МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Н. КАРАЗИНА

Н.Р. БЕЛЯЕВ

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА
Часть II

Конспект лекций для студентов физико-технического факультета

Харьков-2004

ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Пусть V – унитарное пространство. Пусть $\forall x\in V \to f(x)\in C$, такое что:

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Тогда говорят, что из V в C задан линейный функционал f или линейная форма f ($f\in L(V, C)$).

<u>Т°.</u> Пусть $f\in L(V, C)$, т. е. f – линейная форма, тогда существует единственный $h\in V$ такой, что $f(x) = (x, h)$.

◀ Пусть $\{e_i\}$ – ортонормированный базис V

$$\forall x\in V;\quad f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{f(e_i)}_{\overline{h_i}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{h_i} \underset{\uparrow\ \textbf{базис ортонорм.}}{=} (x,h),$$

т.е. вектор h имеет координаты $h_i = \overline{f(e_i)}$.

<u>Единственность:</u> Пусть $f(x) = (x, h^1) = (x, h^2) \Rightarrow (x, h^1 - h^2) = 0$; $\forall x\in V$. Возьмем $x = h^1 - h^2$ $\Rightarrow (h^1 - h^2, h^1 - h^2) = 0$, т.е. $h^1 = h^2$ ▶

***Примечание*:** в вещественном пространстве теорема и ее доказательство также справедливы, но в доказательстве не ставится знак комплексного сопряжения.

§2. СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Пусть $\forall x, y\in V \to B(x, y)\in C$ такое, что

$$\left.\begin{aligned} &1)\ B(x_1+x_2,y) = B(x_1,y)+B(x_2,y)\\ &2)\ B(\alpha x,y) = \alpha B(x,y)\end{aligned}\right\}\ \text{линейность по 1}^{\text{му}}\ \text{аргументу};$$

$$\left.\begin{aligned} &3)\ B(x,y_1+y_2) = B(x,y_1)+B(x,y_2)\\ &4)\ B(x,\alpha y) = \overline{\alpha}B(x,y)\end{aligned}\right\}\ \textbf{полулинейность по 2}^{\textbf{му}}\ \textbf{аргументу}.$$

Тогда говорят, что в унитарном пространстве задана полуторалинейная форма $B(x, y)$.

(В евклидовом пространстве полуторалинейная форма становится билинейной).

Выберем в V базис $\{e_i\}$.

$$\forall y\in V\quad B(x,y) = B\left(\sum_i x_i e_i, \sum_i y_i e_i\right) = \sum_i\sum_j x_i\bar{y}_j \underbrace{B(e_i,e_j)}_{b_{ij}} = \sum_{i,j} b_{ij}x_i\bar{y}_j.$$

Действие формы $B(x, y)$ однозначно определенно если известны элементы b_{ij}. Матрица B с элементами b_{ij}, называется матрицей полуторалинейной формы.

<u>Т°</u>. Пусть B – полуторалинейная форма в V. Тогда существует единственный линейный оператор $A\in L(V, V)$ такой, что $B(x, y) = (x, Ay)$.

◀ $\forall y\in V;\quad B(x,y)=B(\sum_i x_i e_i, y)=\sum_i x_i \underbrace{B(e_i,y)}_{\bar h_i} = \big(x, \bar h(y)\big)$ $\uparrow$ **в ортонорм. базисе**. Оказывается

$\forall y\in V \quad \exists \bar h_i = B(e_i, y)$, т.е. $\forall y\in V \rightarrow h\in V$. Таким образом, определен оператор $h = Ay$.

<u>Линейность</u>:

$(x, A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar\alpha_1 B(x, y_1) + \bar\alpha_2 B(x, y_2) = \bar\alpha_1 (x, Ay_1) + \bar\alpha_2 (x, Ay_2) =$
$= (x, \alpha_1 Ay_1)\ (x, \alpha_2 Ay_2) = (x, \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2)$, т.е. $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2$.

<u>Единственность</u>:

Пусть $B(x, y) = (x, A_1 y) = (x, A_2 y)$, тогда $(x, A_1 y - A_2 y) = 0 \Rightarrow A_1 y = A_2 y \quad \forall y\in V$, т.е. $A_1 = A_2$ ▶

<u>T°</u>. Пусть B – полуторалинейная форма в V. Тогда существует единственный линейный оператор $\forall A\in L(V, V)$ такой, что $B(x, y) = (Ax, y)$.

◀ $\forall x\in V$ $\quad B(x,y)=B(x,\sum_j y_j e_j)=\sum_j \underbrace{B(x,e_j)}_{h_j}\bar y_i = (h(x), y)$ или, что тоже определен оператор A такой, что $h = Ax$. При этом $(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y) = B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) +$ $+ \alpha_2 B(x_2, y) = \alpha_1(Ax_1, y) + \alpha_2(Ax_2, y) = (\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2, y) = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2$ т.е. оператор A линейный.

Его единственность доказывается как в предыдущей теореме ▶

***Примечание*:** в вещественном пространстве теорема и ее доказательство также справедливы, но в доказательстве не ставится знак комплексного сопряжения.

<u>T°</u>. Если $B(x, y)$ – полуторалинейная форма с матрицей B и A – линейный оператор такой, что $B(x, y) = (Ax, y)$, то в ортонормированном базисе матрица B^{T} совпадает с матрицей линейного оператора A.

◀ Пусть $\{e_i\}$ ортонормированный базис V. Тогда

$$b_{ij} = B(e_i, e_j) = (Ae_i, e_j) = \left(\sum_k a_{ki} e_k, e_j\right) = \sum_k a_{ki}(e_k, e_j) = \sum_k a_{ki}\delta_{kj} = a_{ji}$$ ▶

<u>T°</u>. Если $B(x, y)$ – полуторалинейная форма с матрицей B и A – линейный оператор такой, что $B(x, y) = (x, Ay)$, то в ортонормированном базисе $b_{ij} = \bar a_{ij}$. *Доказать самостоятельно.*

Примечание: Если A_1 – оператор из 1й теоремы о спец. представлении и A_2 – из второй, то $A_1 = \overline{A_2}^T$.

СОПРЯЖЕННЫЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Def: Оператор $A^*\in L(V, V)$ называется оператором, сопряженным к оператору $\forall A\in L(V, V)$, если $\forall x, y\in V$; $(Ax, y) = (x, A^* y)$.

<u>T°</u>. Оператор, сопряженный к линейному – линеен.

◀ $(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 (Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2 (Ax, y_2) =$
$= \overline{\alpha}_1 (x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2 (x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1) + (x, \alpha_2 A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2)$ ▶

<u>T°.</u> Любой линейный оператор имеет сопряженный и при этом только один.
◀ Так как (Ax, y) – скалярное произведение в унитарном пространстве, то оно является полуторалинейной формой, которую мы обозначим - $B(x, y)$. Из теоремы о специальном представлении полуторалинейной формы следует утверждение теоремы $(Ax, y) = B(x, y) = (x, A^* y)$ ▶

Свойства сопряженных операторов.

1° $E^* = E$. ◀ $(Ex, y) = (x, y) = (x, Ey)$ ▶

2° $(A + B)^* = A^* + B^*$.

◀ $((A + B)x, y) = (Ax + Bx, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^* y) + (x, B^* y) = (x, (A^* + B^*)y)$ ▶

3° $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$. ◀ $(\lambda Ax, y) = \lambda(Ax, y) = \lambda(x, A^* y) = (x, \overline{\lambda} A^* y)$ ▶

4° $(A^*)^* = A$. ◀ $(A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$ ▶

5° $(AB)^* = B^* A^*$. ◀ $(ABx, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, B^*(A^*)y) = (x, B^* A^* y)$ ▶

6° $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Примечание: в евклидовом пространстве также справедливо все то, что сказано о сопряженном операторе, но свойство **3**° имеет вид: $(\lambda A)^* = \lambda A^*$

Примечание: физики очень часто обозначают A^* как A^+ (читается A – крест) и операцию **называют эрмитовым сопряжением**.

§2. ЭРМИТОВЫ (САМОСОПРЯЖЕННЫЕ) ОПЕРАТОРЫ

Def: Оператор $\forall A \in L(V, V)$ действующий в унитарном пространстве **называется эрмитовым (самосопряженным) оператором**, если $A^* = A$.

Примечание: в евклидовом пространстве такой оператор называется самосопряженным.

Пусть A – произвольный линейный опреатор из $L(V, V)$. Введем операторы A_R и A_I по правилу $A_R = \dfrac{A + A^*}{2}$; $A_I = \dfrac{A - A^*}{2i}$, тогда $A = A_R + iA_I$ и кроме того:

а) $(A_R x, y) = (\dfrac{A + A^*}{2} x, y) = (x, (\dfrac{A + A^*}{2})^* y) = (x, \dfrac{A + A^*}{2} y) = (x, A_R y)$;

б) $(A_I x, y) = ((\dfrac{A - A^*}{2i})x, y) = (x, (\dfrac{A - A^*}{2i})^* y) = (x, \dfrac{A^* - A}{2i^*} y) = (x, A_I y)$;

т.е . A_R и A_I эрмитовы.

Отсюда :

<u>T</u>°. (о специальном представлении линейного оператора) $\forall A \in L(V, V)$ существуют эрмитовы операторы A_R и A_I такие, что $A = A_R + iA_I$ (при этом операторы A_R и A_I называются вещественной и мнимой частью оператора A)

Def: Операторы A, $B \in L(V, V)$ называются коммутирующими операторами если $AB = BA$.

Оператор $[AB] = AB - BA$ **называется коммутатором** операторов A и B, и при этом $[AB] = 0$ – это необходимое и достаточное условие коммутируемости операторов A и B.

T°. Произведение эрмитовых операторов A и B будет эрмитовым оператором тогда и только тогда когда операторы A и B коммутируют (т. е. $AB = BA$).

◀ Так как операторы A и B эрмитовы, то:

$$(AB)^* = B^*A^* = BA \qquad (ф)$$

тогда:

а) Если $AB = BA$, то из (ф) $(AB)^* = AB$, т. е. оператор AB – эрмитов.

б) Если AB эрмитов, то $(AB)^* = AB$ и из (ф) $AB = BA$ т.е. операторы коммутируют ▶

T°. Если A – эрмитов оператор, то $\forall x \in V$; $(Ax, x) \in R$ (здесь R - множество вещественных чисел).

◀ $(Ax, x) = \overline{(x, Ax)}$ из свойств скалярного произведения $(Ax, x) = (x, Ax)$ из эрмитовости оператора. Тогда $\overline{(x, Ax)} = (x, Ax)$, т.е. $(Ax, x) \in R$ ▶

T°. Собственные числа эрмитового оператора вещественны.

◀ Пусть $\exists x \in V$, $x \neq 0$ и $\exists \lambda \in C$ такие, что $Ax = \lambda x$. Тогда:

$$\underbrace{(Ax, x)}_{\text{веществ. попред. теореме}} = (\lambda x, x) = \lambda \underbrace{(x, x)}_{\text{вещест. изсв–в скал. произ}}; \quad (x, x) \geq 0, \quad \lambda \text{ – вещественно} ▶$$

T°. Собственные векторы эрмитового оператора, отвечающие различным собственным значениям – ортогональны.

◀ Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ и $\begin{matrix} x_1, x_2 \neq 0 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{matrix}$.

Тогда $(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$ равны как эрмитовы $(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \underset{\text{вещ}}{\overline{\lambda_2}}(x_1, x_2) =$
$= \lambda_2(x_1, x_2)$ и получено $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$ ▶

§3. НОРМА ОПЕРАТОРА

Def: Нормой линейного оператора $A \in L(V, V)$ называется число $\|A\|$ определяемое равенством $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Из определения нормы линейного оператора возникает очевидное и очень полезное неравенство $\|A\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

T°. Для эрмитового оператора A: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

◀ Обозначим $\mu = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

1) Вспомним неравенство Коши-Буняковского $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$ запишем $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow |(Ax, x)| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \cdot \|x\| = \|A\| \cdot \|x\|^2$, т.е. $|(Ax, x)| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2$ и пусть $\|x\| = 1$.

$$|(Ax, x)| \le \|A\|$$

т.е. $$\mu \le \|A\| \qquad (*)$$

2) Отметим: $|(Az, z)| \le |(Az/\|z\|, z/\|z\|)| \cdot \|z\|^2 \le \|z\|^2 \cdot \sup|(Az/\|z\|, z/\|z\|)|$,

т.е. $|(Az, z)| \le \mu\|z\|^2$ и теперь рассмотрим разность:

$(A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y) = (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y) - (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) - (Ay, y) = 2(Ax, y) + 2(Ay, x) = 2((Ax, y) + (y, Ax)) = 2((Ax, y) + (\overline{Ax, y})) = 4\mathrm{Re}(Ax, y)$,

т. е. $4\mathrm{Re}(Ax, y) = (A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y)$.

