

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Харьковский национальный университет

им. В.Н. Каразина

А.Ю. КИРОЧКИН, Ю.А. КИРОЧКИН, К.Н. СТЕПАНОВ

**ЭНЕРГИЯ, ИМПУЛЬС И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА
СЛАБОЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Учебное пособие

Харьков – 2002 р.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Харьковский национальный университет
им. В.Н. Каразина

А.Ю. КИРОЧКИН, Ю.А. КИРОЧКИН, К.Н. СТЕПАНОВ

**ЭНЕРГИЯ, ИМПУЛЬС И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА
СЛАБОЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Учебное пособие

Харьков – 2002 г.

А.Ю. Кирочкин, Ю.А. Кирочкин, К.Н. Степанов. Энергия, импульс и момент импульса слабозатухающих электромагнитных волн: Учебное пособие. – Харьков, Основа, 2002. – 54 с.

В учебном пособии на основе одной и той же методики описывается перенос энергии, импульса и момента импульса электромагнитной волной, распространяющейся в слабопоглощающей стационарной однородной и гиротропной среде с временной и пространственной дисперсией. Получены и обсуждаются выражения для усредненных по периоду волны плотностей энергии, импульса, момента импульса, их плотностей потоков и удельных потерь. Показано, что законы сохранения импульса и собственного момента импульса (проявляющегося в эффекте Садовского), а также уравнение переноса обычного момента импульса являются следствием закона сохранения энергии и отличаются от него конкретными множителями.

Предлагаемое учебное пособие облегчит изучение соответствующих разделов в курсе лекций по электродинамике сплошных сред, будет полезным как студентам, так и преподавателям физических специальностей высших учебных заведений.

Библиогр.: 19 наим.

Рецензенты:

С.В. Пелетминский, академик НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, сор. нач. отдела ИТФ ННЦ ХФТИ
В.М. Яковенко, академик НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, директор ИРЭ НАН Украины

Утверждено Ученым советом Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина, протокол № 6 от 27.06.2002 г.

ISBN 966-623-131-X

© Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, 2002

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Основные уравнения	6
2. Закон сохранения энергии	7
3. Закон сохранения импульса	19
4. Уравнение переноса обычного момента импульса	21
5. Закон сохранения собственного момента импульса (спина)	23
6. Некоторые примеры (при $\mu_{ij} = \delta_{ij}$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}$)	26
6.1. Волны в однородной изотропной среде	26
6.2. Распространение волн в холодной магнитоактивной плазме (без учета теплового движения частиц)	31
Приложения	38
П1. Связь плотности стороннего тока с амплитудой напряженности электрического поля волны в среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями	38
П2. Усреднение по периоду произведения двух монохроматических величин	43
П3. Матрица, ее определитель, алгебраические дополнения и некоторые действия над ними. Вектор поляризации волны	44
П4. Постоянство фазы амплитуды волны вдоль направления переноса энергии	51
Литература	53

Введение

Процессы переноса энергии, импульса и момента импульса электромагнитных волн, распространяющихся в веществе, относятся к важнейшим проблемам электродинамики сплошных сред. Их теоретическому исследованию посвящено много работ. Рассмотрим некоторые из них.

В работе С.М. Рытова [1] найдены законы сохранения энергии и импульса для электромагнитных волн, распространяющихся в стационарной однородной анизотропной среде при наличии временной и отсутствия пространственной дисперсий. Получено равенство плотности потока энергии волны произведению ее плотности энергии на групповую скорость ($\vec{s} = w\vec{v}_g$ — теорема Рытова). В этой работе С.М. Рытов отмечает, что «путем прямого расчета к коллинеарности $\vec{s}$ и $\vec{v}_g$ пришел ранее Я.Л. Альперт». Такие расчеты для плазмы в магнитном поле ионосферы приведены в работе [2]. М.Е. Герценштейн [3] обобщил результаты С.М. Рытова [1] для сред с пространственной дисперсией. В этом случае плотность потока энергии состоит из вектора Пойнтинга и добавочного слагаемого, обусловленного пространственной дисперсией и иногда называемого «кинетическим» потоком энергии, и, поэтому, скорость распространения энергии совпадает с групповой. В дальнейшем законы сохранения энергии и импульса при распространении электромагнитных волн в средах обсуждались в работах многих авторов (см., например, [4-11]). Надо отметить, что найденные формулировки этих законов для электромагнитных волн, распространяющихся в анизотропных средах с дисперсией, довольно сложны, математические выводы их длинны и громоздки.

В настоящем учебном пособии описывается перенос энергии, импульса и момента импульса электромагнитной волной, распространяющейся в слабопоглощающей стационарной однородной анизотропной и гиротропной среде с временной и пространственной дисперсией. Эти проблемы исследуются с помощью использования одной и той же методики, развитой в работах [12, 13]. Рассматривается замкнутая система, состоящая из среды, движущихся в этой среде сторонних заряженных частиц и электромагнитного поля. Изменения энергии, импульса и момента импульса сторонних заряженных частиц определяются хорошо известными уравнениями, правые части которых пропорциональны как величинам, описывающим сторонние частицы (их заряды и токи), так и величинам, описывающим электромагнитное поле в среде. Но заряды и токи сторонних частиц связаны с напряженностями и индукциями электромагнитного поля в веществе макроскопическими уравнениями Максвелла. Используя эти уравнения, можно выразить заряды и токи через полевые величины (например, через напряженность электрического поля в веществе). Подставляя эти выражения в правые части уравнений, описывающих изменения энергии, импульса и момента импульса сторонних зарядов, можно представить эти правые части в виде слагаемых, квадратичных по напряженности электрического поля в среде. В силу замкнутости рассматриваемой системы эти слагаемые в уравнении для изменения энергии сторонних зарядов должны описывать изменение энергии электромагнитного поля и внутренней энергии вещества, в уравнении для изменения импульса сторонних зарядов — импульса поля и вещества, в уравнении для изменения момента

импульса сторонних зарядов — момента импульса поля и вещества. В предположении медленно изменяющейся амплитуды электрического поля по сравнению с ее фазой (волновой пакет, малое изменение за период волны $T = 2\pi/\omega$ и на расстоянии порядка длины волны λ , поэтому удерживаются только первые производные от амплитуды по времени и координатам) получены простые выражения для усредненных по периоду T плотностей энергии, импульса и момента импульса волны, их плотностей потоков и удельных потерь. Найденное выражение для плотности энергии волны пропорционально квадрату модуля вектора напряженности электрического поля, не зависит явно от вектора поляризации (как и в вакууме, несмотря на анизотропию и гиротропию среды), позволяет легко записать условия положительности (или отрицательности) энергии.

Равенство плотности потока энергии произведению групповой скорости волны на ее плотность энергии для любых собственных электромагнитных волн доказывается непосредственно при выводе закона сохранения энергии. Показано, что законы сохранения импульса и собственного момента импульса (проявляющегося в эффекте Садовского), а также уравнение переноса обычного момента импульса являются следствием закона сохранения энергии и отличаются от него конкретными множителями (это вытекает из совместности уравнений переноса). Например, для собственных электромагнитных волн закон сохранения импульса можно получить умножением закона сохранения энергии на величину $\vec{k}/\omega$, где $\vec{k}$ и ω — волновой вектор и частота волны.

Поэтому плотность импульса волны $\vec{p}$ связана с плотностью энергии w соотношением, аналогичным для фотона

$$\vec{p} = \frac{\vec{k}}{\omega} w = \frac{w}{v_\phi} \frac{\vec{k}}{k},$$

где $v_\phi = \omega/k$ — величина фазовой скорости волны.

Показано, что имеет место закон сохранения составляющих обычного момента импульса волны (его плотность равна векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$ на плотность импульса $\vec{p}$ волны, как в механике), лежащих в одной плоскости с некопланарными векторами фазовой и групповой скоростей, в то время как составляющая, перпендикулярная этой плоскости, не сохраняется. В случае некопланарности векторов $\vec{v}_\phi$ и $\vec{v}_g$ сохраняются все компоненты обычного момента импульса.

Для поляризованной по кругу поперечной волны получен закон сохранения собственного момента импульса (спина), направленного вдоль или против распространения волны в зависимости от право- или левовинтовой поляризации, найдены его плотность, плотность потока и удельные потери. Подчеркнем, что спин перпендикулярен обычному моменту импульса волны. Наличие собственного момента импульса (спина) у поляризованной по кругу электромагнитной волны было предсказано Садовским [14, 15], который показал, что при поглощении такой волны или изменении ее поляризации при падении на экран ему передается вращательный момент.

Отметим, что закон сохранения спина формально можно получить умножением закона сохранения энергии на величину $\pm 1/\omega$ (знаки соответствуют право- или левинтовой поляризации).

В общем виде в компактной форме определены нормированные на единицу векторы поляризации для любых собственных электромагнитных волн. Именно найденные выражения для векторов поляризации позволили избавиться от их явной зависимости и существенно упростить формулы для величин, содержащихся в законах сохранения.

На основании полученных общих выражений в качестве примеров найдены плотности энергии, импульса и моментов импульсов электромагнитных волн, распространяющихся в некоторых средах.

Отдельные вопросы и математические выкладки приведены в приложениях (ссылки обозначаются следующим образом: П.1.12).

Лекции по изложенным в этом пособии вопросам читаются на протяжении ряда лет студентам физико-технического факультета Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина.

1. Основные уравнения

Макроскопическое электромагнитное поле действует на заряд q , движущийся в веществе со скоростью $\vec{v}$, с силой

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (1)$$

Это соотношение определяет напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ полей в веществе, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла (см., например, [9, 10])

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D}' = 4\pi\rho_0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ_0 и $\vec{j}_0$ — плотности сторонних зарядов и токов в веществе.

В линейном приближении вектор обобщенной индукции $\vec{D}'$ связан с вектором $\vec{E}$ соотношением

$$D_i(t, \vec{r}) = \hat{\epsilon}_{ij} E_j(t, \vec{r}). \quad (3)$$

В этом так называемом материальном уравнении электрические и магнитные свойства описываются одним линейным тензорным оператором $\hat{\epsilon}_{ij}$. В силу линейности оператора для плоской монохроматической волны имеем

$$\hat{\epsilon}_{ij} \vec{A}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \vec{A}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t), \quad (4)$$

где $\vec{A}_0$ — не зависящая от времени амплитуда волны, тензор проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ считается заданным (определяется, например, путем решения кинетических уравнений, описывающих свойства и состояние среды). Электромагнитные явления в веществе удобно описывать другой системой (П.1.1-П.1.3), отличной от (2-4), если возможно раздельное описание электрических свойств вещества тензором диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ и магнитных — тензором магнитной проницаемости $\mu_{ij}(\omega, \vec{k})$, причем тензор проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ связан с ними соотношением (см. П.1)

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} - N^2 e_{ij} e_{im} K_m \left(\mu_{ln}^{-1} - \delta_{ln} \right), \quad (5)$$

где $N = ck/\omega$ — показатель преломления, $\vec{k} = \vec{k}/k$, e_{ij} — символ Леви-Чивита.

2. Закон сохранения энергии

При получении законов сохранения энергии и импульса для электромагнитной волны, распространяющейся в веществе, будем исходить из известных изменений соответствующих величин для сторонних зарядов и токов под действием электромагнитного поля.

Изменение в единицу времени кинетической энергии сторонних зарядов в электромагнитном поле определяется выражением

$$\frac{d}{dt} \sum_a \epsilon_a = \sum_a q_a \vec{v}_a(t) \vec{E}(t, \vec{r})_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)}, \quad (6)$$

где суммирование производится по всем сторонним зарядам, $\vec{r}_a(t)$ — радиус-вектор a -го заряда в момент времени t .

Введем плотности распределения сторонних зарядов и сторонних токов

$$\rho_0(t, \vec{r}) = \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)), \quad \vec{j}_0(t, \vec{r}) = \sum_a q_a \vec{v}_a(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) \equiv \rho_0 \vec{v} \quad (7)$$

и перепишем (6) в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_a \epsilon_a - \int dV (t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) dV = 0. \quad (8)$$

Если электромагнитное поле в среде и движущиеся в нем сторонние заряды считать замкнутой системой, то суммарная энергия сторонних зарядов и электромагнитного поля в среде должна сохраняться со временем. Это означает, что в (8) величина

$$-\vec{j}_0(t, \vec{r})\vec{E}(t, \vec{r}) \quad (9)$$

описывает изменение в единицу времени плотности энергии электромагнитного поля и плотности внутренней энергии вещества. С помощью уравнений Максвелла (2) характеристики сторонних частиц $\vec{j}_0(t, \vec{r})$ в (9) можно заменить полевыми характеристиками и тем самым получить закон сохранения энергии для электромагнитного поля в среде, выраженный через квадратичные формы по напряженности электрического поля волны. Из (2) имеем

$$\begin{aligned} -\vec{j}_0\vec{E} &= -\frac{c}{4\pi}\vec{E}\left(\operatorname{rot}\vec{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}'}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\frac{\partial\vec{D}'}{\partial t} + \frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \\ & - \frac{c}{4\pi}\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}'}{\partial t} + \vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) + \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B}) \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть в среде распространяется плоская монохроматическая волна

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \quad \vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{B}_0 \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \quad (11)$$

тогда, усредняя (10) по периоду волны $T = 2\pi/\omega$ (см. П2), получим ту часть работы, совершаемой электрическим полем над сторонними токами $\vec{j}_0$, которая диссипирует в единицу времени в единице объема вещества ($\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ — постоянные амплитуды)

$$\begin{aligned} q &= -\vec{j}_0\vec{E} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\vec{E}^*\frac{\partial\vec{D}'}{\partial t} + \vec{B}^*\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\vec{E}^*\times\vec{B}) = \\ &= \frac{1}{8\pi}\operatorname{Re}\left\{\vec{E}_0^*\left(-i\omega\epsilon_{ij}\left(\omega, \vec{k}\right)\vec{E}_{0j} - i\omega\vec{B}_0^*\vec{B}_0\right)\right\} + \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}\operatorname{div}(\vec{E}_0^*\times\vec{B}_0) = \\ &= \frac{1}{16\pi}\left\{-i\omega\epsilon_{ij}\vec{E}_{0i}\vec{E}_{0j} + i\omega\epsilon_{ij}^*\vec{E}_{0i}\vec{E}_{0j}\right\} = \\ &= \frac{1}{16\pi}\left\{i\omega\epsilon_{ij}\vec{E}_{0i}\vec{E}_{0j} + i\omega\epsilon_{ij}^*\vec{E}_{0i}\vec{E}_{0j}\right\} = -\frac{i\omega}{8\pi}\epsilon_{ij}^A\vec{E}_{0i}\vec{E}_{0j}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2}(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*) \quad (12a)$$

— антиэрмитовская часть тензора проницаемости.

