\vec{r}_a'$ only, then U is a function of $\vec{r}_a'$ only. U is a function of $\vec{r}_a'$ only. U is a function of $\vec{r}_a'$ only.

$$U(\alpha \vec{r}_1', \alpha \vec{r}_2', \dots, \alpha \vec{r}_N') = \alpha^k U(\vec{r}_1', \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_N')$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$L = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k; \quad \beta^2 = \alpha^{2-k}$$

$$\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

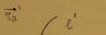
$$L = \alpha^k \left(\sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \right)$$

объём работы по координатам
и по координатам β по времени



t

$$\frac{t}{t'} = \alpha \left(\frac{t}{t'} \right)^{1-\frac{k}{2}} = \beta = \frac{t}{t'}$$



t'

$$\left(\frac{t}{t'} \right)^{1-\frac{k}{2}} = \frac{t}{t'}$$

необходимые преобразования

$$U = \frac{\text{const}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

k = -1

$$\left(\frac{t}{t'} \right)^{1/2} = \frac{t}{t'}$$

$$\frac{t^3}{t'^3} = \frac{t^2}{t'^2}$$

III и Kенура



$$U = - \sum_{a=1}^N m_a \vec{g} \cdot \vec{r}_a \quad k=1 \quad \left(\frac{t}{t'} \right)^{1/2} = \frac{t}{t'}, \quad \frac{t}{t'} = \frac{t^2}{t'^2}$$

$$\frac{v_a}{v'_a} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^{1-\frac{k}{2}}} = \alpha^{1+\frac{k}{2}} = \alpha^{\frac{k}{2}}$$

$$\frac{v_a}{v'_a} = \left(\frac{t}{t'} \right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E}{E'} = \alpha^k = \left(\frac{t}{t'} \right)^k$$

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a m_a \vec{v}_a] = \alpha \frac{\alpha}{\beta} \sum_{a=1}^N [\vec{r}'_a m_a \vec{v}'_a] = \frac{\alpha^2}{\beta} \vec{M}'$$

$$\frac{M}{M'} = \frac{\alpha^2}{\alpha^{1-\frac{k}{2}}} = \alpha^{1+\frac{k}{2}} = \left(\frac{t}{t'} \right)^{1+\frac{k}{2}}$$

Мех. преобразование для обобщенных координат.

Масс. движение газа вблизи поверхности

$$a_{ij}(q) = \sum_{a=1}^n m_a \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \right)$$

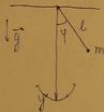
$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_n)$$

$$\beta = \alpha^{1 - \frac{k}{2}}$$

→ 1) $a_{ij} = \text{const}$ т.е. $a_{ij} \neq a_{ij}(q, t)$

2) $U(\alpha q_1, \alpha q_2, \dots, \alpha q_n) = \alpha^k U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ $q_i = \alpha q_i' \quad t = \beta t'$

$q_i = q_i(t)$, то есть $q_i' = q_i'(t')$



$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \quad \varphi \ll 1 \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \frac{\varphi^2}{2} \quad k=2 \quad \frac{t}{t'} = \left(\frac{l}{l'} \right)^{1 - \frac{k}{2}}$$

$$\frac{t}{t'} = 1$$

причем если рассмотреть не жесткий стержень, а стержень

Масс. движение

Дуриантава теорема

$\tilde{f}$ - непрерывна

$$f(t) \quad \overline{f(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \quad f(t) = \frac{d\tilde{f}(t)}{dt}$$

$$\overline{f(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d\tilde{f}(t)}{dt} dt = \begin{cases} \text{if } \tilde{f}(t) \text{ - ограниченна, то} \\ \overline{f(t)} = 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}(\tau) - \tilde{f}(0)}{\tau} = 0$$

Дур. Th. if number α is obs. of q and k

$U(\alpha \vec{r}_1, \dots, \alpha \vec{r}_n) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$
 then given α is constant then
 p. 60, to $2T(V(t)) = k U(\vec{r}(t))$

$$L = \sum_a \underbrace{\frac{m_a \dot{\vec{v}}_a^2}{2}}_T - \underbrace{U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)}_V$$

$$\sum_{a=1}^n \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \cdot \vec{v}_a = \sum_a \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a} \cdot \vec{v}_a = \sum_a m_a \dot{\vec{v}}_a^2 = 2T$$

$$2T = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} \ddot{v}_a = \sum_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} \cdot \ddot{v}_a \right) - \sum_a \ddot{v}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a}$$

$$\left\{ - \sum_a \ddot{v}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} = - \sum_a \ddot{v}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} = + \sum_a \ddot{v}_a \frac{\partial U}{\partial \dot{v}_a} = k \cdot U(\ddot{v}) \right\}$$

$$2T = k \cdot U + \frac{d}{dt} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} \right) \ddot{v}_a$$

$$= \vec{p}_a$$

if $\ddot{v}_a \propto \vec{p}_a$ - conservation

$$2T(\ddot{v}(t)) = k \cdot U(\ddot{v}(t)) + \left(\frac{d}{dt} \sum_a \vec{p}_a \cdot \ddot{v}_a \right) = 0$$

The bipartite graph structure is important

$$L = \underbrace{\sum_{a=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j}_{T - \text{kinetic energy}} - U(q_1, q_n) \quad ? \quad \begin{array}{l} 1) a_{ij} = \text{const} \\ 2) U(\angle q_1, \angle q_n) = \angle^k U(q_1, q_n) \\ 3) q(t), \dot{q}(t) - \text{exponential} \end{array}$$

$$2T(\dot{q}(t)) = k U(q(t))$$

$$n=1 \quad q(t), \dot{q}(t), \quad L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q)$$

$$a(q) = m \cdot \left(\frac{d\tilde{\tau}}{dq} \right)^2$$

$$\vec{E} = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const} \quad E = \underbrace{\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2}_{\text{kinetic}} + \underbrace{U(q)}_{\text{potential}}$$

$$\dot{q}^2 = \frac{2}{a(q)} (E - u(q))$$

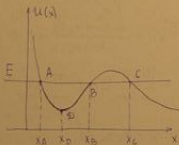
$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{a(q)}(E - U(q))}$$

корень из арифм. ($\pm$)

(f) $q(t) \downarrow$ " - "
 $q(t) \uparrow$ " + "

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = \sqrt{\frac{2}{a(q)}(E - u(q))}, \quad dt = \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)}(E - u(q))}}$$

$$t = \int \frac{\frac{a(q)}{2}}{\sqrt{\epsilon - U(q)}} dq + t_0 \quad \text{тип: 6 - топпангак}$$



$$U(a) = E \quad 3 \text{ решения } x_A, x_B, x_C$$

$$E = U(x_{\text{AFC}}) = 0$$

$$\dot{x}_A = 0, \quad \dot{x}_B = 0, \quad \dot{x}_C = 0$$

$$m_0 \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \equiv F \quad \text{if } \frac{\partial U}{\partial x} > 0, F < 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} < 0, F > 0$$



A. $\frac{\partial u}{\partial x} < 0, F > 0$

$$x_A \leq x \leq x_B$$

B: $\frac{\partial U}{\partial x} > 0, F < 0$

(потому что)

функции дв-е точки поворота - т. А и В

$$|\dot{x}(x_A)| = \left[\frac{2}{m_0} (E - U(x)) \right] = \dot{x}_{\max}$$

$$X_B \rightarrow X_A \quad \dot{x} = - \sqrt{\frac{2}{m_e} (E - U(x))}$$

$$x_A + x_B \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m_0} (E - U(x))}$$

$$X_A \rightarrow X_B \rightarrow X_A \text{ рекуррентное}$$

$$\tau_K = 2 \cdot t_{AB} = \sqrt{2m_0} \int_{\chi(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

$$x_c \leq x < \infty$$

$$\dot{\chi}(x \rightarrow \infty) \Big|_{\max} = \left| \sqrt{\frac{2}{m_0} E} \right| \quad \text{минимумное значение}$$

$$\infty \rightarrow x_c; \quad \dot{\chi} = - \left| \sqrt{\frac{2}{m_0} (E - U(x))} \right|$$

$$x_c \rightarrow \infty; \quad \dot{\chi} = \left| \sqrt{\frac{2}{m_0} (E - U(x))} \right|$$

с. 44

"задача н.б. существенно упрощена путем разложения функции волн на функции чистого импульса и функции молекулярной решетки".

Пробегная масса (задача двух тел)

$$L = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Система инерциальна

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r} \end{cases} \quad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{координаты}$$

$$\vec{r}_1(m_1 + m_2) = m_2 \vec{r} \quad (m_1 + m_2) \vec{r}_2 = -m_1 \vec{r}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$= \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad \vec{R}_{CM} = 0 ?$$

$$|\dot{\vec{r}}| \neq \dot{r} \quad \dot{r}_1^2 = \dot{r}_1 \cdot \dot{r}_1 = |\dot{\vec{r}}_1| |\dot{\vec{r}}_1| = (\dot{\vec{r}}_1)^2$$

$$\dot{r}_1 \cdot \dot{r}_1 = \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1$$

$$\dot{r}_1^2 = \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2$$

$$\dot{r}_2^2 = \left(\frac{\dot{r}}{r} \right)^2 = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2$$

$$L = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 - U(r)$$

"ф.з. для сист. со в. с q-двиг. одной масс. m. с массой m, движущейся со в. v, назв. m(v)"

$$L = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{r}^2 - U(r)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$L = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 - U(r)$$

пробегная масса

"м.о. задача о движении двух тел (возможности в нам. поле) может быть сведена к решению задачи о движении одной м. в заданном поле $U(r)$. по ф.з. $r(t)$ प्राप्त. R(t) Kong. y. z. m. m. u. m. 4. отдаленности (по отношению к их общему ц. инерции) по ф.з. по формулам (6)

эквивалентно движению масс. m. в поле, кем-то заданном, поле от сист. до центра масс

m_2
агро

m_1
в

(3)
 m_2

сложив
 m_1

$$m_2 \gg m_1$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$$

$$r_2 \approx 0; \quad \vec{r}_1 = \vec{r}, \quad \mu = m_1$$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 - U(r)$$

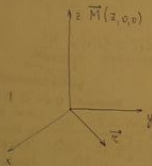
$$\frac{m_1}{m_2} \ll 1$$

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{r}^2 - U(r)$$

Движение в центральном поле

$$E = \text{const} \quad \vec{M} = (\vec{r} \cdot m \vec{v}) = \text{const}$$

в центральном поле
момента импульса относительно центра



$$x = r \cos \varphi \quad (\text{около } r \text{ по } z)$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\vec{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$\vec{v}^2 = (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi})^2$$

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 \cos^2 \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

φ - а угол в с н

задача сводится к
канонам в координатах

$$E = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - L$$

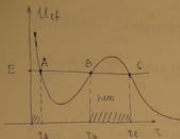
$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + U(r)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \rightarrow \varphi - \text{цикл коорд}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \text{const}, \quad M_z = M$$

- центральный поле - поле, в котором
векторы силы всегда направлены
от центра по линии связи
 $\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$ это + знак, т.
напр. всегда пог. бек.

необходимо $\vec{M}$ и $\vec{r}$ взаимно $\perp$ $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$, поскольку M сохраняется, это при
движении системы в погоне. бекер на др. ор. в осях вращения - $\perp \vec{M}$. Т.о.
в траектории движения тела всегда взаимно $\perp$ осям вращения.



$$E = U(x(t_A, t_B, t_C)) \quad \dot{x}(t_A, t_B, t_C) = 0$$

$$t_A \leq t \leq t_B \quad \text{quasi-stationary } t_{\min} = t_A$$

$$\dot{q} = \frac{M}{m \tau_{A,B,C}} \quad \text{b m } \dot{x} > 0 \text{ ostanetsya} \\ \text{vzr. na razresheniye } \tau, \\ \tau_{\min} \text{ b'paz. es } (m, A)$$

$$F = - \frac{\partial U(x)}{\partial x} \quad F_A = - \left. \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right|_{x_A} = 0 \quad \xrightarrow{F_A} x \quad F_B = - \left. \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right|_{x_B} < 0$$

$\tau_{\min}$ sobremennyy razryv. g'v'e b' n'et. are
($\dot{q} \neq 0$ ninge) [AB]

$$\xrightarrow{F_B} x$$

«mnozha» razryvov na n'et. razryvov $\rightarrow$ razryvov na τ bez, na u yzhen na ∞ [C ∞]

$t_A \leq t < \infty$ - usloviye, g'v'e b' usloviye, n'et.

Ob. to 1:

$$t_{\min} = t_C$$

1. razresheniye razryvov na u yzhen, n'et.

2. razresheniye razryvov na u yzhen, n'et. 2. razresheniye razryvov na u yzhen, n'et.

4. razresheniye razryvov na u yzhen, n'et.

razresheniye razryvov na u yzhen, n'et. razresheniye razryvov na u yzhen, n'et. razresheniye razryvov na u yzhen, n'et.

to razresheniye razryvov na u yzhen, n'et.

$$t_0 = t_{\min} \quad y = y_0 \quad \text{(razresheniye razryvov)} \quad \dot{x}(t=t_0) = 0$$

$$\dot{y}_0 = \frac{M}{m \tau_{\min}}$$

razresheniye razryvov na u yzhen, n'et.

$$t_A \rightarrow t_B \rightarrow t_C \quad \Delta y = 2 \int_{t_A}^{t_B} \frac{M}{\tau} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - U(x))}} = 2\pi \frac{n_1}{n_2} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

by om. ob. razresheniye razryvov na u yzhen, n'et.

$$t_n = t_0 + n_2 \tau_k \quad \text{(razresheniye razryvov na u yzhen, n'et.)}$$

razresheniye

$$r_n = 0 \quad \dot{\varphi}_n = \frac{M}{m \cdot r_{\min}^2}$$

$$r_n = r_{\min}$$

$$\dot{\varphi} = ?$$

φ — расстояние

$$\varphi(t_n) = \varphi_n + \dot{\varphi}_n t_n = \varphi_n + \frac{2\pi M}{h} t_n = \varphi_n + 2\pi n = \varphi_n \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_n$$

Кинематическое поле

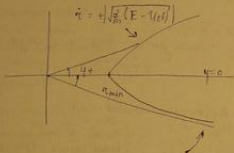
Полное взаимное д-е точек.

$$U \sim \frac{1}{r}$$

$U \sim r^2$ (пропорциональный дипольному)

Симметричная траектория в центральном симметричном поле

В ч. симметричном поле траектория симметрична относительно прямой, проходящей через центр поля ($r=0$) и $r_{\min}$ (min радиус, на котором приближается тело к полю)



→ в системе XY

$$\begin{cases} i = - \left| \frac{1}{m} (E - U(r)) \right| \\ \varphi_+ = - \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U(r))}} \end{cases}$$

$$\varphi_+ = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U(r))}}$$

Условие протекновения тела в центральном поле

$$1) \quad m \ddot{r} = - \frac{\partial U}{\partial r} \quad L = \frac{m v^2}{2} - U(r) \quad \bar{F} = - \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m \dot{r}^2}{2} = E - U(r)$$

$$m \dot{r} \ddot{r} = - \frac{\partial U}{\partial r} r$$

$$m \ddot{r} = - \frac{\partial U}{\partial r} = F_{\text{ef}}$$

$$- \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M^2}{2mr^2} \right) = F_{\text{ef}}$$

равновесие

А когда становится (поле центробежной инерции)

$$1) \quad \frac{\partial U}{\partial r} > 0, \quad \bar{F} < 0$$



притягивание к полю

$$2) \quad \frac{\partial U}{\partial r} < 0, \quad \bar{F} > 0$$



отталкивание

$$E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \geq 0 \quad | \cdot r^2$$

$$r^2 E - r^2 U(r) - \frac{M^2}{2m} \geq 0 \quad r \rightarrow 0$$

$$-r^2 U(r) - \frac{M^2}{2m} \geq 0$$

$$r^2 U(r) \leq -\frac{M^2}{2m}$$

yes, negative value, no upper bound

1) $U(r) = -\frac{d}{r} \quad -r < -\frac{M^2}{2m} \quad r \rightarrow 0$ if $M=0$, no bound, yes, e (can happen)

if $M \neq 0$, no bound



for $U(r) \rightarrow -\infty$ as $r \rightarrow 0$, $-\frac{d}{r^2} > \frac{M^2}{2m}$
 as $r \sim -\frac{1}{r^2} > 0$

14.03.14.

$$L = \frac{mV^2}{2} - U(r) \quad E = \text{const}, \quad \vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$$



$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) \quad (1)$$

$$M = p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2} \quad (2)$$

$\vec{M}(0,0,M)$



$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}})}$$

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

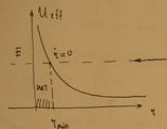
Задача Кенсера

$$U(r) = \pm \frac{\alpha}{r}; \quad \vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \vec{e}_r = \pm \frac{\alpha}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

"+" - притягивающее

"-" - отталкивающее

$$U_{eff}^{(v)} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$



уникальное гравитационное
(гравитация притягивает)