Тогда:

$4|\mathrm{Re}(Ax, y)| = |(A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y)| \le |(A(x + y), x + y)| + |(A(x- y), x- y)| \le$

$\le \mu((x+ y, x + y) + (x- y, x- y)) = \mu((x, x) + (y, y)+ (x, y)+ (y, x) + (x, x) +(y, y) - (x, y) - (y, x))$ =

$= 2\mu((x, x) + (y, y)) = 2\mu (\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Отсюда, при $\|x\| = \|y\| = 1$

$$4|\mathrm{Re}(Ax, y)| \le 4\mu \Rightarrow |\mathrm{Re}(Ax, y)| \le \mu.$$

Положим теперь $y = \dfrac{Ax}{\|Ax\|}$ (очевидно $\|y\| = 1$):

$$\left|\mathrm{Re}\left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right)\right| = \frac{1}{\|Ax\|}\left|\mathrm{Re}\underbrace{(Ax, Ax)}_{\text{вещ}}\right| = \frac{1}{\|Ax\|}(Ax, Ax) = \frac{\|Ax\|^2}{\|Ax\|} = \|Ax\| \le \mu .$$

Тогда $\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| \le \mu$, т.е. $\|A\| \le \mu$.

В 1) и 2) доказано, что $\|A\| \ge \mu$ и $\|A\| \le \mu$, т.е. $\|A\| = \mu = \sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax, x)|$ ▶

§4. ЕЩЕ О СВОЙСТВАХ ЭРМИТОВОГО ОПЕРАТОРА

<u>Т°</u>. Чтобы линейный оператор $A \in L(V, V)$ был эрмитов необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Im}(Ax, x) = 0$.

◀ Прежде всего, отметим, что $\forall A \in L(V, V)$ $\exists A_R, A_I \in L(V, V)$ такие что $A = A_R + iA_I$ и, кроме того A_R и A_I – эрмитовы. Следовательно, $(A_R x, x) \in R$ и $(A_I x, x) \in R$, т.е. $(Ax, x) =$ = $\left(\underbrace{A_R x, x}_{\text{вещ.часть}}\right) + i\left(\underbrace{A_I x, x}_{\text{мним.часть}}\right)$.

Теперь:

<u>Необходимость.</u> Пусть $A = A^* \Rightarrow (Ax, x) \in R \Rightarrow \mathrm{Im}(Ax, x) = 0$.

<u>Достаточность.</u> Пусть $\mathrm{Im}(Ax, x) = 0 \Rightarrow (A_I x, x) = 0 \Rightarrow \sup\limits_{\|x\|=1}|(A_I x, x)| = 0 \Rightarrow \|A_I\| = 0 \Rightarrow A_I = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = A_R \Rightarrow A_R$ – эрмитов ▶

<u>Т°</u>. Если A – эрмитов оператор и λ – его собственное значение, то $\exists x \in V$, $\|x\| = 1$, и $\lambda = (Ax, x)$.

◀ Пусть z - собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ:

$$Az = \lambda z \Rightarrow A\frac{z}{\|z\|} = \lambda\frac{z}{\|z\|} \Rightarrow \left(A\frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right) = \lambda\left(\frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right) \Rightarrow \lambda = (Ax, x),$$

где x – собственный вектор и $\|x\| = 1$ ▶

Следствие: Пусть A – эрмитов оператор и $m = \inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x),\quad M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$. Тогда для собственных значений λ оператора A справедливо $m \le \lambda \le M$.

<u>Т°</u>. Если A – самосопряженный (эрмитов) оператор и $\forall x \in V$; $(Ax, x) \ge 0$, то

$$\|A\| = \lambda_{max}$$

◀ $\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)| \underset{(Ax,x)\ge 0}{=} \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x) = \underset{\text{достигается}}{(Ax_0,x_0)}$. Обозначим $\lambda = (Ax_0, x_0) = \|A\|$.

Рассмотрим

$\|(A-\lambda E)x_0\|^2 = (Ax_0 - \lambda x_0, Ax_0 - \lambda x_0) = (Ax_0, Ax_0) - \lambda(x_0, Ax_0) - \bar{\lambda}(Ax_0, x_0) + \lambda\bar{\lambda}(x_0, x_0) =$

$= \left\langle \begin{matrix} A - \textbf{эрмито} \\ \lambda - \textit{вещест} \end{matrix} \right\rangle = (Ax_0, Ax_0) - \lambda(Ax_0, x_0) - \lambda(Ax_0, x_0) + \lambda^2(x_0, x_0) = \left\langle \begin{matrix} \|x_0\| = 1; & \lambda = \|A\| \\ \|A\| = \sup\|Ax\| = \|Ax_0\| \end{matrix} \right\rangle =$

$= \|Ax_0\|^2 - 2\|A\|^2 + \|A\|^2 = 0$, т.е. $\|(A-\lambda E)x_0\| = 0 \Rightarrow (A-\lambda E)x_0 = 0 \Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0$, т.е. λ – собственное значение ▶

Продолжаем изучение спектральных свойств эрмитовых операторов.

<u>Т°</u>. Пусть для эрмитового оператора A $m = \inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x),\quad M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$; тогда m и M – наименьшее и наибольшее собственное значение оператора A.

◀ Достаточно доказать, что m и M – собственные значения оператора A.

1) Рассмотрим оператор $B = A - mE \Rightarrow B$ – эрмитов $\Rightarrow (Bx, x) = (A(x), x) - m(x, x) \ge 0$. Т.е. B – эрмитов, $(Bx, x) \ge 0 \Rightarrow \|B\| = \lambda_{max}$, но $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx,x) = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x) - m = M - m$, т.е. для B: $\lambda_{max} = M - m \Rightarrow \exists x_0\ Bx_0 = (M-m)x_0 \Rightarrow (A - mE)x_0 = Mx_0 - mx_0 \Rightarrow Ax_0 - mx_0 = = Mx_0 - mx_0 \Rightarrow Ax_0 = mx_0 \Rightarrow Mx_0$ – собственное значение оператора A.

2) Рассмотрим $B = -A \Rightarrow B$ – эрмитов. $\Rightarrow \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx,x) = -m \Rightarrow -m$ – собственное значение B $\Rightarrow \exists x\quad Bx = -m \Rightarrow -Ax = -mx \Rightarrow Ax = mx$, т.е. m – собственные значения A ▶

<u>Т°</u> (о собственном базисе эрмитового оператора). Если A – эрмитов оператор: $A \in L(V, V)$ в n-мерном унитарном пространстве, то в V существует n-линейно-независимых, попарно ортогональных и единичных собственных векторах.

◀ 1) A – эрмитов, $A \in L(V, V) = \lambda_{max} = \lambda_1 = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$ и $\exists e_1$ – единичный собственный вектор с собственным значениям λ_1: $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Обозначим $V_1 = \mathcal{L}^{\perp}(e_1)$. При этом $V = V_1 \oplus \mathcal{L}(e_1)$. Оказывается V_1 – инвариантно относительно A. В самом деле

$\forall x \in V_1$: $(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = \lambda_1(x, e_1) \underset{x\perp e_1}{=} 0$, т.е. $(Ax, e_1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} Ax \perp e_1 \\ Ax \in V_1 \end{matrix}$.

2) Теперь можем рассмотреть A в V_1: $A \in L(V_1, V_1)$, A – эрмитов $\Rightarrow \lambda_{max} = \lambda_2 = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x\perp e_1}}(Ax,x)$

и $\exists e_2$ – единичный вектор, такой, что $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ и $e_2 \perp e_1$.

Рассмотрим $V_2 = \mathcal{L}^{\perp}(e_1, e_2)$. Тогда $V = V_1 \oplus \mathcal{L}(e_1)$, V_2 – инвариантно относительно A. $\forall x \in V_2$: $(Ax, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (x, A(\alpha_1 e_1) + A(\alpha_2 e_2)) = \bar{\alpha}_1\lambda_1(xe_1) + \bar{\alpha}_2\lambda_3(xe_2) \underset{x\perp e_1 e_2}{=} 0$,

$Ax \perp \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \Rightarrow \forall x \in V_2$.

3) …

4) …

Итак, $\exists e_1, \ldots, e_n$ –единичные, взаимно ортогональные и собственные векторы,

т.е. в V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A ▶

Примечание: Договоримся, в дальнейшем, нумеровать собственные значения в порядке их убывания с учетом кратности, т.е. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ и соответствующие им векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ обладают свойством $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Примечание: Из доказанной выше теоремы следует: $\lambda_{m+1} = \max\limits_{\substack{x \perp e_k \\ k=1,2,\ldots,m}} \dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}$, или

$$\lambda_{m+1} = \max_{x \perp E_m} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \quad \text{где} \quad E_m = \mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_m).$$

T° (минимаксное свойство собственных значений). Пусть A – эрмитов оператор и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ его собственные значения, тогда $\lambda_{m+1} = \min\limits_{E \in \mathcal{E}_m} \max\limits_{x \perp E} \dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}$ где $\mathcal{E}_m$ – множество всех m-мерных подпространств пространства V.

Доказать самостоятельно.

§5. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭРМИТОВОГО ОПЕРАТОРА. ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА – КЭЛИ

Пусть A – эрмитов оператор; $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ собственные значения этого оператора и $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ – соответствующий им ортонормированный собственный базис. Тогда $\forall x \in V$ $x = \sum\limits_k \alpha_k e_k = \sum\limits_k (x, e_k) e_k$; $Ax = A\left(\sum\limits_k (x,e_k)e_k\right) = \sum\limits_k (x,e_k) A e_k = \sum\limits_k \lambda_k (x,e_k) e_k$.

Def: Оператор P_k: $P_k x = (x,e_k)e_k$, называется оператором-проектором или просто проектором на одномерное пространство, порожденное вектором $\{e_k\}$.

Свойства проекторов:

1°. P_k – самосопряженный (эрмитов).

◀ $(P_k x, y) = ((x,e_k)e_k, y) = (x,e_k)(e_k,y) = \left(\overline{y,e_k}\right)(x, e_k) = (x, (y,e_k)e_k) = (x, P_k y)$ ▶

2°. $P_k^2 = P_k$. ◀ $P_k^2 x = P_k(P_k x) = P_k(x,e_k)e_k = (x,e_k)Pe_k = (x,e_k)(e_k,e_k)e_k = (x,e_k)e_k = P_k x$ ▶

3°. $P_k P_j = 0$, $(x \neq j)$. ◀ $P_k P_j x = P_k(P_j x) = P_k(x,e_j)e_j = (x,e_j)P_k e_j = (x,e_j)\underbrace{(e_j,e_k)}_{\text{II}_0} e_k = 0$ ▶

Для операторов-проекторов P_k имеем:

$$x = \sum_k P_k x = (\sum_k P_k)x \Rightarrow \sum_k P_k = E = A^{\circ}; \quad Ax = \sum_k \lambda_k P_k x = (\sum_k \lambda_k P_k)x \Rightarrow \sum_k \lambda_k P_k = A.$$

Такое представление эрмитового оператора A называется его спектральным разложением . Обратим еще внимание: $A^2 = (\sum\limits_k \lambda_k P_k)^2 = \sum\limits_k \lambda^2_k P_k$, $\forall s \in N$, $A^s = \sum\limits_k \lambda^s_k P_k$.

Def: Пусть $P(\lambda)$ – произвольный полином $p^{й}$ – степени, т.е. $p(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p} c_k \lambda^k$. Тогда определим полином от оператора слеующим образом: $p(A) \overset{def}{\equiv} \sum\limits_{k=0}^{p} p(\lambda_k) P_k$.

Т°. (Гамильтона-Кэли). Эрмитов оператор A является корнем своего характеристического полинома: если $p(\lambda)=\det(A-\lambda E)\Rightarrow p(A)=0$.

◀ $p(A)=\sum_k p(\lambda_k)P_k=0$ ▶

§6. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. КОРЕНЬ *m*-й СТЕПЕНИ ИЗ ОПЕРАТОРА

Def: Эрмитов оператор A называется положительным, если $\forall x\in V$, $(Ax, x)\geq 0$. Если, кроме того, из $(Ax, x)=0 \Rightarrow x=\theta$, то A называют положительно определенным оператором (Обозначается: $A\geq 0$, $A>0$ соответственно).

Т°. Каждое собственное значение положительного (положительно определенного) оператора неотрицательно (положительно).

◀ Если λ – собственное значение A, то $\exists x$ такой, что $\|x\|=1$, $(Ax, x)=\lambda$ (было доказано), отсюда следует утверждение теоремы ▶

Def: Корнем m-й степени из оператора A называется такой оператор B, что $B^m=A$.

Т°. Если A – положительный эрмитов оператор ($A\geq 0$), то $\forall m\in N$ существует положительный эрмитов оператор $A^{1/m}, \sqrt[m]{A}, A^{1/m}\geq 0$.

◀ Пусть λ_k – собственные значения A ($k=1, 2, 3,\ldots, n$) и $\{e_k\}$ – ортонормированный собственный базис, $A=\sum_1^n\lambda_k P_k$ (спектральное разложение) и при этом $\lambda_k\geq 0$. Рассмотрим оператор $B=\sum_1^n\lambda^{1/m}{}_k P_k$. Изучим свойства оператора B. Оператор B:

а) эрмитов: $\left(\sum\lambda_k^{1/m}P_k x, y\right)=\sum\lambda_k^{1/m}(P_k x, y)=\sum\lambda_k^{1/m}((x,e_k)e_k y)=\sum\lambda_k^{1/m}(x,e_k)(e_k, y)=$
$=\sum\underbrace{\lambda_k^{1/m}}_{\text{вещ}}\left(\overline{y,e_k}\right)(x,e_k)=\sum\left(x, \lambda_k^{1/m}(y,e_k)e_k\right)=\left(x, \sum\lambda_k^{1/m}(y,e_k)e_k\right)=\left(x, \sum\lambda_k^{1/m}P_k y\right)$;

б) положителен: $(Bx,x)=\left(\sum\lambda_k^{1/m}P_k x, x\right)=\sum\lambda_k^{1/m}(P_k x, x)=\sum\lambda_k^{1/m}(P_k(x,e_k)e_k, x)=$
$$=\sum\lambda_k^{1/m}(x,e_k)\left(\overline{x,e_k}\right)=\sum\lambda_k^{1/m}|(x,e_k)|^2\geq 0;$$

в) $B^m=\left(\sum\lambda_k^{1/m}P_k\right)^m=\sum\left(\lambda_k^{1/m}\right)^m P_k=\sum\lambda_k P_k=A$. Теорема доказана. ▶

Примечание: В ортонормированном базисе $\{e_k\}$ из собственных векторов матрица оператора A и матрица $A^{1/m}$ имеют вид: $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$,

$$\sqrt[m]{A}=\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \sqrt[m]{\lambda_2} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \sqrt[m]{\lambda_3} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt[m]{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

§1. ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЕ ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

Def: Полуторалинейная форма $B(x,\ y)$ называется эрмитовой, если $\forall x,\ y \in V$: $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$.