Эта диссипация энергий должна приводить к уменьшению амплитуды поля волны, к нагреванию вещества и изменению его плотности и других параметров, причем эти эффекты, согласно (12), пропорциональны антиэрмитовской части проницаемости. Если определить плотность энергии электромагнитного поля в веществе как разность между внутренней энергией единицы объема вещества при наличии электромагнитного поля и без него при неизменных других параметрах, то ясно, что $|\epsilon_{ij}^A|$ должна быть малой величиной. Говорят, что вещество должно быть прозрачным для электромагнитной волны. Область прозрачности вещества характеризуется неравенствами

$$|\epsilon_{ij}^H(\omega, \vec{k})| \gg |\epsilon_{mn}^A(\omega, \vec{k})|, \quad (13)$$

где

$$\epsilon_{ij}^H = \frac{1}{2}(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}^*) \quad (13a)$$

— эрмитовская часть проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$. Эти неравенства означают, что любая компонента эрмитовской части тензора ϵ_{ij} велика по сравнению с любой компонентой его антиэрмитовской части. Итак, в реальном веществе в области прозрачности из-за наличия малой диссипации энергии амплитуда $\vec{E}_0$ напряженности электрического поля волны будет медленно изменяться во времени и пространстве по сравнению с ее фазой $(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}) \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \quad (14)$$

причем

$$T_A \gg T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ и } L_A \gg \frac{2\pi}{|\vec{k}|}, \quad (15)$$

где T_A и L_A — промежуток времени и расстояние, на которых амплитуда $\vec{E}_0$ изменяется существенным образом.

Выполним в (14) фурье-преобразование амплитуды $\vec{E}_0$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \int d\alpha d\vec{\beta} \vec{E}_0(\omega, \vec{k}; \alpha, \vec{\beta}) \exp i(\vec{k}\vec{r} - i(\omega + \alpha)t). \quad (16)$$

Заметим, что в (16) существенный вклад дают только те фурье-компоненты $\bar{E}_0(\omega, \vec{k}; \alpha, \vec{\beta})$, у которых в соответствии с (15)

$$|\alpha| \ll |\omega| \text{ и } |\vec{\beta}| \ll |\vec{k}| \quad (17)$$

(так называемый волновой пакет). Убедимся в этом на примере разложения амплитуды $\bar{E}_0$ в ряд Фурье по времени

$$\bar{E}_0(t) = \int d\alpha \bar{E}_0(\alpha) \exp(-i\alpha t). \quad (17a)$$

Из формулы обращения

$$\bar{E}_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \bar{E}_0(t) \exp i\alpha t \quad (17b)$$

следует, что в случае постоянства амплитуды во времени имеем

$$\bar{E}_0(\alpha) = \bar{E}_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp i\alpha t = \bar{E}_0 \delta(\alpha), \quad (17b)$$

то есть в (17a) дает вклад только $\bar{E}_0(\alpha)$ при $\alpha = 0$. Если же амплитуда $\bar{E}_0(t)$ медленно изменяется во времени, то δ -образный максимум «размазан» и фурье-образ амплитуды $\bar{E}_0(\alpha)$ отличен от нуля не строго при $\alpha = 0$, а при малых α , таких что $|\alpha| \ll \omega$. Из (3), (4) и (16) следует (см. [12])

$$\begin{aligned} D'(t, \vec{r}) &= \int d\alpha d\vec{\beta} \bar{E}_0(\omega, \vec{k}; \alpha, \vec{\beta}) \epsilon_{ij} \exp i(\vec{k} + \vec{\beta}) \cdot \vec{r} - i(\omega + \alpha)t = \\ &= \int d\alpha d\vec{\beta} \bar{E}_0(\omega, \vec{k}; \alpha, \vec{\beta}) \epsilon_{ij} (\omega + \alpha, \vec{k} + \vec{\beta}) \exp i(\vec{k} + \vec{\beta}) \cdot \vec{r} - i(\omega + \alpha)t = \\ &= \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \left[d\alpha d\vec{\beta} \bar{E}_0(\omega, \vec{k}; \alpha, \vec{\beta}) \left[\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) + \alpha \frac{\partial \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \vec{\beta} \frac{\partial \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})}{\partial \vec{k}} + \dots \right] \exp i(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \alpha t) = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \left[d\alpha d\vec{\beta} \bar{E}_0(\omega, \vec{k}; \alpha, \vec{\beta}) \left[\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \frac{\partial \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})}{\partial \vec{k}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \dots \right] \exp i(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \alpha t) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Оператор в квадратных скобках не зависит от переменных интегрирования α и $\vec{\beta}$. Ограничившись в (18) выписанными членами разложения, после интегрирования по α и $\vec{\beta}$ (см. (16)) имеем

$$D'(t, \vec{r}) = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \left[\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_{0j}(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}) + i \frac{\partial \epsilon_{ij} E_{0j}}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \vec{k}} \frac{\partial E_{0j}}{\partial \vec{r}} \right] \quad (19)$$

(в (19) в последних двух слагаемых аргументы у ϵ_{ij} и E_{0j} те же, что и в первом слагаемом).

Аналогичным образом, подставляя в (2) выражение (14), найдем $\bar{B}(t, \vec{r})$ с точностью до удержания первых производных по времени и координатам от медленно изменяющейся амплитуды $\bar{E}_0$

$$\bar{B}(t, \vec{r}) = -c \int dt' \text{rot} \bar{E}(t', \vec{r}). \quad (20a)$$

Нижний предел в интеграле дает независимую от времени величину, которую надо отбросить как не имеющую никакого отношения к волне. С учетом (14) получаем

$$\text{rot} \bar{E}(t, \vec{r}) = \nabla \times (\bar{E}_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}) \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \times \bar{E}_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}). \quad (20b)$$

Подставим (20b) в (20a) и, совершив преобразование Фурье по времени над амплитудой $\bar{E}_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r})$, продолжим вычисление $\bar{B}(t, \vec{r})$

$$\begin{aligned} \bar{B}(t, \vec{r}) &= -c \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r}) (\vec{k} + \nabla) \times \int dt' \int d\alpha \bar{E}_0(\alpha) \exp(-i(\omega + \alpha)t) = \\ &= -c \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r}) (\vec{k} + \nabla) \times \int d\alpha \bar{E}_0(\alpha) \frac{\exp(-i(\omega + \alpha)t)}{-i(\omega + \alpha)} = \\ &= -i \frac{c}{\omega} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) (\vec{k} + \nabla) \times \int d\alpha \bar{E}_0(\alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{\omega} + \dots \right) \exp(-i\alpha t) = \\ &= -i \frac{c}{\omega} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) (\vec{k} + \nabla) \times \int d\alpha \bar{E}_0(\alpha) \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} + \dots \right) \exp(-i\alpha t) = \\ &= -i \frac{c}{\omega} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{k} + \nabla) \times \bar{E}_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}) = \\ &= \frac{c}{\omega} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \left[\left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{k} \times \bar{E}_0 - i \nabla \times \bar{E}_0 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (19) и (20) в уравнение для $\text{rot } \vec{B}$ системы (2), получим

$$\begin{aligned}
-4\pi\vec{J}_0(\vec{r}) &= \frac{\partial D}{\partial t} - c(\text{rot } \vec{B}(t, \vec{r})) = \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t) \left\{ -i\omega \epsilon_{ij} E_{0j} + \omega \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \right. \\
&\quad \left. - \omega \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial k_m} \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} + \epsilon_{ij} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} \right\} - \frac{c^2}{\omega} \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t) \left\{ (i\vec{k} + \nabla) \times \left[\left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{k} \times \vec{E}_0) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i\nabla \times \vec{E}_0 \right] \right\} = \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t) \left\{ -i\omega \epsilon_{ij} E_{0j} + \frac{\partial \omega \epsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \omega \epsilon_{ij}}{\partial k_m} \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} - \right. \\
&\quad \left. - i \frac{c^2}{\omega} \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) E_{0j} - \frac{c^2}{\omega} \left(\frac{\partial E_{0j}}{\partial x_i} - k_j \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_j} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c^2}{\omega} \left(k_j \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_i} - k_j \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_j} \right) \right\} = \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t) \left\{ -i\omega \left[\epsilon_{ij} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right] E_{0j} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \omega \epsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \omega \epsilon_{ij}}{\partial k_m} \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{c^2}{\omega} (2k_m \delta_{ij} - \delta_{im} k_j - \delta_{jm} k_i) \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} \right\} = \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t) \left\{ -i\omega M_{ij} E_{0j} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \omega M_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \omega M_{ij}}{\partial k_m} \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} \right\},
\end{aligned} \quad (21)$$

где

$$M_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - N^2(\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j). \quad (22)$$

Выражение (21), являющееся следствием уравнений Максвелла, связывает плотность сторонних токов с напряженностью электрического поля волны с точностью до первых производных от ее амплитуды.

Заметим, что разложение (21) формально можно получить с любой степенью точности, если, используя (19) и (20), представить (21) в виде [12]

$$-4\pi\vec{J}_0 = \hat{f}_{ij} E_j(t, \vec{r}), \quad \hat{f}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{M}_{ij}, \quad (23)$$

причем в случае не зависящей от времени и координат амплитуды $\vec{A}_0$ имеем

$$\hat{f}_{ij} \vec{A}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t) = f_{ij}(\omega, \vec{k}) \vec{A}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t), \quad f_{ij}(\omega, \vec{k}) = -i\omega M_{ij}(\omega, \vec{k}).$$

Уравнение (21) является основным при определении изменений энергии, импульса, момента импульса электромагнитной волны, распространяющейся в прозрачной среде.

Получим изменение энергии волны [11, 12]. Подставим (21) в (9), усредним по периоду $T = 2\pi/\omega$ (см. П2), в коэффициентах при производных от амплитуды $\vec{E}_0$ выбросим M_{ij}^A , малые по сравнению с M_{ij}^H ввиду (13)

$$\begin{aligned}
-\dot{J}_0 \vec{E} &= -\frac{1}{2} \text{Re } \vec{J}_0 \vec{E}^* = \frac{1}{8\pi} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial k_m} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} - \right. \\
&\quad \left. - i\omega M_{ij}^H E_{0i}^* E_{0j} \right\} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial k_m} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \omega M_{ij}^{H*}}{\partial k_m} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} - i\omega M_{ij}^H E_{0i}^* E_{0j} + i\omega M_{ij}^H E_{0i}^* E_{0j} \right\} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \omega M_{ij}^{H*}}{\partial \omega} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial k_m} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} - \frac{\partial \omega M_{ij}^{H*}}{\partial k_m} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} - i\omega M_{ij}^H E_{0i}^* E_{0j} + \right. \\
&\quad \left. + i\omega M_{ij}^{H*} E_{0i}^* E_{0j} \right\} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial k_m} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \omega M_{ij}^{H*}}{\partial k_m} E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} \right\} \left(E_{0i}^* \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m} + E_{0j} \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_m} \right) - 2i\omega \frac{M_{ij} - M_{ji}^*}{2} E_{0i}^* E_{0j} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} E_{0i}^* E_{0j} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial k_m} E_{0i}^* E_{0j} \right\} = \frac{i\omega}{8\pi} M_{ij}^A E_i^* E_j = \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} + q,
\end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}
w &= \frac{1}{16\pi} \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} E_i^* E_j, \\
S_m &= -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial k_m} E_i^* E_j, \\
q &= -\frac{i\omega}{8\pi} M_{ij}^A E_i^* E_j.
\end{aligned} \quad (25)$$

Здесь w , $\vec{S}$ и q — усредненные по периоду волны ее плотность энергии, плотность потока энергии и удельная мощность потерь энергии соответственно. Выражения (25) были получены В.В. Пустоваловым и В.П. Силиным [8].

Подставим эрмитовскую часть тензора M_{ij} из (22) в (25)

$$\vec{E}_0 = \vec{E}^0 + i\vec{E}^1 + \vec{E}^2 + \dots, \quad (26)$$

слагаемые которого определяются цепочкой уравнений, получающихся из (21) (ограничимся записью первых двух уравнений цепочки)

$$M_{ij}^H E_j^0 = 0 \quad (27)$$

$$\omega M_{ij}^H E_j^1 - i\omega M_{ij}^A E_j^0 + \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} \frac{\partial E_j^0}{\partial t} - \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial k_m} \frac{\partial E_j^0}{\partial x_m} = 0 \quad (28)$$

Из условия разрешимости однородной системы уравнений (27) находим дисперсионное уравнение для собственных волн

$$M^H(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (M^H \equiv \det M_{ij}^H), \quad (29)$$

а также вектор поляризации $\vec{e}$ для любой собственной волны, дисперсия которой $\omega = \omega(\vec{k})$ определяется из (29)

$$\vec{E}^0 = \vec{e}(\omega, \vec{k}) E_0(t, \vec{r}; \omega, \vec{k}), \quad e_i = \frac{e_{ij} a_j}{\sqrt{a_n e_{nm} a_m} \text{Sp} e}. \quad (30)$$

Здесь $\vec{a}$ — произвольный комплексный вектор,

$$e_{ij} = M^H(M_{ij}^H)^{-1}, \quad (M_{ij}^H)^{-1} M_{jm}^H = \delta_{im}, \quad (31)$$

$$e_{ij} e_{mn} = e_{in} e_{mj} \text{ при } M^H = 0. \quad (32)$$

(Подробнее о векторе поляризации и свойствах матрицы e_{ij} см. (ПЗ). Заметим, что элемент e_{ij} есть алгебраическое дополнение к элементу M_{ij}^H .)