0) $-U_{min} \leq E_0, \quad r = p$

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{m \cdot p^2}$$

гравитация по окружности

1) $-U_{min} < E_1 < 0 \rightarrow$ эллипс

$$r_a < r < r_b$$

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \int_{r_a}^{r_b} \frac{M}{r^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U_{eff})}} = 2\pi \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

2) $E_2 > 0 \rightarrow$ гипербола

$$r_c < r < \infty$$

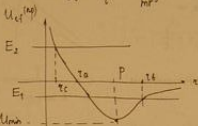
$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} \pm 1 \right) &= \cos \varphi \\ \frac{p}{r} \pm 1 &= e \cdot \cos \varphi \\ \frac{p}{r} &= e \cdot \cos \varphi \mp 1 \end{aligned}$$

$$r = \frac{p}{e \cdot \cos \varphi \mp 1}$$



$$U_{eff}^{(rep)} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$$\frac{\partial U_{eff}^{(rep)}}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{M^2}{mr^3}$$



$$E_0 = -U_{min}$$

$$\left| \frac{\partial U_{eff}^{(rep)}}{\partial r} \right|_{r=p} = 0$$

$$\frac{\alpha}{p^2} - \frac{M^2}{mp^3} = 0; \quad \alpha = \frac{M^2}{mp}$$

$$p = \frac{M^2}{m \cdot \alpha}$$

$$U_{eff}^{(rep)}(r=p) = -\frac{\alpha m \alpha}{M^2} + \frac{M^2 m^2 \alpha^2}{2m M^4} =$$

$$= -\frac{\alpha^2 m}{M^2} + \frac{\alpha^2 m}{2 M^2} = -U_{min} = \frac{\alpha^2 m}{2 M^2}$$

$$= -\frac{\alpha^2 m}{2 M^2}$$

?

$$\varphi = \arccos \left(\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} \pm 1 \right) \right) \quad e = +\sqrt{1 + \frac{E}{U_{min}}}$$

p - радиус-вектор

e - эксцентриситет

притяжение: $z = \frac{P}{1 + e \cdot \cos \varphi}$ $\tau_{\min} = \frac{P}{1+e}$

$$e = \sqrt{1 + \frac{E}{U_{\min}}}$$

1) $q \sim E_0 = -U_{\min}$ $e=0$ $z=P$ $\dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2}$

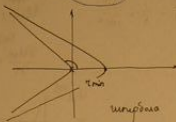
2) $-U_{\min} < E_1 < 0$ $e < 1$ $\tau_{\max} = \frac{P}{1-e}$ замкн

3) $E_2 > 0$ $e > 1$

$$e \cdot \cos \varphi_{ac} = -1$$

$$z = \infty$$

$$\cos \varphi_{ac} = -\frac{1}{e}$$



открытая

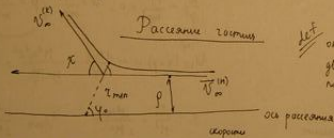
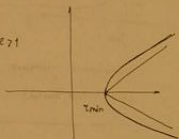


отталкивание: $z = \frac{P}{e \cdot \cos \varphi - 1}$ $\tau_{\min} = \frac{P}{e-1}$ $e > 1$

$$e \cdot \cos \varphi_{ac} = 1$$

$$\cos \varphi_{ac} = \frac{1}{e}$$

$$0 < \varphi_{ac} < \frac{\pi}{2}$$



лет отклонение траект. от прямой.
движения, высоты, длины, времени.
поля маг. рассеяния

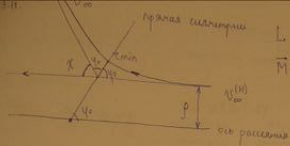
угол рассеяния: угол между напр. теч. до рассеяния и после рассеяния

$$0 < \varphi < \pi$$

ось рассеяния - прямая, || вект. теч. до рас., проход. чрез центр поля

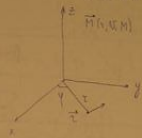
ρ - минимальное напр. (расст. от теч. до оси рассеяния); if бы теч. не было, $\rightarrow$ min расст. на которое приближился бы теч. к центру поля, if бы не было

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U(r))}}$$



$$L = \frac{m v^2}{2} = U(r) \quad \text{const} \quad E = \frac{m v^2}{2} + U(r)$$

$$\vec{M} = m [\vec{r}, \vec{v}] = \text{const} \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$



φ - угол между направлением движения и осью рассеяния
 φ_0 - угол между направлением движения и осью симметрии

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{2m(E - U(r))}$$

оси рассеяния

φ_0 - угол между осью рассеяния и осью симметрии

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M}{r^2} \frac{dr}{2m(E - U(r))} = \varphi(r) = \varphi(r, E, M) \Big|_{r_{\min}}^{\infty} = \varphi(r \rightarrow \infty, E, M) - \varphi(r_{\min})$$

$$\varphi_0 = \varphi(r \rightarrow \infty, E, M) \quad \varphi = |\pi - 2\varphi_0| \quad \varphi(E, M)$$

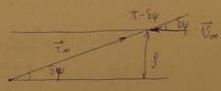
$$E = \text{const} \quad E(r \rightarrow \infty) = \frac{m v_{\infty}^2}{2} + 0 \quad \frac{m v_{\infty}^2}{2} = \frac{m v_{\infty}^{\text{int}}}{2} \quad v_{\infty}^{(r)} = v_{\infty}^{(r_0)} = v_{\infty}$$

def. угловое рассеяние - расстояние не зависит от φ

ρ - приведенное расстояние (то есть, на нем происходит рассеяние, и оно не зависит от φ)

$$E, M \rightarrow v_{\infty}, \rho$$

$$E = \frac{m v_{\infty}^2}{2}$$



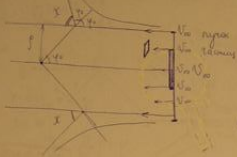
$$\text{При } r \rightarrow \infty \quad M = r_{\infty} v_{\infty} m \sin(\pi - \delta\varphi) =$$

$$= m r_{\infty} v_{\infty} \sin \delta\varphi = m \rho v_{\infty} \quad M = m v_{\infty} \rho$$

Эффективное сечение рассеяния

(гидродинамический непрерывный рассеяния)

Сматрица рассеяния



бесконечно малый
элемент
нужен

$$n = \frac{\text{число точек}}{\text{см. 15}}$$

Сматрица:

$$I \div I + dI - dN - \text{число точек, сев. пос. } \delta x \div x + dx \text{ за 1 см.}$$

$$\frac{dN}{n} = d\delta - \text{эфф. сев. пос.} \quad [d\delta] = \text{м}^2$$

$$x \div x + dx$$

$$p_x \div p_x - dp_x$$

$$dN = 2\pi p_x \cdot dp_x \cdot n$$

$$d\delta = \frac{2\pi p_x \cdot dp_x \cdot n}{n} = 2\pi p_x \cdot dp_x - \text{число точек на бесконечности (сг. сев. пос.)}$$



$$f = f(x, \hat{N}_x) \quad \text{const}$$

$$d\delta = 2\pi p(x) \left| \frac{dp}{dx} \right| dx$$

$$d\Omega = 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

$$d\delta = \frac{p(x)}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{dp}{dx} \right| \cdot d\Omega$$

$$\sigma_2 = \int_0^\pi \delta(x) d\theta$$

число непрерывных
рассеяния

$$U(z) = \pm \frac{z}{2}$$

формула Рэлея-Рунге

$$y(z) = \arccos \left(\frac{1}{e} \left(\frac{z}{2} \pm 1 \right) \right) \quad y_+(z) = \arccos(\pm 1) \frac{1}{e} \quad e^2 = 1 - \frac{E}{U_{min}}$$

$$e^2 = 1 + \frac{E \cdot 2M^2}{2^2 m} = 1 + \frac{m \cdot V_0^2 \cdot 2M^2 \cdot V_0^2 \cdot p^2}{2 \cdot d^2 m} = 1 + \left(\frac{m \cdot V_0^2 \cdot p}{d} \right)^2 \quad U_{min} = \frac{d^2 m}{2 M^2}$$

$$y(z \rightarrow \infty) = \arccos(\pm 1) \frac{1}{e} \quad \cos y_0 = \pm \frac{1}{e} \quad \cos y_0 \cdot x_+ = x_- \quad x_- = |\pi - 2y_0 - 2\pi| \quad y_- = y_+ + \pi$$

1) го балансирующего $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$

2) балансирующего

3) после балансирующего $|\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| \rightarrow \infty$

Дано $\vec{v}_{10}$ и $\vec{v}_{20}$. Найти $\vec{v}_{10}'$ и $\vec{v}_{20}'$.

Известное балансирующее.

$$1) \vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = 0 \quad \vec{p}_{20} = -\vec{p}_{10} \quad \text{го}$$

$$\vec{p}_{10}' + \vec{p}_{20}' = 0 \quad \vec{p}_{10}' = -\vec{p}_{20}' \quad \text{после}$$

Умножим

$$\frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_2} = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_2}$$

$$2) \text{ го } E_n = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_2}$$

Энергия

$$\text{после } E_n = \frac{p_{10}'^2}{2m_1} + \frac{p_{20}'^2}{2m_2}$$

$$\frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{10}'^2}{2m_2} = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}'^2}{2m_2}$$

$$p_{10} = p_{10}'$$

$$v_{10} = v_{10}'$$

$$p_{20} = p_{20}'$$

$$v_{20} = v_{20}'$$

поэтому умножим

$$\text{го: } \begin{cases} m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = 0 \\ \vec{v} = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \\ \vec{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}' \\ \vec{v}_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}' \end{cases}$$

$$v = v'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20} \rightarrow$$

$$\vec{v}' = \vec{v}_{10}' + \vec{v}_{20}'$$

$$\vec{v}' = \vec{v}_{10}' - \vec{v}_{20}'$$

$$\vec{v}' = \vec{v}_{10}' + \vec{v}_{20}'$$

$$\vec{v}_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}_0$$

$$v = v'$$

$$\vec{v}_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{u}_4$$

гано $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Найми $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{10} + \vec{u}_4$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \quad \vec{v}' = \vec{v}_0'$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{20} + \vec{u}_4$$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_{10}' + \vec{u}_4 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ - модуль относительной скорости (оценки в 4 и 5-м. омер)

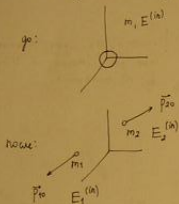
$$m_1 \cdot \vec{V}_1' = \vec{P}_1' = m_1 \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}_0 + \frac{m}{m_2} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$$

$$m_2 \cdot \vec{V}_2' = \vec{P}_2' = -m_1 \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}_0 + \frac{m}{m_1} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$$

$$m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Неупругие столкновения

I. падающий + цель на гбе:



1) закон импульса:

$$0 = \vec{P}_{10} + \vec{P}_{20} \quad p_{10} = p_{20} = p_0$$

2) закон энергии:

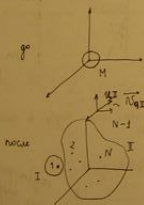
$$E^{(in)} = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + E_1^{(in)} + \frac{p_{20}^2}{2m_2} + E_2^{(in)}$$

$$\frac{p_0^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = E^{(in)} - E_1^{(in)} - E_2^{(in)} \rightarrow 0$$

$$\frac{p_0^2}{2m} = E^{(in)} - E_1^{(in)} - E_2^{(in)}$$

$$m_1 \cdot \vec{V}_{10} = m_2 \cdot \vec{V}_{20}$$

29.03.11.



расчет 2-го случая

I - сдвиг 1-го случая

II - сдвиг (N-1)-го случая

$$\text{Импульс: } 0 = \sum_{j=1}^N \vec{P}_j \rightarrow 0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \rightarrow \vec{P}_1 = -\vec{P}_2$$

$$\text{Энергия } E^{(in)} = \sum_{j=1}^N \left(E_j^{(in)} + \frac{p_j^2}{2m_j} \right) \rightarrow E^{(in)} = E_1^{(in)} + \frac{p_1^2}{2m_1} + E_2$$

$$\text{I } M_{II} = \sum_{j=2}^N m_j \quad \vec{P}_2 = \sum_{j=2}^N \vec{P}_j \quad E^{(in)} = E_1^{(in)} + \frac{p_1^2}{2m_1} + E_{qII} + \frac{p_2^2}{2M_{II}}$$

сум. кин. II - сум. кин. для равновесия II

$$\vec{V}_{qII} = \frac{\vec{P}_2}{M_{II}} \quad E_{II} = E_{qII} + \frac{M_{II} \cdot V_{qII}^2}{2}$$

$$\vec{V}_{qII} = -\frac{\vec{P}_1}{M_{II}} \quad E_{II} = E_{qII} + \frac{M_{II} \cdot P_1^2}{2 \cdot M_{II}^2}$$

$$\frac{P_1^2}{2m_1} \left(1 + \frac{m_1}{M_{II}} \right) = E^{(in)} - E_1^{(in)} - E_{qII}$$

$$\frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{M_2}{m_1 + M_2} \cdot (E^{(in)} - E_1^{(in)} - E_{y,2})$$

$$E_{y,2} = \sum_{j=2}^N \left(E_j^{(in)} + \frac{m_j \cdot V_{y,j}^2}{2} \right)$$

если $V_{y,j} = 0$ ($j=2,3,\dots,N$), то

$$\left(\frac{P_1^2}{2m_1} \right)_{\max} = \frac{M_2}{m_1 + M_2} \cdot (E^{(in)} - \sum_{j=1}^N E_j^{(in)})$$

Положение равновесия мех. сист.

Положение уст. и неуст. равн-я

положение равн-я: $t=0$ $q_P^{(0)}, \dot{q}_P^{(0)} = 0$

1 см. доб.

$t \neq 0$ $q(t) = q_P^{(0)}, \dot{q}(t) = \dot{q}_P(t) = 0$

! равн-я равн-я заг. механик. равн-я, которые в 1 см. доб. не равняются.

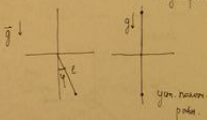
$$\frac{d}{dt} \left. \frac{\partial L(q_P, \dot{q}_P)}{\partial \dot{q}_P} \right|_{\dot{q}_P=0, q_P} = \frac{\partial L(q_P, \dot{q}_P=0)}{\partial q_P}$$

$$\psi(q_P, \dot{q}_P=0) = 0 = \left. \frac{\partial L(q, \dot{q}=0)}{\partial q} \right|_{q=q_P} \rightarrow F|_{q=q_P=0}$$

Мех. равновесие
уст. равн-я

$$F(q, \dot{q}=0) = -L(q, \dot{q}=0)$$

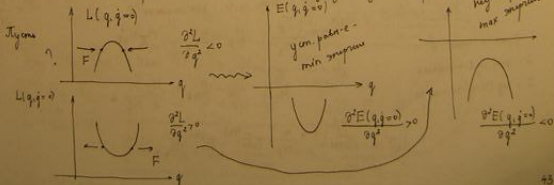
$$\frac{\partial L(q, \dot{q}=0)}{\partial q} = \frac{\partial E(q, \dot{q}=0)}{\partial q}$$



Устойчивое и неуст. равн-я

равн-я уст. равн-я - при малом отклонении сист. от равн-я равн-я сист. возвр. к равн-я равн-я

равн-я неуст. равн-я - при малом отклонении сист. уходят от равн-я равн-я



$$L = \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 - U(q)$$

$$E = \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 + U(q)$$

$$E(q, \dot{q}=0) = U(q)$$

$$Y_{\text{min}}: p \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0 \quad Y_{\text{min}}: \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$$

$$\text{Полож. полн.: } \left. \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right|_{q=q_f} = 0$$

q_f - положение

$x = q - q_f$ (вычисление см. ниже, $x \rightarrow 0$)

$$\dot{x} = \dot{q}$$

$$T = \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q_f) \dot{x}^2 \quad T = \frac{1}{2} a(q_f) \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2$$

$$U(q) = U(q_f + x) = U(q_f) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_f} x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_f} x^2$$

$$U(q) = U(q_f) + \frac{K}{2} x^2$$

$$L = \frac{m_0}{2} \dot{x}^2 - U(q_f) - \frac{K}{2} x^2 = \frac{m_0}{2} \dot{x}^2 - \frac{K}{2} x^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$K = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \bigg|_{q=q_f}$$

$$m_0 \ddot{x} = -Kx$$

$$m_0 \ddot{x} + Kx = 0$$

минимум $q=x \rightarrow$ минимум $U(q) \rightarrow$ конг. гармон. колебл.
 q -но малое Δq .