Мы уже отмечали: $\forall B(x,\ y)$ – полуторалинейные формы $\exists!$ A – линейный оператор такой, что $B(x, y) = (Ax, y)$.

<u>Tº</u>. Для того, чтобы полуторалинейная форма $B(x, y)$ была эрмитовой необходимо и достаточно, чтобы оператор A $(B(x, y) = (Ax, y))$ был эрмитовым.

◀ **<u>Достаточность</u>**: Пусть A – эрмитов, т.е. $A = A^* \Rightarrow B(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \overline{(Ay,x)} =$ $= \overline{(B(y,x))}$, т.е. форма $B(x, y)$ – эрмитова.

<u>Необходимость</u>: Пусть форма эрмитова $\Rightarrow (Ax, y) = B(x, y) = \overline{B(y,x)} = \overline{(Ay,x)} = (x, Ay)$, т.е. A – эрмитов ▶

<u>Tº</u>. Для того, чтобы форма $B(x, y)$ была эрмитовой необходимо и достаточно, чтобы $B(x, x)$ была вещественной $\forall x \in V$.

◀ $B(x, y)$ – эрмитова $\Leftrightarrow$ A – эрмитов. A – эрмитов $\Leftrightarrow A(x, y) \in R$ ▶

предыдущая теорема ↑ доказано ранее

§2. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Def: Квадратичной формой называют $B(x,\ x)$, соответствующую полуторалинейной форме $B(x, y)$.

<u>Tº</u>. Пусть $B(x, y)$ – эрмитова форма в n-мерном унитарном пространстве V. Тогда в V существует ортонормированный базис $\{e_k\}$ и существуют вещественные числа λ_k, что для $\forall x \in V$ в базисе $\{e_k\}$: $B(x,x) = \sum\limits_{k=1}^{\lambda} \lambda_k |\xi_k|^2$

◀ $B(x, y)$ – эрмитова $\Rightarrow B(x, y) = (Ax, y)$, где A – эрмитов оператор. A – эрмитов $\Rightarrow$ $\exists \{e_k\}$ – собственный ортонормированный базис и λ_k – собственные числа оператора A

$$x = \sum_k \xi_k e_k\ ;\quad Ax = \sum_j \xi_j A e_j = \sum_j \lambda_j \xi_j e_j\ .$$

Тогда: $$(Ax,x) = \left(\sum_j \lambda_j \xi_j e_j,\ \sum_k \zeta_k e_k \right) = \sum_{j,k} \lambda_j \xi_j \overline{\xi_k} \delta_{jk} = \sum_k \lambda_k |\xi_k|^2$$ ▶

И еще одна теорема: о приведении пары квадратичных форм к каноническому виду:

<u>Tº</u>. Пусть $A(x, y)$ и $B(x, y)$ – эрмитовы формы в линейном пространстве V и, кроме того, $\forall x \in V$, $x \neq \theta$, $B(x, y) > 0$. Тогда в V существует базис $\{e_k\}$, в котором:
$A(x,x) = \sum\limits_k \lambda_k |\xi_k|^2$, $B(x,x) = \sum\limits_k |\xi_k|^2$.

◀ $B(x,\ y)$ – эрмитова, $B(x,\ y) > 0$, $\forall x \in V$, $x \neq \theta$. Из этих условий: В линейном пространстве V можно ввести скалярное произведение векторов x и y по правилу: $(x, y) = B(x, y)$.

После введения скалярного произведения пространство V станет унитарным и в нем, согласно предыдущей теореме, существует ортонормированный базис $\{e_k\}$ и числа λ_k, что в этом базисе $A(x,x)=\sum_k \lambda_k|\xi_k|^2$.

С другой стороны, так как базис ортонормированный, то $(x,x)=\sum_k \xi_k\overline{\xi_k}=\sum_k|\xi_k|^2$ и $B(x, x) = (x, x)$, т.е. $B(x, x) = \sum_k|\xi_k|^2$ ▶

УНИТАРНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Def: Линейный оператор $U\in L(V, V)$ называется унитарным, если

$$\forall x, y\in V \ \ (Ux, Uy) = = (x, y) .$$

1° Из условия унитарности: $\|Ux\| = \|x\|$, $\|U\| = 1$.

2° Если λ – собственное значение унитарного оператора, то $|\lambda| =1$.

◀ Пусть e – собственный вектор с собственными значениями λ и $\|x\| = 1$. Тогда $|\lambda| =|\lambda| \|e\| = \|\lambda e\| = \|Ue\| = \|e\| =1$ ▶

<u>**T°**</u>. Чтобы линейный оператор $U\in L(V, V)$ был унитарным необходимо и достаточно, чтобы $U^* = U^{-1}$.

◀ **Необходимость**: Пусть U – унитарный $\Rightarrow (Ux, Uy) = (x, y) \Rightarrow (x, U^*Uy) = (x, y) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x, (U^*U - E)y) = 0 \Rightarrow U^*Uy = Ey \Rightarrow U^*U = E \Rightarrow U^* = U^{-1}$.

Достаточность: Пусть $U^* = U^{-1} \Rightarrow U^*U = E \Rightarrow (x, y) = (x, U^*Uy) = (Ux, Uy)$, т.е. U – унитарный ▶

Примечание: $U^* = U^{-1} \Leftrightarrow U^*U = UU^* = E \Leftrightarrow (Ux, Uy) = (x, y)$.

В примечании приведено две эквивалентные формы записи условия унитарности оператора.

Нетрудно убедиться в том, что произведение унитарных операторов – унитарный оператор.

Def: Оператор l **называется унитарно подобным** оператору L, если существует унитарный оператор U такой, что $l = U^*LU$,

Напомним, что $[AB]=AB-BA$ – **называется коммутатором операторов** A и B. При этом, если $[AB] = 0$, то A и B коммутирующие операторы.

Обозначим $\varphi = U^*\psi$.

Для унитарно подобных операторов выполняются следующие соотношения:

1) $[L, M] = N \Rightarrow [l, m] = n$; 2) $L = L^* \Rightarrow l = l^*$;

3) $L\psi = \lambda\psi \Rightarrow l\varphi = \lambda\varphi$; 4) $(L\psi_1, \psi_2) \Rightarrow (l\varphi_1, \varphi_2)$.

§2. НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Def: Линейный оператор A называется нормальным, если $A^*A = AA^*$.

1° Из определения: любой унитарный оператор является нормальным.

<u>Т°</u>. Пусть A – нормальный оператор. Тогда A и A^* имеют общий собственный вектор e, такой, что $\|e\| = 1$, $Ae = \lambda e$, $A^*e = \overline{\lambda}e$.

◀ Пусть λ – собств. ззначение оператора A. Обозначим R_λ – собственное подпространство оператора A, т.е. множество $x\in V$, $Ax = \lambda x$.

Пусть $x\in R_\lambda$, $Ax = \lambda x$. Тогда $A(A^*x) = (AA^*)x = (A^*A)x = A^*(Ax) = A^*(\lambda x) = \lambda(A^*x)$.

Получили $A(A^*x) = \lambda(A^*x)$, $A^*x\in R_\lambda$. Итак, $x\in R_\lambda \Rightarrow A^*x\in R_\lambda$, т.е. оператор A^* действуют из R_λ в R_λ. Следовательно $\exists e\in R_\lambda$, $\|e\| = 1$, такой, что $A^*e = \mu e$ (собственный вектор A^*), но $e\in R_\lambda$ (собственный вектор A); $Ax = \lambda e$; $A^*e = \mu e$. При этом $\lambda = \lambda(e, e) = (\lambda e, e) = (Ae, e) = (e, A^*e) = (e, \mu e) = \overline{\mu}\,(e, e) = \overline{\mu}$ ▶

<u>Т°</u>. Пусть A – нормальный оператор. Тогда существует ортонормированный базис $\{e_k\}$, состоящий из собственных векторов A и A^*.

◀ 1) по предыдущей теореме $\exists e_1\in V$, $\|e_1\| = 1$ и являющийся общим собственным вектором операторов A и A^* с собственными значениями λ_1, $\overline{\lambda}_1$ соответственно.

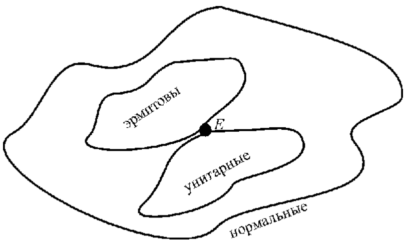
Пусть $V_1 = \mathcal{L}^{\perp}(e_1) \Rightarrow V = \mathcal{L}(e_1) \oplus V_1$. Это значит, что если $x\in V_1 \Rightarrow x\perp e_1$.

$$x\in V_1 \Rightarrow (Ax, e_1) = (x, A^*e_1) = (x, \overline{\lambda}_1 e_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0;$$

$$(A^*x, e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda_1 e_1) = \overline{\lambda}_1 (x, e_1) = 0, \text{ т.е. } Ax,\ A^*x\in V_1.$$

Следовательно операторы A и A^* действуют в V_1.

2) Тогда A и A^* имеют в V_1 общий собственный вектор e_2 ($e_2\in V_1$, $e_2\perp e_1$, $\|e_2\| = 1$) с собственными значениями λ_2, $\overline{\lambda}_2$ соответственно. Пусть $V_2 = \mathcal{L}^{\perp}(e_1, e_2) \Rightarrow V = \mathcal{L}(e_1, e_2) \oplus V_2$,



Это значит, что если $x\in V_2$, то $x\perp e_1$, $x\perp e_2$.

$$x\in V_2 \Rightarrow (Ax, e_1) = (x, A^*e_1) = (x, \overline{\lambda}_1 e_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0;$$

$$(Ax, e_2) = (x, A^*e_2) = (x, \overline{\lambda}_2 e_2) = \lambda_2(x, e_2) = 0;$$

$$(A^*x, e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda_1 e_1) = \overline{\lambda}_1 (x, e_1) = 0;$$

$$(A^*x, e_2) = (x, Ae_2) = (x, \lambda_2 e_2) = \overline{\lambda}_2 (x, e_2) = 0,$$

т.е. Ax, $A^*x\in V_2$.

Следовательно операторы A и A^* действуют в V_2.

3) ….

Продолжая приведенные рассуждения мы построим ортонормированный базис $\{e_k\}$ из собственных векторов общих для A и A^* ▶

<u>Следствие 1</u>: Для нормального оператора A существует базис в котором A имеет диагональную матрицу.

<u>Следствие 2:</u> Унитарный оператор имеет полную ортонормированную систему собственных векторов.

И, наконец:

<u>Т°.</u> Если оператор $A\in L(V, V)$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов, то этот оператор – нормальный. *Доказать самостоятельно.*

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

§1. НОРМАЛЬНАЯ ЖОРДАНОВА ФОРМА

Пусть A – линейный оператор, действующий в комплексном векторном пространстве V. Если в V существует базис $\{e_k\}$ из собственных векторов оператора A, то в этом базисе матрица оператора A имеет диагональный вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, где λ – соответствующие собственные значения оператора A.

Так будет, например, в том случае, когда характеристичное уравнение оператора A: $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет n попарно различных корней.

Однако это далеко не всегда так. Например, оператор A с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет характеристическое уравнение: $\varphi(\lambda) = (2 - \lambda)^2 = 0$. Это уравнение имеет кратный корень $\lambda = 2$ и этому корню соответствует лишь один собственный вектор (1, 0) (или ему коллинеарные). И матрица оператора A ни в каком базисе не приводится к диагональному виду.

Поэтому возникает вопрос, о каком-то другом, достаточно простом виде, к которому можно привести матрицу всякого линейного оператора.

В комплексном пространстве таким «простейшим», каноническим видом принято считать так называемую жорданову форму матрицы.

Def: Жордановой клеткой $G_k(\lambda)$ называется квадратная матрица k-го порядка вида:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Порядок жордановой клетки может быть любым. В частности, если $k = 1$, то клетка имеет простейший вид : (λ)

Def: Жордановой матрицей называется матрица вида: $\left(\begin{array}{c:c:c:c} G_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & G_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & G_{k_s}(\lambda_s) \end{array}\right)$.

Здесь $G_k(\lambda)$ – жордановы клетки.