Учитывая (31), легко проверить, что определенный в (30) вектор $\vec{e}$ удовлетворяет уравнениям (27). Из (30) и (32) следует [7, 12]

$$e_i^* e_j = \frac{e_{ij}^* a_i e_{js} a_s}{a_n^* e_{nm} a_m \text{Sp} e} = \frac{e_{ij}^* a_i e_{js} a_s}{a_n^* e_{nm} a_m \text{Sp} e} = \frac{a_i^* e_{is} a_s}{a_n^* e_{nm} a_m \text{Sp} e} = \frac{e_{ij}}{\text{Sp} e}, \quad (33)$$

откуда следует, что вектор поляризации $\vec{e}$ нормирован на единицу

$$\vec{e}^* \vec{e} = 1. \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad w &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial \omega \epsilon_{ij}^H}{\partial \omega} E_i^* E_j + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \kappa \kappa_j) E_i^* E_j \right\} = \\ &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial \omega \epsilon_{ij}^H}{\partial \omega} E_i^* E_j + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\vec{k} \times \vec{E}^*)(\vec{k} \times \vec{E}) \right\} = \\ &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial \omega \epsilon_{ij}^H}{\partial \omega} E_i^* E_j + \vec{B}^* \vec{B} \right\}, \end{aligned} \quad (25.1)$$

где $\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$ (из (20) без учета производных от $\vec{E}_0$ ввиду их малости).

$$\begin{aligned} 2) \quad S_m &= -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial \epsilon_{ij}^H}{\partial k_m} E_i^* E_j + \frac{\omega}{16\pi} \frac{c^2}{\omega^2} (2k_m \delta_{ij} - \delta_{im} k_j - \delta_{jm} k_i) E_i^* E_j = \\ &= -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial \epsilon_{ij}^H}{\partial k_m} E_i^* E_j + \frac{\omega}{16\pi} \frac{c}{\omega} \left\{ \vec{E} \times \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}^*) + \vec{E}^* \times \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \right\}_m = \\ &= -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial \epsilon_{ij}^H}{\partial k_m} E_i^* E_j + \frac{c}{16\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B})_m, \end{aligned}$$

или

$$\vec{S} = \frac{c}{16\pi} \left(\vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B} - \frac{\omega}{c} \frac{\partial \epsilon_{ij}^H}{\partial \vec{k}} E_i^* E_j \right). \quad (25.2)$$

$$3) \quad q = -\frac{i\omega}{8\pi} \epsilon_{ij}^A E_i^* E_j. \quad (25.3)$$

Выражения (25.1), (25.2) и (25.3) приводятся во многих источниках, в которых рассматривается закон сохранения энергии волнового пакета (см., например, [10]). Заметим, что плотность потока энергии (25.2) состоит из реальной части вектора Пойнтинга (первые два слагаемых справа) и добавочного слагаемого, обусловленного пространственной дисперсией и иногда называемого «кинетическим» потоком энергии.

Запишем закон сохранения энергии (24) для какой-либо собственной волны ($J_0 = 0$). В этом случае амплитуда напряженности электрического поля волны $\vec{E}_0(t, \vec{r}; \omega, \vec{k})$ может быть представлена в виде ряда, в котором каждый последующий член по величине мал по сравнению с предыдущим,

Для собственных волн ($\vec{j}_0 = 0$) в основном приближении (когда в (26) удерживаем только наибольший член ряда $\vec{E}^0$ в представлении (30)) выражения (25) существенно упрощаются. Действительно, учитывая (27), (30), (31) и (33), имеем

$$w_0 = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial \omega M_{ij}^H}{\partial \omega} E_i^0 E_j^0 = \frac{\omega}{16\pi} |E_0|^2 \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial \omega} e_i^* e_j = \frac{\omega |E_0|^2}{16\pi \text{Sp}e} M_{ij}^H (M_{ij}^H)^{-1} \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial \omega} = \frac{\omega |E_0|^2}{16\pi \text{Sp}e} \frac{\partial M^H}{\partial \omega} = \frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial M^H(\omega, \vec{k}) |\vec{E}^0|^2}{\partial \omega \text{Sp}e} \quad (34)$$

(использовано выражение для дифференциала определителя $dM = MM^{-1}dM$, см. (ПЗ.8)).

$$\vec{S}_0 = -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial k} E_i^0 E_j^0 = \vec{v}_\varphi w_0, \quad (35)$$

$$q_0 = -\frac{i\omega}{8\pi} M_{ij}^H E_i^0 E_j^0 = -\frac{i\omega}{8\pi} e_i^* e_j |\vec{E}^0|^2 = 2\gamma_0 w_0, \quad (36)$$

где

$$\vec{v}_\varphi = -\frac{\partial M^H / \partial \vec{k}}{\partial M^H / \partial \omega} \quad (37)$$

— групповая скорость волны (она легко определяется и из (29))

$$0 = \frac{dM^H(\omega, \vec{k})}{dk} \vec{k} = \frac{\partial M^H}{\partial k} + \frac{\partial M^H}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dk} = -\frac{\partial M^H / \partial \vec{k}}{\partial M^H / \partial \omega} = \vec{v}_\varphi, \quad (37')$$

$$\gamma_0 = -i \frac{e_i^* e_j}{\partial M^H / \partial \omega} \quad \text{— декремент затухания волны} \quad (38)$$

(совпадает с формулой (ПЗ.20), полученной другим способом).

Надо помнить, что в правые части выражений (34)–(38) необходимо подставить $\omega = \omega(\vec{k})$ — частоту рассматриваемой собственной волны, удовлетворяющую дисперсионному уравнению (29), причем в (34) и (35) — после дифференцирования.

Таким образом, для собственной волны закон сохранения энергии (24) в основном приближении принимает вид

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + \text{div} \vec{S}_0 + q_0 = 0. \quad (39)$$

Выражение для w_0 (34) можно упростить, если привести матрицу M_{ij}^H к диагональному виду. Для приведения матрицы M_{ij}^H к диагональному виду необходимо решить уравнение

$$|M_{ij}^H - \eta \delta_{ij}| = 0 \quad (40)$$

или

$$\eta^3 - \eta^2 \text{Sp} M^H + \eta \text{Sp} e - M^H = 0, \quad (40a)$$

которое представимо в виде

$$0 = (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_3) = \eta^3 - \eta^2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) + \eta(\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3) - \eta_1\eta_2\eta_3, \quad (40b)$$

где η_1 , η_2 и η_3 — вещественные корни уравнений (40), (40a), (40b), являющиеся собственными значениями матрицы M_{ij}^H (см. (ПЗ.34)).

Из равенства коэффициентов при одинаковых степенях η в (40a) и (40b) следует

$$M^H(\omega, \vec{k}) = \eta_1(\omega, \vec{k}) \eta_2(\omega, \vec{k}) \eta_3(\omega, \vec{k}), \quad (41)$$

$$\text{Sp} e = \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3. \quad (42)$$

С учетом (41) и (42) выражение для плотности энергии собственных волн (34) упрощается

$$w_0 = \frac{\omega}{\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3} \frac{\partial(\eta_1\eta_2\eta_3) |\vec{E}^0|^2}{\partial \omega 16\pi} \quad \text{при } M^H = \eta_1\eta_2\eta_3 = 0, \quad (43)$$

откуда для собственной волны с дисперсией $\eta_i(\omega, \vec{k}) = 0$ имеем

$$w_0 = \omega \frac{\partial \eta_i(\omega, \vec{k}) |\vec{E}^0|^2}{\partial \omega 16\pi} \Big|_{\eta_i(\omega, \vec{k})=0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (44)$$

Из (44) следует, что нет волн, дисперсионное уравнение для которых $\eta_i = 0$ имеет кратный корень. Если же, например, $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\eta_3 \neq 0$, то из (43) получаем ту же формулу (44) при $i = 1$.

В отличие от обычно используемого выражения для усредненной по периоду волны ее плотности энергии полученные выражения (34) или (44) являются более простыми. Как и в вакууме, они пропорциональны квадрату модуля вектора напряженности электрического поля, не содержат в явном виде вектора поляризации волны ($|\vec{E}^{(0)}|^2 = |\vec{E}_0|^2$), а расчет по формуле (35) представляет собой самый короткий метод получения соотношения между плотностью потока энергии и ее плотностью для любой собственной электромагнитной волны, распространяющейся в прозрачной анизотропной и гиротропной среде. Отметим, что это соотношение доказано только в основном приближении, без учета дальнейших членов разложения в (26). Из (34) следует, что при выполнении условия

$$\frac{\omega}{\text{Re}} \frac{\partial M^H(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} \bigg|_{\omega=\omega(\vec{k})} > 0 \quad (45)$$

плотность энергии собственной волны положительна. Это условие обобщает известные условия для волн в изотропной плазме [4] и для потенциальных колебаний плазмы в магнитном поле [16] на случай произвольной среды с дисперсией.

Уравнение (39) описывает изменение модуля амплитуды волны $|E_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r})|$ во времени и в пространстве. Это уравнение легко получается из (28) после умножения на $E_i^{(0)}$ и взятия реальной части, причем первое слагаемое обращается в нуль, так как в соответствии с (27)

$$E_i^{(0)} M_{ij}^H E_j^1 = (M_{ji}^H E_i^{(0)})^* E_j^1 = 0. \quad (46)$$

Изменение же фазы амплитуды волны во времени и в пространстве описывается второй частью уравнения, полученного умножением (28) на $E_i^{(0)}$. Определяя фазу $\alpha_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r})$ амплитуды волны соотношением

$$E_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}) = |E_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r})| \exp\{i\alpha_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r})\} \quad (46a)$$

после элементарных вычислений имеем (см. П4)

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}_p \alpha_0) = \frac{d\alpha_0}{dt} = 0, \quad (47)$$

т.е. фаза α_0 постоянна вдоль направления переноса энергии волны [19].

3. Закон сохранения импульса

Изменение в единицу времени импульса сторонних зарядов при наличии электромагнитного поля в веществе определяется их уравнениями движения

$$\begin{aligned} \sum_a \frac{d\vec{p}_a}{dt} &= \sum_a \left\{ q_a \vec{E}_H(t, \vec{r}) \bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)} + \frac{1}{c} q_a \vec{v}_a \times \vec{B}(t, \vec{r}) \bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)} \right\} = \\ &= \int \left\{ \rho_0(t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) + \frac{1}{c} \vec{j}_0(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \right\} dV. \end{aligned} \quad (48)$$

Если считать, что импульс замкнутой системы — сторонних частиц и электромагнитного поля в веществе — сохраняется, то выражение

$$-\left\{ \rho_0 \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j}_0 \times \vec{B} \right\} \quad (49)$$

описывает изменение в единицу времени плотности импульса электромагнитного поля в веществе.

Из уравнения непрерывности стороннего заряда

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_0 = 0 \quad (50)$$

выразим ρ_0 через плотность стороннего тока

$$\vec{j}_0(t, \vec{r}) = \vec{j}_0(t, \vec{r}; \omega, \vec{k}) \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (51)$$

с точностью до удержания первых производных по времени и координатам от медленно изменяющейся амплитуды $\vec{j}_0(t, \vec{r}; \omega, \vec{k})$ (аналогично получению (20))

$$\rho_0(t, \vec{r}) = \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \frac{1}{\omega} \left\{ \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{k}\vec{j}_0) - i \nabla \vec{j}_0 \right\}. \quad (52)$$

При подстановке в (49) ρ_0 из (52) и $\vec{B}$ из (20), после усреднения по периоду волны $T = 2\pi/\omega$ имеем

$$\begin{aligned} -\left\{ \rho_0 \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j}_0 \times \vec{B} \right\}_n &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{k_n}{\omega} j_{0i} \left(1 + \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{0i}^* - \frac{i}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{k}\vec{j}_0) E_{0n}^* + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\omega} j_{0i} \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial x_n} - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (j_{0i} E_{0n}^*) \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Подставляя выражение (24) в первое слагаемое справа в (53) и пренебрегая справа в (53) всеми остальными слагаемыми, пропорциональными малым по величине производным от амплитуд стороннего тока и напряженности электрического поля, получим закон сохранения импульса в дифференциальной форме [11, 12]

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_m} s_{nm} + q_n = -\frac{k_n}{\omega} \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right), \quad (54)$$

где

$$\vec{p} = \frac{\vec{k}}{\omega} w \quad (55)$$

— плотность импульса электромагнитного поля,

$$s_{nm} = \frac{k_n}{\omega} s_m \quad (56)$$

— плотность потока n-ой составляющей импульса в направлении оси x_m .

$$q_n = \frac{k_n}{\omega} q \quad (57)$$

— величина, описывающая диссипацию плотности импульса электромагнитного поля в веществе.

При $\vec{j}_0 = 0$ из (54) следует закон сохранения импульса для собственных волн

$$\frac{\partial p_{0n}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_m} s_{0nm} + q_{0n} = 0, \quad (58)$$

где

$$\vec{p}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} w_0, \quad s_{0nm} = \frac{k_n}{\omega} s_{0m} = v_{\text{гpm}} p_{0n}, \quad q_{0n} = \frac{k_n}{\omega} q_0, \quad (59)$$

w_0 , $\vec{s}_0$ и q_0 определяются выражениями. (34) либо (44), (35) и (36), в которые надо подставить $\omega = \omega(\vec{k})$ из дисперсионного уравнения (29) для рассматриваемой собственной волны.

Итак, в рассматриваемом приближении законы сохранения импульса (54) и (58) получаются из законов сохранения энергии (24) и (39) простым умножением всех слагаемых в (24) и (39) на вектор $\vec{k}/\omega$.

Отметим, что соотношение (55) между плотностями импульса и энергии волны такое же, как между импульсом и энергией фотона в квантовой теории.

4. Уравнение переноса обычного момента импульса

Изменение в единицу времени момента импульса сторонних заряженных частиц в веществе определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_a \vec{M}_a &= \frac{d}{dt} \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = \sum_a \vec{r}_a \times \frac{d\vec{p}_a}{dt} = \\ &= \sum_a \vec{r}_a \times \left\{ e_a \vec{E}(t, \vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)} + \frac{e_a}{c} \vec{v}_a(t) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a(t)} \right\} = \\ &= \int \vec{r} \times \left\{ \rho_0(t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) + \frac{1}{c} \vec{j}_0(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \right\} dV, \end{aligned} \quad (60)$$

где ρ_0 и $\vec{j}_0$ определяются (7). Если записать (60) в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_a \vec{M}_a - \int \vec{r} \times \left\{ \rho_0 \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j}_0 \times \vec{B} \right\} dV = 0, \quad (61)$$

то ясно, что выражение

$$-\vec{r} \times \left\{ \rho_0 \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j}_0 \times \vec{B} \right\} \quad (62)$$

описывает изменение в единицу времени плотности момента импульса электромагнитных волн в веществе. Подставляя (53) в (62), после усреднения по периоду $T = 2\pi/\omega$ имеем

$$\begin{aligned} -\left\{ \vec{r} \times \left(\rho_0 \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j}_0 \times \vec{B} \right) \right\} &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ e_{\text{гpm}} x_i \left[\frac{k_n}{\omega} j_{0i} \left(1 + \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{0i}^* - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{i}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_{0n}^* k_i j_{0i}) + \frac{i}{\omega} j_{0i} \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial x_i} - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (j_{0i} E_{0n}^*) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (63)$$

(В правой части (63) ограничимся удержанием только членов первого порядка малости, пропорциональных первым производным от амплитуд $\vec{E}_0$ и $\vec{j}_0$.)