$$x = A e^{i\omega t} \quad \text{решение ДУ} \quad A = a e^{i\phi}$$

$$\omega - \text{частота, но } x = \text{Re}(A e^{i\omega t}), \text{ а не } x = \text{Im}(A e^{i\omega t})$$

$$24.03.11 \quad L(q, \dot{q}, t) \quad E(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

$$E_n(q, t) = E(q, \dot{q}=0, t) = -L(q, \dot{q}=0, t)$$

$$E_x = E - E_n \quad E = E_x + E_n \quad L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q) \quad E_n = U(q)$$

$$E_x = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2$$

$$t=0, q_f, \dot{q}_f=0, \text{ но } t>0 \quad q(t) = q_f \quad \dot{q}(t) = \dot{q}_f=0$$

$$\left. \frac{\partial E_n(q)}{\partial q} \right|_{q_f} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_n(q)}{\partial q^2} \right|_{q=q_p} > 0 \quad - \text{yem. p.}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_n(q)}{\partial q^2} \right|_{q=q_p} < 0 \quad - \text{neyem. p.}$$

$$m_0(\omega^2 A e^{i\omega t} + k A e^{i\omega t}) = 0 \quad A \neq 0 \quad e^{i\omega t} \neq 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m_0} \rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m_0}}$$

a - amplituda
 α - fazga

ω - yuzlamalas tezligi
 φ - burilmas tezligi

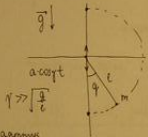
$$1) k > 0 \quad k = |k| \quad x = A e^{\pm i\omega t} \quad x = A a \cos(\omega t + \alpha)$$

$$T_{\text{osc}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\varphi = \frac{1}{T} x$$

$$2) k < 0 \quad k = -|k| \quad \omega = \pm i \sqrt{\frac{|k|}{m_0}}$$

$$x = a_1 e^{-\sqrt{\frac{|k|}{m_0}} t} + a_2 e^{\sqrt{\frac{|k|}{m_0}} t}$$



ham, ma'mum

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q \quad E_n = -mgl \cos q$$

$$\left. \frac{\partial E_n}{\partial q} \right|_{q=q_p} = mgl \sin q_p = 0 \quad \begin{matrix} 1) q_p = 0 & \text{yem.} \\ 2) q_p = \pi & \text{neyem.} \end{matrix}$$

ma'mum

Konulyar

$m, l \rightarrow$ mas. m.
yem. palatobas

$$\left. \frac{\partial^2 E_n}{\partial q^2} \right|_{q=q_p} = mgl \cos q_p$$

$$1) k = mgl \quad m_0 = ml^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

cosinus - qachmasa cosinus

Bir yuzlamalas korobanma. φ - a lamp u yf.e gb. a
nuq naizim bneim. em.

$$L = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 - U(q) - U_{\text{int}}(q, t)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_p} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_p} > 0$$

$$U_{\text{int}}(q = q_p + x, t) = U_{\text{int}}(q_p, t) + \underbrace{\frac{\partial U_{\text{int}}(q_p, t)}{\partial q}}_{= -F(t)} x + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 U_{\text{int}}}{\partial q^2}}_{x(q_p, t)} x^2$$

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + F(t)x + \cancel{\frac{1}{2} x^2} - F(t)x$$

$$U_{\text{int}}(q_p, t) \rightarrow y(t) = \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\boxed{m_0 \ddot{x} + kx = F(t)}$$

$$m_0 \ddot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m_0} F(t), \text{ zgl. } \omega^2 = \frac{k}{m_0}$$

homogener Fall

$$\omega^2 x + \ddot{x} + i\omega \dot{x} - i\omega \dot{x} = \frac{1}{m_0} F(t)$$

$$\ddot{x} + i\omega \dot{x} - i\omega (\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m_0} F(t) \rightarrow \frac{dz}{dt} + i\omega z = \frac{1}{m_0} F(t)$$

$$z = \dot{x} + i\omega x$$

$$x(t) = \frac{1}{i\omega} \operatorname{Im} z(t)$$

$$z(t) = A(t) e^{i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} + i\omega e^{i\omega t} A(t) - i\omega A e^{i\omega t} = \frac{1}{m_0} F(t)$$

$$\frac{dA}{dt} = e^{-i\omega t} \cdot \frac{1}{m_0} F(t)$$

$$A(t) = \frac{1}{m_0} \int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' + z_0$$

$$z = e^{i\omega t} \left(\frac{1}{m_0} \int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' + z_0 \right) \quad x(t) = \frac{\operatorname{Im} z}{\omega}$$

$$F=0 \Rightarrow z = z_0 e^{i\omega t} \quad x(t) = \operatorname{Im} \left(\frac{z_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} = \operatorname{Im} B e^{i\omega t}$$

$$\text{Pythagoras } F(t) = f \cos \omega t$$

$$A(t) = \frac{1}{m_0} \int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' = \frac{f}{m_0} \int_0^t e^{-i\omega t'} \cos \omega t' dt' = \frac{f}{2m_0} \int_0^t \left(e^{i\omega t' - i\omega t'} + e^{-i\omega t' - i\omega t'} \right) e^{-i\omega t'} dt'$$

$$= \frac{f}{2m_0} \left(\underbrace{\int_0^t e^{i(\gamma - \omega)t'} dt'}_{J_1} + \underbrace{\int_0^t e^{-i(\gamma + \omega)t'} dt'}_{J_2} \right)$$

$$J_2 = \frac{f}{2m_0} \frac{1}{-i(\gamma + \omega)} (e^{-i(\gamma + \omega)t} - 1)$$

permanenz

$$J_1: \gamma = \omega \quad J_1 = \frac{f}{2m_0} t \quad z = e^{i\omega t} \left(\frac{f}{2m_0} t - \frac{f(e^{-2i\omega t} - 1)}{2i m_0 (\gamma + \omega)} \right) + z_0$$

$$q_p = 0 \quad t > 0 \quad q(t) = q_p \quad \dot{q}(t) = 0$$

$$x = q - q_p \quad x = a \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{— обобщенная координата}$$

$$F(t) \quad \dot{z} = \dot{x} + i\omega x \quad x(t) = \frac{f}{\omega} \operatorname{Im} z(t) \quad F(t) = f \cos \gamma t$$

$$1) \gamma = \omega \rightarrow \text{резонанс}$$

$$\dot{z}(t) = e^{i\omega t} \left\{ \dot{z}_0 + \frac{f}{2m_0} t - \frac{f}{2im_0 \omega} (e^{-2i\omega t} - 1) \right\}$$

$$z(t) = e^{i\omega t} \left\{ z_0 + \frac{f}{2m_0} \int_0^t e^{i(\gamma-\omega)t'} dt' - \frac{f}{2im_0(\gamma+\omega)} (e^{-2i(\gamma+\omega)t} - 1) \right\}$$

$$\dot{z}(t) = \dot{z}_0 e^{i\omega t} + \frac{f}{2m_0} t e^{i\omega t} + \frac{f}{m_0 2\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$\gamma = \omega$ — резонанс — выходящий за рамки

$\sim \sin \omega t$

$$z_0 = |z_0| e^{i\alpha}$$

$$x(t) = \frac{|z_0|}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m_0} t \sin \omega t$$

$$? \quad \frac{|z_0|}{\omega} = A \quad \alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$2) \gamma \neq \omega$$

$$\dot{z}(t) = e^{i\omega t} \left\{ \dot{z}_0 + \frac{f}{2m_0 i(\gamma-\omega)} (e^{i(\gamma-\omega)t} - 1) - \frac{f}{2im_0(\gamma+\omega)} (e^{-i(\gamma+\omega)t} - 1) \right\}$$

$$z(t) = \underbrace{\left(\dot{z}_0 - \frac{f}{2m_0 i(\gamma-\omega)} + \frac{f}{2m_0 i(\gamma+\omega)} \right)}_{\dot{z}_1 = |\dot{z}_1| e^{i\beta}} e^{i\omega t} - \frac{if}{2m_0(\gamma-\omega)} e^{i\gamma t} + \frac{if}{2m_0(\gamma+\omega)} e^{-i\gamma t}$$

$$x(t) = \frac{|z_0|}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) - \frac{f}{2m_0(\gamma-\omega)\omega} \cos \gamma t + \frac{f}{2m_0(\gamma+\omega)\omega} \cos \gamma t$$

$$\frac{f}{2m_0(\gamma+\omega)\omega} \cos \gamma t - \frac{f}{2m_0(\gamma-\omega)\omega} \cos \gamma t = \frac{f}{2m_0 \omega} \cos \gamma t \left(\frac{1}{\gamma+\omega} - \frac{1}{\gamma-\omega} \right) = \frac{f}{2m_0 \omega} \cos \gamma t \cdot \frac{2\omega}{\omega^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) +$$

$$+ \frac{f}{m_0(\omega^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t$$

$$\frac{|z_1|}{\omega} = a \quad \alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Доб. к макс. мин. колебл. performance

$$\gamma = \omega + \epsilon$$

$$\omega^2 - \gamma^2 = (\omega - \gamma)(\omega + \gamma) = -\epsilon(2\omega + \epsilon)$$

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x(t) = \operatorname{Re}(A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{i(\omega + \epsilon)t})$$

$$B = \left| \frac{f}{\epsilon(2\omega + \epsilon)m_0} \right| e^{i\varphi}$$

$$\varphi = 0 \quad \varphi = \pi$$

$$= \frac{f}{\epsilon(2\omega + \epsilon)m_0} \cos((\omega + \epsilon)t)$$

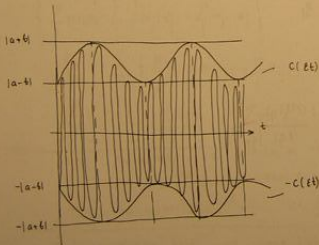
$$x(t) = \underbrace{\operatorname{Re}(A + B e^{i\epsilon t})}_{C(\epsilon t)} e^{i\omega t} = \operatorname{Re} C(\epsilon t) e^{i(\omega t + \varphi(\epsilon t))}$$

$$x(t) = C(\epsilon t) \cos(\omega t + \varphi(\epsilon t))$$

$$C(\epsilon t) = |A + B \cdot e^{i\epsilon t}|$$

$$C^2(\epsilon t) = (a \cdot \cos \alpha + b \cdot \cos(\epsilon t + \beta))^2 + (a \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin(\epsilon t + \beta))^2 = a^2 + b^2 + 2ab(\cos \alpha \cdot \cos(\epsilon t + \beta) + \sin \alpha \cdot \sin(\epsilon t + \beta)) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\epsilon t + \beta - \alpha)$$

$$|a - b| \leq C(\epsilon t) \leq |a + b|$$



Плюс $\epsilon \ll \omega$

Плюс $C(\epsilon t) \quad \tau_c = \frac{2\pi}{\epsilon}$

Плюс $\tau_w = \frac{2\pi}{\omega} \quad \tau_c \gg \tau_w$

Сущность - квантовая колебл. performance

Положим $q_1, \dots, q_n$ и найдем $p_1, \dots, p_n$ с n произвольными

$$\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{q_f} \quad \underbrace{\dot{q}_1 = 0, \dots, \dot{q}_n = 0}_{\dot{q}_f = 0}, \quad t > 0 \quad q(t) = q_f, \quad \dot{q}(t) = 0$$

$$L(q, \dot{q}) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_{q_f, \dot{q}_f = 0} = \frac{\partial L(q, \dot{q}_f = 0)}{\partial q_i} \bigg|_{q = q_f} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$0 = \frac{\partial L(q, \dot{q} = 0)}{\partial q_i} \bigg|_{q = q_f} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$F(q, \dot{q} = 0) \bigg|_{q = q_f} = \frac{\partial L(q, \dot{q} = 0)}{\partial q_i} \bigg|_{q = q_f} \quad F_i(q, \dot{q} = 0) \bigg|_{q = q_f} = 0$$

$$E = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \quad E_n(q) = E(q, \dot{q} = 0) = -L(q, \dot{q} = 0)$$

$$F(q, \dot{q} = 0) = \frac{-\partial E_n(q)}{\partial q_i} \quad F_i(q, \dot{q} = 0) \bigg|_{q_f} = 0 \quad \frac{\partial E_n(q)}{\partial q_i} \bigg|_{q_f} = 0$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\text{Условия минимума} \quad E_n(\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{q_f}) < E_n(q_f + \delta q) \quad \frac{\partial^2 E_n}{\partial q_i \partial q_i} \bigg|_{q = q_f} = K_{en}$$

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_n)$$

$$E_n(q) = U(q), \quad \frac{\partial E_n(q)}{\partial q_i} \bigg|_{q_f} = 0 \quad \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} \bigg|_{q_f} = 0$$

* y lea!

$$L = \sum_{ij} \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_n)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_i} = 0 \quad U(q_1, \dots, q_n) < U(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n) \quad \text{yom}$$

$$i=1, \dots, n \quad q_1, \dots, q_n$$

$$x_i: \quad x_i = q_i - q_i \quad \dot{x}_i = \dot{q}_i$$

$$E = \sum_{ij} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{ij} \frac{1}{2} a_{ij}(q_i) \dot{x}_i \dot{x}_j + \underbrace{o(x^2)}_{m_{ij} = m_{ji}}$$

$$a_{ij}(q_i) = m_{ij}$$

$$U(q_1 + x_1, \dots, q_n + x_n) = U(q_i) + \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_i} \cdot x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_i} \cdot x_i x_j + o(x^3)$$

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_i} \quad L(x, \dot{x}) = \sum_{ij} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - U(q_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j$$

$$n \quad \text{yp-u} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial L}{\partial x_i} & \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{ij} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \ddot{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \ddot{x}_i = \sum_{ij} m_{ij} \ddot{x}_j \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \sum_i m_{ij} \ddot{x}_i = \sum_j m_{ji} \ddot{x}_j = \sum_j m_{ji} \ddot{x}_j \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j = - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i = - \sum_{ij} k_{ij} x_j$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_j = - \sum_{ij} k_{ij} x_j \quad n \quad \left\{ \sum_{ij} (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \right.$$

$$n=1 \quad m_{11} \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 = 0$$

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad (m_{11}(\omega^2) + k_{11}) A_1 e^{i\omega t} = 0$$

$$(k_{11} - m_{11} \omega^2) A_1 e^{i\omega t} = 0 \quad \omega^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} \quad x_1 = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^n (m_{ij}(\omega^2) + k_{ij}) A_j e^{i\omega t} = 0 \quad n=2 \quad (\text{gda yp-a})$$

$$\left\{ B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{i\omega t} = 0 \right\} \quad \rightarrow \sum_{n=1,2,3,\dots,n}$$

$$n \quad \text{yp-u} \quad \left\{ \sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) A_j = 0 \right. \\ i=1, 2, \dots, n$$

Одн. колебание н.ч.м.м. к-го зап-ся, чем-то из коэф-т при
 ординатных = 0

$$|k_{ij} - m_{ij} \omega^2| = 0 \quad |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = \overbrace{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) \dots (k_{nn} - \omega^2 m_{nn})}^n + \dots + 0$$

$$\rightarrow b_n \omega^{2n} + b_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + b_1 \omega^2 + b_0 = 0$$

$$\rightarrow b_2(m_{ij}, k_{ij}) \quad \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2 \quad \omega_i^2 > 0 \quad \text{и ба бер-е}$$

$$x_i = A_i e^{i\omega t} \rightarrow x_i = \sum_{\alpha=1}^n A_i^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t} \quad \omega_j - \text{собств. ч. колебаний}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$n \times n \times 2 = 2n^2 \text{ const (о године формул)}$$

(из-за коммутации форм → где const ординатных и паза)

$$A_i^{(\alpha)} = a_{\alpha} e^{i\omega_\alpha t}$$

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} (i\omega_\alpha)^2 A_j^{(\alpha)} + k_{ij} A_j^{(\alpha)}) e^{i\omega_\alpha t} = 0$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \right. \\ \left. j = 1, 2, \dots, n \right.$$

$$n \left\{ \sum_{j=1}^n (k_{ij} - m_{ij} \omega_\alpha^2) A_j^{(\alpha)} = 0 \right. \\ \left. i = 1, 2, \dots, n-2, n-1, n \right.$$

выполнение n-1 ур-е

$$\text{Задача нахождение } A_n^{(\alpha)}$$

$$\rightarrow A_i^{(\alpha)} = \frac{\Delta_{i, n-1}^{(\alpha)}}{\Delta_{n, n-1}^{(\alpha)}} A_n^{(\alpha)} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{Задача } A_n^{(\alpha)}, \text{ найти } A_j^{(\alpha)} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\Delta_{i, n-1}^{(\alpha)} = (-1)^{i+n-1} |k_{ij} - m_{ij} \omega_\alpha^2|_{i=1}^{j+n-1} \quad \text{Нен-но числитель и знаменатель}$$

$$C_\alpha = \frac{A_n^{(\alpha)}}{\Delta_{n, n-1}^{(\alpha)}} \rightarrow A_n^{(\alpha)} = \Delta_{n, n-1}^{(\alpha)} C_\alpha \quad \text{if } C_\alpha = \frac{A_n^{(\alpha)}}{\Delta_{n, n-1}^{(\alpha)}} \rightarrow \alpha$$

$$A_i^{(\alpha)} = \Delta_{i, n-1}^{(\alpha)} C_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \rightarrow A_i^{(\alpha)} = \Delta_{i, n-1}^{(\alpha)} C_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n-1, n)$$

$$A_i^{(\alpha)} = \Delta_{i, n-1}^{(\alpha)} C_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{i, n-1}^{(\alpha)} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}, \quad \text{Re } x_i = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{i, n-1}^{(\alpha)} a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) \quad C_\alpha = a_\alpha e^{i\varphi_\alpha}$$

$$c_2 = a_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

$$a_2 = n$$

$$\varphi_2 = n \quad 2\pi$$

$$x_c = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_c^{(\alpha)} a_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t - \varphi_{\alpha})$$

$$\theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) - \text{realizatsiya (nagruzeniya) skoplyeniya}$$

$$n \begin{cases} x_c = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_c^{(\alpha)} \theta_{\alpha} & \rightarrow \theta_j = \sum_{j=1}^n \tilde{\Delta}_j \cdot x_j \\ \ell = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{moduliruyemye}$$

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0$$

$$L(\theta, \dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} (\dot{\theta}_j^2 - \omega_j^2 \theta_j^2) \quad ?$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0 \\ \alpha = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

n - nagruzeniya
yprizhivaniya

$$n=1$$

$$L = L(x, \dot{x}) + F(t)x \quad \text{bez krasnoy mechi}$$

n - krasnoy mechi

$$L = L(x, \dot{x}) + \sum_c F_c(t) x_c \quad \text{bez mechi}$$

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} (\dot{\theta}_j^2 - \omega_j^2 \theta_j^2) + \sum_c F_c(t) \sum_{j=1}^n \Delta_c^{(j)} \theta_j$$

bez mechi

$$\sum_{c=1}^n F_c(t) \sum_{j=1}^n \Delta_c^{(j)} \theta_j = \sum_{j=1}^n \theta_j \underbrace{\sum_{c=1}^n F_c(t) \Delta_c^{(j)}}_{F_j(t)}$$

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} (\dot{\theta}_j^2 - \omega_j^2 \theta_j^2) + \sum_{j=1}^n F_j(t) \theta_j$$

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = \frac{1}{m_2} F_2(t)$$

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2, \quad k > 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + f^{(mp)}$$

$$m_0 \ddot{x} = -kx$$

$$x = a \cos(\omega_0 t + p)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



201

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

базиса - не тех. атом.
состояния при

абсолютно мгновенно -

$$f^{(mp)} = -\lambda_0 \dot{x} \quad \lambda_0 > 0$$

горячий, это макс. момент. Система охладится
also мгновенно (наличие $x \rightarrow$ разрыв в p по g 1 см.)