В частности, если оператор A имеет матрицу $A=\left(\begin{array}{ccc|cc}\alpha & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\end{array}\right)$, то нормальная жорданова форма матрицы оператора состоит из двух жордановых клеток. Нетрудно заметить, что α и β – соответственные значения оператора A. И, кроме того:

$$Ae_1 = \alpha e_1;\ Ae_2 = \alpha e_2 + e_1;\ Ae_3 = \alpha e_3 + e_2;\ Ae_4 = \beta e_4;\ Ae_5 = \beta e_5 + e_4.$$

<u>Т°</u>. Произвольный линейный оператор A в комплексном пространстве V имеет базис $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, в котором матрица оператора A имеет жорданову форму.

Доказательство теоремы довольно громоздко и мы его не приводим. Построение базиса и приведение матрицы оператора к жордановой форме продемонстрируем на примерах.

Схема нахождения нормальной жордановой формы матрицы оператора и построения жорданова базиса.

Схема построена на построении циклических инвариантных подпространств, которые были рассмотрены в первой части нашего курса.

1. Нахождение собственных векторов и собственных значений оператора A. Если количество собственных линейно независимых векторов равно размерности пространства, то в указанном базисе матрица оператора имеет диагональный вид;
2. Если для кратного собственного значения кратности k количество линейно независимых собственных векторов также равно k, то в этом базисе матрица также имеет диагональный вид;
3. Для кратных собственных значений λ таких, что количество линейно независимых собственных векторов меньше кратности корня, поиск базисных векторов производится так:

   а) находим собственные векторы A, т.е. базис $N(A_\lambda)$ ядра оператора $A_\lambda = A - \lambda E$;

   б) находим $M(A_\lambda)$ – образ оператора A_λ и его базис;

   в) ищем базис $M(A_\lambda) \cap N(A_\lambda)$;

   г) для каждого вектора $x_i \in M(A_\lambda) \cap N(A_\lambda)$ находим прообраз 1-го слоя y_{i1} такой, что: $A_\lambda y_{i1} = x_i$, прообраз 2-го слоя y_{i2} такой, что: $A_\lambda y_{i2} = y_{i1}$, и т.д. до тех пор пока они есть.

Жорданов базис формируется следующим образом:

а) первыми в базис попадают базисные векторы ядра оператора A_λ вместе со своими прообразами: $x_1, y_{11}, y_{12}, \ldots, x_2, y_{21}, y_{22}, \ldots \ldots, x_p, y_{p1}, y_{p2}\ldots$.

б) затем в базис включаются векторы $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_l$, дополняющие базис $M(A_\lambda) \cap N(A_\lambda)$ до базиса ядра оператора A_λ, если такие есть.

* *Замечание*: **Процесс проводится для каждого значения λ до тех пор пока количество векторов, включенных в базис не станет равным кратности *k* собственного значения λ.**

Искомый базис: $x_1, y_{11}, y_{12}, \ldots, x_2, y_{21}, y_{22}, \ldots \ldots, x_p, y_{p1}, y_{p2} \ldots, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_l$.

(Всего k векторов).

§2. ПРИМЕРЫ ПРИВЕДЕНИЯ МАТРИЦ К ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЕ

1°. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2,3} = 1$. $A_1 = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы A по $\lambda = 1$, т.е. ядро A_1:

$(1,-1,-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3$, значит базис $N(A_1)$: $\begin{cases} f_1(1,1,0) \\ f_2(1,0,1) \end{cases}$.

Образ оператора A_1 $M(A_1)$ находим из соотношений:

$\left.\begin{array}{l} A_1 e_1 = (1,2,-1) \\ A_1 e_2 = (-1,-1,1) \\ A_1 e_3 = (-1,-2,1) \end{array}\right\}$; базис $M(A_1)$ $f_3(1, 2, -1)$, и т.к. $f_3 = 2f_1 - f_2$, то $f_3 \in \mathcal{L}(f_1, f_2)$.

Тогда: базисом $M(A_1) \cap N(A_1)$ будет вектор $f_3(1,2,-1)$; вектором, дополняющим базис $M(A_1) \cap N(A_1)$ до базиса $N(A_1)$ будет любой из векторов f_1, f_2, например вектор f_1; а базис $M(A_1) \cap N(A_1)$ дополнить до базиса $M(A_1)$ нечем, т.к. $M(A_1) \quad N(A_1)$.

Прообраз $A_1 y = (1, 2, -1) \Rightarrow y_1 - y_2 - y_3 = 1$, например (1, 0, 0).

Кстати: система $A_1 y = (1, 0, 0)$ решений не имеет, т.е. прообраза второго слоя для вектора (1, 2, –1) нет.

Следовательно, жорданов базис оператора A: $\begin{array}{l} g_1(1,2,-1) \\ g_1(1,0,0) \\ g_1(1,1,0) \end{array}$. Приэтом $\begin{array}{l} Ag_1 = g_1 \\ Ag_2 = g_2 + g_1 \\ Ag_3 = g_3 \end{array}$.

И, окончательно, имеем жорданову форму матрицы оператора A: $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

2°. Найти нормальную жорданову форму матрицы линейного оператора $A =$

$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и базис, в котором матрица оператора имеет жорданову форму.

Δ. Для матрицы линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ составим и решим характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$.

Получим:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Тогда: $\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = 0$ и, следовательно, $\lambda_{1,2} = -1$; $\lambda_{3,4} = 1$.

а) Рассмотрим оператор $A_{-1} = A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ищем собственные векторы оператора A при $\lambda = -1$, т. е. ядро оператора A_{-1}. Для этого решим систему четырех линейных однородных уравнений с матрицей A_{-1}. Из третьего и четвертого уравнений системы видно, что $x_3 = x_4 = 0$. Тогда можно легко установить, что $x_1 = x_2 = 1$. Вектор f_1 (1, 1, 0, 0) – единственный собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению $\lambda = -1$ и образует базис ядра оператора A_{-1}. Далее ищем базис образа оператора A_{-1}:

$$M(A_{-1}): \begin{array}{l} A_1e_1 = (4,4,0,0) \\ A_1e_2 = (-4,-4,0,0) \\ A_1e_3 = (0,-2,2,2) \\ A_1e_4 = (2,4,-2,0) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f_2(1,1,0,0) \\ f_3(0,-1,1,1) \\ f_4(1,2,-1,0) \end{array}.$$

Отметив, что для векторов f_2, f_3, f_4 существует соотношение: $f_3 + f_4 - f_2 = (0, 0, 0, 1)$, находим базис образа оператора A_{-1}:

$$\{\varphi_1(1, 1, 0, 0),\ \varphi_2(0, -1, 1, 1),\ \varphi_3(0, 0, 0, 1).$$

Отметив, что векторы f_1 и φ_1 совпадают, делаем вывод о том, что этот вектор образует базис пересечения образа и ядра оператора A_{-1}.

Кратность корня $\lambda = -1$ равна двум, а собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, только один. Поэтому, полагаем g_1 равным вектору $\varphi_1(1,1,0,0)$, а еще один вектор жорданового базиса ищем, как прообраз первого слоя для $\varphi_1(1,1,0,0)$. Решаем неоднородную систему линейных уравнений $A_{-1}y = \varphi_1$ и находим второй вектор $g_2(1,\ 3/4,\ 0,\ 0)$ жорданового базиса, соответствующего собственному значению $\lambda = -1$ кратности два. При этом, что характерно, у вектора $\varphi_1(1,1,0,0)$ нет прообраза второго слоя, ибо система $A_{-1}y = g_2$ с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

решений не имеет. Это и не случайно, потому что собственному значению $\lambda = -1$ кратности 2 должно соответствует два вектора жорданового базиса оператора A:

$$g_1(1, 1, 0, 0);\quad g_2(1, 3/4, 0, 0).$$

При этом отметим, что:

$$Ag_1 = -g_1\ ,\quad Ag_2 = g_1 - g_2\,.$$

б) Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda = 1$ и, соответственно, оператор $A_1 = A + E$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем ядро этого оператора, т.е. собственные векторы оператора A при $\lambda = 1$.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_3 = x_4 = 1 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{matrix}.$$

Вектор f_1 (1, 1, 1, 1) образует базис ядра оператора A_1 и является единственным собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$.

Ищем базис образа $M(A_1)$ оператора A_1.

$$\left.\begin{aligned} A_1e_1 &= (2,4,0,0) \\ A_1e_2 &= (2,3,0,0) \\ A_1e_3 &= (0,-1,1,1) \\ A_1e_4 &= (1,2,-1,-1) \end{aligned}\right\} \text{áàçèñ}, \quad M(A_1) \left\{\begin{matrix} (0,1,0,0) & f_2 \\ (1,0,0,0) & f_3 \\ (0,0,1,1) & f_4 \end{matrix}\right. .$$

Отмечая, что $f_1 = f_2 + f_3 + f_4$, заключаем: базисом пересечения ядра и образа оператора A_1 является вектор f_1.

Так как собственный вектор только один, а собственное значение имеет кратность 2, требуется найти еще один вектор жорданового базиса. Поэтому полагаем g_3 равным вектору ψ_1(1, 1, 1, 1), а еще один вектор жорданового базиса ищем как прообраз первого слоя для ψ_1(1, 1, 1, 1). Для этого решаем неоднородную систему линейных уравнений $A_1g_4 = \varphi_1$ и находим вектор g_4(0, 1/2, 0, 1/2) жорданового базиса, соответствующего собственному значению $\lambda = 1$ кратности два. При этом у вектора ψ_1(1, 1, 1, 1) нет прообраза второго слоя, ибо система $A_1y = g_4$ с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

решений не имеет. И вновь это не случайно, потому что собственному значению $\lambda = 1$ кратности 2 должно соответствовать два вектора жорданового базиса, а они уже найдены:

$$g_3(1, 1, 1, 1); \quad g_4(0, 1/2, 0, 1/2).$$

При этом отметим, что: $Ag_3 = g_1$, $Ag_4 = g_3 + g_4$. Для оператора A найден жорданов базис:

$$\begin{matrix} g_1(1,1,0,0) \\ g_2(1,3/4,0,0) \\ g_3(1,1,1,1) \\ g_4(0,1/2,0,1/2) \end{matrix}.$$

При этом

$$\begin{aligned} Ag_1 &= -g_1 \\ Ag_2 &= g_1 - g_2 \\ Ag_3 &= g_3 \\ Ag_4 &= g_3 + g_4 \end{aligned}, \quad A_G = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \quad ▲$$

3°. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda E) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = 1;\; \lambda_{3,4} = 2.$

Δ а) Рассмотрим оператор A_1: $A_1 - E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ищем собственные векторы оператора A при $\lambda = 1$, т.е. ядро оператора A_1.

$$A_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{matrix}; \quad \begin{cases} f_1(1{,}0{,}1{,}0) \\ f_2(0{,},1{,}0{,}1) \end{cases}.$$ Векторы $\{f_1,f_2\}$ образуют базис $N(A_1)$.

Далее ищем базис $M(A_1)$: $$\left.\begin{matrix} A_1e_1 = (-1,1,0,0) \\ A_1e_2 = (-2,2,2,-1) \\ A_1e_3 = (1,-1,0,0) \\ A_1e_4 = (2,-2,-2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} f_3(-1,1,0,0) \\ f_4(0,0,2,-1) \end{matrix}.$$

Так как векторы f_1, f_2, f_3, f_4 – линейно независимы, то $M(A_1) \cap N(A_1) =$, а векторы дополняющие базис $M(A_1) \cap N(A_1)$ до базиса $N(A_1)$ – векторы f_1, f_2:

Кратность корня $\lambda = 1$ равна двум, поэтому имеем уже два вектора жорданового базиса A:

$g_1(1, 0, 1, 0)$; $g_2(0, 1, 0, 1)$.

б)Рассмотрим оператор A_2=A-2E: $$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ и найдем ядро оператора A_2 т.е. собственные вектора A при $\lambda = 2$. $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_4 \end{matrix}.$$ Вектор $f_1(0, 0, -2, 1)$, являющийся решением этой системы является одновременно и базисом ядра $N(A_1)$.

Ищем базис образа оператора A_2 – $M(A_2)$.

$$\left.\begin{matrix} A_2e_1 = (-2,1,0,0) \\ A_2e_2 = (-2,1,2,-1) \\ A_2e_3 = (1,-1,-1,0) \\ A_2e_4 = (2,-2,-2,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \textbf{базис}\, M(A_2) \; \begin{cases} (-2{,}1{,}0{,}0) & f_2 \\ (0{,}0{,}2{,}-1) & f_3 \\ (1{,}-1{,}-1{,}0) & f_4 \end{cases} \Rightarrow M(A_2) \cap N(A_2) = \{(0,0,2,-1)\}.$$

Тогда, вектор (0, 0, –2, 1) это вектор жорданового базиса, а второй вектор – прообраз вектора (0, 0, –2, 1), если он есть. Система для его нахождения: A_2y = (0, 0, –2, 1).

Решаем систему A_2y = (0, 0, –2, 1), для нахождения прообраза 1-го слоя вектора (0, 0, –2, 1)

Получаем: $$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \\ x_3 = -2x_4 \end{matrix}.$$

Решением системы является, например, вектор (1, –1, 0, 0).

Тогда $g_3(0, 0, -2, 1)$; $g_4(1, 1, 0, 0)$.