Наибольшим по порядку величины слагаемым в правой части (63) является первое

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left(\vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \right) (\vec{j}_0 \vec{E}^*) \right\}. \quad (64)$$

После подстановки (24) в (64) получим уравнение переноса обычного момента импульса волны

$$\left(\vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{s} + q \right) = - \left(\vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \right) (\vec{j}_0 \vec{E}). \quad (65)$$

(подчеркнем, что (65) формально получается умножением закона сохранения энергии (24) на множитель $\vec{r} \times \vec{k}/\omega$), или

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \right)_i s_j \right\} + q \left(\vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \right)_i + \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{s} \right)_i = - \left(\vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \right)_i (\vec{j}_0 \vec{E})_i, \quad (66)$$

где

$$\vec{M} = \vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \omega = \vec{r} \times \vec{p} \quad (67)$$

— плотность обычного момента импульса волны,

$$\left(\vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \right)_i s_j = e_{lmn} x_m \frac{k_n}{\omega} s_j = e_{lmn} x_m s_{nj} \quad (68)$$

— плотность потока i -ой составляющей обычного момента импульса волны в направлении оси i ,

$$q \left(\vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} \right)_i \quad (69)$$

— величина, описывающая диссипацию i -ой составляющей плотности обычного момента импульса,

$$\left(\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{s} \right)_i \quad (70)$$

— слагаемое, «мешающее» уравнению переноса обычного момента импульса (65) стать законом сохранения типа (24), (54).

В случае распространения собственной волны ($\vec{j}_0 = 0$) величина $\vec{s}$ равна $\vec{s}_0 = \vec{v}_{\text{гп}} w_0$ (см. (35)) и, с учетом (35) и (59) из (66) получаем уравнение переноса обычного момента импульса собственной волны

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{0i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{\text{гп}} M_{0i}) + 2v_{\text{гп}} M_{0i} &= (\vec{v}_{\text{гп}} \times \vec{p}_0)_i, \\ \vec{M}_0 &= \vec{r} \times \frac{\vec{k}}{\omega} w_0 = \vec{r} \times \vec{p}_0. \end{aligned} \quad (71)$$

Если фазовая $\vec{v}_{\text{ф}} = \vec{k} \omega / k$ и групповая $\vec{v}_{\text{гп}}$ скорости не коллинеарны (например, при распространении волн в плазме в магнитном поле или в кристаллах с осью симметрии выше второго порядка), то для составляющих вектора плотности обычного момента, лежащих в одной плоскости с векторами $\vec{v}_{\text{ф}}$ и $\vec{v}_{\text{гп}}$, правая часть в (71) обращается в нуль, то есть для этих составляющих имеют место законы сохранения. Составляющая вектора $\vec{M}_0$, перпендикулярная этой плоскости, как следует из (71), не сохраняется.

5. Закон сохранения собственного момента импульса (спина)

Кроме обычного момента импульса, плотность которого равна векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$ на плотность импульса $\vec{p}$ (аналогично плотности момента импульса вещества), поляризованная по кругу электромагнитная волна обладает собственным моментом импульса (спином), направленным по или против ее направления распространения, величина плотности которого равна отношению плотности энергии волны к ее частоте (эффект Садовского [14, 15]). Найдем этот спин. Преобразуем последнее слагаемое в (63)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2\omega} e_{skr} x_k \frac{\partial}{\partial x_i} (j_{0i} E_{0n}^*) \right\} &= \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2\omega} e_{skr} x_k j_{0i} E_{0n}^* \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2\omega} e_{sin} j_{0i} E_{0n}^* \right\}. \end{aligned} \quad (72)$$

Мы видим, что в (63) с учетом (72) имеется только одно слагаемое

$$-\operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2\omega} e_{sin} j_{0i} E_{0n}^* \right\} = -\operatorname{Re} \frac{i}{2\omega} (\vec{j}_0 \times \vec{E}_0)_s, \quad (73)$$

не содержащее в явном виде радиуса-вектора $\vec{r}$. Именно это слагаемое при подстановке (21) и определяет уравнение переноса

$$-\operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2\omega}(\vec{j}_0 \times \vec{E}_0^*)\right\} = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{\omega} e_{im} E_{0n} \left(-i\omega M_{ij} E_{0j} + \frac{\partial \omega M_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \omega M_{ij}}{\partial k_m} \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_m}\right)\right\}, \quad (74)$$

которое при найденных ниже условиях переходит в закон сохранения собственного момента импульса волны.

Иследуем (74) в случае распространения собственной волны. Полагая $\vec{j}_0 = 0$ и подставляя в правую часть (74) первые два члена разложения из (26), с учетом (27) имеем

$$\frac{1}{8\pi} \operatorname{Re}\left\{ie_{im} e_n^* \left(M_{ij}^H E_j^* E_0 + \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial \omega} e_j^* E_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} - \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial k_m} e_j^* E_0 \frac{\partial E_0}{\partial x_m} - iM_{ij}^A e_j |E_0|^2\right)\right\} = 0. \quad (75)$$

Уравнение (75) должно быть совместно с уравнением (39). Условие совместности получим, умножив (75) скалярно на вещественный вектор $\vec{b}$, определяемый соотношением

$$b_s e_{sm} e_n^* = A e_t, \quad (76)$$

где A — произвольный коэффициент пропорциональности. В соответствии с (46) $e_i^* M_{ij}^H = (M_{ji}^H e_i)^*$ и умноженное на вектор $\vec{b}$ уравнение (75) с равным нулю первым слагаемым становится совместным с (39).

Перепишем (76) в виде

$$-\vec{b} \times \vec{e}^* = A \vec{e}^*. \quad (77)$$

При ненулевых значениях $\vec{b}$ и A из (77) следует

$$\vec{e}^* \cdot \vec{e}^* = e_x^{*2} + e_y^{*2} + e_z^{*2} = 0 \quad (\text{либо } \vec{e} \vec{e} = 0). \quad (78)$$

Заметим, что (78) должно выполняться независимо от значений ω и $\vec{k}$, иначе (78) можно было бы рассматривать как дисперсионное уравнение, а это противоречит (29).

При

$$\vec{b} = A(\vec{e}^* \times \vec{e}) \quad (79)$$

легко проверить, что с учетом (78) и нормировки $\vec{e} \vec{e}^* = 1$ равенство (77) выполняется. Как известно, нормированный на единицу комплексный вектор поляризации $\vec{e}$ поля-

ризованной по кругу электромагнитной волны в декартовой системе координат ($\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$ и $\vec{i}_z$ — орты) имеет вид

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}_x \pm i\vec{i}_y) \quad (80)$$

и удовлетворяет условию (78). Если собственные волны с круговой поляризацией возможны в данной среде (то есть (80) следует из (29) и (30)), то напряженность электрического поля волны, согласно (30) и (80), будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{Re}\left\{\frac{E_0}{\sqrt{2}}(\vec{i}_x \pm i\vec{i}_y) \exp(i\vec{k}\vec{r} - \alpha t)\right\} = \\ &= \vec{i}_x \frac{|E_0|}{\sqrt{2}} \cos(\alpha t - \vec{k}\vec{r} - \alpha_0) \pm \vec{i}_y \frac{|E_0|}{\sqrt{2}} \sin(\alpha t - \vec{k}\vec{r} - \alpha_0) \end{aligned} \quad (81)$$

Из (81) следует, что с ростом αt в каждой фиксированной точке пространства (например, в начале координат ($\vec{r} = 0$)) E_x убывает, а E_y растет со временем в первом квадранте, то есть конец вектора $\vec{E}$ описывает окружность против часовой стрелки при знаке «+» и по часовой при знаке «-» (соответственно право- или левовинтовая поляризация по отношению к оси z).

Для волны с круговой поляризацией (80) получим

$$\vec{e}^* \times \vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{i}_x \mp i\vec{i}_y) \times (\vec{i}_x \pm i\vec{i}_y) = \pm i\vec{i}_z. \quad (82)$$

Выбирая $A = -i$ в (79), находим вещественный вектор $\vec{b}$

$$\vec{b} = \pm \vec{i}_z. \quad (83)$$

Таким образом, для собственной электромагнитной волны с круговой поляризацией изменение собственного момента импульса волны определяется проекцией уравнения (75) на ось z

$$\frac{1}{8\pi} \operatorname{Re}\left\{-i(\vec{i}_z \times \vec{e}^*) \cdot \left(\frac{\partial M_{ij}^H}{\partial \omega} e_j^* E_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} - \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial k_m} e_j^* E_0 \frac{\partial E_0}{\partial x_m} - iM_{ij}^A e_j |E_0|^2\right)\right\} = 0. \quad (84)$$

При $\vec{e} = \vec{i}_x \pm i\vec{i}_y$ получим $\vec{i}_z \times \vec{e}^* = \pm i\vec{e}^*$ и (84) принимает вид

$$\frac{1}{16\pi} \left\{ \pm \frac{\partial M_{ij}^{H}}{\partial \omega} \cdot e_i e_j \frac{\partial |E_0|^2}{\partial t} - \left(\pm \frac{\partial M_{ij}^{H}}{\partial k_m} \cdot e_i e_j \frac{\partial |E_0|^2}{\partial x_m} \right) \mp 2i M_{ij}^{H} e_i e_j |E_0|^2 \right\} = 0. \quad (85)$$

Подставляя в (85) выражения (34)-(38), получим закон сохранения для усредненного по периоду волны собственного момента импульса (спина) поляризованной по кругу электромагнитной волны, бегущей вдоль оси z

$$\frac{\partial \mu_z}{\partial t} + \text{div} \vec{s}_{\mu z} + 2\gamma_0 \mu_z = 0, \quad (86)$$

где

$$\mu_z = \pm \frac{w_0}{\omega}, \quad (87)$$

$$\vec{s}_{\mu z} = \vec{v}_{\text{гп}} \mu_z \quad (88)$$

— усредненные по периоду плотности собственного момента импульса (спина) и его плотности потока соответственно, причем знак «+» для правинтовой поляризации, а «-» — для левинтовой. Последнее слагаемое в (86) описывает удельную мощность потерь спина. Отметим, что (86) формально получается умножением закона сохранения энергии (39) на множитель $\pm 1/\omega$.

6. Некоторые примеры (при $\mu_{ij} = \delta_{ij}$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}$)

6.1. Волны в однородной изотропной среде

Имеется только одно выделенное направление — направление распространения волны $\vec{k}$. В этом случае любой вектор можно разложить на две составляющие — продольную и поперечную относительно $\vec{k}$. Аналогично любой тензор второго ранга можно разложить на два ортогональных друг к другу тензора, пропорциональных

$$\kappa_i \kappa_k \text{ и } \delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k. \quad (89)$$

В частности, тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{\parallel}(\omega, \vec{k}) \kappa_i \kappa_j + \epsilon_{\perp}(\omega, \vec{k}) (\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j), \quad (90)$$

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, \vec{k}) = \epsilon'_{\parallel} + i\epsilon''_{\parallel} \text{ и } \epsilon_{\perp}(\omega, \vec{k}) = \epsilon'_{\perp} + i\epsilon''_{\perp}, \quad (91)$$

где $\epsilon'_{\parallel}$ и $\epsilon'_{\perp}$ — вещественные части, а $\epsilon''_{\parallel}$ и $\epsilon''_{\perp}$ — мнимые.

Из (90), (91), (12а) и (13а) следует

$$\epsilon_{ij}^H = \epsilon'_{\parallel} \kappa_i \kappa_j + \epsilon'_{\perp} (\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j), \quad (92)$$

$$\epsilon_{ij}^A = i\epsilon''_{\parallel} \kappa_i \kappa_j + i\epsilon''_{\perp} (\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j). \quad (93)$$

Эрмитовская часть максвелловского тензора $M_{ij}^H(\omega, \vec{k})$ (см. 22) в рассматриваемом случае равна

$$M_{ij}^H = \epsilon'_{\parallel}(\omega, \vec{k}) \kappa_i \kappa_j + \left(\epsilon'_{\perp}(\omega, \vec{k}) - N^2 \right) (\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j). \quad (94)$$

Направим ось z декартовой системы координат вдоль направления распространения волны $\vec{k}$ ($\vec{i}_z = \vec{k}$), тогда матрица M_{ij}^H и ее определитель будут равны

$$M_{ij}^H = \begin{pmatrix} \epsilon'_{\perp} - N^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon'_{\perp} - N^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon'_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad M^H = \epsilon'_{\parallel} (\epsilon'_{\perp} - N^2)^2. \quad (95)$$

M_{ij}^H имеет диагональный вид, поэтому вектора поляризации собственных волн и их дисперсионные уравнения легко находятся непосредственно из (27) и (29)

$$M_{ij}^H(\omega, \vec{k}) e_j = 0, \quad \epsilon'_{\parallel}(\omega, \vec{k}) \epsilon'_{\perp}(\omega, \vec{k}) - N^2 = 0, \quad (96)$$

или

а) $i=1$: $M_{11}^H e_1 \equiv (\epsilon'_{\perp} - N^2) e_x = 0$, откуда $e_x \neq 0$ при $\epsilon'_{\perp} - N^2 = 0$. Это поперечная волна с вектором поляризации $\vec{e} = (1, 0, 0)$ и частотой, определяемой из дисперсионного уравнения

$$\epsilon'_{\perp}(\omega, \vec{k}) - N^2 = 0. \quad (96a)$$

б) $i=2$: $M_{22}^H e_2 \equiv (\epsilon'_{\perp} - N^2) e_y = 0$, откуда $e_y \neq 0$ при $\epsilon'_{\perp} - N^2 = 0$. Еще одна поперечная волна, вектор поляризации $\vec{e} = (0, 1, 0)$ которой перпендикулярен первому. Частоты этих волн одинаковы (вырождение).

в) $i=3$: $M_{33}^H e_3 \equiv \epsilon'_{\parallel}(\omega, \vec{k}) e_z = 0$, откуда $e_z \neq 0$ при

$$\epsilon'_{\parallel}(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (96b)$$

— дисперсионное уравнение для продольной волны с вектором поляризации $\vec{e} = (0, 0, 1)$.

д) Если у поперечных волн а) и б) амплитуды E_0 одинаковы, то они образуют поперечную волну с круговой поляризацией, вектор напряженности электрического поля которой равен

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \text{Re} \left\{ E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i}_x \pm i \vec{i}_y) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \right\}, \quad (97)$$

где знак «+» соответствует правовинтовой поляризации, а «-» — левовинтовой.

В случае разных амплитуд E_{01} и E_{02} получаем эллиптически поляризованную поперечную волну.