1. теор. физика из реальных чисел

2. феноменологическая теор. физика

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - \lambda_0 \dot{x}$$

$$m_0 \ddot{x} = -kx - \lambda_0 \dot{x}$$

$$m \omega_0^2 = \frac{k}{m_0}, \quad \frac{\lambda_0}{m_0} = 2\lambda \quad \lambda - \text{коэффициент затухания}$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A \cdot e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2\lambda A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = 0$$

$$\omega^2 - 2i\lambda\omega - \omega_0^2 = 0 \quad \omega = i\lambda \pm \sqrt{-\lambda^2 + \omega_0^2}$$

$$x = A_1 e^{-\lambda t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + A_2 e^{-\lambda t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t}$$

→ осцилляторное затухание

$$1) \omega_0 > \lambda, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$x_e (\text{кормека}) = A_1 e^{-\lambda t} e^{i\omega_2 t} + A_2 e^{-\lambda t} e^{-i\omega_2 t}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} x_e = (A_1 + A_2) e^{-\lambda t} \cos \omega_2 t = C_1 e^{-\lambda t} \cos \omega_2 t \\ \operatorname{Im} x_e = (A_1 - A_2) e^{-\lambda t} \sin \omega_2 t = C_2 e^{-\lambda t} \sin \omega_2 t \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \operatorname{Re} x_e + \operatorname{Im} x_e = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \omega_2 t + C_2 \sin \omega_2 t)$$

$$C_1 = a \cos p, \quad C_2 = -a \sin p$$

$$\begin{cases} C_1^2 + C_2^2 = a^2 \\ \operatorname{tg} p = -\frac{C_2}{C_1} \end{cases}$$

$$x = e^{-\lambda t} a (\cos(p + \omega_2 t))$$

нерегулярные
затухающие колебания

$$-\underbrace{(x - \sqrt{x^2 - \omega_c^2})}_v$$

3) $\omega_0 = \lambda \quad x = A_1 \cdot e^{-\lambda t} + t A_2 \cdot e^{-\lambda t}$

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{ij} x_i x_j$$

$$n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \right\}_{i=1,2,\dots,n} \quad n \left\{ \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j = - \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j \right\}_{i=1,2,\dots,n}$$

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{x}_j = - \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j - \sum_j d_{ij} \dot{x}_j$$

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{x}_j + \lambda_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \quad \leftarrow x_i = A_i e^{i\omega t}$$

$$\sum_j (k_{ij} - m_{ij} \omega^2 + \lambda_{ij} i \omega) A_j e^{i \omega t} = 0$$

$$|k_{ij} - m_{ij}\omega^2 + L_{ij}i\omega| = 0 \quad \omega_2 = \text{Re}\omega_2 + i \cdot \text{Im}\omega_2 \quad \text{komplexes } \omega \text{ (zusatz reelles } \omega \text{ maximal, um System zu maximieren)}$$

Диссипативная функция

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} \ddot{x}_i$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i = - \sum_{ij} L_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = \sum_j L_{ij} \dot{x}_j \quad f_i^{(eq)} = - \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

$$\frac{dE}{dt} = -2F_g$$

$$F_g = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n L_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

→ гуморальный процесс - процесс кумуляции веществ в тканях (гуморальный процесс - процесс накопления веществ в тканях)

Durchgehungene Kollisionswelle am c 1 cm. ch.

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + F(t) \cdot x \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - d_0 \dot{x}$$

$$m_0 \ddot{x} + kx + d_0 \dot{x} = F(t) \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m_0} \quad 2\lambda = \frac{d_0}{m_0}$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} F(t) \quad F(t) = f \cdot \cos \gamma t$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} \cos \gamma t \quad x(t) = x_{\text{hom}}(f=0) + x_{\text{part}}(f \neq 0)$$

1) $x_{\text{hom}}(f=0) = a \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega_2 t + \beta)$

$$\omega_0 > \lambda$$

Nur $x_{\text{part}}(f \neq 0)$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} e^{i\gamma t}$$

$$x_{\text{part}}(t) = B \cdot e^{i\gamma t}$$

$$- \gamma^2 B e^{i\gamma t} + 2\lambda \cdot i\gamma B e^{i\gamma t} + \omega_0^2 B e^{i\gamma t} = \frac{f}{m_0} e^{i\gamma t}$$

$$B = \frac{f}{m_0} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \gamma^2) + 2i\lambda\gamma}$$

$$B = \frac{f}{m_0} \frac{(\omega_0^2 - \gamma^2) - i \cdot 2\lambda\gamma}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2} =$$

11.04.11.

$$L = \frac{m_0}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + F(t) \cdot x \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + f^{(\text{imp})} \quad f^{(\text{imp})} = -d_0 \dot{x} \quad d_0 > 0$$

$$m_0 \ddot{x} = -kx + F(t) - d_0 \dot{x} \quad \frac{k}{m_0} = \omega_0^2 \quad \frac{d_0}{m_0} = 2\lambda \quad (2 - \text{geperrten gedammten})$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} F(t) \quad \text{Nur } F(t) = f \cdot \cos \gamma t$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} \cos \gamma t \quad x_{\text{part}} = a \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega_2 t + \beta) \quad \omega_0 > \lambda \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$B \cdot e^{i\gamma t} = \frac{f((\omega_0^2 - \gamma^2) - 2i\lambda\gamma)}{m_0((\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2)} \quad h = \frac{f \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}{m_0((\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2)} \Rightarrow$$

$$h = \frac{f}{m_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}$$

$$\tan \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$t \gg \frac{1}{\lambda}$ - пер. с бреша затухания, тогда бр. $\frac{1}{\lambda}$ затухания δ ϵ пр.

$$x = b \cdot \cos(\gamma t + \delta)$$

$$\dot{x} = a \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t + \phi) + b \cdot \cos(\gamma t + \delta)$$

гусицирующая кинематическая энергия

Потенциальная энергия при установившемся колебании.

Диссипирующая зат-ма энергии от резонанса.

$$\frac{dE}{dt} = -2F \quad F = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad n=1 \quad F = \frac{1}{2} L_0 \cdot \dot{x}^2$$

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{гус.}} = -2F - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (\text{используем только гусицирующая резонанс})$$

$$F = \frac{L_0}{2} \cdot b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta) \quad L_0 = m \cdot 2\lambda \quad F = m \cdot 2 \cdot b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$$

используем модуль и средн. бреша по времени энергии, кин. гусицирующей

$$\left| \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{гус.}} \right| = m \cdot 2 b^2 \gamma^2 = m \cdot 2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{f^2}{m \cdot 2 \cdot ((\omega_0 - \gamma)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2)} \quad \gamma = \omega_0 + \epsilon$$

$$\omega_0 - \gamma^2 = (\omega_0 - \gamma)(\omega_0 + \gamma) = -\epsilon \cdot (2\omega_0 + \epsilon) \quad I(\epsilon) = \left| \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{гус.}} \right|_{\gamma = \omega_0 + \epsilon}$$

Кин. бр. энергия, кин. гусицирующая с бр. ϵ γ бр.

$$I(\epsilon) = \frac{2(\omega_0 + \epsilon)^2 \cdot f^2}{m \cdot (\epsilon^2 (2\omega_0 + \epsilon)^2 + 4\lambda^2 (\omega_0 + \epsilon)^2)}$$

$$\text{Пучок } \epsilon \ll \omega_0 \quad I(\epsilon) = \frac{f^2 \cdot 2 \cdot \omega_0^2}{m \cdot (\epsilon^2 \cdot 4\omega_0^2 + 4\lambda^2 \omega_0^2)} = \frac{f^2 \cdot 2}{4m \cdot (\epsilon^2 + \lambda^2)}$$

гусицирующая энергия бреша резонанса

$$I_{\text{max}}(\epsilon = 0) = \frac{f^2 \cdot 2}{4m \cdot \lambda^2} = \frac{f^2}{4m \cdot \lambda}$$

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i \quad \dot{\vec{R}}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \quad \vec{R}, \varphi, \theta, \psi - \text{наши коор.}$$

T.T. - мех. сист. с 6 степен. своб.

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_i, t) \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$d\vec{r}_i = d\vec{R} + (d\vec{r}_i)_{\text{rel.}}$$

14.04.11

Мех. сист. - Т.Т.

$\vec{R}, \theta, \varphi, \psi$

в координ. системе

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$$

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U(\vec{r}_i, t) \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$d\vec{r}_i = d\vec{R} + (d\vec{r}_i)_{\text{rel.}}$$

rel. перем. в осн. в. $\perp d\vec{R}$ (см. рисунок)

$d\vec{r}_i$ ортогонален $d\vec{R}$ - вектор, перпен. к $d\vec{R}$

$$(d\vec{r}_i)_{\text{rel.}} = [d\vec{R}, \vec{r}_i]$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$$

$$d\vec{r}_i = d\vec{R} + [d\vec{R}, \vec{r}_i] \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left[\frac{d\vec{R}}{dt}, \vec{r}_i \right]$$

$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ - скорость центра масс

$$\vec{v}_i = \vec{V} + [\vec{V}, \vec{r}_i]$$

перем. относительно $\vec{V}$

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{V} + [\vec{V}, \vec{r}_i]|^2 - U(\vec{r}_i, t)$$

$$\sum_{i=1}^N |\vec{V} + [\vec{V}, \vec{r}_i]|^2 = V^2 + \sum_{i=1}^N \vec{V} \cdot [\vec{V}, \vec{r}_i] + \sum_{i=1}^N [\vec{V}, \vec{r}_i]^2$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{V} \cdot [\vec{V}, \vec{r}_i] m_i = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{V}, \vec{r}_i] \cdot \vec{V} =$$

$$= [\vec{V}, \vec{r}_i] \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{R}_y = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = 0$$

Умножив $\vec{V}$ на $\sum m_i \vec{r}_i$ и учитывая, что $\sum m_i \vec{r}_i = 0$

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\vec{V}, \vec{r}_i]^2 - U(\vec{r}_i, t) \quad \sum_{i=1}^N m_i = M$$

$$\sum_a m_a \Omega_a^2 r_a^2 \sin^2 \theta_{a, r_a} = \sum_a m_a \Omega_a^2 r_a^2 (1 - \cos^2 \theta_{a, r_a}) = \sum_a m_a (\Omega_a^2 r_a^2 - \Omega_a^2 r_a^2 \cos^2 \theta_a)$$

$$= \sum_a m_a (\Omega_a^2 r_a^2 - (\vec{\Omega}_a, \vec{r}_a)^2)$$

$\stackrel{\text{Thom}}{=} \quad \stackrel{\text{Th}}{=}$

$$L = \frac{N}{2} V^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a (\underbrace{\Omega_a^2 r_a^2}_{\text{kinem. en. bray.}} - \underbrace{(\vec{\Omega}_a, \vec{r}_a)^2}_{\text{kinem. en. bray.}}) - U(\vec{r}, t)$$

mb. maso kinem. en. bray.

kinem. en. bray. maso en. bray.

$$T_{br} = \frac{1}{2} \sum_a \rho(\vec{r}) \underbrace{d^3 r_a}_{m_a} (\Omega_a^2 r_a^2 - (\vec{\Omega}_a, \vec{r}_a)^2) = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) (\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}, \vec{r})^2) d^3 r_a =$$

$\parallel$
 m_a

$\parallel$
 V_{ab}

$$\square^{\perp}$$

$$d^3 r_a$$

$$= \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) (\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}, \vec{r})^2) d^3 r = T_{br}$$

$\parallel$
 V_{ab}

mb. maso kinem. en. bray.
kinem. en. bray.

maso en. bray.
kinem. en. bray.

$$T_{br} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\Omega_a^2 r_a^2 - (\vec{\Omega}_a, \vec{r}_a)^2) = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\Omega_a^2 r_a^2 - (\vec{\Omega}, \vec{r})^2)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$\vec{A} (A_1, A_2, A_3)$$

$$\vec{B} (B_1, B_2, B_3)$$

$$T_{br} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\Omega_a^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \equiv A_i B_i$$

$$\Omega^2 = \Omega_i \Omega_i = \Omega_i^2 \quad \vec{r} (x_1, x_2, x_3)$$

$$r^2 = x_i^2$$

$$(\vec{\Omega}, \vec{r})^2 = \Omega_i x_i \Omega_k x_k$$

$$\Omega_i^2 = \Omega_i \Omega_k \delta_{ik}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{ik} \equiv \sum_a m_a (\delta_{ik} x_i^2 - x_i x_k)$$

mnozgo uniprav
T.T. k istim
ovim. omemo

$$T_{br} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\underline{\Omega_i \Omega_k} x_i^2 \delta_{ik} - \underline{\Omega_i \Omega_k} x_i x_k) = \frac{1}{2} \underline{\Omega_i \Omega_k} \sum_a m_a (\delta_{ik} x_i^2 - x_i x_k)$$

$$T_{br} = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$

$$L = \frac{N}{2} V^2 + \frac{1}{2} \underbrace{I_{ik} \Omega_i \Omega_k}_{\text{Thom}} - U(\vec{r}, t)$$

$$I_{ik} = \sum_{a=1}^N m_a (\delta_{ik} x_i^2 - x_i x_k)$$

gle nat. tom. nogo znane maso maso
gle mb. maso nogo znane maso (maso) u mnozgo uniprav

gromozhina no
kai primenya

$$x_i^2 = x_i^2 + x_j^2 + x_k^2$$

$$I_{ik} = \int_{Vol} \rho(\vec{r}) (\delta_{ik} x_i^2 - x_i x_k) d^3r \quad I_{ii} = I_{ii} \text{ инерц. момент}$$

$$I_{ik} (i \neq k) = - \sum m x_i x_k \quad I_{11} = \sum m (x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) \quad I_{11} = \sum m (x_2^2 + x_3^2)$$

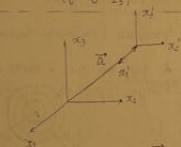
момент инерции, как момент инерции тела относительно оси

$$I_{22} = \sum m (x_1^2 + x_3^2)$$

как момент инерции, так и момент инерции тела относительно оси

$$I_{33} = \sum m (x_1^2 + x_2^2)$$

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad \text{хар. кр. Т.Т.: 1) масса} \quad \left. \begin{array}{l} 2) 3 \text{ канонич. момента импульса} \end{array} \right\} 4 \text{ канонич.}$$



как движение системы и транс. скор., и
или вращения сист. координат (или углов вращения)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a} \quad a = \text{const}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' + [\vec{\Omega}', \vec{r}] \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}' + [\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

$$\vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{r}] = \vec{v}' + [\vec{\Omega}', \vec{r}]$$

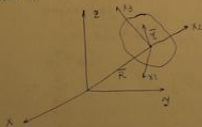
$$\vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{r}] + [\vec{\Omega}, \vec{a}] = \vec{v}' + [\vec{\Omega}', \vec{r}] \quad \vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{a}]$$

$$\Omega = \Omega'$$

для того, чтобы
вычисления
можем одно считать (поэтому они являются одним и тем же)

$$\Omega = \Omega'$$

12.04.11.



$$\vec{r}, \vec{v}, \vec{\omega}, \vec{\Omega} \equiv \vec{v}', \vec{v}', \vec{\omega}', \vec{\Omega}' \rightarrow \text{наш набор}$$

в системе - координат

$\vec{r}$ - вектор положения, но не связан с
положением, а углы - величины вращения.