Для оператора A найден жорданов базис: $$\begin{matrix} g_1(1,0,1,0) \\ g_2(0,1,0,1) \\ g_3(0,0,-2,1) \\ g_4(1,-1,0,0) \end{matrix}.$$

При этом $\begin{array}{l} Ag_1 = g_1 \\ Ag_2 = g_2 \\ Ag_3 = 2g_3 \\ Ag_4 = 2g_4 + g_3 \end{array}$, т.е. жорданова форма оператора A: $\left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$. ▲.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И НАПОМИНАНИЯ

Def: Оператор A, действующий в вещественном линейном пространстве называется линейным, если $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in R$

1) $A(x + y) = Ax + Ay$
2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$

Def: Вектор $x \in V$, $x \neq 0$ называется собственным вектором оператора A, если $\exists \alpha \in R$ такое, что $Ax = \alpha x$ и α при этом называется собственным значением оператора A.

1°. Собственные значения оператора A являются корнями характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Наоборот, вообще говоря, неверно. Корень характеристического уравнения является собственным значением оператора A только в случае, когда этот корень вещественен.

Def: Оператор A^* называется сопряженным к оператору A, если $\forall x, y \in V$, $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

2°. Каждый линейный оператор A имеет единственный сопряженный оператор, который также является линейным.

При доказательстве этой теоремы в комплексном пространстве используется понятие полуторалинейной формы. В вещественном пространстве используется понятие билинейной формы.

Def: Функция $B(x, y)$ называется билинейной формой в V, если $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in R$:

1) $B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y)$
2) $B(x, \beta_1 y + \beta_2 y_2) = \beta_1 B(x, y_1) + \beta_2 B(x, y_2)$

3°. Для любой билинейной формы $B(x, y)$ существует линейный оператор A такой, что $B(x, y) = (Ax, y)$.

Аналогом эрмитовых форм в вещественном пространстве служат симметричные билинейные формы.

Def: Билинейная форма $B(x, y)$ называется симметричной, если $B(x, y) = B(y, x)$. Билинейная форма $B(x, y)$ называется кососимметричной, если $B(x, y) = -B(y, x)$.

4°. Любую билинейную форму можно представить в виде суммы симметричной и кососиметричной билинейной формы.

5°. Для того, чтобы билинейная форма $B(x, y)$, заданная в вещественном евклидовом пространстве V, была симметричной необходимо и достаточно, чтобы оператор A в представлении $B(x, y) = (Ax, y)$ был самосопряженным.

<u>T°</u>. Все корни характеристического многочлена самосопряженного линейного оператора A в евклидовом пространстве – вещественны.

◀ Пусть $\lambda = \alpha + \beta i$ – корень характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Пусть (a_{ik}) – элементы матрицы оператора в некотором базисе $\{e_{ik}\}$, $(a_{ik} \in R)$. Будем искать решение системы $\sum_k a_{ik}\zeta_k = \lambda\zeta_i$, где $\lambda = \alpha + \beta i$. Система имеет решение $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, ибо определитель системы равен 0. Пусть решение $\zeta_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Подставляя в систему и приравнивая вещественные и мнимые части выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, имеем: $\sum_k a_{ik}y_k + i\sum_k a_{ik}y_k = (\alpha + \beta i)(x_i + y_k)$,

$\begin{cases} \sum_k a_{ik}x_k = \alpha x_i - \beta y_i, \\ \sum_k a_{ik}y_k = \beta x_i + \alpha y_i \end{cases}$, или в векторном виде $\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y, \\ Ay = \alpha y + \beta x \end{cases}$.

Умножим скалярно первое уравнение на y, а второе на x:

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \alpha(x, y) - \beta(y, y) \\ (y, Ay) &= \alpha(x, y) + \beta(x, x) \end{aligned}.$$

Учитывая, что $(Ax, y) = (x, Ay)$ (ведь A – самосопряженный) имеем

$\alpha(x, y) - \beta(y, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, x)$, т.е. $\beta((x, x) + (y, y)) = 0 \Rightarrow \beta = 0$, т.е. $\lambda = \alpha \in \mathrm{R}$ ▶

6°. У каждого линейного самосопряженного оператора A в n – мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.

7°. В базисе из нормированных ортогональных собственных векторов матрица линейного самосопряженного оператора A имеет диагональный вид и по диагонали стоят собственные значения.

8°. В произвольном ортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора будет симметричной ($A^T = A$). Верно и обратное. Этим вещественный случай отличается от комплексного: в комплексном случае оператор A является эрмитовым, когда матрица этого оператора эрмитова (т.е. $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$).

§2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В комплексных унитарных пространствах рассматривались унитарные операторы, т.е. операторы, сохраняющие скалярное произведение ($(Ux, Uy) = (x, y)$), их аналогом в евклидовых пространствах являются ортогональные операторы.

Def: Линейный оператор P, действующий в евклидовом пространстве называется ортогональным, если $\forall x, y \in V$: $(Px, Py) = (x, y)$.

Непосредственно из определения следует, что если $\{e_k\}$ ортогональный базис в V, то $\{Pe_k\}$ тоже ортогональный базис в V.

<u>T°</u>. Чтобы линейный оператор P был ортогональным необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор P^{-1} и выполнялось равенство $P^* = P^{-1}$.

◀ **<u>Необходимость</u>**. Пусть P – ортогональный.

$(P^*Px, y) = (Px, Py) = (x, y) \Rightarrow ((P^*P - E)x, y) = 0 \Rightarrow P^*P = E \Rightarrow (Px, Py) = (x, y) \Rightarrow P^* = P^{-1}$.

<u>Достаточность</u>. Пусть $P^* = P^{-1}$, $(x, y) = (x, P^{-1}Py) = (x, P^*Py) = (Px, Py)$ ▶

Def: Матрица называется ортогональной, если $P^TP = PP^T = E$.

Если e_1, e_2, …, e_n ортонормированный базис в V, то оператор P будет ортогональным тогда и только тогда когда матрица оператора будет ортогональной.

В унитарном пространстве аналогом ортогональной матрицы является унитарная матрица, т.е. такая матрица U, что $U^*U = UU^* = E$. Здесь U^* эрмитово сопряженная матрица, т. е. $U^* = \overline{U}^T$. Нетрудно показать, что в ортонормированном базисе матрица линейного оператора U унитарна тогда и только тогда, когда оператор U унитарен.

Рассмотрим **ортогональное преобразование в одномерном случае** $\forall x \in V_1$, $x = \alpha e$, $\alpha \in R$, тогда $Pe = \lambda e \Rightarrow (Pe, Pe) = (\lambda e, \lambda e) = \lambda^2 (e, e) = (e, e)$, т.е. $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$, таким образом, в одномерном пространстве существует два ортогональных преобразования $P_+x = x$ и $P_-x = -x$.

Рассмотрим **ортогональное преобразование в двумерном случае**. Если P задается матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то из условия $P^TP = PP^T = E$ следует, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 + b^2 = 1, \\ c^2 + d^2 = 1, \end{matrix} \quad ac + bd = 0,$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 + c^2 = 1, \\ b^2 + d^2 = 1, \end{matrix} \quad ab + cd = 0,$$

т.е. $\begin{matrix} a^2 = d^2 \\ b^2 = c^2 \end{matrix}$, $\quad a^2 + b^2 = 1, \quad \begin{matrix} ac + db = 0 \\ ab + cd = 0 \end{matrix}$. Положив $a = \cos\varphi$, $b = -\sin\varphi$, получим $P_\pm = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \pm\sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix}$, причем во второй строке надо брать либо оба минуса, либо оба плюса. При этом $\det P_\pm = \pm 1$.

Ортогональная матрица P_+ **называется собственной**, а P_- **называется несобственной**.

В ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$ оператор P_+ осуществляет поворот на угол φ в плоскости $\{e_1, e_2\}$. Записав $P_- = QP_+$, где $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, можем сказать, что P_- осуществляет поворот на угол φ в плоскости $\{e_1, e_2\}$ (P_+), а затем отражение относительно оси e_1 (Q).

В **общем случае** в n-мерном евклидовом пространстве произвольный ортогональный оператор P в некотором ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, …, e_n\}$ может быть записан в виде:

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & \ldots & & & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & -1 & & & & & & \\
 & & & & & \ldots & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\
 & 0 & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\
 & & & & & & & & \ldots & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\
 & & & & & & & & & -\sin\varphi_k & -\cos\varphi_k \\
 & & & & & & & & & & \ldots
\end{pmatrix}.$$

Таким образом, в некотором ортонормированном базисе действие ортогонального оператора сводится к последовательным поворотам и отражениям относительно координатных осей.

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К СУММЕ КВАДРАТОВ В ОРТОГОНАЛЬНОМ БАЗИСЕ

Т°. Пусть $B(x, y)$ – симметричная билинейная форма в евклидовом пространстве V. Тогда существует ортонормированный базис $\{e_k\}$ пространства V и существуют $\lambda_k \in R$ такие, что в указанном базисе квадратичная форма $B(x,x) = \sum\limits_k \lambda_k \zeta_k^{\,2}$.

◀ $B(x, y)$ – симметричная билинейная форма $\Rightarrow \exists A$ – самосопряженный такой, что $B(x, y) = (Ax, y) \Rightarrow$ для A $\exists \{e_k\}$ ортонормированный собственный базис $\Rightarrow \forall x \in V$, $x = \sum\limits_k \xi_k e_k$;

$$Ax = \sum_k \xi_k A e_k = \sum_k \lambda_k \xi_k e_k \Rightarrow B(x, x) = A(x, x) = \left(\sum_k \lambda_k \xi_k e_k,\ \sum_k \lambda_k \xi_k e_k\right) =$$
$$= \sum_k \sum_m \lambda_k \xi_k \xi_m (e_k, e_m) = \sum_{k,m} \lambda_k \xi_k \xi_m \delta_{km} = \sum_k \lambda_k \xi_k^2$$ ▶

§2. ОДНОВРЕМЕННОЕ ПРИВЕДЕНИЕ ПАРЫ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ К СУММЕ КВАДРАТОВ

Т°. Пусть $A(x, y)$ и $B(x, y)$ – симметричные билинейные формы в вещественном линейном пространстве V. Пусть, кроме того, $\forall x \in V$, $x \neq 0$, $B(x, x) > 0$, т.е. квадратичная форма $B(x, x)$ положительно определена. Тогда в V существует базис $\{e_k\}$, в котором: $A(x,x) = \sum\limits_k \lambda_k \zeta^2_k$; $B(x,x) = \sum\limits_k \zeta_k^2$.

◀ Рассмотрим билинейную форму $B(x, y)$ полярную к квадратичной форме $B(x, x)$. Учитывая свойства $B(x, x)$ в посылке теоремы, форма $B(x, y)$, может задавать скалярное произведение в V $(x, y) \equiv B(x, y)$, теперь V стало евклидовым пространством $\Rightarrow \exists \{e_k\}$ – ортонормированный базис, в котором $A(x,x) = \sum\limits_k \lambda_k \zeta_k^2$, при этом в ортонормированном базисе $(x,x) = \sum\limits_k \zeta_k^2 = B(x,x)$ ▶

Две последние теоремы дают доказательство существования и способ построения канонического базиса квадратичной формы.

Этот способ не более сложен чем, скажем, методы Лагранжа или Якоби, рассмотренные ранее. Однако доказательство полезно тем, что иллюстрирует применение самосопряженных операторов и выглядит здесь достаточно мощно.

§3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим произвольную дифференцируемую функцию f на некоторой гладкой поверхности S. Точка $x_0 \in S$ называется стационарной (критической) точкой, если в x_0 производная f по любому направлению на поверхности S равна нулю.

Мы исследуем вопрос о стационарных (в частности экстремальных) точках и значениях квадратичной формы $B(x, x)$ на сфере единичного радиуса в евклидовом пространстве V и о связи этих значений с собственными векторами и значениями самосопряженного оператора A, такого, что $(Ax, y) = B(x, y)$. При этом единичной сферой в V назовем множество $x \in V$ для которых $(x, x) = \|x\| = 1$.

Итак: пусть $B(x, x)$ – квадратичная форма, $B(x, y)$ – полярная ей симметричная билинейная форма, A – самосопряженный оператор: $B(x, y) = (Ax, y)$, тогда в базисе из собственных векторов оператора A : $B(x,x) = \sum_k \lambda_k \xi_k^2$, здесь λ_k – собственные значения A.

Договоримся, что $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \lambda_4 \ge \ldots \ge \lambda_n$. Заметим, что в выбранном базисе уравнение единичной сферы таково: $\sum_k \xi_k^2 - 1 = 0$.

<u>Т</u>°. Стационарные значения квадратичной формы $B(x, x)$ на единичной сфере равны собственным значениям λ_k оператора A. Эти стационарные значения достигаются на единичных собственных векторах e_k оператора A.

Задача: найти точки экстремума $B(x, x)$ при условии $(x, x) = 1$. Это задача на условный экстремум.

◀ Можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа: $L = \sum_k \lambda_k \xi_k^2 - \lambda(\sum_k \xi_k^2 - 1)$. **Необходимое условие экстремума**: $\sum_k \xi_k^2 = 1$ и $\dfrac{\partial L}{\partial \zeta_k} = 2(\lambda_k - \lambda)\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Здесь λ_k – неопределенные множители Лагранжа.

Решение этой системы: $\begin{array}{l} \lambda = \lambda_k,\ \xi_1 = 0, \ldots, \xi_{k-1} = 0,\ \xi_k = 1, \\ \xi_{k+1} = 0, \ldots, \xi_n = 0, \end{array}$ т.е. эти решения – собственные значения и собственные векторы оператора A.