Матрица M_{ij}^H (95) диагональна, поэтому из (44) находим усредненные по периоду волны плотности энергии поперечной волны

$$w_{01} = \omega \frac{\partial \varepsilon_{\perp}'(\omega, \vec{k}) - N^2}{\partial \omega} \frac{|E_{01}|^2}{16\pi} \Big|_{\varepsilon_{\perp}' - N^2 = 0} \quad (98)$$

и продольной волны

$$w_{0\parallel} = \omega \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}'(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} \frac{|E_{0\parallel}|^2}{16\pi} \Big|_{\varepsilon_{\parallel}'(\omega, \vec{k}) = 0} \quad (99)$$

В рассматриваемой системе отсчета

$$\varepsilon_{ij}^A = \begin{pmatrix} i\varepsilon_{\perp}'' & 0 & 0 \\ 0 & i\varepsilon_{\perp}'' & 0 \\ 0 & 0 & i\varepsilon_{\parallel}'' \end{pmatrix} \quad (100)$$

Подставим (100) в (38)

$$\gamma_0 = -i \frac{i\varepsilon_{\perp}'' e_{11} + i\varepsilon_{\perp}'' e_{22} + i\varepsilon_{\parallel}'' e_{33}}{\frac{\partial}{\partial \omega} [\varepsilon_{\parallel}'(\omega, \vec{k}) - N^2]} \Big|_{M''=0} = \\ = \frac{\varepsilon_{\perp}'' \varepsilon_{\parallel}'(\varepsilon_{\perp}' - N^2) + \varepsilon_{\perp}'' \varepsilon_{\parallel}'(\varepsilon_{\perp}' - N^2) + \varepsilon_{\parallel}''(\varepsilon_{\perp}' - N^2)^2}{(\varepsilon_{\perp}' - N^2)^2 \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}'}{\partial \omega} + 2\varepsilon_{\parallel}'(\varepsilon_{\perp}' - N^2) \frac{\partial}{\partial \omega} (\varepsilon_{\perp}' - N^2)} \Big|_{M''=0} \quad (101)$$

Из (101) следует, что декремент затухания поперечной волны с дисперсией $\varepsilon_{\perp}' - N^2 = 0$ равен

$$\gamma_{0\perp} = \frac{\varepsilon_{\perp}''(\omega, \vec{k})}{\frac{\partial}{\partial \omega} (\varepsilon_{\perp}' - N^2)} \Big|_{\varepsilon_{\perp}' - N^2 = 0}, \quad (102)$$

а для продольной с дисперсией $\varepsilon_{\parallel}'(\omega, \vec{k}) = 0$

$$\gamma_{0\parallel} = \frac{\varepsilon_{\parallel}''(\omega, \vec{k})}{\frac{\partial \varepsilon_{\parallel}'}{\partial \omega}(\omega, \vec{k})} \Big|_{\varepsilon_{\parallel}'(\omega, \vec{k}) = 0}. \quad (103)$$

Усредненные по периоду плотности потоков энергии этих волн определяются (35) с подстановкой (98), (99) и (37).

Усредненные по периоду плотности импульсов, плотности их потоков и величин, описывающих их диссипацию, легко найдутся умножением соответствующих величин для энергии на множитель $\vec{k}/\omega$ (см. (59)).

Полученные выше формулы (98) и (102) для линейно поляризованной поперечной волны справедливы и для собственной поляризованной по кругу волны (97) (так как векторы поляризации в обоих случаях нормированы на единицу). Но в отличие от линейно поляризованной волны поляризованная по кругу волна обладает еще собственным моментом импульса, основные характеристики которого определяются формулами (86)-(88).

В тех случаях, когда можно пренебречь пространственной дисперсией при описании электромагнитных волн в однородной и изотропной среде, например, в «холодной» плазме (без учета теплового движения частиц), $\varepsilon_{\perp}(\omega)$ оказывается равным $\varepsilon_{\parallel}(\omega)$. Обозначим

$$\varepsilon_{\perp}(\omega) = \varepsilon_{\parallel}(\omega) \equiv \varepsilon(\omega). \quad (104)$$

Из (104), (84) и (95) следует

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega) \delta_{ij}, \quad M''(\omega, \vec{k}) = \varepsilon'(\omega) (\varepsilon'(\omega) - N^2)^2. \quad (105)$$

Дисперсионные уравнения для поперечной и продольной волн определяются уравнениями (96а) и (96б) соответственно с учетом (104).

Из (37) следует, что групповая скорость продольной волны в отсутствие пространственной дисперсии обращается в нуль, а для поперечной равна

$$\bar{v}_{\perp \text{гр}} = \bar{\kappa} \frac{c}{\sqrt{\epsilon'}} \left(1 + \frac{\omega}{2\epsilon'} \frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\epsilon'(\omega) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}} \quad (106)$$

Для холодной однородной и изотропной электронной плазмы

$$\epsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (107)$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2}{m} n \quad (108)$$

— квадрат плазменной (ленгмюровской) частоты, n , e и m — плотность, заряд и масса электрона.

Подставляя (107) в дисперсионное уравнение (96а) для поперечной волны, находим ее частоту

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}. \quad (109)$$

В такой плазме выражение для групповой скорости поперечной волны (106) упрощается

$$\bar{v}_{\perp \text{гр}} = \bar{\kappa} \frac{c}{\sqrt{\epsilon'}} \left(1 + \frac{\omega}{2\epsilon'} \frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\epsilon' = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}} = \bar{\kappa} \sqrt{\epsilon'}, \quad (110)$$

причем $v_{\perp \text{гр}} < c$ (из (107) видно, что $\epsilon' \leq 1$).

Найдем фазовую скорость для поперечной волны, бегущей вдоль $\bar{\mathbf{I}}_z$ ($\bar{\kappa} = \bar{\mathbf{I}}_z$)

$$\bar{v}_\phi = \bar{\kappa} \frac{\omega}{k} \Big|_{\epsilon' = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}} = \bar{\kappa} \frac{\omega}{\omega \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \bar{\kappa} \frac{c}{\sqrt{\epsilon'}}, \quad v_\phi > c. \quad (111)$$

Из (110) и (111) следует

$$v_\phi v_\text{гр} = c^2. \quad (112)$$

Для получения усредненных по периоду $T = 2\pi/\omega$ характеристик собственных волн энергетических (34)-(38), импульсных (59), моментов импульсов обычных ((67)-(69), (71) с правой частью равной нулю ввиду параллельности $\bar{\mathbf{v}}_\text{гр}$ и $\bar{\mathbf{p}}_0$) и собственных (86)-(88) (при круговой поляризации) в холодной однородной изотропной плазме без пространственной дисперсии надо в (98)-(100), (102), (103) подставить (104), (105), (107), (110).

В однородном и изотропном диэлектрике в области частот, в которой дисперсию можно не учитывать, $\epsilon = \epsilon_0$ — постоянная величина. Продольные электромагнитные волны в такой среде не распространяются (см. (96б)). Для поперечной волны из дисперсионного уравнения (96а) (с заменой $\epsilon'_\perp = \epsilon_0$) находим фазовую скорость

$$\bar{\mathbf{v}}_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}} \bar{\kappa}, \quad \text{из (106) (при } \epsilon' = \epsilon_0) \text{ — групповую скорость } \bar{\mathbf{v}}_\text{гр} = \bar{\mathbf{v}}_\phi, \quad \text{из (98) (при } \epsilon'_\perp = \epsilon_0) \text{ — усредненную за период плотность энергии } w_{0\perp} = \epsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 / 8\pi. \text{ Используя эти результаты, из (35), (36), (59), (67), (87) и (88) можно найти остальные характеристики, связанные с распространением поперечной волны в таком диэлектрике. Полагая во всех этих формулах } \epsilon_0 = 1, \text{ получим величины, описывающие распространение поперечной волны в вакууме. В частности, если в вакууме распространяется вдоль оси } z \text{ волна с круговой поляризацией, то она обладает собственным моментом импульса, направленным по или против оси } z, \text{ плотность потока которого равна (88)}$$

$$\bar{\mathbf{s}}_\mu = \bar{\mathbf{v}}_\text{гр} \mu_z = \pm \bar{\mathbf{I}}_z c \frac{w_{0\perp}}{\omega}. \quad (113)$$

При поглощении этой волны расположенным на ее пути распространения экраном ему передается в единицу времени вращательный момент, равный произведению величины, определяемой (113), на площадь поверхности экрана, нормальной к оси z .

6.2. Распространение волн в холодной магнитоактивной плазме (без учета теплового движения частиц)

Для простоты рассмотрим высокочастотные колебания

$$\omega^2 \gg |\omega_{Be}| |\omega_{Bi}|, \quad (114)$$

$$\begin{aligned} e_{xx} = e_{yy} = \mp \varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad e_{zz} = (\varepsilon_1 - N^2 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - N^2 + \varepsilon_2) = 0, \\ e_{yx} = i\varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad e_{xz} = 0, \quad \text{Sp } e = \mp 2\varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (123)$$

Из (123) и (ПЗ.26) находим

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\mp \varepsilon_2 \varepsilon_3}{|\varepsilon_2 \varepsilon_3|} \sqrt{\frac{\mp \varepsilon_2 \varepsilon_3}{\mp 2\varepsilon_2 \varepsilon_3}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{|\varepsilon_2 \varepsilon_3|}, \\ e_y &= \frac{i\varepsilon_2 \varepsilon_3}{|\varepsilon_2 \varepsilon_3|} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{|\varepsilon_2 \varepsilon_3|}, \\ e_z &= 0. \end{aligned} \quad (124)$$

Если общий множитель у компонент вектора поляризации включить в амплитуду E_0 , то получим

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i}_x \mp i \vec{i}_y) \quad (125)$$

(знаки в (125) соответствуют знакам в (122)).

Волна с дисперсией $N_1^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ имеет правовинтовую круговую поляризацию, а вторая ($N_2^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$) — левовинтовую. Плотность энергии w_0 , групповая скорость $\vec{v}_g$ и плотность потока энергии $\vec{s}_0$ для таких волн равны (см. (34), (35), (37), (118), $w_0 = 0$)

$$\begin{aligned} w_0 &= \omega \frac{\partial}{\partial \omega} (\varepsilon_1 - N^2 \pm \varepsilon_2) \frac{|\vec{E}_0|^2}{16\pi}, \\ \vec{v}_g &= -\frac{\partial (\varepsilon_1 - N^2 \pm \varepsilon_2)}{\partial (\varepsilon_1 - N^2 \pm \varepsilon_2)} \frac{\partial \vec{k}}{\partial \omega} = \vec{k} \frac{2N}{\partial (\varepsilon_1 - N^2 \pm \varepsilon_2)} \frac{\omega}{\partial \omega}, \\ \vec{s}_0 &= \vec{k} N \frac{|\vec{E}_0|^2}{8\pi} \end{aligned} \quad (126)$$

(в правые части (126) после дифференцирования надо подставить (122)).

Подставляя (126) и (122) в (59) и (58), а также в (87), (88) и (86), получим явные выражения для импульса и спина волны и их законов сохранения.

Если выполняются условия $\omega_p^2 \gg \omega |\omega_{pe}|$, $\omega \ll |\omega_{pe}|$, тогда $|\varepsilon_1| \ll |\varepsilon_2| \ll |\varepsilon_3|$ и в холодной электронной плазме может распространяться «свист». В случае распространения вдоль магнитного поля $\vec{B}_0$ дисперсионное уравнение для «свиста» и вектор поляризации имеют вид ($\varepsilon_2 = -|\varepsilon_2|$) [12]

$$\begin{aligned} N_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} [(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3) \sin^2 \theta + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \pm \\ &\pm \sqrt{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 \sin^4 \theta + 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \cos^2 \theta} (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta)]^{-1}. \end{aligned} \quad (120)$$

Если же считать волновой вектор $\vec{k}$ заданным, то уравнение (119) определяет собственные частоты $\omega = \omega^v(k, \theta)$. Так как это уравнение является уравнением пятой степени относительно ω^2 , то оно определяет десять собственных частот. Поскольку каждой собственной частоте $\omega^{(v)}$ соответствует собственная частота $-\omega^{(v)}$, то для простоты считают собственные частоты положительными и различают пять ветвей колебаний холодной магнитоактивной электронной плазмы. В явном виде зависимость $\omega = \omega^v(k, \theta)$, $v = 1, 2, 3, 4, 5$ удается получить только в некоторых предельных случаях.

Каждое собственное колебание характеризуется (помимо других величин) дисперсией $\omega = \omega(\vec{k})$ и вектором поляризации $\vec{e}$. Если для вычисления компонент $\vec{e}$ пользоваться формулами (ПЗ.26), то необходимо найти диагональные элементы и элементы e_{yx} и e_{xz} матрицы e_{ij} . Согласно (31) элементы матрицы e_{ij} равны алгебраическим дополнениям к соответствующим элементам транспонированной матрицы M_{ij}

$$\begin{aligned} e_{xx} &= (\varepsilon_1 - N^2)(\varepsilon_3 - N^2 \sin^2 \theta), \\ e_{yy} &= (\varepsilon_1 - N^2 \cos^2 \theta)(\varepsilon_3 - N^2 \sin^2 \theta) - N^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_3 - N^2 (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta), \\ e_{zz} &= (\varepsilon_1 - N^2)(\varepsilon_1 - N^2 \cos^2 \theta) - \varepsilon_2^2, \\ e_{yx} &= i\varepsilon_2 (\varepsilon_3 - N^2 \sin^2 \theta), \\ e_{xz} &= -(\varepsilon_1 - N^2) N^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (121)$$

Наличие мнимой единицы i в выражении для e_{yx} в (121) приводит к эллиптической поляризации волны (см. ПЗ.27).

Рассмотрим самые простые случаи.

1. Собственные колебания распространяются вдоль магнитного поля $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$, то есть $\theta = 0$.

В этом случае из (120) получаем дисперсионное уравнение

$$N_{1,2}^2 = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2. \quad (122)$$

Из (121) и (122) следует

$$N^2 = |\varepsilon_2|, \quad \bar{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i}_x + i\bar{i}_y). \quad (127)$$

Явные выражения для спина и его закона сохранения получаются из (87), (88) и (86) (при выборе знака «+») при подстановке (126) с заменой $\varepsilon_1 - N^2 \pm \varepsilon_2$ на $-N^2 + |\varepsilon_2|$.