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}$ - наш набор.

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{r} \quad L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} + d\vec{r}$$

$$[\vec{v}, \vec{r}]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} + [\frac{d\vec{\Omega}}{dt}, \vec{r}] \quad \vec{v} = \vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

$$L = \frac{M}{2} V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U(\vec{r}) \quad I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$$

I_{ik} - задано относительно центра масс

$$I_{ik} = \int \rho(\vec{r}) \cdot (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV$$

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

т.е. задана 4 параметрами: массой, радиусом и 2-ми главными моментами инерции.

- 1) $I_1 = I_2 = I_3 \Rightarrow$ "макс. сим. пог. "сферич. телескоп" $\rightarrow$ сфера (или куб, если масса от центра, или группа)
- 2) $I_i = I_k + I_j \Rightarrow$ "осесимметрич. телескоп"
- 3) $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \Rightarrow$ "несимметрич. телескоп"



масс. телескоп (осесимм. телескоп)

и масса-телескоп, $\perp$ ось $x_3 \Rightarrow$ сфера радиуса a



масса телескоп, $\perp$ ось $x_3 \rightarrow$ осесимм. телескоп

$$I_{ik}(k \neq i) = \int_{-b_{k1}}^{b_{k1}} \int_{-a(x_1)}^{a(x_1)} \int_{-a(x_2)}^{a(x_2)} dx_1 \cdot \rho(x_1, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \cdot x_i x_k dx_2 dx_3$$

$$\rho(\vec{r}) = \rho(x_1, \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$$

зад. на m x_3 в попер. с. на ос. телескопа

$$I_{2k}(k \neq 2) = 0$$

$$I_{3k}(k \neq 3) = 0$$

$$I_{11} = \int_{-b_{11}}^{b_{11}} \int_{-a(x_1)}^{a(x_1)} \int_{-a(x_2)}^{a(x_2)} \rho(x_1, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) (x_1^2 + x_2^2) dx_2 dx_3 = I_{22} \quad \forall i \neq k$$

$$I_{13} \neq I_{11}$$

Момент инерции, обобщенный и пространственный

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{p}_i]^{(q)} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i m_i, \vec{V}_{q_i}^{(i)}] = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i, [\vec{\Omega}, \vec{r}_i]] = \sum_{i=1}^N m_i (\Omega_i r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\Omega}))$$

$$M_i = \sum_{i=1}^N m_i (\Omega_i r_i^2 - (x_i)_i (\vec{r}_i, \vec{\Omega}_i)) \quad \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$M_i = \sum_{i=1}^N m_i (\Omega_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z)) = \quad \vec{r}_i^2 = \sum_{k=1}^3 (x_i^k)^2 = (x_i^k)^2$$

$$= \Omega_x \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 y_i^2 - x_i^2 x_i) = \quad \vec{r}_i \Omega_i = (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z) = \sum_{k=1}^3 (x_i^k \Omega_k)$$

$$= \Omega_x \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 y_i^2 - x_i^2 x_i)}_{I_{xx}} = I_{xx} \Omega_x \quad \boxed{M_i = I_{xx} \Omega_x}$$

а) пространственный интеграл меса

$$i = 1, 2, n \quad q_1, \dots, q_n \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} \end{array} \right. \quad \delta y = 0 \Rightarrow$$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} V^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{xx} \Omega_x^2}_{T_{rot}} - U(\vec{r})$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{trans}}{\partial \dot{V}} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\Omega}} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{\Omega}} \end{array} \right.$$

$$dU(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}_i} \right) \cdot d\vec{r}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^N -\vec{F}_i (d\vec{r}_i + [\vec{r}_i, d\vec{\Omega}]) = -d\vec{R} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i, d\vec{\Omega}]$$

$$= -d\vec{R} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - d\vec{\Omega} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(in)} + \vec{F}_i^{(out)}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}^{(in)} + \vec{F}^{(out)} \quad \vec{F}^{(in)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(in)} = \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \vec{F}_{j,k} = 0 \quad \vec{F}_{x,y} + \vec{F}_{y,x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{V}} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\Omega}} = \vec{K}$$

$$\frac{d}{dt} M \vec{V} = \vec{F} \leftarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \vec{V}} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \Omega} = K_j \rightarrow \frac{d}{dt} M_j = K_j$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \Omega_j} = \frac{1}{2} (I_{jk} \Omega_k + I_{ij} \Omega_i) = I_{jk} \Omega_k = M_j$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} M \vec{V} = \vec{F} \\ \frac{d}{dt} \vec{M} = \vec{K} \end{array} \right.$$

Угловая Демпа

N - малая угловая скорость (по оси n_1, n_2, n_3 или x_1, x_2, x_3)

$$d\vec{y} = dy \vec{n}_2$$

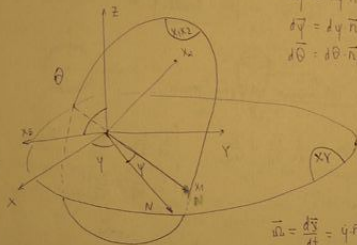
$$d\vec{y} = dy \vec{n}_3$$

$$d\vec{\theta} = d\theta \vec{n}_N$$

Вектор скорости вращения

$$d\vec{y} = d\vec{y} + d\vec{y} + d\vec{\theta} =$$

$$= dy \vec{n}_2 + dy \vec{n}_3 + d\theta \vec{n}_N$$



$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{y}}{dt} = \dot{\varphi} \vec{n}_2 + \dot{\psi} \vec{n}_3 + \dot{\theta} \vec{n}_N$$

11.04.11

$$\vec{R}, \varphi, \psi, \theta, \vec{R} = \vec{V}, \varphi, \psi, \theta$$

$$\vec{R} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\Omega}$$

$$L = \frac{M}{2} V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U(\vec{r})$$

$$d\vec{y} = dy \vec{n}_2, \quad d\vec{y} = dy \vec{n}_3, \quad d\vec{\theta} = d\theta \vec{n}_N, \quad d\vec{x} = d\vec{y} + d\vec{y} + d\vec{\theta}$$

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{n}_2 + \dot{\psi} \vec{n}_3 + \dot{\theta} \vec{n}_N$$

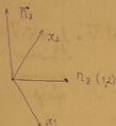
$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dy}{dt} \vec{n}_2 + \frac{dy}{dt} \vec{n}_3 + \frac{d\theta}{dt} \vec{n}_N$$

$$\vec{n} = \Omega_1 \vec{n}_1 + \Omega_2 \vec{n}_2 + \Omega_3 \vec{n}_3, \quad \Omega_i = \Omega_i(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$$

$$\vec{n}_N = n_{N1} \vec{n}_1 + n_{N2} \vec{n}_2 + n_{N3} \vec{n}_3, \quad \vec{n}_2 = n_{21} \vec{n}_1 + n_{22} \vec{n}_2 + n_{23} \vec{n}_3$$

$$\vec{\Omega} = \underbrace{(\dot{\varphi} n_{N1} + \dot{\theta} n_{N1})}_{\Omega_1} \vec{n}_1 + \underbrace{(\dot{\psi} n_{N2} + \dot{\theta} n_{N2})}_{\Omega_2} \vec{n}_2 + \underbrace{(\dot{\psi} n_{N3} + \dot{\theta} n_{N3})}_{\Omega_3} \vec{n}_3$$

$$\begin{cases} n_{M1} = n_N \cos \psi = \cos \psi \\ n_{M2} = 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\sin \psi \\ n_{M3} = 0 \end{cases}$$

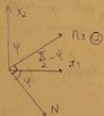


$$n_{21} = n_2 \sin \theta = \sin \theta$$

$$n_{21} = n_2 \sin \theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin \theta \sin \psi$$

$$n_{22} = n_2 \sin \theta \cos \psi = \sin \theta \cos \psi$$

$$n_{23} = n_2 \cos \theta = 1$$



$$\begin{cases} n_{31} = \sin \theta \sin \psi \\ n_{32} = \sin \theta \cos \psi \\ n_{33} = \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} (-\sin \psi) \\ \Omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \cdot 0 + \dot{\psi} \end{cases}$$

тут мы видим, что у нас есть не один, а два вектора

Обобщение геометрических соотношений

$$I_{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = I_2 = I_3 - \text{магнетонный момент}$$

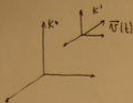
$$\mu \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} = 0 \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K} = 0$$

$$\vec{V} = \text{const} \quad \vec{M} = \text{const} \quad \text{обс. гл. 1}$$

$$M_i = I_{\vec{\omega}} \Omega_i$$

$$M_i = I \Omega_i \Rightarrow \vec{M} = I \vec{\Omega}$$

$$\vec{M} = \text{const} \Rightarrow \vec{\Omega} = \text{const}$$



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_0} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_0} \quad L = \frac{m \cdot \vec{V}^2}{2} - U(\vec{r}_0)$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{V}_0 = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_0} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}, \quad \vec{V}_0 = \vec{V}' + \vec{V}(t)$$

$$L = \frac{m \vec{V}^2}{2} + m \vec{V}' \cdot \vec{V}(t) - U(\vec{r}) \leftarrow m \vec{V}' \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt} m \vec{r}' \cdot \vec{V} - m \vec{r}' \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$L = \frac{m \cdot \vec{V}^2}{2} - U(\vec{r}') - m \vec{r}' \cdot \vec{W}(t)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{W}(t)$$

оригинал как норм. координ.

$$\frac{d}{dt} m \vec{V}' = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m \vec{W}(t)$$

так как $U(\vec{r}) = 0$, то $\frac{d}{dt} m \vec{V}' = - m \vec{W}(t)$



$$\vec{r}' = \vec{r}$$

Сум. к. брасс. с упр. коор. w
относ. K'

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{V}_{br}, \quad \vec{V}_{br} = [\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

Нормаль. сум. к. брасс. с упр. коор. w
относ. K и брасс.

$$L = \frac{m}{2} (\vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}])^2 - U(\vec{r}) - m \vec{r} \cdot \vec{W}(t)$$

$$L = \frac{m}{2} \vec{V}^2 + m \vec{V} \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}] + \frac{m}{2} [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 - U(\vec{r}) - m \vec{r} \cdot \vec{W}(t)$$

$$dL = m \vec{V} \cdot d\vec{V} + m \cdot d\vec{V} [\vec{\Omega}, \vec{r}] + m \vec{V} \cdot [d\vec{\Omega}, \vec{r}] + m [\vec{\Omega}, d\vec{r}] + m [\vec{\Omega}, \vec{r}] \cdot d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} - m d\vec{r} \cdot \vec{W}(t)$$

в упр. коор. сум. к. брасс. с упр. коор. w, поэтому норм. коор. зависит от $\vec{r}$ и $\vec{V}$.

$$dL = m \vec{V} \cdot d\vec{V} + m [\vec{\Omega}, \vec{r}] \cdot d\vec{V} + m \cdot [\vec{V}, \vec{\Omega}] \cdot d\vec{r} + m [\vec{\Omega}, \vec{r}] \cdot d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} - m \vec{W} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = m \vec{V} + m [\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m [\vec{V}, \vec{\Omega}] + m [\vec{\Omega}, \vec{r}] \cdot \vec{\Omega} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m \vec{W}$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{V} + m [\vec{\Omega}, \vec{V}] + m [\vec{\Omega}, \vec{r}] = m [\vec{V}, \vec{\Omega}] + m [[\vec{\Omega}, \vec{r}], \vec{\Omega}] - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m \vec{W}$$

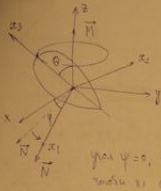
$$\frac{d}{dt} m \vec{V} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + m [\vec{r}, \ddot{\vec{r}}] + 2m [\vec{V}, \vec{\Omega}] + m [\vec{\Omega}, [\vec{r}, \vec{\Omega}]] - m \vec{W}$$

бл. поле

с. Корпускулярный эффект

обоз. с. гравитации

Симметричные тела



$$I_1 = I_2 \neq I_3 \quad I_1 = I_2 = I$$

$$\psi = 0, \text{ но } \dot{\psi} \neq 0.$$

$$M_1 = I_1 \Omega_1 \quad M_2 = I_2 \Omega_2$$

$$M_3 = I_3 \Omega_3$$

$$1) M_1 = 0 \quad M_1 = I_1 \Omega_1 = I \dot{\theta}$$

$$I \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$$

$$\theta = \text{const}$$

$$2) M_2 = M \sin \theta \quad M_2 = I_2 \Omega_2 =$$

$$= \dot{\psi} \sin \theta \cdot I$$

$$M \sin \theta = \dot{\psi} \sin \theta \cdot I$$

$$\dot{\psi} = \frac{M}{I} = \text{const}$$

$$3) M_3 = M \cos \theta$$

$$M_3 = I_3 \Omega_3$$

$$\Omega_3 = \frac{M}{I_3} \cos \theta = \text{const}$$

прямая линия - ось x_3 оси
свободного вращения

Движение в неинерциальной

системе отсчета

$$L = \frac{m \vec{v}_0^2}{2} - U(\vec{r}_0) \quad \text{уравн}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_0} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_0}$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{v}_0 = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_0} = \vec{F}_0$$



1) если есть грав. центр инерции, и гравитация

2) нет грав., или грав. инерции

3) гравитация неграв. грав., инерции + грав.

неинерц.
сист. отс.

тогда движение грав. инерции не инерц. м. б. неинерц. инерц.

упр. движение в инерции, если инерц. не инерционна.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}'} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}'}$$

$$\vec{r}_0 = \vec{R} + \vec{r}'$$

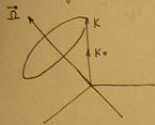
$$dt = dt'$$

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|$$

$$\vec{v}_0 = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t)$$

$$L = \frac{m}{2} (\vec{V} + \vec{v}')^2 - U(\vec{r}') \rightarrow L = \frac{m}{2} \vec{V}^2 + m \vec{V} \cdot \vec{v}' + \frac{m}{2} \vec{v}'^2 - U(\vec{r}')$$

$$\psi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

$$\Pi_{\text{yons}} \quad \overline{W} = 0, \quad \overline{\Omega} = \text{const} \quad \overline{\tau} = \overline{\tau}_0$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{N}^2 + m \dot{N} [\vec{h} \cdot \vec{r}] + \frac{m}{2} [\vec{h} \cdot \vec{r}]^2 - U(\vec{r})$$

2) if $\text{var} = 0$, no term. re
normalized, a given. so exp.
- $[\bar{\Omega}, \bar{\Omega}]$

$$\overline{V}_0 = \overline{V} + \overline{V}_{b_p} = \overline{V} + [\overline{H}, \overline{v}]$$

$$p = m \cdot (\vec{v} + [\vec{\pi}, \vec{v}]) =$$

$$= m \cdot \vec{v}_0 = \vec{p}_0 \quad \text{Ursprung des Ruhesystems}$$

NOTION DE MESURES

$$E = \vec{V} \cdot \vec{p} - L \quad E = m\dot{\psi}^2 + m\vec{V} \cdot (\vec{\Omega} \vec{r}) - \frac{m}{2} \dot{\psi}^2 - m\vec{V} \cdot (\vec{\Omega} \vec{r}) - \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \vec{r})^2 + U(\vec{r})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}}$$

$$E = \frac{m \cdot N^2}{2} + U - \underbrace{\frac{m}{2} [\vec{n} \cdot \vec{v}]^2}_{\text{kinetic energy}} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 - [\vec{n} \cdot \vec{v}]$$

44 young.

$$E = \frac{m}{2} (v_0 - [\vec{n}\vec{v}])^2 + U - \frac{m}{2} [\vec{n}\vec{v}]^2 \quad E = \underbrace{\frac{m}{2} v_0^2 + mU - m v_0 [\vec{n}\vec{v}]}_{E_0} + \frac{m}{2} [\vec{n}\vec{v}]^2 - \frac{m}{2} [\vec{n}\vec{v}]^2$$

$$E = E_0 - m \cdot V_0 \cdot [\bar{N} \bar{\tau}]$$

$$E = E_0 - \underbrace{\Delta(\tau, m\vec{v}_0)}_{\vec{M}_0 = \vec{M}}$$

$$E = E_0 - \vec{n} \cdot \vec{M}_0$$

Энергия в калориях - 1000.
= 1000 калориям

Метод Лагранжа описания мех. сист.

$$\underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_n, \underbrace{\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)}_n = 2n$$

if зад. 6 мех. бр. $t=0$ 2n const, но
смысл имеет найти эти q -ы в
V мех. бр.

$$L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

представим:

формулы Лагранжа

показатели силы совершенно взаимно обратны

$$p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$$

$$\underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_n, \underbrace{p_1(t), \dots, p_n(t)}_n = 2n$$

n канонических пар

координаты и импульсы абс. канонически сопряженные коорд.