Примечание: Числа λ_1 и λ_n являются собственно наибольшим и наименьшим значением $B(x, x)$ на сфере $(x, x) = 1$, т.е. $\underbrace{\lambda_n \le B(x,x) \le \lambda_1}_{\text{принцип Рэлея}}$, $\lambda_n \le A(x,x)/(x,x) \le \lambda_1$

$\lambda_{\max} = \sup(A(x,x)/(x,x)) = \sup\limits_{\|x\|=1} B(x,x)$ $\lambda_{\min} = \inf(A(x,x)/(x,x)) = \inf\limits_{\|x\|=1} B(x,x)$.

Неравенства $\begin{array}{c} \underbrace{\lambda_n \le B(x,x) \le \lambda_1}_{\text{принцип Рэлея}} \\ \lambda_n \le A(x,x)/(x,x) \le \lambda_1 \end{array}$ характеризуют, так называемый, принцип Рэлея.

При этом, $\lambda_{\max} = \sup(A(x,x)/(x,x)) = \sup\limits_{\|x\|=1} B(x,x)$, $\lambda_{\min} = \inf(A(x,x)/(x,x)) = \inf\limits_{\|x\|=1} B(x,x)$

Для нахождения наибольшего по модулю собственного значения оператора A, можно применить следующую процедуру: . $v = \sum_i \alpha_i e_i \Rightarrow A^k v = \sum_i \alpha_i \lambda_i^k e_i = \lambda_i^k \sum_i \alpha_i \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \approx \alpha_i \lambda_i^k e_i$;

$\dfrac{A^{k+1}v}{A^k v} \approx \dfrac{\alpha_i \lambda_i^{k+1} e_i}{\alpha_i \lambda_i^k e_i} = \lambda$; $\lambda_i = \dfrac{(A^{k+1}v)_i}{(A^k v)_i} \to \text{cons}$.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

§1. ПОНЯТИЕ ГРУППЫ. ПОДГРУППЫ

Множество G элементов x, y, z, … произвольной природы называется группой, если в нем корректно введена внутренняя операция (закон композиции) т.е. $\forall x, y\in G, \exists z\in G$ такое, что $z = x\oplus y$ или ($z = x\odot y$), удовлетворяющее условиям:

1) $x\oplus(y\oplus z) = (x\oplus y)\oplus z$	ассоциативность	1) $x\odot(y\odot z) = (x\odot y)\odot z$;
2) $\exists\theta\in G \mid \forall x\in G\ \ x\oplus\theta = x$	нейтральный элемент	2) $\exists e\in G \mid \forall x\in G\ \ x\odot e = x$;
3) $\forall x\in G\ \exists y\in G \mid x\oplus y=\theta$ аддитивная форма записи	обратный элемент	3) $\forall x\in G\ \exists y\in G \mid x\ \ e=\theta$ $(y=x^{-1})$. мультиплик. форма записи

Если введенная операция еще и коммутативная, т.е. $x\oplus y = y\oplus x$ или ($x\odot y = y\odot x$), то группа **называется абелевой**.

Подмножество элементов G_1 группы G **называется подгруппой**, если:

1) $\forall x, y\in G_1 \to x\odot y\in G_1$; 2) $\forall x\in G_1 \to x^{-1}\in G_1$.

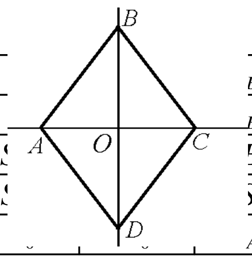
(Здесь применена мультипликативная форма записи)

Подгруппа G_1 группы G сама по себе является группой. Простейшими (тривиальными) подгруппами любой группы является сама группа и группа, состоящая из одного элемента – нейтрального.

§2. ПРИМЕРЫ ГРУПП

1) Аддитивные группы: {0}, Q, R, C, множество Z_k целых чисел, кратных целому заданному k.
2) Мультипликативные: {1}, {1, –1}, {1, i, –1, –i}, множество $\{z\in C \mid \|z\| = 1\}$, P_+ – множество вещественных положительных чисел, $Q\backslash\{0\}$, $R\backslash\{0\}$, $C\backslash\{0\}$.
3) Группа симметрий ромба V: $\{E, S_{BD}, S_{AC}, S_0\}$.

Таблица Кэли:



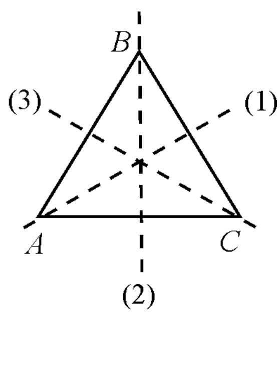
[illegible]	[illegible]	BD	S_{AC}	S_0
[illegible]	[illegible]	BD	S_{AC}	S_0
[illegible]	[illegible]	E	S_0	S_{AC}
[illegible]	[illegible]	S_0	E	S_{BD}
[illegible]	[illegible]	AC	S_{BD}	E

4) Для заданного равностороннего треугольника ABC рассмотрим преобразования, отображающие треугольник сам на себя:

1. E – тождественное преобразование.
2. α – поворот на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки.
3. β – поворот на угол $4\pi/3$ против часовой стрелки.
4. S_1 – симметрия относительно оси (1) ($B \leftrightarrow C$)
5. S_2 – симметрия относительно оси (2) ($A \leftrightarrow C$)
6. S_3 – симметрия относительно оси (3) ($A \leftrightarrow B$).

Закон композиции зададим таблицей Кэли:

$\odot$	E	α	β	S_1	S_2	S_3
E	E	α	β	S_1	S_2	S_3
α	α	β	E	S_2	S_3	S_1
β	β	E	α	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_2	S_3	E	α	β



S_2	S_2	S_3	S_1	β	E	α
S_3	S_3	S_1	S_2	α	β	E

Такой закон композиции ассоциативен, но не коммутативен (например $S_1 \odot S_2 \neq S_2 \odot S_1$. Единичный элемент E – тождественное преобразование, обратные $\alpha^{-1} = \beta$; $\beta^{-1} = \alpha$; $S_i^{-1} = S_i$.

Множество преобразований самосовмещения треугольника с таким законом композиции **называется группой самосовмещений равностороннего треугольника**.

Подмножество $\{E, \alpha, \beta\}$ этой группы образует подгруппу группы самосовмещений и **называется группой поворотов равностороннего треугольника**.

5) Перестановкой назовем закон, по которому элементам a, b, c, d, … взаимно однозначно ставятся в соответствие элементы того же множества, но, возможно, в другом порядке $f = \begin{pmatrix} a & b & c & \dots \\ f(a) & f(b) & f(c) & \dots \end{pmatrix}$.

Композиция двух перестановок $f_1 \odot f_2$ определяется как последовательное применение двух перестановок: сначала f_2, а потом f_1.

Для конечного множества E из n – элементов перестановки образуют группу (не абелевую!), которая называется симметричной группой S_n.

В частности:
Группа перестановок трех элементов S_3:
Пусть $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Закон композиции определен таблицей:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	P_2	P_1	P_5	P_6	P_3	P_4
P_3	P_3	P_6	P_1	P_5	P_4	P_2
P_4	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3
P_5	P_5	P_4	P_2	P_3	P_6	P_1
P_6	P_6	P_3	P_4	P_2	P_1	P_5

Данная группа имеет три подгруппы по два элемента: $\{P_1, P_2\}$, $\{P_1, P_3\}$, $\{P_1, P_4\}$ и одну подгруппу из трех элементов: $\{P_1, P_5, P_6\}$.

Группу самосовмещений равностороннего треугольника можно представить как группу перестановок трех элементов:

$$E = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix},\ \alpha = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix},\ S_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}.$$

6) Рассмотрим множества, состоящие из двух элементов $\{0, 1\}$ с операцией: $0 \odot 0 = 0$; $0 \odot 1 = 1$; $1 \odot 0 = 1$; $1 \odot 1 = 1$. Единичный элемент здесь 0.

Эта группа называется группой вычетов по модулю 2 и обозначается Z_2.

7) Группа из двух преобразований евклидового пространства: а) тождественное преобразование – 0, б) отражение относительно θ – 1.
От группы Z_2 – отличается лишь природой элементов, групповые свойства одинаковы.

§3. ЕЩЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Если группа конечная – то количество её элементов называют порядком группы.
2°. Группа G из элементов $a^0 = e$, a, a^2, a^3, …, $a^k = e$ называется циклической группой, порождаемой элементом a. Порядок группы – $|G| = k$.
3°. Группа поворотов правильного многоугольника относительно его центра является циклической группой $n^{\text{го}}$ порядка. Порождается элементом $P_{2\pi/n}$ (поворот на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки). Эта группа обозначается C_n.
4°. Группа целых чисел по сложению также циклическая, ибо порождается одним элементом (0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, …, –(1), –(1 + 1), …), Группа обозначается C_∞.
5°. Если H_1 и H_2 помножества группы G, то $H \equiv \{h \mid h=h_1+h_2,\ h_1 \in G_1,\ h_2 \in G_2\}$ называется **суммой двух подмножеств группы** G и обозначается $G_1 + G_2$. Если, при этом, представление $h=h_1+h_2$ единственно, то сумма подмножеств называется **прямой суммой** и обозначается $H_1 \oplus H_2$. Отметим что, сумма двух подгрупп группы подгруппой, вообще говоря, не является. (*Попробуйте привести пример*)
6°. Т°. $G=G_1\oplus G_2\oplus\ldots\oplus G_k \;\Leftrightarrow\; (G_1,G_2,\ldots G_{i-1})\cap G_i=\{\theta\},\ \forall i\le k$.
Для того чтобы группу G можно было представить в виде прямой суммы подгрупп $G_1,G_2,\ldots,G_k$ необходимо и достаточно, чтобы подгруппы не имели других общих элементов, кроме нейтрального.

Т°. Пусть $|G| = n$ и $n=k\cdot l$ **.** НОД(k, l) = 1. Тогда $\exists G_k, G_l \subset G$, $|G_k|=k$, $|G_l|=l$: $G=G_k\oplus G_l$ (для абелевых циклических групп).
7°. Если для циклической группы G порядок группы $|G|=p^n$ (n>1), где p – простое число, то группа называется примарной.

Т°. Примарная группа не может быть разложена в прямую сумму нетривиальных подгрупп.
8°. Т°(Лагранжа). Если G_1 - подгруппа конечной группы G то порядок подгруппы G_1 является делителем порядка группы G.

§4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГРУПП

1°. Если $aa^{-1} = e \Rightarrow a^{-1}a = e$, т.е. $(a^{-1})^{-1} = a$.
◀ Пусть x элемент обратный к a^{-1}, т.е. $a^{-1}x = e$. Тогда $a = ae = a(a^{-1}x) = (aa^{-1})x = ex$ и $a^{-1}a = a^{-1}(ex) = (a^{-1}e)x = a^{-1}x = e$ ▶

2°. $\forall a$, $ea = a$, т.е. правый нейтральный элемент является и левым нейтральным.
◀ $$\left.\begin{aligned} aa^{-1}=e\\ a^{-1}a=e\end{aligned}\right\} \Rightarrow ea=(aa^{-1})a=a(a^{-1}a)=ae=a$$ ▶

3°. Если $ax = e$ и $ya = e$, то $x = y$.
◀ Пусть $ay = e$, т.е. y обратен к $a \Rightarrow ya = e$ (**1°**), т.е. $y = ye = y(ax) = (ya)x = ex = x$ ▶

Из свойств **1°**, **2°**, **3°** следует, что:
1s) Элемент a^{-1} является как левым, так и правым обратным к a.
2s) В любой группе уравнения $ax = b$ и $ya = b$ однозначно разрешимы, причем $x = a^{-1}b$,

$y = ba^{-1}$.

3s) В группе имеется единственный нейтральный элемент.

4°. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

◀ $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = e$ ▶

§5. ИЗОМОРФИЗМ ГРУПП

Две группы G_1 и G_2 **называются изоморфными**, если существует взаимно однозначное соответствие f между элементами G_1 и G_2: $G_1 \xleftrightarrow{f} G_2$ такое, что если

$$\begin{matrix} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \end{matrix} \Rightarrow x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2 .$$

Для изоморфных групп: $e_1 \leftrightarrow e_2$, a, $a^{-1} \leftrightarrow f(a)$, $f(a^{-1})$. Изоморфные группы с точки зрения групповых свойств неразличимы.

Примеры изоморфных групп:

а) группа самосовмещений равностороннего треугольника и группа перестановок из трех элементов.

б) Группа вычетов по модулю 2: Z_2 и группа, состоящая из двух преобразований евклидового пространства: тождественного преобразования и отражения относительно θ.

Изоморфное отображение группы G на саму себя **называется автоморфизмом**. Если отдельные автоморфизмы группы рассматривать как некоторые элементы, а последовательное проведение автоморфизмов, как произведение соответствующих элементов, то автоморфизмы сами по себе образуют группу, единичным элементом которой является тождественный автоморфизм. Эта группа **называется группой автоморфизмов данной группы** G.

§6. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ. НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

Если H_1 и H_2 – подмножества группы G, то произведением H_3 подмножеств H_1 и H_2 называется $H_3 = H_1 \cdot H_2 \equiv \{h_3 \mid h_3 = h_1 \cdot h_2;\ h_1 \in H_1;\ h_2 \in H_2\}$.