При $\theta = 0$ из системы уравнений (27) с учетом (117) получаем уравнение для значения $i = 3$ (оно не связано с двумя другими уравнениями при $i = 1, 2$, которые определяют поляризацию только что рассмотренных поперечных волн)

$$0 = M_{33}\varepsilon_3 = \varepsilon_3\varepsilon_2. \quad (128)$$

При $\varepsilon_2 \neq 0$ получаем дисперсионное уравнение для продольной электромагнитной волны

$$\varepsilon_3(\omega) = 0, \quad (129)$$

вектор поляризации которой имеет вид

$$\bar{e} = \bar{i}_z. \quad (130)$$

2. Собственные колебания распространяются поперек магнитного поля $\vec{k} \perp \vec{B}_0$. При $\theta = \pi/2$ из (120) получаем

$$N_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 \pm (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3)}{2\varepsilon_1}, \quad (131)$$

откуда получаем два типа волн с показателями преломления, равными

$$N_1^2 = \frac{1}{\varepsilon_1}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2), \quad N_2^2 = \varepsilon_3. \quad (132)$$

2а) Рассмотрим волну с показателем преломления N_1 . Из (121) при $\theta = \pi/2$ имеем

$$\begin{aligned} e_{xx} &= -\frac{1}{\varepsilon_1}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 N_1^2)(\varepsilon_3 - N_1^2) = \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}(\varepsilon_3 - N_1^2), \\ e_{yy} &= \varepsilon_1(\varepsilon_3 - N_1^2), \quad e_{zz} = \frac{1}{\varepsilon_1}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 N_1^2)\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (133)$$

$$e_{yx} = i\varepsilon_2(\varepsilon_3 - N_1^2), \quad e_{xz} = 0, \quad \text{Sp} e = \frac{1}{\varepsilon_1}(\varepsilon_3 - N_1^2)(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2)$$

Подставляя (133) в (ПЗ.26), находим

$$e_x = \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_1|} \frac{\varepsilon_3 - N_1^2}{|\varepsilon_3 - N_1^2|} \frac{|\varepsilon_2|}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}, \quad e_y = i \frac{\varepsilon_2}{|\varepsilon_2|} \frac{(\varepsilon_3 - N_1^2)}{|\varepsilon_2(\varepsilon_3 - N_1^2)|} \frac{|\varepsilon_1|}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}, \quad e_z = 0, \quad (134)$$

или

$$\bar{e} = \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_1|} \frac{\varepsilon_2}{|\varepsilon_2|} \frac{\varepsilon_3 - N_1^2}{|\varepsilon_3 - N_1^2|} \left(\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} \bar{i}_x + i \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} \bar{i}_y \right). \quad (135)$$

Опуская общий множитель (его можно включить в E_0), получим

$$\bar{e} = \frac{\varepsilon_2 \bar{i}_x + i\varepsilon_1 \bar{i}_y}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}. \quad (136)$$

Таким образом, волна с показателем преломления N_1 имеет составленную электрического поля в направлении распространения, эллиптическую поляризацию (136), спин отсутствует.

2б) Для волн с дисперсией $N_2^2 = \varepsilon_3$ при $\theta = \pi/2$ из (121) следует

$$e_{xx} = 0, \quad e_{yy} = 0, \quad e_{zz} = \varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2. \quad (137)$$

Подставляя (137) в (ПЗ.26), находим

$$e_x = 0, \quad e_y = 0, \quad e_z = 1,$$

или

$$\bar{e} = \bar{i}_z. \quad (138)$$

Таким образом, в волне с дисперсией $N^2 = \varepsilon_j$ вектор электрического поля направлен перпендикулярно волновому вектору $\vec{k} = \vec{I}_x k$ (линейно поляризованная волна, спином не обладает).

Приложения

П1. Связь плотности стороннего тока с амплитудой напряженности электрического поля волны в среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями. При возможном раздельном описании электрических и магнитных явлений в веществе используют систему уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П1.1})$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — их индукции, ρ_0 и $\vec{j}_0$ — плотности электрического заряда и тока (отметим, что на самом деле $\vec{B}$ — вектор напряженности макроскопического магнитного поля в веществе, а $\vec{H}$ — вектор вспомогательной величины, получившей историческое название «напряженность» магнитного поля).

Систему (П1.1) необходимо дополнить материальными уравнениями

$$\begin{aligned} D_i(t, \vec{r}) &= \hat{\varepsilon}_{ij} E_j(t, \vec{r}), \\ B_i(t, \vec{r}) &= \hat{\mu}_{ij} H_j(t, \vec{r}), \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

где $\hat{\varepsilon}_{ij}$ и $\hat{\mu}_{ij}$ — линейные операторы тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости. Действие этих операторов на напряженности полей плоской монохроматической волны таково

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{ij} \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) &= \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \\ \hat{\mu}_{ij} \vec{H}_0 \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) &= \mu_{ij}(\omega, \vec{k}) \vec{H}_0 \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ и $\mu_{ij}(\omega, \vec{k})$ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей вещества, зависящие от его строения и состояния. $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ в (П1.3) — постоянные амплитуды. Будем считать $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ и $\mu_{ij}(\omega, \vec{k})$ известными.

Для волнового пакета с медленно изменяющимися амплитудами электрического и магнитного полей по сравнению с фазой $\omega t - \vec{k}\vec{r}$ вида

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}) \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (\text{П1.4})$$

имеем (см. вывод (19))

$$\begin{aligned} D_i(t, \vec{r}) &= \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \left\{ \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}) + i \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_j}{\partial t} - i \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial k} \frac{\partial E_j}{\partial \vec{r}} \right\}, \\ B_i(t, \vec{r}) &= \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \left\{ \mu_{ij}(\omega, \vec{k}) H_j(\omega, \vec{k}; t, \vec{r}) + i \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial H_j}{\partial t} - i \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial k} \frac{\partial H_j}{\partial \vec{r}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П1.5})$$

(в (П1.5) пренебрегли производными от амплитуд полей выше первого порядка ввиду их малости; в последних двух слагаемых у функций те же аргументы, что и у первых).

Из (20) и (П1.5) выразим амплитуду магнитного поля $\vec{H}(\omega, \vec{k}; t, \vec{r})$ через амплитуду электрического поля $\vec{E}(\omega, \vec{k}; t, \vec{r})$

$$\mu_{ij} H_j + i \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial H_j}{\partial t} - i \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial k} \frac{\partial H_j}{\partial \vec{r}} = \frac{c}{\omega} \left\{ \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{k} \times \vec{E})_i - i (\nabla \times \vec{E})_i \right\}, \quad (\text{П1.6})$$

откуда после умножения на обратную матрицу μ_{si}^{-1} получим (учитывая, что $\mu_{si}^{-1} \mu_{ij} = \delta_{sj}$)

$$H_s + i \mu_{si}^{-1} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial H_j}{\partial t} - i \mu_{si}^{-1} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial k} \frac{\partial H_j}{\partial \vec{r}} = \frac{c}{\omega} \mu_{si}^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{k} \times \vec{E})_s - i (\nabla \times \vec{E})_s \right\}. \quad (\text{П1.7})$$

Положим

$$H_s = H_s^0 + H_s^1 + \dots, \quad (\text{П1.8})$$

подставим в (П1.7) и, удерживая только слагаемые, пропорциональные первым производным от H_s^0 и $\vec{E}$, получим из (П1.7) два уравнения, определяющие $H_s^{(1)}$ и $H_s^{(1)}$

$$H_s^{(1)} = \frac{c}{\omega} \mu_{si}^{-1} (\vec{k} \times \vec{E})_s, \quad (\text{П1.9})$$

$$\begin{aligned} H_s^{(1)} + i \left[\frac{\partial}{\partial \omega} (\mu_{si}^{-1} \mu_{ij}) \right] H_j^0 - \mu_{ij}^{-1} \frac{\partial H_j^0}{\partial t} + i \mu_{ij} \frac{\partial \mu_{ij}^{-1}}{\partial k} \frac{\partial H_j^0}{\partial \vec{r}} = \\ = \frac{c}{\omega} \mu_{si}^{-1} \left\{ -\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{k} \times \vec{E})_s - i (\nabla \times \vec{E})_s \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П1.10})$$

Подставив (П.1.9) в (П.1.10), найдем $H_s^{(0)}$

$$H_s^{(0)} = i \frac{c}{\omega} \left\{ \frac{\partial \mu_{ij}^{-1}}{\partial \omega} \mu_{ij} \mu_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{k} \times \vec{E})_j - \frac{\partial \mu_{ij}^{-1}}{\partial k} \mu_{ij} \mu_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{k} \times \vec{E})_j \right\} + \frac{c}{\omega} \mu_{ij}^{-1} \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} (\vec{k} \times \vec{E})_j - i (\nabla \times \vec{E})_j \right\}. \quad (\text{П.1.11})$$

Если подставить (П.1.9) и (П.1.11) в (П.1.8), умножить на $\exp(i\vec{k}\vec{r} - \omega t)$, то получим напряженность магнитного поля $\vec{H}(t, \vec{r})$, выраженную через амплитуду напряженности электрического поля и ее первые производные

$$H_s(t, \vec{r}) = \exp(i\vec{k}\vec{r} - \omega t) \frac{c}{\omega} \left\{ \mu_{ij}^{-1} \left[\left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{k} \times \vec{E})_j - i (\nabla \times \vec{E})_j \right] + \frac{\partial \mu_{ij}^{-1}}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{k} \times \vec{E})_j - i \frac{\partial \mu_{ij}^{-1}}{\partial k_m} \frac{\partial}{\partial x_m} (\vec{k} \times \vec{E})_j \right\}. \quad (\text{П.1.12})$$

Подставляя $D_i(t, \vec{r})$ из (П.1.5) и (П.1.12) в уравнение для $\text{rot } \vec{H}$ из (П.1.1), найдем связь плотности сторонних токов $\vec{j}_0(t, \vec{r})$ с амплитудой электрического поля волны и ее первыми производными (старшие производные отбрасываем как малые величины более высокого порядка)

$$\begin{aligned} -4\pi \vec{j}_0(t, \vec{r}) &= \frac{\partial D_i}{\partial t} - c(\nabla \times \vec{H})_i = \\ &= \exp(i\vec{k}\vec{r} - \omega t) \left\{ -i\omega \varepsilon_{ij} E_j + \omega \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_j}{\partial t} - \omega \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial k_m} \frac{\partial E_j}{\partial x_m} + \varepsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t} \right\} - \\ &- \exp(i\vec{k}\vec{r} - \omega t) \frac{c^2}{\omega} e_{ijk} \left\{ \mu_{in}^{-1} \left[\left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{k} \times \vec{E})_n - i (\nabla \times \vec{E})_n \right] + \right. \\ &+ i \left(\frac{\partial \mu_{in}^{-1}}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \mu_{in}^{-1}}{\partial k_s} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) (\vec{k} \times \vec{E})_n \left. \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \mu_{in}^{-1} (\vec{k} \times \vec{E})_n \left. \right\} = \\ &= \exp(i\vec{k}\vec{r} - \omega t) \left\{ -i\omega \varepsilon_{ij} E_j + \frac{\partial \omega \varepsilon_{ij}}{\partial \omega} E_j + \frac{\partial \omega \varepsilon_{ij}}{\partial k_m} \frac{\partial E_j}{\partial x_m} \frac{\partial E_j}{\partial t} - \right. \\ &- i \frac{c^2}{\omega} e_{ijk} \mu_{in}^{-1} e_{nmj} k_m E_j - \frac{c^2}{\omega^2} e_{ijk} k_m \mu_{in}^{-1} e_{nmj} k_m \frac{\partial E_j}{\partial t} \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{c^2}{\omega} e_{ijk} k_m \mu_{in}^{-1} e_{nmj} \frac{\partial E_j}{\partial x_m} + \frac{c^2}{\omega} e_{ijk} k_m \frac{\partial \mu_{in}^{-1}}{\partial x_m} \frac{\partial E_j}{\partial t} - \frac{\partial \mu_{in}^{-1}}{\partial k_m} \frac{\partial E_j}{\partial x_m} \frac{\partial E_j}{\partial t} = \\ = \exp(i\vec{k}\vec{r} - \omega t) \left\{ -i\omega M_{ij} E_j + \frac{\partial \omega M_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_j}{\partial t} - \frac{\partial \omega M_{ij}}{\partial k_s} \frac{\partial E_j}{\partial x_s} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.1.13})$$

где

$$M_{ij}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - N^2 e_{ijk} e_{jmn} k_m \mu_{in}^{-1} \equiv \quad (\text{П.1.14})$$

$$\equiv \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - N^2 (\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j), \quad (\text{П.1.15})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) &= \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - N^2 e_{ijk} e_{jmn} k_m (\mu_{in}^{-1} - \delta_{in}), \\ N &= \frac{ck}{\omega}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{k}}{k}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.16})$$

Умножая (П.1.16) на κ_i , имеем

$$\kappa_i \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \kappa_i \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}). \quad (\text{П.1.16}')$$

Заметим, что (П.1.16') следует непосредственно из уравнений (2), (19) и (П.1.1), (П.1.5)

$$0 = \text{div } \vec{D} - \text{div } \vec{D} = ik_i (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}) E_j \quad (\text{П.1.16}'')$$

(при этом в (19) и (П.1.5) удержаны только первые слагаемые ввиду малости остальных).

Для изотропных сред, когда их электромагнитные свойства описываются либо тензором проницаемости

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \kappa_i \kappa_j + \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) (\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j), \quad (\text{П.1.16a})$$

либо диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega, \vec{k})$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega, \vec{k})$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon(\omega, \vec{k}) \delta_{ij}, \quad \mu_{ij}(\omega, \vec{k}) = \mu(\omega, \vec{k}) \delta_{ij}, \quad (\text{П.1.16b})$$

из (П.1.16) и (П.1.16') получим [4]

$$\varepsilon(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{\parallel}(\omega, \vec{k}), N^2 \left(1 - \frac{1}{\mu(\omega, \vec{k})} \right) = \varepsilon_{\perp}(\omega, \vec{k}) - \varepsilon_{\parallel}(\omega, \vec{k}). \quad (\text{П.16в})$$

Представим тензор магнитной проницаемости в виде суммы эрмитовской и антиэрмитовской частей

$$\mu_{ik} = \mu_{ik}^H + \mu_{ik}^A, \quad (\text{П.17})$$

причем положим, что любая компонента эрмитовской части много больше любой компоненты антиэрмитовской (область прозрачности)

$$|\mu_{ik}^H| \gg |\mu_{mn}^A|. \quad (\text{П.18})$$

Тензор μ_{ik}^{-1} , обратный тензору магнитной проницаемости, запишем тоже в виде суммы эрмитовской и антиэрмитовской частей

$$\mu_{ik}^{-1} = (\mu_{ik}^H)^{-1} + (\mu_{ik}^A)^{-1}. \quad (\text{П.19})$$

Считая известными выражения μ_{ik}^H и μ_{ik}^A , найдем $(\mu_{ik}^A)^{-1}$ из равенства

$$\mu_{mn} \mu_{nk}^{-1} = (\mu_{mn}^H + \mu_{mn}^A) \left[(\mu_{nk}^H)^{-1} + (\mu_{nk}^A)^{-1} \right] = \delta_{mk}. \quad (\text{П.20})$$

При перемножении матриц в левой части, учитывая (П.18), отбросим квадратичное по антиэрмитовским частям выражение и, воспользовавшись равенством

$$\mu_{mn}^H (\mu_{nk}^H)^{-1} = \delta_{mk}, \quad (\text{П.21})$$

получим

$$\mu_{mn}^H (\mu_{nk}^A)^{-1} + \mu_{mn}^A (\mu_{nk}^H)^{-1} = 0. \quad (\text{П.22})$$

Умножив (П.22) на $(\mu_{im}^H)^{-1}$, находим

$$(\mu_{ik}^A)^{-1} = -(\mu_{im}^H)^{-1} \mu_{mn}^A (\mu_{nk}^H)^{-1}. \quad (\text{П.23})$$

Если записать

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^H + \varepsilon_{ij}^A, \quad (\text{П.24})$$

то из (П.16), (П.23) и (П.24) имеем

$$\varepsilon_{ij}^H = \varepsilon_{ij}^H - N^2 e_{id} e_{jmr} K_i K_m \left[(\mu_{in}^H)^{-1} - \delta_{in} \right], \quad (\text{П.25})$$

$$\varepsilon_{ij}^A = \varepsilon_{ij}^A - N^2 e_{id} e_{jmr} K_i K_m \left(\mu_{is}^H \right)^{-1} \mu_{sp}^A \left(\mu_{pn}^H \right)^{-1}. \quad (\text{П.26})$$

Все результаты, полученные в данной работе на основе уравнений Максвелла (2), могут быть получены и на основе уравнений Максвелла (П.1), если вместо (21) воспользоваться (П.13)-(П.16), (П.24)-(П.26), что и выполнено в работе [13].