$H(q, p, t)$ - ф-я гамильтона, гамильтониан

$$\underbrace{\frac{dq_i}{dt} = \hat{A}_i H}_{n \text{ ур.}} \quad \underbrace{\frac{dp_i}{dt} = \hat{B}_i H}_{n \text{ ур.}} \quad \parallel \text{ 2n ур.-в. системы!}$$

уравн. движения

задача: найти гамильтониан из заданных
в 2n ур.-в.

$$q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)$$

$$L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad E = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

$$q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t) \quad \text{настроим набор } 2 \times n \text{ независимых переменных}$$

$$H(q, p, t) - q \rightarrow \text{Гамильтониан, гамильтониан}$$

$$\dot{q}_i = \hat{A}_i \cdot H \quad p_i = \hat{B}_i \cdot H \quad \hat{A}_i, \hat{B}_i - \text{операторы}$$

нужен не один набор переменных + координат $\rightarrow$ преобразование Лежандра (также каноническое преобразование)

Дано: $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s \quad (s \neq m) \quad f(x, y)$

бывает $U_j = \frac{\partial f}{\partial y_j} \rightarrow U_j = U_j(x, y) \rightarrow y_j = y_j(x, U) \quad j=1, 2, s$

нужны + новые переменные: $x_1, \dots, x_m, U_1, \dots, U_s$ (новые переменные у нас x, U)

настроим $y(x, U)$ для каждой y_j $y_j = \frac{\partial U}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = - \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i=1, m$$

Универсальная, т.е. $y(x, U) = \sum_{k=1}^s y_k U_k - f(x, y) \rightarrow$ здесь x и y не независимы

получим

$$dy = \sum_{k=1}^s y_k dU_k + \sum_{k=1}^s U_k dy_k - df \quad df = \sum_{l=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l + \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \right) dy_k$$

$$dy = \sum_{k=1}^s y_k dU_k + \sum_{k=1}^s U_k dy_k - \sum_{l=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l - \sum_{k=1}^s U_k dy_k$$

$y(x, U)$ то $dy = \sum_{k=1}^m \frac{\partial y}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k=1}^s \frac{\partial y}{\partial U_k} dU_k \quad y_k = \frac{\partial y}{\partial U_k}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_k} = - \frac{\partial f}{\partial x_k}$

Дано: $\underbrace{q_1, \dots, q_n, t}_{m=n+1}, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_{s=n} \quad L(q, t, \dot{q})$

бегеи: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \rightarrow p_j = p_j(q, t, \dot{q}) \rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}_j(p, q, t) \quad j=1, 2, \dots, n$

прежде: $\underbrace{q_1, \dots, q_n, t}_{\text{связанные}}; \underbrace{p_1, \dots, p_n}_{\text{свободные}}$

найти: $H(q, t, p)$, для которой $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

уверждаемся, что $H(q, t, p) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q, t, \dot{q})$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

замечаем, что эти уравнения зависят как от q и $\dot{q}$ и p и t .

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ канонически сопряженные координаты и импульсы.

$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = F_i$ обобщенная сила q и p абсолютно независимы.

формулы Гамильтона и его следствия формулы Лагранжа от времени независимы.

полный набор: обобщ. коорд. и обобщ. импульсы (канонически сопряженные)

Получение формулы Лагранжа из формулы Гамильтона:

$H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L$ дано: $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n \quad H(q, t, p)$

бегеи: $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}_j(q, t, p) \rightarrow p_j = p_j(q, t, \dot{q})$

прежде: $q_1, \dots, q_n, t, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$

найти: $L(q, t, \dot{q})$, для которой $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$

уверждаем: $L(q, t, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - H(q, t, p)$

$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
 $\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

- 1) много переменных
- 2) попр. Лагранжа
- 3) попр. Гамильтона
- 4) много Пуассона

Пуассон: выбрать $n=2$

$q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, p_1, p_2$

мыслим задан формализм Лагранжа.

гано: $q_1, q_2, t, \dot{q}_1, \dot{q}_2; L(q, t, \dot{q})$

бегер: $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \rightarrow p_2 = p_2(q, t, \dot{q}) \rightarrow \dot{q}_2 = \dot{q}_2(q, t, p_2, \dot{q}_1)$

реперенг: $\underbrace{q_1, q_2, t, \dot{q}_1, p_2}_{\text{коор.}} \underbrace{p_1}_{\text{импульс}}$

наименов: $R(q_1, q_2, t, \dot{q}_1, p_2)$, где каноническое $\dot{q}_2 = \frac{\partial R}{\partial p_2}$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1,2 \quad \frac{\partial R}{\partial q_1} = -\frac{\partial L}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial q_1} \quad \text{на реперенгиве } \dot{q}_1, q_2 \text{ Пуассон абс. ф. Лап.}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = -\frac{\partial R}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L}{\partial q_2} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial R}{\partial q_2}$$

$$p_2 = -\frac{\partial R}{\partial q_2}; \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial R}{\partial p_2}$$

а на реперенгиве $p_2 - q_2$ Гамильтона

$$H(q, p, t) \quad \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

если гамильтониан абс. не зависит от времени, он абс. инвариант. гл. а. т. м.

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$n=1 \quad H(q, p, t) \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \rightarrow q = q(t, t_1, t_2) \\ p = p(t, t_1, t_2)$$

$$H(q(t, t_1, t_2), p(t, t_1, t_2)) = E(t_1, t_2)$$

энергия - гамильтониан, в котором нормализованы q и p из переменных канонических ур. гамильтона

$$q_0 = q(t=0, t_1, t_2) \quad p_0 = p(t=0, t_1, t_2) \rightarrow t_1 = t_1(q_0, p_0), \quad t_2 = t_2(q_0, p_0)$$

$$E(q_0, p_0) - \text{энергия}$$

алгоритм действия, с помощью которого произв. переход от формулы Лагранжа к формуле Гамильтона: дано $L(q, \dot{q}, t)$ - найдем $H(q, p, t)$

$$1) p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow p_i = p_i(q, \dot{q}, t) \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

$$2) H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q, \dot{q}, t) \text{ подставляем } \rightarrow H(q, p, t)$$

$$3) \text{ канонич. ур-я гамильтона } \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{начальн. ур-я: } q_i(t, d_1, \dots, d_n) \\ p_i(t, d_1, \dots, d_n)$$

14.05.11.

$$q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)$$

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad E = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j p_j - L(q, \dot{q}, t)$$

$$q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$$

$$H(q, p, t) \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad F_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$1) L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q) \quad n=1 \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{a(q)}$$

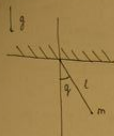
$$2) H(q, p, t) = \dot{q} p - L = \dot{q} p - \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 + U(q) = \frac{p^2}{a(q)} - \frac{1}{2} a(q) \frac{p^2}{a^2(q)} + U(q) = \frac{1}{2} a(q) \frac{p^2}{a(q)} + U(q)$$

$$3) \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{a(q)} \quad \dot{p} = \frac{p^2}{2 \cdot a^2(q)} \cdot \frac{da}{dq} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

$$q = q(t, d_1, d_2), \quad p = p(t, d_1, d_2)$$

$$\text{или от } t, p \text{ на заданном } H(q, p, t) \\ H(q(t, d_1, d_2), p(t, d_1, d_2)) = E(d_1, d_2)$$

использ. гб-я $\rightarrow$ энтальпия



$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + m g l \cos q$$

$$a = m l^2 \quad U = -m g l \cos q$$

$$p = m l^2 \dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m l^2}$$

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2 m l^2} - m g l \cos q$$

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

лагранжевы координаты и обобщенные скорости

$$\underbrace{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N}_{3N}, \underbrace{\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N}_{3N} = \vec{v}_N$$

$$1) \vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = m_a \vec{v}_a$$

$$2) \vec{U}_a = \frac{\vec{p}_a^2}{m_a}$$

$$3) H(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{a=1}^N \vec{v}_a \vec{p}_a - \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2 + U(\vec{r})$$

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{a=1}^N \frac{\vec{p}_a^2}{m_a} - \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \frac{\vec{p}_a^2}{m_a^2} + U(\vec{r}) =$$

$$= \sum_{a=1}^N \frac{\vec{p}_a^2}{2 m_a} + U(\vec{r})$$

$$3) \vec{r}_a = \vec{r}_a = \frac{\vec{p}_a}{m_a}, \quad \dot{\vec{p}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$$

Получение канонических уравн. Гамильтона из принципа наименьшего действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

$$H(q, p, t) = \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \cdot p_j - L(q, \dot{q}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^N p_j \cdot \frac{dq_j}{dt} - H(q, p, t) \right\} dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^N p_j \cdot dq_j - H(q, p, t) dt \right\}$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^N p_j \cdot dq_j - H(q, p, t) dt \right\} = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^N \delta p_j \cdot dq_j + \sum_{j=1}^N p_j \cdot \delta dq_j - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j dt - \sum_{j=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j dt \right\}$$

но dt не берем, t не берем
берем

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \cdot \delta dq_j = \int_{t_1}^{t_2} p_j \cdot d\delta q_j = p_j \cdot \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \cdot dp_j$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \delta p_j \cdot dq_j - \sum_{j=1}^n \delta q_j \cdot dp_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \cdot dt - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \delta p_j \cdot dt \right\} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt \right)}_{=0} \cdot \delta p_j - \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dt \right)}_{=0} \cdot \delta q_j \right\} = 0$$

Избегая отрицательного брос p_j и $q_j = 0$ н.с. можно считать $\delta p_j = 0$.

$$\begin{aligned} dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt &= 0 & \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j} & \left\{ \begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned} \right. & \text{уравн. и канонич. ур-я} \\ dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dt &= 0 & \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}$$

2n канонич. ур-я Гамильтона

Применяем теорему Гамильтона, когда рассматриваем циклические

$$L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n)$$

$$H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n, t)$$

используем q_n и p_n как
координату

$$\textcircled{1} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \textcircled{2} \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

$$\textcircled{3} \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad \textcircled{4} \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$$

$$\textcircled{4} \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0, \quad p_n = \text{const} \equiv L$$

$$\textcircled{1} \text{ и } \textcircled{2} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, L, t)}{\partial p_j} \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

переменные независимы от q_n .

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, L, t)}{\partial q_j} \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

$$q_j = q_j(t) \quad p_j = p_j(t) \quad j=1, \dots, n-1 \quad \left| \quad \textcircled{3} \quad \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{\partial H(q_1(t), \dots, q_{n-1}(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), L, t)}{\partial L} \right.$$

$$p_n = L \quad \downarrow \quad q_n = \int \frac{\partial H}{\partial L} dt$$

Переход от одних переменных к др. к формулам
Лагранжа и формулам Гамильтона. Канонические преобразования

$q \rightarrow q', t \rightarrow t'$, т.е. $\forall Q_i = Q_i(q, t)$ переход от старых координат к новым
 $q_i = q_i(Q, t)$

Лагранжиан $\rightarrow$

Гамильтониан $q, p \rightarrow Q, P$ $Q_i = Q_i(q, p, t)$ и $P_i = P_i(q, p, t)$ или
 $q_i = q_i(Q, P, t)$ и $p_i = p_i(Q, P, t)$ канонические преобразования

Получается, чтобы новые Q и P удовлетворяли

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad H'(Q, P, t)$$

таким преобраз-ем от старых переменных к нов. поз. канонические

def. канон. преобраз. - это преобраз., кот. прев. систему от стар. переменных к нов. (q, p) к новым Q, P, т.е. выполняются канонические ур-я Гамильтона.

полное преобраз-е: новая коорд. функц. выраж. через старые координаты и импульсы не входят

Получение канонических преобразований с помощью производящих функций

пусть дан к.п. $q_i = q_i(Q, P, t)$ и $p_i = p_i(Q, P, t)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) \right) dt = 0 \rightarrow q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

тогда $\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - H'(Q, P, t) \right) dt = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{если преобраз-е} \\ \text{каноническое} \end{array} \right\} \rightarrow Q_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) dt = \sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - H'(Q, P, t) dt + \frac{dF}{dt} dt \text{ где } F(q, p, Q, P, t) \rightarrow \text{производящая ф-я}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = F \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) = \sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - H'(Q, P, t) + \frac{dF}{dt}$$

$q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ — общие $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n$

произвольная q — общая, различная
с такими переменными и производными
оковы.

$$F_1(q, Q, t) \quad F_2(q, P, t) \quad F_3(p, Q, t) \quad F_4(p, P, t)$$

удобно брать вместо 4 буга произвольных функций

$$\frac{dF_1(q, Q, t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{Q}_j - H'(p, Q, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\sum_{j=1}^n \dot{q}_j \left(p_j - \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \right) - \sum_{j=1}^n \dot{Q}_j \left(p_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) + \left\{ H'(p, Q, t) - H(q, p, t) - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right\} = 0$$

$$p_j = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_j}, \quad p_j = - \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_j}, \quad H'(p, Q, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}$$

$$j=1, \dots, n \quad p_j = p_j(q, Q, t) \quad p_j = p_j(q, Q, t) \rightarrow p_j = p_j(Q, P, t), \quad q_j p_j = p_j(q, p, t) \\ q_j = q_j(Q, P, t), \quad Q_j = Q_j(q, p, t)$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}$$

Новые переменные по процедуре
получены абелем каноническим

$F_1(q, Q, t)$	$F_2(q, P, t)$	$F_3(p, Q, t)$	$F_4(p, P, t)$
$\frac{\partial F_1}{\partial q_j} = p_j$	$\frac{\partial F_2}{\partial q_j} = p_j$	$\frac{\partial F_3}{\partial p_j} = -q_j$	$\frac{\partial F_4}{\partial p_j} = -q_j$
$\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -p_j$	$\frac{\partial F_2}{\partial P_j} = Q_j$	$\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} = -p_j$	$\frac{\partial F_4}{\partial P_j} = Q_j$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$L = 1, 2, 3, 4$

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{dF}{dt}$$

произведение $p_j \dot{q}_j$ всегда имеет
одну размерность, разн. с размерностями
(энергии, хотя энергия может иметь V
размерности), отсюда p_j и q_j могут иметь
разн. размерности

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad p_i \dot{q}_i = Q_i \quad \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} = -p_i \quad -p_i = q_i$$

преобразование поканало метамор коорд. и им.

$$F_2(q, p) = \sum_{k=1}^n q_k p_k \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \quad p_i = p_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = q_i \quad q_i = q_i \quad \text{матрица преобраз.}$$

$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, t)$ метамор преобразование (универсальное)

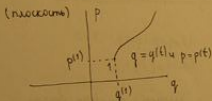
$$F_2(q, p, t) = \sum_{k=1}^n Q_k(q_1, \dots, q_n, t) p_k \quad \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = Q_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = Q_i(q_1, \dots, q_n, t) = Q_i$$

метамор преобраз. только для координат.

мы показываем, что метамор преобраз. абс. канонич. м.

Разное пространство: $\rightarrow$ это пространство q, p

$$n=1 \quad q, p \quad q = q(t), \quad p = p(t)$$



задание параметров кривой на п-м q, p

м. пространство

def: пространство q, p наз. q, p -пространством, если оно метамор преобраз. инвариантно q, p , метамор с тем метамор.

6 q, p -пространство, 6 метамор метамор. будет метамор. по метамор

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg|_{q, p} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} \bigg|_{q, p} = 0$$

= 2n уравнений для метамор. 2n const

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + U(x) \quad x, p \rightarrow \text{метамор м. пространство}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_0} \bigg|_{p, x, p} \quad \frac{p}{m_0} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{p, x, p} = \frac{\partial U}{\partial x} \bigg|_{p, x, p} = 0 \quad \text{метамор м. пространство метамор экстремум.}$$

$$q = x - x_p$$

$$U(x + x_p) = U(x_p) + \frac{\partial U}{\partial x} \bigg|_{x=x_p} \cdot q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \bigg|_{x=x_p} q^2 = K q^2$$

$$F = - \frac{\partial U}{\partial x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{метамор метамор } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \\ \text{м метамор метамор } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \end{array} \right.$$

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + U(x_p) + \frac{1}{2} q^2, \quad K > 0 \quad F = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$$

$$H(q, p, t) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\underbrace{q_1, \dots, q_n}_q, \underbrace{p_1, \dots, p_n}_p \rightarrow \underbrace{Q_1, \dots, Q_n}_Q, \underbrace{P_1, \dots, P_n}_P$$

канонические преобразования:

$$Q_i = Q_i(q, p, t)$$

$$P_i = P_i(q, p, t)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

новые функции координат, углов, импульсов.

канонический г.н.

новый Гамильтониан

Гамильтониан функции

канонические преобразования - каноническое преобразование

$$F(q, p, t) \rightarrow H(Q, P, t)$$

$$F_2(q, p, t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = Q_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t) \\ P_i = P_i(q, p, t) \end{cases}$$

2n канонических

1. что такое кан. пр-во?

2. что такое каноническое пр-во?