Отметим, что если H_1 и H_2 – подгруппы группы G, то $H_1 \cdot H_2$, вообще говоря, не подгруппа.

◀ В самом деле, если $h_3^{(1)}, h_3^{(2)} \in H_3$, то $h_3^{(1)} \cdot h_3^{(2)} = \underbrace{(h_1^{(1)} \cdot h_2^{(1)})(h_1^{(2)} \cdot h_2^{(2)})}_{\in H_3} =$

$= h_1^{(1)}(h_2^{(1)} \cdot h_1^{(2)})h_2^{(2)} = (\underbrace{h_1^{(1)} \cdot h_1^{(2)}}_{\in H_1})(\underbrace{h_2^{(1)} \cdot h_2^{(2)}}_{\in H_2})$, если бы можно было, то …. Но коммутативный закон, вообще говоря, не выполнен ▶

Если H подгруппа G и $a \in G$, то aH и Ha, рассматриваемые как произведения множества H и одноэлементного множества $\{a\}$, **называются левым и правым смежными классами подгруппы** H в G. Изменение a влечет за собой, вообще говоря, изменение смежных классов.

§7. СВОЙСТВА СМЕЖНЫХ КЛАССОВ (СФОРМУЛИРОВАНЫ ДЛЯ ЛЕВЫХ,

НО СПРАВЕДЛИВЫ И ДЛЯ ПРАВЫХ)

1°. $a\in H \Rightarrow aH \equiv H$. *Доказать самостоятельно.*

2°. $a^{-1}b\in H \Rightarrow aH = bH$. ◀ $a^{-1}bH \equiv H$ (из **1°**) и тогда $bH = (aa^{-1})bH = a(a^{-1}bH) = aH$ ▶

3°. Два смежных класса одной подгруппы H либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

◀ Пусть aH и bH имеют общий элемент, т.е. для $h_1, h_2\in H$, $ah_1 = bh_2 \Rightarrow a^{-1}b = h_1h_2^{-1}\in H$ и т.к. $a^{-1}b\in H \Rightarrow aH = bH$ (из **2°**) ▶

4°. $a\in aH$. *Доказать самостоятельно.*

Пусть H такая подгруппа G для которой все левые смежные классы являются и правыми смежными классами. В этом случае, $aH = Ha$, $\forall a\in G$. Подгруппа H для которой все левые смежные классы являются одновременно и правыми смежными классами **называется нормальным делителем группы** G.

<u>Т</u>°. Если H – нормальный делитель группы G, то произведение смежных классов – смежный класс.

◀ aH, bH – смежные классы, $aH\cdot bH = a(H\cdot b)H = a(bH)H = (ab)H\cdot H = (ab)H$ ▶

§8. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ СМЕЖНЫХ КЛАССОВ

1°. Рассмотрим группу S_3 (группа перестановок 3[x] элементов).

Левые смежные классы группы S_3 по подгруппе $B = \{P_1, P_2\}$ состоит из классов:

$$B;\quad P_5B = P_4B = \{P_4, P_5\};\quad P_3B = P_6B = \{P_3, P_6\}.$$

Правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $B = \{P_1, P_2\}$ состоит из классов:

$$B;\quad BP_6 = BP_4 = \{P_4, P_6\};\quad BP_5 = BP_3 = \{P_3, P_5\}.$$

Здесь множество левых и правых смежных классов не совпадают.

Однако … левые и правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $A = \{P_1, P_5, P_6\}$ совпадают: A; $AP_2 = P_2A = \{P_2, P_3, P_4\}$.

В данном случае подгруппа A – есть нормальный делитель группы S_3.

2°. В множестве целых чисел Z рассмотрим аддитивную подгруппу чисел, делящихся на пять: $A_5 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$.

Левые и правые смежные классы здесь такие, $A_5^1\{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$ – множество чисел, которые при делении на пять дают в остатке единицу. Аналогично A_5^2, A_5^3, A_5^4 – множества чисел, которые при делении на пять, дают в остатке 2, 3, 4 соответственно.

Все левые смежные классы совпадают с правыми смежными классами. Таким образом, A_5 – нормальный делитель группы Z. Если обозначить B_5 множество целых чисел, не делящихся на пять, то можно записать $Z = A_5\times B_5$, где знак обозначает прямое произведение.

Замечание: Множество классов $\{A_5^0, A_5^1, A_5^2, A_5^3, A_5^4\}$ образую аддитивную группу с нейтральным элементом A_5^0.

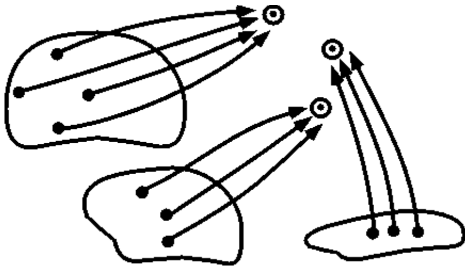
Эта группа **называется фактор-группой** группы Z по подгруппе A_5 и обозначается Z/A_5.

§9. ГОМОМОРФИЗМЫ. ФАКТОР-ГРУППА

Пусть G – группа с элементами a, b, c, … и $\overline{G}$ – некоторое множество с элементами $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ в котором введена операция: $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \overline{G} \quad \exists \overline{c} \in \overline{G} \,|\, \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

Def: Отображение f группы G на множество $\overline{G}$: $f: G \to \overline{G}$ **называется гомоморфизмом**, если $\forall a, b \in G$ выполнено соотношение $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. При этом $\overline{G}$ называется гомоморфным образом группы G.

Если $\overline{G} \subset G$, то гомоморфизм **называется эндоморфизмом**.



Если задано гомоморфное отображение G на $\overline{G}$, то все элементы группы G разбиваются на непересекающиеся классы; В классы объединяются все те элементы группы G, которые отображаются в один и тот же элемент множества $\overline{G}$.

<u>T</u>°. Гомоморфный образ группы есть группа.

◀ Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ элементы гомоморфного образа $\overline{G}$ группы G при гомоморфизме f. Значит, $\forall \overline{a}, \overline{b}, \ldots \in \overline{G} \quad \exists a, b, \ldots \in G$ такие, что $\overline{a} = f(a),\ \overline{b} = f(b), \ldots$ Тогда операции в G и $\overline{G}$ согласованны (по определению гомоморфизма) и осталось проверить свойства операции:

а) $\overline{a}(\overline{b}\overline{c}) = f(a)((f(b) \cdot f(c)) = f(a)f(bc) = f(a(bc)) = f((ab)c) = f(ab) \cdot f(c) = (f(a)f(b)) \cdot f(c) = (\overline{a}\overline{b})\overline{c}$

(ассоциативность операции);

б) $f(e)$ обозначим $\overline{e}$: $\overline{a}\,\overline{e} = f(a)f(e) = f(ae) = f(a) = \overline{a}$ (т.к. $f(e) = \overline{e}$ единичный элемент);

б) $f(a^{-1})$ обозначим $\overline{a}^{-1}$: $a\overline{a}^{-1} = f(a)f(a^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) = f(e) = \overline{a}$ (т.е. обратный $\overline{a}^{-1}$ к $\overline{a}$) ▶

Пусть H – нормальный делитель группы G. Определим отображение f группы G на множество $\overline{G}$ смежных классов по нормальному делителю H: f: $a \in G$, то $a \mapsto aH$: $aH \in \overline{G}$.

<u>T</u>°. Отображение f группы G на смежные классы по нормальному делителю H, при определении операции умножения классов смежности, как подмножеств группы G, представляет собой гомоморфизм.

◀ Истинность этого факта следует из доказанной теоремы о том, что произведение смежных классов есть смежный класс ▶

Следствием двух последних теорем является:

<u>T</u>°. Множество смежных классов группы G по нормальному делителю H с операцией умножения этих классов, определенной как произведение подмножеств группы G, образуют группу.

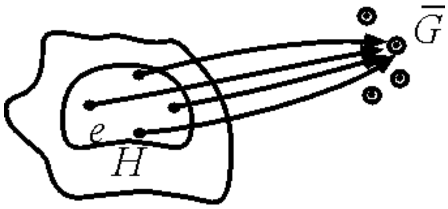
Эта группа **называется фактор-группой** группы G по нормальному делителю H и обозначается: G/H.

Очевидно, отображение f группы G на множество смежных классов по нормальному делителю H представляет собой гомоморфизм этой группы на фактор-группу G/H.

Пример: Пусть R^n – n-мерное линейное пространство. Оно является абелевой группой по сложению. По определению прямого произведения $R^n = R^1_{(1)} \times R^1_{(2)} \times R^1_{(3)} \times \ldots \times R^i_{(n)}$. $R^1_{(n)}$ –абелева подгруппа, т.е. нормальный делитель группы R^n. Смежным классом $a \in R^n$ служат многообразие $a + R^1_{(n)}$, фактор-группа $R^n / R^1_{(n)}$ изоморфна $(n–1)$ – подпространству $R^{n–1}$: $R^{n-1} = R^1_{(1)} \times R^1_{(2)} \times R^1_{(3)} \times \ldots \times R^i_{(n-1)}$ т.е. $R^{n–1} = R^n / R^1_{(n)}$. Кстати, именно этим и объясняется термин: нормальный делитель и обозначение G/H.

§10. ДВЕ ТЕОРЕМЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ

<u>Т°</u>. Пусть f – гомоморфизм группы G на $\overline{G}$ и пусть H – множество тех элементов группы G, которые при гомоморфизме f отображаются в элемент $f(e)$, где e – единица группы G. Тогда H нормальный делитель группы G.



◀ Достаточно доказать, что H – подгруппа и, что левые смежные классы есть одновременно и правые смежные классы.

1) $a \in H,\ b \in H \Rightarrow \begin{matrix} f(a) = f(e) \\ f(b) = f(e) \end{matrix} \Rightarrow f(ab) = f(a)f(b) =$

$= f(e)f(e) = f(ee) = f(e)$, т.е. $ab \in H$;

$a \in H \Rightarrow f(a^{-1}) = f(a^{-1}e) = f(a^{-1})\, f(e) = f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e)$, т.е. $a^{-1} \in H$. Тогда H – подгруппа группы G.

2) $a \in G$ и пусть $A = \{x \in G \,|\, f(x) = f(a)\}$. Докажем, что A – это одновременно и левый и правый смежные классы.

Пусть $a' \in A$. Рассмотрим уравнение $ax = a'$: $f(a') = f(ax) = f(a) \cdot f(x) = f(a')f(x)$, отсюда $f(x) = \bar{e} = f(e) \Rightarrow x \in H$; Т.к. $a \underset{x \in H}{x} = a' \Rightarrow a' \in aH$.

Пусть $a' \in A$. Рассмотрим уравнение $xa = a'$: $f(a') = f(xa) = f(x) \cdot f(a) = f(x)f(a')$), отсюда $f(x) = \bar{e} = f(e) \Rightarrow x \in H$; Т.к. $\underset{x \in H}{x} a = a' \Rightarrow a' \in Ha$.

Получили $A = aH = Ha$ ▶

<u>Т°</u>. Пусть f – гомоморфизм группы G на $\overline{G}$ и H – тот нормальный делитель группы G, элементам которого при гомоморфизме f соответствует $\bar{e} \in \overline{G}$. Тогда группа $\overline{G}$ и фактор-группа G/H изоморфны.

◀ Установим взаимно-однозначное соответствие между $\overline{G}$ и G/H.

$\bar{a} \in \overline{G} \to$ смежный класс, который с помощью f отображается в $\bar{a}$.

Это отображение взаимно – однозначно, ибо смежные классы не пересекаются. Если умножение классов производить как умножение подмножеств, то станет ясно, что это отображение есть изоморфизм. Но классы смежности и есть элементы фактор-группы. ▶

§11. ГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1°. Рассмотрим множество невырожденных линейных операторов (преобразований), действующих из V_n в V_n. Если определить произведение линейных операторов по правилу $(AB)x = A(Bx)$, то:

<u>Т°</u>. Множество $GL(n)$ невырожденных линейных преобразований линейного n-мерного пространства V с операцией умножения операторов введенной,как $(AB)x = A(Bx)$ представляет собой группу.

Эта группа **называется группой линейных невырожденных преобразований** линейного пространства V_n и обозначается: $GL(n)$.

2°. *Короткое воспоминание*: Линейный оператор P в евклидовом пространстве называется ортогональным, если $\forall x, y \in V$ (евклидово пространство) $(Px, Py) = (x, y)$.

Условие ортогональности оператора: Оператор P_2 ортогонален тогда и только тогда когда существует P^{-1} и $P^{-1} = P^{*}$.

<u>Т°</u>. Множество всех ортогональных операторов евклидового пространства V_n с обычной операцией умножения линейных операторов образует группу.

Эта группа **называется ортогональной группой** и обозначается $O(n)$.

◀ Пусть P_1 и P_2 – ортогональные операторы. Докажем, что P_1P_2 тоже ортогональный оператор $(P_1P_2x, P_1P_2x) \underbrace{=}_{\text{ортог}P_1} (P_2x, P_2x) \underbrace{=}_{\text{ортог}P_2} (x, y)$ ▶

3°. *Еще воспоминание*: Если оператор P ортогонален, то $\det P = \pm 1$. Поэтому все ортогональные операторы P делятся на два класса:

а) P для которых $\det P = 1$ (эти преобразования **называются собственными**)

б) P для которых $\det P = -1$ (эти преобразования **называются несобственными**)

<u>Т°</u>. Множество всех собственных ортогональных преобразований образует группу, которая **называется собственной ортогональной группой** и обозначается $SO(n)$.