П2. Усреднение по периоду произведения двух монохроматических величин

Пусть физическая величина математически описывается реальной частью комплексного числа. Тогда в процессе выполнения линейных преобразований можно опускать знак взятия реальной части и поставить этот знак перед окончательным результатом. Если же иметь дело с произведением двух физических величин, математически описываемых комплексными числами $A(t)$ и $B(t)$, то оно должно быть составлено из произведения реальных значений этих величин, то есть символически можно записать

$$A(t)B(t) = \text{Re } A(t) \cdot \text{Re } B(t). \quad (\text{П.2.1})$$

Очень часто требуется найти среднее значение за период $T = 2\pi/\omega$ произведения двух монохроматических величин

$$A(t) = A_0 \exp(-i\omega t) \text{ и } B(t) = B_0 \exp(-i\omega t), \quad (\text{П.2.2})$$

где A_0 и B_0 — постоянные комплексные величины.

В этом случае, используя (П.2.1), имеем

$$\begin{aligned} \overline{A(t)B(t)} &= \overline{\text{Re } A(t) \text{Re } B(t)} = \frac{1}{4} \overline{(A(t) + A^*(t))(B(t) + B^*(t))} = \\ &= \frac{1}{4} (A_0 \exp(-i\omega t) + A_0^* \exp(i\omega t)) (B_0 \exp(-i\omega t) + B_0^* \exp(i\omega t)) = \\ &= \frac{1}{4} (A_0 B_0 \exp(-2i\omega t) + A_0 B_0^* + A_0^* B_0 + A_0^* B_0^* \exp(2i\omega t)) = \\ &= \frac{1}{4} (A_0 B_0^* + A_0^* B_0) = \frac{1}{2} \text{Re}(A_0 B_0^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(A(t)B^*(t)) = \frac{1}{2} \text{Re}(A^*(t)B(t)). \end{aligned}$$

Выпишем результат

$$\overline{A(t)B(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{A(t)B^*(t)\}. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Напомним, что среднее значение любой величины $a(t)$ на промежутке $0 \leq t \leq T$ определяется как

$$\overline{a(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt. \quad (\text{ПЗ.4})$$

ПЗ. Матрица, ее определитель, алгебраические дополнения и некоторые действия над ними. Вектор поляризации волны

Пусть задана произвольная матрица M_{ij} . Введем в рассмотрение матрицу e_{ij} , элементы которой являются алгебраическими дополнениями к элементам транспонированной матрицы M_{ji}

$$e_{ij} = MM_{ji}^{-1} \quad (\text{ПЗ.1})$$

(M — определитель матрицы M_{ij} , M^{-1} — матрица, обратная данной). Как известно, определитель матрицы M_{ij} выражается через ее элементы соотношением

$$Me_{abc} = e_{ib}M_{ia}M_{kb}M_{ic}. \quad (\text{ПЗ.2})$$

а) Умножая (ПЗ.2) на $M_{am}^{-1}M_{bi}^{-1}$, получим

$$MM_{am}^{-1}M_{bi}^{-1}e_{abc} = e_{mnl}M_{ic}. \quad (\text{ПЗ.3})$$

После умножения (ПЗ.3) на Me_{ikc} воспользуемся (ПЗ.1) и соотношением $e_{abc}e_{ikc} = \delta_{ai}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{bi}$

$$e_{am}e_{bi}(\delta_{ia}\delta_{kb} - \delta_{ib}\delta_{ka}) = Me_{ikc}e_{mnl}M_{ic},$$

или [7, 17]

$$e_{im}e_{kn} = e_{in}e_{km} + Me_{ikc}e_{mnl}M_{ic}. \quad (\text{ПЗ.4})$$

При $M = 0$ имеем

$$e_{im}e_{kn} = e_{in}e_{km} \quad (\text{ПЗ.5})$$

(подчеркнем, что в (ПЗ.5) совершается обмен вторыми индексами).

б) Умножим (ПЗ.2) на $e_{nbc}M_{am}^{-1}$ и воспользуемся соотношением $e_{abc}e_{nbc} = 2\delta_{an}$

$$2MM_{am}^{-1}\delta_{an} = e_{mbd}e_{nbc}M_{kb}M_{ic},$$

$$e_{nm} = \frac{1}{2}e_{mbd}e_{nbc}M_{kb}M_{ic}. \quad (\text{ПЗ.6})$$

или, используя (ПЗ.1), найдем выражение матрицы e_{nm} через элементы заданной матрицы M_{ij}

в) Найдем дифференциал определителя. Умножим (ПЗ.2) на e_{abc} . Учитывая, что $e_{abc}e_{abc} = 6$, имеем

$$M = \frac{1}{6}e_{ibd}e_{abc}M_{ia}M_{kb}M_{ic}. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Дифференцируя (ПЗ.7) и используя (ПЗ.6), получим известную формулу

$$dM = \frac{1}{6}e_{ibd}e_{abc}M_{kb}dM_{ia} + \frac{1}{6}e_{ibd}e_{abc}M_{ia}dM_{kb} +$$

$$+ \frac{1}{6}e_{ibd}e_{abc}M_{ia}M_{kb}dM_{ic} = \frac{1}{3}e_{ad}dM_{ia} + \frac{1}{3}e_{bk}dM_{kb} + \frac{1}{3}e_{cl}dM_{lc} =$$

$$= e_{ad}dM_{ia} = MM_{ji}^{-1}dM_{ij} = -MM_{ji}dM_{ij}^{-1} \quad (\text{ПЗ.8})$$

(из $0 = d(M_{ji}^{-1}M_{ij}) = M_{ji}^{-1}dM_{ij} + M_{ij}dM_{ji}^{-1}$ следует $M_{ji}^{-1}dM_{ij} = -M_{ij}dM_{ji}^{-1}$).
г) Пусть

$$M_{ij} = M_{ij}'' + M_{ij}^A, \text{ причем } |M_{ij}''| \gg |M_{ij}^A|. \quad (\text{ПЗ.9})$$

Тогда и

$$M = M'' + M^A, \text{ причем } M'' = \frac{1}{2}(M + M^*), M^A = \frac{1}{2}(M - M^*). \quad (\text{ПЗ.10})$$

С другой стороны $M = \operatorname{Re} M + i \operatorname{Im} M$ и, сравнивая с (ПЗ.10), находим

$$\operatorname{Re} M = M'', \operatorname{Im} M = \frac{1}{i}M^A. \quad (\text{ПЗ.11})$$

В предположении (ПЗ.9) найдем $\text{Im } M$, удерживая только слагаемые, линейные по M_{ij}^A

$$\begin{aligned} 3M = M_{ij}^A e_{ji}^H &= M_{ij}^A \frac{1}{2} e_{ik} e_{jbc} M_{kb}^H M_{ic}^H = \\ &= \frac{1}{2} (M_{ij}^H + M_{ji}^A) e_{ik} e_{jbc} (M_{kb}^H + M_{kb}^A) (M_{ic}^H + M_{ic}^A) = M_{ij}^H \frac{1}{2} e_{ik} e_{jbc} M_{kb}^H M_{ic}^H + \\ &+ M_{ij}^H \frac{1}{2} e_{ik} e_{jbc} (M_{kb}^H M_{ic}^A + M_{ic}^H M_{kb}^A) + \frac{1}{2} M_{ij}^A e_{ik} e_{jbc} M_{kb}^H M_{ic}^H. \end{aligned}$$

В последнем выражении первое слагаемое, согласно (ПЗ.6), равно $M_{ij}^H e_{ji}^H = 3M^H$, последнее слагаемое равно $M_{ij}^A e_{ji}^H$, оставшиеся — соответственно $M_{ic}^A e_{ci}^H$ и $M_{kb}^A e_{bk}^H$. Таким образом

$$3M = 3M^H + 3M_{ij}^A e_{ji}^H. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Сравнивая с $M = \text{Re } M + i \text{Im } M$, получим

$$\text{Im } M = \frac{1}{i} M_{ij}^A e_{ji}^H \quad (\text{при } |M_{ij}^H| \gg |M_{ij}^A|). \quad (\text{ПЗ.13})$$

д) Для собственных волн

$$M(\omega, \vec{k}) = \text{Re } M + i \text{Im } M = 0, \quad (\text{ПЗ.14})$$

причем $|\text{Im } M| \ll |\text{Re } M|$ (условие прозрачности), $M(\omega, \vec{k})$ — определитель, составленный из компонент максвелловского тензора $M_{ij}(\omega, \vec{k})$ (21), (22). Пренебрегая в (ПЗ.14) малой мнимой частью, получаем дисперсионное уравнение для собственных колебаний

$$\text{Re } M(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (\text{или } M^H(\omega, \vec{k}) = 0), \quad (\text{ПЗ.15})$$

решением которого являются собственные частоты $\omega = \omega_k \approx \omega(\vec{k})$.

Если же учесть малую мнимую часть в (ПЗ.14), то собственные колебания будут затухающими и, следовательно, частота должна иметь вид

$$\omega = \omega_k - i\gamma_k, \quad |\omega_k| \gg |\gamma_k| \quad (\text{ПЗ.16})$$

(при этом $\exp(-i\omega t) = \exp(-i(\omega_k - i\gamma_k)t) = \exp(-i\omega_k t) \exp(-\gamma_k t)$ и при $\gamma_k > 0$ амплитуда будет убывать с декрементом γ_k).

Найдем γ_k . Уравнение (ПЗ.14) теперь запишем в виде

$$\text{Re } M(\omega_k - i\gamma_k, \vec{k}) + i \text{Im } M(\omega_k - i\gamma_k, \vec{k}) = 0, \quad (\text{ПЗ.17})$$

или, разлагая $\text{Re } M$ по степеням γ_k (с точностью до γ_k в первой степени) и отбрасывая γ_k в малой мнимой части M , получим

$$\text{Re } M(\omega_k) - i\gamma_k \frac{\partial \text{Re } M}{\partial \omega} \bigg|_{\omega=\omega_k} + i \text{Im } M(\omega_k) = 0. \quad (\text{ПЗ.18})$$

Но, согласно (ПЗ.15) $\text{Re } M(\omega_k) = 0$ и из (ПЗ.18) с учетом (ПЗ.11) имеем

$$\gamma_k = \frac{\text{Im } M}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } M} \bigg|_{\omega=\omega_k} = \frac{1}{i} \frac{M_{ij}^A e_{ji}^H}{\frac{\partial M_{ij}^H}{\partial \omega}} \bigg|_{\omega=\omega_k} \quad (\text{ПЗ.19})$$

Но $M_{ij}^A = \epsilon_{ij}^A$ (см. (22)), следовательно,

$$\gamma_k = \frac{\epsilon_{ij}^A e_{ji}^H}{i \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial \omega}} \bigg|_{\omega=\omega_k} \quad (\text{ПЗ.20})$$

Мы видим, что декремент затухания волны γ_k пропорционален антиэрмитовой части тензора проницаемости ϵ_{ij}^A и в области прозрачности является малым по сравнению с частотой.

е) Рассмотрим более подробно вопрос о поляризации собственных электромагнитных волн [7, 12]. Согласно (27), (29) и (30) вектор поляризации $\vec{e}(\omega, \vec{k})$ определяется из однородной линейной системы уравнений с не зависящими от времени и координат коэффициентами, представляющими собой компоненты эрмитовой части максвелловского тензора $M_{ij}^H(\omega, \vec{k})$

$$M_{ij}^H(\omega, \vec{k}) e_j = 0, \quad e_i(\omega, \vec{k}) = \frac{e_{ij} a_j}{\sqrt{a_n^* e_{nm} a_m} \text{Sp } e}, \quad (\text{ПЗ.22})$$

$\vec{a}$ — произвольный комплексный вектор.

В этом выражении и далее для простоты эрмитовость у вектора $\vec{e}$ и тензора e_{ij} не обозначается.

Остановимся сначала на свойствах эрмитовой матрицы $e_{ij} = M^H(M_{ij}^H)^{-1}$. Из (ПЗ.5) для диагональных элементов e_{ii} имеем (учитывая эрмитовость $e_{mn} = e_{nm}^*$)

$$e_{mn}e_{nm}^* = e_{nm}e_{nm}^* = e_{nm}e_{nm} = |e_{nm}|^2. \quad (\text{ПЗ.23})$$

Из эрмитовости диагональных элементов $e_{nn} = e_{nn}$ следует их вещественность, а из (ПЗ.23) — знаки всех диагональных элементов должны быть одинаковы. Преобразуем с учетом (ПЗ.5) выражение под корнем в (ПЗ.22)

$$a_n^* e_{nm} a_m \text{Spe} = a_n^* a_m e_{nm} e_{nn} = a_n^* a_m e_{nn} e_{nn} = a_n^* a_m e_{nn}^2 = |a_n^* e_{nn}|^2. \quad (\text{ПЗ.24})$$

Подставив (ПЗ.24) в (ПЗ.22), получим

$$e_i(\omega, \vec{k}) = \frac{e_{ij} a_j}{|e_{nn} a_n|}. \quad (\text{ПЗ.25})$$

Согласно (ПЗ.25) или (33) произведение $e_i e_j$ вообще не зависит от выбора вектора $\vec{a}$, поэтому при повороте вектора $\vec{a}$ сам вектор $\vec{e}$ может измениться только на фазовый множитель.