3. новый Гамильтониан

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

мера Либмана

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n - \text{элемент фазового объема}$$

$$\diamond = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t)$$

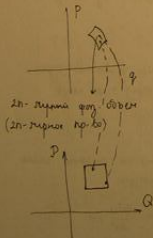
$$\square = \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n$$

$$\diamond = \square$$

q, p и т.д. зависят, но элемент фаз. объема не меняется.

мера Либмана

фаз. объем не меняется при каноническом преобразовании



$$\int_0^1 dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int D \cdot dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

↖ *интеграл по фазовому пространству*

if *предполагается канонич.* $D=1$.

Докажем, что $D=1$:

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}$$

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \bigg|_{P=\text{const}} \cdot \frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \bigg|_{q=\text{const}}$$

$$a_{jk} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k \partial P_j}$$

определяем матрицу a_{jk} $\Rightarrow |\det D| = 1$

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

определяем $n \times n$ матрицу

$$b_{jk} = \frac{\partial P_j}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial F_2}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial p_k \partial Q_j}$$

эти матрицы транспонированы, отсюда

Условия теор. Ляпунова: при выполнении тех. условий q, p и t совп.

$$n=1 \quad q = q(q, p, t) \\ p = p(q, p, t)$$

интегрируем: V — область t и p в q и p при $t=0$, p — область V в t .



q_0 — нач. условия, p_0 — нач. условия, t — нач. условия

Свойства Ляпунова

$$\text{Ляпунов } \psi(q, p, t) \text{ и } \psi(q, p, t) \quad [\psi, \psi] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_j} \frac{\partial \psi}{\partial p_j} - \frac{\partial \psi}{\partial p_j} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right)$$

$$\text{Пример: } \psi(q, p, t) = q_i \quad \psi(q, p, t) = q_k \quad [q_i, q_k] = 0$$

$$q = p_i, \quad \psi = p_i \quad [p_i, p_i] = 0$$

$$q = p_i, \quad \psi = q_k \quad [p_i, q_k] = \delta_{ik}$$

Общая теория Лягуна

1) $[y, const] = 0$

2) $[y, \psi] = -[y, \psi]$

3) $[y_1 + y_2, \psi] = [y_1, \psi] + [y_2, \psi]$

4) $[y_1, y_2, \psi] = y_1[y_2, \psi] + y_2[y_1, \psi]$

5) $[y, \psi]_{q,p} = [y, \psi]_{q,p}$

при канонич. и гамильтонов. кр. π инвар.

мысли $f(q, p, t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

мысли $f(q(t), p(t), t)$ - умнож. гл. 2. мунд

м.о. $\frac{df}{dt} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial t} = -[H, f]$

мысли $f(q(t), p(t)) = \text{умнож. гл. 1. м.}$ $[H, f] = 0$

Занятие канонич. ур. Лягуна с помощью кр. π

мысли $f(q, p, t) = q_i$

тогда $\frac{dq_i}{dt} = [H, q_i]$ или $\dot{q}_i = [H, q_i]$

мысли $f(q, p, t) = p_i$ $p_i = [H, p_i]$

$$\frac{dp_i}{dt} = [H, p_i]$$

миссия Лягуна

мысли $\psi(q(t), p(t), t)$ и $\psi(q(t), p(t), t)$ - гл. умнож. $\forall$ мунд

тогда $[y, \psi] = X(q(t), p(t), t)$ - мунд умнож. $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [\psi] = \left[\frac{dy}{dt} \psi \right] + \left[y, \frac{dy}{dt} \right] = 0$

Ур-е Гамильтона-Лагранжа

$$q_i = q_i(t, \underbrace{q_1, \dots, q_n}_{2n}, p_1, \dots, p_n)$$

$$F_2(q, p, t) \rightarrow q, p \rightarrow Q, P$$

$$p_i = p_i(t, \underbrace{q_1, \dots, q_n}_{2n}, p_1, \dots, p_n)$$

для наших мыслей гамильтонов. кр., мунд $Q, P = \text{const}$

$$q_i = q_i(Q, P, t), p_i = p_i(Q, P, t)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad 0 = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$H' = \text{const} \Rightarrow H' = 0$$

$$0 = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$H(q_1, q_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, p_n = \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \text{ ур. Г.-Л.}$$

$$\underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_q, \underbrace{p_1(t), \dots, p_n(t)}_p \quad H(q, p, t)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$q, p \rightarrow Q, P \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

$$F_2(q, p, t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t) \\ P_i = P_i(q, p, t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_i = q_i(Q, P, t) \\ p_i = p_i(Q, P, t) \end{cases}$$

$$H' = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

if t q -e ne bogum cara q -s, a bogum
nawo proutogonye on ne, no ogra uz const
abz. aggrupmion

agrup. const. ne nany (L-n-1)

$$q_1 p \rightarrow Q_2, P_2$$

$F_2^{(1)}(q, P_c, t)$ nawo mawo
proutogonye q -s, no
not. konst. const

$$H(q, p) \quad H' = 0 \quad (\text{konst. const} = 0)$$

$$H(q_1, q_n, p_1 = \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial q_1} \dots p_n = \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial t} = 0$$

$$F_2^{(1)} = F_2^{(1)}(q, t, \underbrace{d_1, d_2, \dots, d_{n+1}}_{n+1 \text{ param. op. x}}) =$$

$$= S(q, t, d_1, \dots, d_n) + d_{n+1}$$

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$\text{Nawo pawanu } S = S(q_1, \dots, q_n, t, d_1, \dots, d_n)$$

$$S(q, P_c, t)$$

2n

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial S}{\partial P_{ci}} = Q_{ci} \end{cases} \quad \begin{cases} q_i = q_i(t, \overset{n}{Q_c}, \overset{n}{P_c}) \\ p_i = p_i(t, Q_c, P_c) \end{cases}$$

q -e T awumawo. Q awo

$$d_i = P_{ci}$$

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t, P_{c1}, \dots, P_{cn})$$

qizumawo awo proutogonye q -yus S , komawo q -tawo q -s T -a.

$$\frac{d}{dt} S(q, t, P_c) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right)}_{p_j} \dot{q}_j + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)}_{-H}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H \right\} dt$$

genawo

$$\frac{d}{dt} S(q, t, P_c) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H$$

$$S(q(t), t, P_c) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H \right\} dt$$

genawo, kaw q -s t awo

Детермин. ур-е Тарнасона-Якоби, когда t известно

$$H(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad S(q, p_c, t) = S_0(q, p_c) + S_1(t, p_c)$$

$$H(q, p = \frac{\partial S_0}{\partial q}) + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} = \mathcal{L}_1(p_c), \quad S_1(t, p_c) = \mathcal{L}_1(p_c) \cdot t$$

$\Rightarrow q(t) = \text{const}$

$$H(q, p = \frac{\partial S_0}{\partial q}) + \mathcal{L}_1(p_c) = 0 \quad H(q, p = \frac{\partial S_0}{\partial q}) = -\mathcal{L}_1(p_c) \equiv E(p_c)$$

$$H(q, p = \frac{\partial S_0}{\partial q}) = E(p_c) \rightarrow \text{уравнение ур-е Т-Якоби}$$

$$S(q, t, p_c) = S_0(q, p_c) - E(p_c) \cdot t$$

$$\frac{dS_0}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S_0}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n p_j \cdot \dot{q}_j \quad S_0(q(t), p_c) = \int \sum_{j=1}^n p_j \cdot \dot{q}_j dt \quad \text{уравнение движения}$$

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial S_0}{\partial \dot{q}_j} + 0 \quad S_0(q, p_c)$$

$$\begin{array}{ccc} S_0(q, p_c) & & \text{уравнение} \\ \downarrow & & \uparrow \\ q, p & \rightarrow & p_c, Q_4 \\ H(q, p) & & H_4(p_c) \equiv E(p_c) \end{array}$$

$$H' = H(q, p) \quad \text{хотя } H' = H'(p_c) = H_4(p_c)$$

$$H_4(p_c) = H(q, p = \frac{\partial S_0}{\partial q})$$

Анализ движения при макс. q и p :

$$H(q, p) \text{ назову } q_i = q_i(t, \omega_1, \dots, \omega_n), p_i = p_i(t, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

1) найдем ур-е Т-Я. $H(q, p = \frac{\partial S_0}{\partial q}) = H_4(p_c)$ ур-е ур-е Т-Я. (1)

2) пусть (1) и найдем $S_0(q_i, p_{c1}, \dots, p_{cn})$ и $H_4 = H_4(p_c)$ (2)

3) берем интеграл ур-е по $q \rightarrow Q_4, p_c$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial S_0}{\partial p_{c_i}} = Q_{4i} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_i = q_i(Q_4, p_c) \\ p_i = p_i(Q_4, p_c) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{4) получаем канонич. ур-е Т.} \\ H_4 = H_4(p_c) \quad \dot{Q}_{4i} = \frac{\partial H_4(p_c)}{\partial p_{c_i}} \\ \dot{p}_{c_i} = -\frac{\partial H_4(p_c)}{\partial Q_{4i}} = 0 \rightarrow \\ p_{c_i} = \text{const} \end{array}$$

$$Q_{yi} = \frac{\partial H_y(p_i)}{\partial p_{ci}} t + \beta_i \quad (4a)$$

$$\dot{p}_c = -\frac{\partial H_y(p_c)}{\partial Q_{yi}} = 0 \rightarrow p_{ci} = \text{const} \quad (4b)$$

5) nomenklatura (4a) & (2a) u (3a)

$$q_i = q_i(t, p_c, \beta) \quad p_i = p_i(t, p_c, \beta) \quad (5)$$

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + U(q) \quad n=1$$

1) $\frac{1}{2m_0} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + U(q) = E(p_c)$ nomen $p_c = E$, nomen $E(p_c) = E$, $H_y(E) = E$

2) $\frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2m_0(E - U(q))}$, $S_0 = \int \sqrt{2m_0(E - U(q))} dq \rightarrow S_0 = S_0(q, E)$

3) $p, q \rightarrow Q_y, E$, $\frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2m_0(E - U(q))} = p \rightarrow p = p(q, E)$ yf-e implem. b
nomen (p, q)

$$Q_y = \frac{\partial S_0}{\partial E} = \int \frac{2m_0}{2\sqrt{2m_0(E - U(q))}} dq$$

4) $\dot{Q}_y = \frac{\partial H_y(E)}{\partial E} = 1 \quad Q_y = t + \beta$

$$\dot{E} = -\frac{\partial H_y(E)}{\partial Q_y} = 0, \quad E = \text{const}$$

5) $t = \int \frac{m dq}{\sqrt{2m_0(E - U(q))}} - \beta$

$$q = q(t, E, \beta)$$

$$p = p(q, E) \rightarrow p = p(t, E, \beta)$$

Парагогунае глумне і фазавыя р.т.

$$q, P \rightarrow Q_N, P_C = E$$

$$P \rightarrow \frac{\partial S_0}{\partial q} \rightarrow P = P(q, E)$$

Парагогунае (мат. і фіз.)

$$\frac{1}{2m\omega} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + U(q) = E$$

$$P = \frac{\partial S_0}{\partial q} = \pm \sqrt{2m\omega(E - U(q))} \quad \begin{matrix} + \dot{q} > 0 \\ - \dot{q} < 0 \end{matrix}$$



сва глумне парагогунае, мо
уважне і пага сфазавы бласны нобле
парагогунае (мат. і фіз.) - парагогунае глумне і
парагогунае глумне

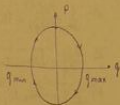
Матэматычны

$$U(q) = \frac{k}{2} q^2, k > 0 \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m\omega}$$

$$p = \pm \sqrt{2m\omega(E - U(q))} \quad p^2 = 2m\omega(E - \frac{k}{2} q^2)$$

$$\frac{p^2}{2m\omega} = E - \frac{k}{2} q^2 \quad \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{k}{2} q^2 = E$$

$$\frac{p^2}{2m\omega E} + \frac{q^2}{2 \frac{E}{k}} = 1$$



$$q, P \rightarrow Q_N, P_C = E \quad S_0(q, E) \quad H_0(E) = E$$

$$P = \frac{\partial S_0}{\partial q} \rightarrow P = P(q, E) \quad P_C = P(E) \quad p(q, E) = \frac{\partial S_0(q, E)}{\partial q} \quad S_0(q, E) = \int P(q, E) dq$$

матэматычны:

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint P(q, E) dq \quad \text{матэматычны, парагогунае глумне і фазавыя р.т.}$$

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2m\omega E} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad J(E) = E \sqrt{\frac{m\omega}{k}}$$

матэматычны глумне глумне. $p, P \rightarrow J, W$

Канстанта канстанта глумне глумне - глумне глумне

$$J(E) = E \sqrt{\frac{m\omega}{k}} \quad E(J) = J \sqrt{\frac{k}{m\omega}} \quad S_0(q, E(J)) = S_0(q, J) \quad S_0(q, E(J)) = S_0(q, J)$$

$$q, P \rightarrow J, W$$

$$H_0(q, J) \quad H_0(J) = E(J) \quad P = \frac{\partial S_0(q, J)}{\partial q} \rightarrow P = P(q, J) \rightarrow \begin{cases} q(J, W) = q \\ P = P(J, W) \end{cases}$$

$$W = \frac{\partial S_0(q, J)}{\partial J} \rightarrow W = W(q, J)$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial H(y)}{\partial W} = 0 \rightarrow J = \text{const}$$

$$\dot{W} = \frac{\partial H(y)}{\partial J} \rightarrow W = \underbrace{\frac{\partial E(y)}{\partial J}}_W \cdot t + d \quad \text{т.к.} \quad \frac{\partial E(y)}{\partial y} = \sqrt{\frac{E}{m_0}} = w$$

w - скорость распространения гравитации в пространстве (p, q)

$$\frac{\partial W}{\partial q} \quad \Delta W = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial S_0}{\partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \underbrace{\oint p(q) dq}_{2\pi J}$$

$$\Delta W = 2\pi \cdot \text{приращение } J \text{ за } \tau_{\text{конт.}} = \frac{2\pi}{\omega} \quad - \text{ср. период конт.}$$

$$\Delta W = W(t + \tau_c) - W(t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial J} = \frac{2\pi}{\tau_c} = \omega!$$

Адиабатические инварианты

$$H(q, p, \lambda) \neq H(t), \text{ т.е. } \lambda = \text{const}$$



некоторые параметры пер-р

считаем $H(q, p, \lambda(t))$

Например, длина волны меняется от времени по ф.е. периодов колебаний

считаем $H(q, p, \lambda(t))$

$$\tau_c \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda \quad \frac{d\lambda}{dt} \approx \frac{\lambda}{\tau_a}$$

$$\tau_c \ll \tau_a$$

Перечень заголовков и страниц:

Вводная лекция - 1
Степени свободы, связи голономные и склерономные - 3
Принцип причинности физики - 4
Законы ньютона - 5
Определение механической системы - 5
Функция Лагранжа механической системы - 5
Принцип наименьшего действия - 6
Эквивалентные функции лагранжа - 7
Ф-я Лагранжа не взаимодей мех сист - 8
Ф-я Лагранжа взаимодей систем - 9
Ф-я Лагранжа мех сист во внешнем поле - 9
Определение обобщенного импульса и силы, обобщ ур-е Ньютона - 9
Циклическая координата. Сохранение импульса канон сопряж цикл коорд - 10
Определение интеграла для механических систем - 10
Однородность времени. Обратимость уравнения - 10
Число независ интегр ур-я для мех сист с n степ своб - 11
Энергия мех системы - 12
Инерциальная система отсчета - 13
Преобразования и пр-п относ Галилея - 14
Ф-я Лагранжа, импульс и энергия - 16
Ф-я Лагранжа во внешн поле при налич голономных связей - 17
Ф-я Лагранджа не взаимодейств точек - 18
Ф-я Лагранджа системы N взаимодей точек - 18
Ф-я Лагранджа системы взаимодей точек во внешнем поле - 18
Импульс и энергия сист мат точек - 18
Сохранение полного импульса всист мат т в однор пр-ве - 20
Сохранение мом импульса в изотропном пространстве - 21
Сохранение проекции мом импульса на ось симметрии пр-ва - 22
Преобразование импульса при переходе от 1й инерц сист к другой - 22
Система центра инерции - 22
Энергия сист мат т котор движутся относ друг друга - 23
Механическое подобие - 24
Мех подобие для обобщ координат - 27
Виральная теорема - 27
Одномерное движение и задача двух тел - 29
Интегрирование уравнения мех сист с одной ст свободы, t однор - 29

Приведенная масса, задача 2х тел -	30
Движение в центральном поле -	31
Симметрия прост в центрально симметр поле -	34
Условие проникновения частицы в центр поля -	34
Задача Кеплера -	36
Рассеяние частиц -	37
Эффективное сечение рассеяния -	39
Упругие столкновения частиц -	40
Неупругие столкновения -	42
Положение равновесия мех сист. Уст и неуст равновесие -	43
Вынужденные колебания. Ф-я Лагранджа и ур-е при внешней силе -	45
Две мех системы вблизи резонанса -	48
Положение уст и неуст равновес с n степ свободы -	49
Диссипативная функция -	54
Вынужденные колебания сист с 1 ст свободы -	55
Поглощение энергии при установившихся колебаниях -	56
Дисперсионная зависимость поглощения от частоты -	56
Твердое тело -	57
Мех система ТТ -	58
Момент импульса связанный со временем -	62
Уравнения движения твердого тела -	62
Углы эйлера -	63
Свободное движение шарового и симметричного волчков -	64
<тут тарабла, две страницы с номером 65, далее все обозначения $n+1$ >	
Симметричный волчок -	66 (было 65)
Движение в неинерциальной системе отсчета -	66
Преобразование энергии и импульса в инерц сист отсчета -	67
Метод Гамильтона описания мех сист -	68
Формализм Гамильтона -	68
Получение формализма Лагранжа из формализма Гамильтона -	70
Получение канонических ур-й Гамильтона из принципа наим действия -	73
Приемущество метода Гамильтона, когда коорд явл циклической -	74
Переход от 1х переменн к др. в формализме Лагр. и формуле Гам. -	75
Канонические преобразования -	75
Получение канонич преобразов с помощью производящих функций -	75
Фазовое пространство -	77
Теорема Лиувилля, частотная теор Леувиля -	78
Скобки Пуассона -	79

Св-ва скобок Пуассона - 79

Запись канонич ур Пуассона в помощью скобок Пуассона - 80

Теорема Пуассона - 80

Уравнение Гамильтона-Якоби - 80

Физ смысл производящей функ S котор удовл ур Гам-Якоби - 81

Решение ур-я Гамильтона-Якоби когда T однородно - 82

Алгоритм действий для нахождения q и p - 82

Периодическое движение в фазовом пр-ве - 84

Адиабатические инварианты - 85

3. ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ **по курсу « ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА».**

Смысловой модуль 1. Описание механических систем методами Ньютона и Лагранжа. ~ 1стр

Тема 1. Обобщенные координаты и связи. ~ 3стр

1. Законы Ньютона. Пределы применимости классической механики. ~ **5стр**
2. Описание положения материальной точки (частицы).
Обобщенные координаты. Степени свободы физической системы.
Описание положения системы N материальных точек.
3. Связи голономные и неголономные, склерономные и реономные.
Описание положения системы N материальных точек (частиц) без связей и со связями.