Выражение для $\vec{e}$ упрощается, если в качестве вектора $\vec{a}$ выбрать какую-нибудь орт системы координат. В качестве примера рассмотрим декартовую систему и выберем $\vec{a} = \vec{i}_x$. Тогда из (ПЗ.22) находим

$$e_i = \frac{e_{ix}}{\sqrt{e_{xx} \text{Spe}}}, \quad (\text{ПЗ.26})$$

откуда

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{e_{xx}}{\sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{xx}}{|e_{xx}| \sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{xx}}{|e_{xx}|} \frac{1}{\sqrt{e_{xx} \text{Spe}}}, \\ e_y &= \frac{e_{yx}}{\sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{yx}}{|e_{xx}| \sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{yx}}{|e_{xx}|} \frac{1}{\sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{yx}}{|e_{xx}|} \frac{e_{yx}}{|e_{xx}| \sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{yx} e_{yx}^*}{|e_{xx}| \sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{yy}}{|e_{xx}| \sqrt{e_{xx} \text{Spe}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_z &= \frac{e_{zx}}{\sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{zx}}{|e_{xx}| \sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{zx}}{|e_{xx}|} \frac{1}{\sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{zx}}{|e_{xx}|} \frac{e_{zx}}{|e_{xx}| \sqrt{e_{xx} \text{Spe}}} = \frac{e_{zz}}{|e_{xx}| \sqrt{e_{xx} \text{Spe}}}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.27})$$

Выписанные компоненты вектора поляризации $\vec{e}$ очень удобны при вычислениях, порядок их величин определяется только диагональными компонентами e_{xx} , e_{yy} и e_{zz} . Например, если $|e_{xx}| > |e_{yy}|$, $|e_{zz}|$, то $e_x = 1$, $e_y = 0$, $e_z = 0$.

Напомним, что в (ПЗ.27) в правых частях для конкретных собственных колебаний надо подставить их собственные частоты $\omega = \omega(\vec{k})$.

Для справок выпишем компоненты векторов поляризации для собственных колебаний $\omega = \omega(\vec{k})$ при $\vec{a} = \vec{i}_y$ и $\vec{a} = \vec{i}_z$ (вычисления аналогичны проделанным для $\vec{a} = \vec{i}_x$)

$$\vec{a} = \vec{i}_y, \quad \begin{aligned} e_x &= \frac{e_{xy}}{|e_{yy}| \sqrt{e_{yy} \text{Spe}}}, & e_y &= \frac{e_{yy}}{|e_{yy}| \sqrt{e_{yy} \text{Spe}}}, & e_z &= \frac{e_{zy}}{|e_{yy}| \sqrt{e_{yy} \text{Spe}}} \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.28})$$

$$\vec{a} = \vec{i}_z, \quad \begin{aligned} e_x &= \frac{e_{xz}}{|e_{zz}| \sqrt{e_{zz} \text{Spe}}}, & e_y &= \frac{e_{yz}}{|e_{zz}| \sqrt{e_{zz} \text{Spe}}}, & e_z &= \frac{e_{zz}}{|e_{zz}| \sqrt{e_{zz} \text{Spe}}} \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.29})$$

ж) Для приведения эрмитовской матрицы M_{ij}^H к диагональному виду необходимо решить однородную систему уравнений

$$(M_{ij}^H - \eta \delta_{ij}) b_j = 0, \quad (\text{ПЗ.30})$$

причем определитель, составленный из коэффициентов при b_j , должен быть равным нулю (условие разрешимости)

$$|M_{ij}^H - \eta \delta_{ij}| = 0. \quad (\text{ПЗ.31})$$

Корни уравнения (ПЗ.31) являются собственными значениями матрицы M_{ij}^H , а определитель матрицы M_{ij}^H равен их произведению (см. (41))

$$M'' = \eta_1 \eta_2 \eta_3. \quad (\text{ПЗ.32})$$

При подстановке η_α ($\alpha = 1, 2, 3$) в (ПЗ.30) находим соответствующие собственные векторы $\vec{b}^{(\alpha)}$, нормируя их на единицу

$$\vec{b}^{(\alpha)} \vec{b}^{*(\alpha)} = 1. \quad (\text{ПЗ.33})$$

Покажем, что собственные значения η_α вещественны. Подставим η_α и $\vec{b}^{(\alpha)}$ в (ПЗ.30) и умножим на $\vec{b}^{*(\alpha)}$

$$\eta_\alpha \vec{b}_i^{(\alpha)} \vec{b}_i^{*(\alpha)} = M_{ij}^{H'} \vec{b}_j^{(\alpha)} \vec{b}_i^{*(\alpha)} = M_{ij}^{H''} \vec{b}_j^{(\alpha)} \vec{b}_i^{*(\alpha)} = (M_{ij}^{H'} \vec{b}_i^{(\alpha)} \vec{b}_j^{*(\alpha)})^*. \quad (\text{ПЗ.34})$$

Из вещественности правой части (ПЗ.34) следует вещественность любого η_α ($\alpha = 1, 2, 3$) при нормировке (ПЗ.33).

Теперь запишем систему уравнений (ПЗ.30) для двух любых собственных значений η_α и η_β ($\alpha \neq \beta$) и соответствующих собственных векторов $\vec{b}^{(\alpha)}$ и $\vec{b}^{(\beta)}$

$$\begin{aligned} M_{ij}^{H'} \vec{b}_j^{(\alpha)} &= \eta_\alpha \vec{b}_i^{(\alpha)}, \\ M_{ij}^{H''} \vec{b}_j^{(\beta)} &= \eta_\beta \vec{b}_i^{(\beta)}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.35})$$

После умножения первого равенства в (ПЗ.35) на $\vec{b}_i^{*(\beta)}$ и второго на $\vec{b}_i^{(\alpha)}$ вычтем из первого второе

$$\begin{aligned} (\eta_\alpha - \eta_\beta) \vec{b}_i^{(\alpha)} \vec{b}_i^{*(\beta)} &= M_{ij}^{H'} \vec{b}_j^{(\alpha)} \vec{b}_i^{*(\beta)} - M_{ij}^{H''} \vec{b}_j^{(\beta)} \vec{b}_i^{(\alpha)} = \\ &= M_{ij}^{H'} \vec{b}_j^{(\alpha)} \vec{b}_i^{*(\beta)} - M_{ij}^{H''} \vec{b}_j^{(\alpha)} \vec{b}_i^{*(\beta)} = M_{ij}^{H'} \vec{b}_j^{(\alpha)} \vec{b}_i^{*(\beta)} - M_{ij}^{H''} \vec{b}_i^{(\alpha)} \vec{b}_j^{*(\beta)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.36})$$

откуда при $\eta_\alpha \neq \eta_\beta$ следует ортогональность векторов $\vec{b}^{(\alpha)}$ и $\vec{b}^{*(\beta)}$

$$\vec{b}^{(\alpha)} \vec{b}^{*(\beta)} = 0. \quad (\text{ПЗ.37})$$

Заметим, что выражения для собственных векторов $\vec{b}^{(\alpha)}$ можно записать сразу, если воспользоваться результатами пункта е) этого приложения, совершив в формулах (ПЗ.22-ПЗ.29) замены

$$\vec{e} \rightarrow \vec{b}, \quad M_{ij}^{H'} \rightarrow \tilde{M}_{ij}^{H'} \equiv M_{ij}^{H'} - \eta_\beta \delta_{ij}, \quad e_{ij} \rightarrow \tilde{e}_{ij} \equiv \tilde{M}_{ij}^{H'} (\tilde{M}_{ij}^{H'})^{-1}. \quad (\text{ПЗ.38})$$

Если собственное значение $\eta = \eta_\beta$ равно нулю, то из (ПЗ.30) следует

$$M_{ij}^{H'} \vec{b}_j^{(0)} = 0, \quad M'' = 0, \quad (\text{ПЗ.39})$$

и вектор $\vec{b}^{(0)}$ совпадает с вектором поляризации $\vec{e}$ собственной волны с дисперсией $\eta_0(\omega, \vec{k}) = 0$ (см. (ПЗ.22))

$$\vec{b}^{(0)} = \vec{e}. \quad (\text{ПЗ.40})$$

114. Постоянство фазы амплитуды волны вдоль направления переноса энергии

Получим уравнение, определяющее изменение фазы $\alpha_0(\omega, \vec{k}; t, \vec{r})$ амплитуды напряженности электрического поля (46а) какой-либо собственной волны. Для этого умножим (28) на E_i^{0*} и рассмотрим минимую часть полученного уравнения

$$\text{Im} \left\{ \omega M_{ij}^{H'} E_j^{0*} E_i^{0*} - i \omega M_{ij}^{H'} E_j^{0*} E_i^{0*} + \frac{\partial \omega M_{ij}^{H'}}{\partial \omega} E_i^{0*} E_j^{0*} - \frac{\partial \omega M_{ij}^{H'}}{\partial k_m} E_i^{0*} E_j^{0*} \right\} = 0. \quad (\text{ПЗ.41})$$

Первое слагаемое в (ПЗ.41) равно нулю в силу (46). Вычислим второе слагаемое

$$\begin{aligned} \text{Im} (i \omega M_{ij}^{H'} E_j^{0*} E_i^{0*}) &= \frac{1}{2i} (i \omega M_{ij}^{H'} E_j^{0*} E_i^{0*} + i \omega M_{ij}^{H''} E_j^{0*} E_i^{0*}) = \\ &= \frac{1}{2i} (i \omega M_{ij}^{H'} E_j^{0*} E_i^{0*} - i \omega M_{ji}^{H'} E_i^{0*} E_j^{0*}) = 0. \end{aligned}$$

Третье слагаемое равно

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\frac{\partial \omega M_{ij}^{H'}}{\partial \omega} E_j^{0*} E_i^{0*} \right) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial \omega M_{ij}^{H'}}{\partial \omega} E_j^{0*} E_i^{0*} - \frac{\partial \omega M_{ji}^{H'}}{\partial \omega} E_i^{0*} E_j^{0*} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial \omega M_{ij}^{H'}}{\partial \omega} E_j^{0*} E_i^{0*} - \frac{\partial \omega M_{ji}^{H'}}{\partial \omega} E_i^{0*} E_j^{0*} \right) = \frac{1}{2i} \frac{\partial \omega M_{ij}^{H'}}{\partial \omega} \left(E_i^{0*} \frac{\partial E_j^{0*}}{\partial t} - E_j^{0*} \frac{\partial E_i^{0*}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.42})$$

Подставляя (46а) в скобки последнего выражения (ПЗ.42), имеем

$$\begin{aligned} E_i^{0*} \frac{\partial E_j^{0*}}{\partial t} - E_j^{0*} \frac{\partial E_i^{0*}}{\partial t} &= \vec{e}_i \vec{e}_j \left[E_0 \exp(-i \alpha_0) \frac{\partial}{\partial t} (E_0 \exp(i \alpha_0)) - \right. \\ &\quad \left. - |E_0| \exp(i \alpha_0) \frac{\partial}{\partial t} (E_0 \exp(-i \alpha_0)) \right] = \vec{e}_i \vec{e}_j \cdot 2i |E_0|^2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.43})$$

Подставляя (ПЗ.43) в (ПЗ.42), находим

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \omega M_{ij}^{II}}{\partial \omega} \frac{\partial E_i^0}{\partial t} E_j^{0*} \right) = \frac{\partial \omega M_{ij}^{II}}{\partial \omega} e_i^* e_j |E_0|^2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = \omega \frac{\partial M_{ij}^{II}}{\partial \omega} e_i^* e_j |E_0|^2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}. \quad (\text{П4.4})$$

Аналогично третьему вычисляется четвертое слагаемое в (П4.1)

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \omega M_{ij}^{II}}{\partial k_m} \frac{\partial E_j^0}{\partial x_m} E_i^{0*} \right) = \omega \frac{\partial M_{ij}^{II}}{\partial k_m} e_i^* e_j |E_0|^2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_m}. \quad (\text{П4.5})$$

Подставляя в (П4.1) все вычисленные слагаемые, после деления на $\omega \frac{\partial M_{ij}^{II}}{\partial \omega} e_i^* e_j |E_0|^2$ получим [19]

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + (\vec{v}_r \nabla) \alpha_0 \equiv \frac{d\alpha_0}{dt} = 0, \quad (\text{П4.6})$$

что соответствует постоянству фазы амплитуды волны вдоль направления переноса энергии.

Литература

1. С.М. Рытов. ЖЭТФ, 17, 930 (1947).
2. Я.Л. Альберт. Изв. АН СССР, сер. физ., 12, 241 (1948).
3. М.Е. Герцеништейн. ЖЭТФ, 26, 680 (1954).
4. В.П. Силин, А.А. Рукавица. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Госатомиздат (1961).
5. Б.Н. Гершман, В.Л. Гинзбург. Изв. вузов. Радиофизика, 5, 31 (1962).
6. В.Д. Шафранов. Вопросы теории плазмы, вып. 3, стр. 3, М., Госатомиздат (1963).
- ✓ 7. А.Г. Ситенко, Ю.А. Кирочкин, УФН 89, 227 (1966).
8. В.В. Пустовалов, В.П. Силин. Труды ФИАН. Теория плазмы 61, 42 (1972).
9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, М., Наука (1982).
10. М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. Классическая электродинамика, М., Наука (1985).
11. В.Д. Егоренков, Ю.А. Кирочкин, К.Н. Степанов. Сб. Проблемы ядерной физики и космических лучей, вып. 29, стр. 65, Харьков, изд. ХГУ (1988).
- ✓ 12. Ю.А. Кирочкин, К.Н. Степанов, ЖЭТФ, 104, вып. 6 (12), 3955 (1993).
- ✓ 13. Yu.A. Kirichkin, K.N. Stepanov, J. Moscow Phys. Soc., 6, 121 (1996).
14. А.И. Саловский. ЖРФХО. Часть физ. 29, 82 (1897).
15. А.И. Садовский. Ученые записки Юрьевского университета № 1, с. 1 (1899).
16. Б.Б. Кадомцев, А.Б. Михайловский, А.В. Тимофеев, ЖЭТФ, 47, 2666 (1964).
17. М. Бохер. Введение в высшую алгебру, М., ОНТИ (1933).
18. А.И. Ахнестер, И.А. Ахнестер, Р.В. Половин, А.Г. Ситенко, К.Н. Степанов. Электродинамика плазмы, М., Наука (1974).
19. Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов. Геометрическая оптика неоднородных сред, М., Наука (1980).

Навчальне видання
Кірючкін Олексій Юрійович
Кірючкін Юрій Олексійович
Степанов Костянтин Миколайович
Енергія, імпульс і момент імпульсу
слабкозагажуючих електромагнітних хвиль
Російською мовою

Учебное издание
Кирючкин Алексей Юрьевич
Кирючкин Юрий Алексеевич
Степанов Константин Николаевич
Энергия, импульс и момент импульса
слабкозатухающих электромагнитных волн

Відповідальний за випуск В.П. Демуцький

Підл. до друку 27.09.02. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 2,5. Обл.-вид. арк. 3,1.
Тираж 45 прим. Ціна договірна.

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, 61077,
Харків, пл. Свободи, 4

Видавничий центр