Тема 2. Механические системы.

1. Принцип причинности в физике. Начальные условия для материальной точки. Полный набор функций системы. Законы Ньютона.
2. Определение системы с n степенями свободы. Определение механической системы. Функция Лагранжа механической системы. Уравнение Лагранжа.

Тема 3. Принцип наименьшего действия.

1. Принцип наименьшего действия. Получить уравнение Лагранжа.
2. Эквивалентные функции Лагранжа.
3. Свойство аддитивности для функций Лагранжа невзаимодействующих механических систем.
4. Функция Лагранжа взаимодействующих механических систем. Функция Лагранжа механической системы во внешнем поле.

Тема 4. Интегралы движения.

1. Определение обобщенного импульса и обобщенной силы. Обобщенное уравнение Ньютона. Циклическая координата. Сохранение импульса, который отвечает циклической координате.
2. Определение интегралов движения механической системы. Число независимых интегралов движения для механической системы с n степенями свободы, когда время однородно.

3. Однородность времени. Обратимость эволюции (движения) механической системы, когда время однородно.
4. Определение энергии механической системы. Сохранение энергии при однородности времени. Условие аддитивности энергии.

Смысловой модуль 2. Применение общей теории Лагранжа для описания материальных точек.

Тема 5. Инерциальные системы отсчета. ~ 13стр

1. Определение инерциальной системы отсчета. Преобразование и принцип относительности Галилея. ~ **14стр**
2. Функция Лагранжа, импульс и энергия свободной материальной точки. ~ **16стр**

Тема 6. Функция Лагранжа системы материальных точек. ~ 16стр

1. Функция Лагранжа, импульс и энергия материальной точки во внешнем поле. Второй закон Ньютона для материальной точки во внешнем поле. ~ **16стр**
2. Функция Лагранжа, импульс и энергия материальной точки с голономными связями. ~ **17стр**
3. Функция Лагранжа математического маятника в поле силы тяжести. Малые колебания математического маятника.
4. Функция Лагранжа, импульс и энергия замкнутой системы материальных точек. Второй закон Ньютона.
5. Функция Лагранжа импульс и энергия взаимодействующей системы материальных точек во внешнем поле. Второй закон Ньютона. ~ **18стр**
6. Функция Лагранжа, импульс и энергия системы материальных точек с голономными связями.

Тема 7. Законы сохранения. ~ 20стр

1. Сохранение полного импульса замкнутой системы материальных точек в однородном пространстве. Третий закон Ньютона. ~ **20стр**
2. Сохранение компоненты импульса в направлении пространственной однородности.

3. Сохранение момента импульса в изотропном пространстве. ~ **21стр**

4. Сохранение проекции момента импульса на ось симметрии пространства. ~ **22стр**

Тема 8. Преобразования энергии, импульса и момента. ~ 22стр

1. Преобразование импульса при переходе от одной инерциальной системы к другой. Система центра инерции. Центр инерции. ~ **22стр**

2. Энергия системы материальных точек в различных инерциальных системах отсчета, которые движутся относительно друг друга. Внутренняя энергия. ~ **23стр**

3. Преобразование момента импульса при смещении и относительном движении инерциальных систем отсчета.

Тема 9. Механическое подобие и вириальная теорема. ~ 24стр

1. Определение подобных движений механической системы. Свойства функции Лагранжа, при которых возможны подобные движения.

2. Механическое подобие, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат. Третий закон Кеплера.

3. Соотношение между средними по времени значениями кинетической и потенциальной энергии, которая является однородной функцией координат, при движении в ограниченной области пространства (Вириальная теорема). ~ **27стр**

Смысловой модуль 3. Интегрирование уравнений движения.

Тема 10. Одномерное движение и задача двух тел. ~ 29стр

1. Интегрирование уравнения движения механической системы с одной степенью свободы, когда время однородно. ~ **29стр**

2. Сведение задачи двух тел к движению одного тела с приведенной массой в центральном поле. ~ **30стр**

Тема 11. Движение в центральном поле.

1. Число степеней свободы при движении частицы в центральном поле. Получить функцию Лагранжа частицы в центральном поле.

2. Интегрирование уравнений движения частицы в центральном поле. Учесть, что функция Лагранжа частицы в центральном поле

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r) \quad .$$

3. Условие замкнутости траектории движения частицы в центральном поле. Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\phi = \int \frac{M}{r^2 m} \frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right)} \quad .$$

4. Симметрия траектории движения частицы в центральном поле. Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\phi = \int \frac{M}{r^2 m} \frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right)} \quad .$$

5. Условие проникновения частицы в центр поля. ~ **34стр** Учесть, что

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right)} \quad .$$

Тема 12. Задача Кеплера. ~ 36стр

1. Качественно рассмотреть возможные движение частицы в потенциальных полях $U = \pm \frac{\alpha}{r}$ при разных значениях энергии E . Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\phi = \int \frac{M}{r^2 m} \frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right)} \quad .$$

2. Рассмотреть возможные траектории движение частицы в потенциальных полях $U = \pm \frac{\alpha}{r}$ при разных значениях энергии E . Учесть, что траектория движения частицы в таких полях

$$\phi = \arccos \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} \pm 1 \right) \quad \text{где } p \text{ и } e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

соответственно параметр и эксцентриситет орбиты.

Смысловой модуль 4. Рассеяние, столкновение и распад частиц. ~ 37стр

Тема 13. Рассеяние частиц. ~ 37стр

1. Рассеяние частиц. Угол рассеяния и его зависимость от прицельного расстояния и скорости частицы до рассеяния. ~ **37стр**

2. Прицельное расстояние и эффективное сечение рассеяния. ~ 39стр

3. Эффективное сечение рассеяния в полях $U = \pm \frac{\alpha}{r}$. (Формула Резерфорда). Учесть, что траектория движения частицы в таких полях

$$\phi = \arccos \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} \pm 1 \right) \quad \text{где } p \text{ и } e = \sqrt{1 + \left(\frac{m \rho v_{\infty}^2}{\alpha} \right)^2}$$

соответственно параметр и эксцентриситет орбиты.

Тема 14. Упругие столкновения и распад частиц. ~ 40стр

1. Упругие столкновения частиц. Соотношение между конечными и начальными значениями скорости в системе центра инерции и в лабораторной системе координат. ~ 40стр
2. Распад одной частицы на две. Импульсы и скорости образовавшихся частиц.
3. Распад одной частицы на $N > 2$ частиц. Верхний предел кинетической энергии, которую может иметь образовавшаяся при распаде частица.

Смысловой модуль 5. Малые колебания.

Тема 15. Свободные одномерные колебания. ~ 45стр

1. Положение равновесия механической системы. Устойчивое и неустойчивое положение равновесия. Уравнения, определяющие положение устойчивого и неустойчивого равновесия механической системы с одной степенью свободы. ~ 49стр
2. Функция Лагранжа и уравнение одномерного движения механической системы вблизи положения равновесия. Свободные одномерные колебания вблизи точки устойчивого равновесия и движение механической системы вблизи точки неустойчивого равновесия.

Тема 16. Вынужденные колебания. ~ 55стр

1. Функция Лагранжа и уравнение одномерного движения механической системы вблизи положения устойчивого равновесия при наличии внешнего поля.
2. Получить общее решение уравнения $m \ddot{x} + kx = F(t)$, которое описывает вынужденные колебания.
3. Исходя из общего решения уравнения, которое описывает вынужденные колебания

$$\xi = e^{i\omega t} \left(\int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' + \xi_0 \right) \quad \text{где} \quad \xi = l \ddot{x} + i \omega x \dot{x}$$

найти $x(t)$, когда внешняя сила $F(t') = f \cos \gamma t$. Рассмотреть случаи $\gamma = \omega$ и $\gamma \neq \omega$.

4. Исходя из решения уравнения, которое описывает вынужденные колебания

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f \cos \gamma t}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$$

рассмотреть движения механической системы вблизи резонанса. Биение при вынужденных колебаниях.

Тема 17. Колебания системы со многими степенями свободы.

1. Уравнения, определяющие положения устойчивого и неустойчивого равновесия системы со многими степенями свободы.
2. Система уравнений, которая описывает малые колебания механической системы со многими степенями свободы вблизи положения равновесия.
3. Найти решения системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которая описывает малые колебания механической системы с n степенями свободы вблизи положения устойчивого равновесия.

4. Исходя из решения системы уравнений, которая описывает малые колебания механической системы с n степенями свободы вблизи положения устойчивого равновесия

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_i^{(\alpha)} a_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \phi_{\alpha})$$

ввести нормальные (главные) координаты. Получить функцию Лагранжа в нормальных координатах. Получить в нормальных координатах уравнение движения при наличии внешней силы.

Тема 18. Затухающие колебания.

1. Получить уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы при наличии силы трения. Найти скорость изменения энергии системы за счет трения. Дать определение диссипативной функции.
2. Исходя из функции Лагранжа $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2$, которая описывает малые колебания механической системы, получить уравнение движения при наличии силы трения. Найти его решения.

3. Получить уравнение Лагранжа для системы со многими степенями свободы при наличии силы трения. Найти скорость изменения энергии системы за счет трения. Дать определение диссипативной функции.

4. Исходя из функции Лагранжа $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j)$ получить уравнения малых колебаний системы со многими степенями свободы при наличии трения и обсудить их решение.

Тема 19. Вынужденные колебания при наличии трения.

1. Уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы при наличии трения и его решение для случая периодической внешней силы.

2. Исходя из решения уравнения вынужденных колебаний системы при наличии трения

$$x = \frac{f \cos(\gamma t + \delta)}{m \sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}}$$

рассмотреть колебания вблизи резонанса, когда собственная частота близка к частоте внешней силы γ . Здесь $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ - декремент затухания, а сила трения $f_{mp} = -\alpha \dot{x}$. Найти поглощение энергии при установившихся колебаниях и дисперсионную зависимость поглощения от частоты.

Смысловой модуль 6. Твердое тело. Неинерциальные системы отсчета.

Тема 20. Поступательное движение и угловая скорость твердого тела. ~ 57стр

1. Описание твердого тела в механике. Скорость движения точек твердого тела как функция скорости поступательного движения и угловой скорости. Скорость поступательного движения и угловая скорость в разных системах отсчета, жестко связанных с твердым телом.

Тема 21. Функция Лагранжа и уравнения движения твердого тела.

1. Функция Лагранжа твердого тела. ~ 58стр

2. Определение тензора инерции. Тензор инерции тела вращения.

3. Момент импульса твердого тела. ~ 62стр

4. Уравнения движения твердого тела. ~ 62стр

Тема 22. Углы Эйлера и симметричный волчок. ~ 63стр

1. Углы Эйлера. Угловая скорость как функция углов Эйлера и их производных по времени. ~ 66стр
2. Рассмотреть свободное движение симметричного волчка. Учесть, что проекции угловой скорости как функции углов Эйлера и их производных по времени равны

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \dot{\psi} ; \quad \Omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \dot{\psi} ; \quad \Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\psi} .$$

Тема 23. Движение в неинерциальной системе отсчета. ~ 66стр

1. Функция Лагранжа и уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета, которая движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета.
2. Функция Лагранжа и уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета, которая вращается относительно инерциальной системы отсчета.
3. Исходя из функции Лагранжа в неинерциальной системе отсчета

$$L = \frac{mv^2}{2} + m \int_v [r \Omega] \frac{m}{2} [\vec{r} \Omega]^2 \int_{vec} \int_{vec} \dot{\psi}$$

найти ускорение частицы в неинерциальной системе отсчета.

4. Исходя из функции Лагранжа во вращающейся системе отсчета

$$L = \frac{mv^2}{2} + m \int_v [r \Omega] \frac{m}{2} [\vec{r} \Omega]^2 \dot{\psi}$$

найти энергию, импульс и момент в неинерциальной системе отсчета.

Смысловой модуль 7. Основы механики Гамильтона. ~ 68стр

Тема 24. Уравнения Гамильтона.

1. Отличие метода Гамильтона от метода Лагранжа. Преобразование Лежандра.
2. Переход от формализма Лагранжа к формализму Гамильтона с помощью преобразования Лежандра. Сохранение энергии.

Тема 25. Функции Гамильтона, Лагранжа и Рауса.

1. Функция Гамильтона математического маятника в поле силы тяжести и материальной точки во внешнем поле .

2. Переход от формализма Гамильтона к формализму Лагранжа с помощью преобразования Лежандра.
3. Переход от формализма Лагранжа к формализму Рауса с помощью преобразования Лежандра.

Тема 26. Канонические преобразования. ~ 75стр

1. Преимущество метода Гамильтона при наличии циклических координат.
2. Получение канонических уравнений Гамильтона исходя из вариационного принципа.
3. Канонические преобразования. ~ 75стр Производящие функции.

Тема 27. Траектория в фазовом пространстве движения вблизи точки устойчивого равновесия.

1. Определение фазового пространства механической системы с n степенями свободы. Уравнения, которые определяют точки равновесия механической системы в фазовом пространстве.
2. Движение механической системы с одной степенью свободы вблизи точки устойчивого равновесия. Траектория в фазовой плоскости этого движения.

Тема 28. Теорема Лиувилля ~ 78стр и скобки Пуассона. ~ 79стр

1. Сохранение фазового объема при канонических преобразованиях. (Общая теорема Лиувилля).
2. Сохранение фазового объема при эволюции (движении) механической Системы. (Частная теорема Лиувилля).
3. Определение скобок Пуассона. Основные свойства скобок Пуассона. Скобки Пуассона для координат и импульсов. Запись полной производной по времени от функции координат, импульсов и времени с помощью скобок Пуассона. Запись канонических уравнений с помощью скобок Пуассона. Теорема Пуассона. ~ 79стр

Смысловой модуль 8. Метод Гамильтона – Якоби. ~ 80стр

Тема 29. Уравнение Гамильтона – Якоби. ~ 80стр

1. Уравнение Гамильтона-Якоби. Производящая функция канонического преобразования к постоянным значениям координат и импульсов. Действие, как функция времени.
2. Укороченное уравнение Гамильтона – Якоби, когда время однородно. Производящая функция преобразования к циклическим координатам и постоянным импульсам.

3. Решение уравнения Гамильтона – Якоби для системы с одной степенью свободы, когда время однородно.

Тема 30. *Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для системы с одной степенью свободы. ~ 85стр*

1. Переменные «действие - угол» для системы с одной степенью свободы. Зависимость от времени переменных «действие - угол».
2. Адиабатические инварианты системы с одной степенью свободы. ~ 85стр
3. Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для малых одномерных колебаний.

Тема 31. *Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для системы с произвольным числом степеней свободы.*

1. Разделение переменных в методе Гамильтона – Якоби. Периодическое и условно периодическое движение в фазовом $2n$ – мерном пространстве ($n > 1$). Переменные «действие – угол» для системы с произвольным числом степеней свободы ($n > 1$). Адиабатические инварианты.