4°. $O(n)$ есть подгруппа $GL(n)$; $SO(n)$ есть подгруппа $O(n)$.

5°. В комплексном линейном пространстве также можно рассмотреть группу линейных преобразований. Если в комплексном пространстве со скалярным произведением (унитарное пространство) рассмотреть множество линейных операторов, сохраняющих скалярное произведение: $(U_x, U_y) = (x, y)$ (такие операторы называются унитарными), то окажется, что унитарные операторы образуют группу. Эта группа называется **унитарной группой**, обозначается U_n и является аналогом ортогональной группы в унитарном пространстве.

§12. ГРУППА ЛОРЕНЦА

В физике, при изучении поведения тел (частиц) в пространстве и времени, часто полезно, из наглядных соображений, пользоваться $4^{х}$-мерным пространством векторов с координатами (ct, x, y, z)) (c – скорость света)). Такое пространство называется мировым пространством.

В этом пространстве событие изображается точкой в мировом пространстве или мировой точкой.

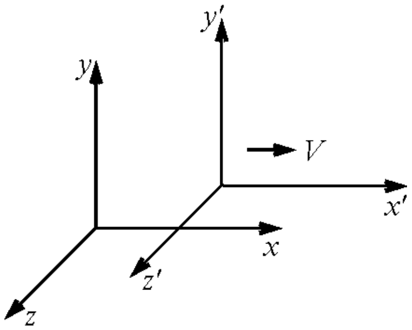
Частице в мировом пространстве соответствует мировая линия.

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета K из точки (x_1, y_1, z_1) в некоторый момент времени t_1 отправлен сигнал со скоростью c и этот сигнал принят в точке (x_2, y_2, z_2) в момент времени t_2. Тогда расстояние, которое этот сигнал прошел, равно:

$c(t_2-t_1)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, следовательно: $c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-$ $-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=0$. В другой инерциальной системе отсчета K' будем иметь: $c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2=0$.

Принцип неизменности скорости света в различных системах отсчета в математической интерпретации обозначает, что не изменяется величина S, где: $S^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2--x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$.

Величина S **называется интервалом** между двумя событиями в мировом пространстве.



Преобразования, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета K к другой инерциальной системе отсчета K', движущейся относительно K с постоянной скоростью V в предположении бесконечности скорости света **называются преобразованиями Галилея**:

$(x'=x+vt,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t)$.

Если же учитывать конечность скорости света, то такие преобразования носят **названия преобразований Лоренца**. Преобразования Лоренца сохраняют интервал. Если в указанном пространстве ввести: $\sigma(x)=(\operatorname{sgn}S^2(x))\sqrt{|S^2(x)|}$, то все векторы (и интервалы) разобьются на:

а) времени-подобные ($\sigma(x)>0$);

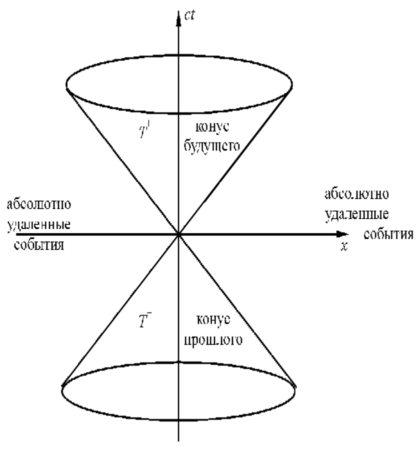
б) изотропные ($\sigma(x)=0$);

в) пространственно-подобные ($\sigma(x)<0$).

Если интервал между событиями времени-подобен, то существует K' в которой два события произошли в одном и том же месте мирового пространства.

Если интервал между событиями пространственно-подобен, то существует K' в котором два события произошли одновременно.

Два события могут быть связаны причинно-следственной связью, если интервал между ними времени-подобный.



Рассмотрим псевдоевклидово пространство $E^n(p,q)$ в котором скалярное произведение (x,y) задано симметричной невырожденной билинейной формой, полярной знакопеременной квадратичной форме $A(x,x)$, которая в некоторой системе координат(она называется Галилеевой) имеет вид: $A(x,x)=(x,x)=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q=n}x_i^2$.

Def: Линейное преобразование P псевдоевклидового пространства $E^n(p,q)$ называется преобразованием Лоренца, если $\forall x,y\in E^n(p,q)$, $(Px,Py)=(x,y)$.

Т°. Определитель преобразования Лоренца отличен от нуля и, следовательно, существует P^{-1}. *Доказать самостоятельно.*

Т°. Произведение преобразований Лоренца есть преобразование Лоренца. *Доказать самостоятельно.*

Таким образом:

Т°. Множество всех преобразований Лоренца псевдоевклидового пространства $E^n(p, q)$ с обычной операцией умножения линейных операторов образуют группу, которая называется общей группой Лоренца псевдоевклидового пространства $E^n(p, q)$ и обозначена $L(n; p, q)$. *Доказать самостоятельно.*

Группа $L(n;\ 1,\ n{-}1)$ обозначается $L(n)$. Группа Лоренцевых преобразований в рассмотренном выше $E^4(1, 3)$ обозначается $L(4)$.

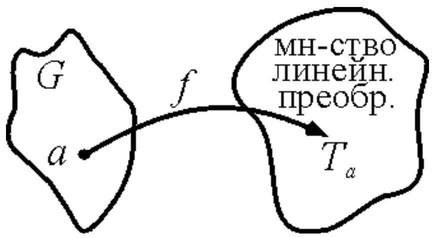
Подгруппа группы $L(n)$ преобразований P, которые времени-подобные векторы переводят во времени-подобные векторы **называется полной группой Лоренца** и обозначается $L_{\uparrow}(n)$.

Подгруппа группы $L(n)$ преобразований P, для которых $\det P > 0$ **называется собственной группой Лоренца** и обозначается $L_{+}(n)$.

Собственные преобразования Лоренца, которые принадлежат $L(n)$ т.е. переводят времени-подобные векторы во времени-подобные векторы также образуют подгруппу $L(n)$, которая называется группой Лоренца и обозначается $L_{+}^{\uparrow}(n)$.

§13. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП. ТЕРМИНОЛОГИЯ

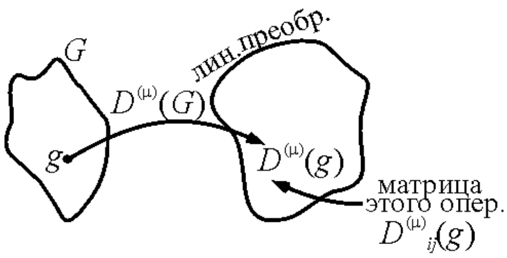
Def: Линейным представлением группы G в конечномерном евклидовом пространстве E^n называется такое отображение f, посредством которого $\forall a\in G\ \ \exists T_a$ – линейный оператор пространства E^n так, что $\forall a_1, a_2\in G$ выполнено соотношение: $T(a_1, a_2) = T_{a_1}\cdot T_{a_2}$. Т.е. осуществляет **гомоморфизм группы G на некоторое подмножество линейных преобразований**.



Используется следующая терминология: E^n – пространство представления; $\dim E^n$ – размерность представления; базис в E^n – базис представления.

Сам гомоморфный образ $f(G)$ группы G также **называется представлением группы G в пространстве представлений.**

В дальнейшем: n-мерное линейное представление группы будем **называть** (для кратности) **представлением этой группы**.



Обозначение представления группы : $D(G)$.

Различные представления группы : $D^{(\mu)}(G)$.

$D^{(\mu)}(y)$ – это линейный оператор: f: $g \to D^{(\mu)}(y)$.

Представления $D^{(\mu_1)}(G)$ и $D^{(\mu_2)}(G)$ группы G в одном и том же пространстве **называются эквивалентными**, если $\exists\, C$ – линейный оператор в E^n такой, что

$$\forall g \in G:\ D^{(\mu_1)}(g) = C^{-1} D^{(\mu_2)}(g)\, C.$$

Тривиальное представление группы G: гомоморфизм G на единичный элемент группы $GL(n)$.

Если f: $G \to G_1$, где G_1 подгруппа в $GL(n)$ и если f – изоморфизм, то представление **называется точным**. (Не у всякой группы есть точное n-мерное представление для заданного n).

Например: У $O(10)$ нет точного одномерного представления: группа $O(1)$ – абелева, а группа $O(10)$ не абелева.

§14. ПРИВОДИМЫЕ И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Def: Подпространство E' называется инвариантным для представления $D(G)$, если оно инвариантно для всякого оператора из $D(G)$.

Очевидно, что на инвариантном подпространстве E' представления $D(G)$ индуцируется некоторое представление $\widetilde{D}(G)$, которое, вообще говоря, не сводится к $D(G)$ если $E' \neq E^n$.

Представление $\widetilde{D}(G)$ **называется частью представления** $D(G)$.

Поясним теперь понятие представления.

Пусть, например, все матрицы некоторого трехмерного представления $D(G)$ имеют вид $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline 0 & 0 & a_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right)$. Нетрудно проверить, что при умножении матриц такого типа их структура сохраняется, причем $A_1^H = A_1' \cdot A_1''$ и $A_3^H = A_3' \cdot A_3''$ (т.е. части A_1 и A_3 перемножаются автономно).

Отсюда следует, что A_1 есть двумерное представление группы G, а A_3 есть одномерное представление этой же группы.

В таких случаях говорят, что представление $D(G)$ **приводимо**.

Если все матрицы (речь идет о квадратных матрицах $n \times n$) имеют вид $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, где A_1 и A_2 квадратные матрицы порядков n_1 и n_2, то матрицы A_1 и A_2 образуют представления, сумма размерностей которых $n_1 + n_2 = n$.

В этом случае представление **называют вполне приводимым**.

И в заключение: Представления $D(G)$ называется неприводимым, если у этого представления существуют лишь два инвариантных подпространства: E^n и $\{\theta\}$.

Роль неприводимых представлений заключается в том, что любое представление может быть выражено через неприводимые.

§15. ХАРАКТЕРЫ

Пусть $D(G)$ – n-мерное представление группы G, и $D_{ij}(g)$ – матрица оператора, отвечающего $g\in G$.

Характером элемента $g\in G$ в представлении $D(G)$ **называется число** $\chi(g) = D_{ij}(g) =$ $= D_{11}(g) + D_{22}(g) + \ldots + D_{nn}(g)$, т.е. характером элемента $g\in G$ является след оператора $D(G)$. Отсюда ясно, что характер любого элемента не зависит от базиса представления и поэтому является инвариантом.

Итак: любому $g\in G$ представления $D(G)$ отвечает число – характер этого элемента.

Вопрос: каким элементам группы отвечают одинаковые характеры?

Def: Элемент $b\in G$ называется сопряженным к элементу $a\in G$, если $\exists u\in G$ такой, что $uau^{-1} = b$.

Для сопряженных элементов выполнено:

1°. a сопряжен самому себе. ◀ $eae^{-1} = a$ ▶

2°. Если b сопряжен к a, и c сопряжен к b, то c сопряжен к a.

◀ $uau^{-1} = b \Rightarrow u^{-1}uau^{-1}u = u^{-1}bu \Rightarrow a = u^{-1}bu \Rightarrow a = vbv^{-1}$ ▶

3°. Если b сопряжен к a, и c сопряжен к b , то с сопряжен к a.

◀ $uau^{-1} = b,\quad vbv^{-1} = c \Rightarrow c = v(uau^{-1})v^{-1} = (vu)a(u^{-1}v^{-1}) = = (vu)a(vu)^{-1} = waw^{-1}$ ▶

Все элементы группы разобьем на классы взаимно-сопряженных элементов. Два таких класса либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

Т°. Характеры элементов принадлежащих к одному и тому же классу сопряженных элементов равны друг другу. *Доказать самостоятельно.*

Т°. Характеры элементов для эквивалентных представлений совпадают. *Доказать самостоятельно.*

Пусть G разбита на классы сопряженности $k_1, k_2, \ldots, k_v$. Тогда каждому k_i можно поставить в соответствие число χ_i – характер элементов k_i в представлении $D(G)$.

Тогда представление $D(G)$ может быть описано с помощью набора характеров $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_v$, который можно рассматривать, как координаты вектора в евклидовом пространстве E^v. При этом различным представлениям соответствуют, вообще говоря, различные векторы.

Указанный геометрический подход позволяет во многих случаях решать важные вопросы теории представления групп.

§16. ПРИМЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

Рассмотрим группу G – группу симметрий трехмерного пространства, состоящего из трех элементов: I – тождественное преобразование и P – отражение пространства относительно начала координат.

Т.е. $G = \{I, P\}$. При этом умножение элементов задано таблицей:

*	I	P
I	I	P
P	P	I

1) Одномерное представление группы G.

Пусть E^1 – пространство представлений и e_1 – базис. Пусть линейный невырожденный оператор $A^{(1)}$ в этом базисе имеет матрицу $A^{(1)} = (1)$. Очевидно, это преобразование образует подгруппу в группе $GL(1)$ причем умножение в этой подгруппе задается по правилу:

*	$A^{(1)}$
$A^{(1)}$	$A^{(1)}$

Мы получили одномерное представление $D^{(1)}(G)$ группы G

$$D^{(1)}(I) = A^{(1)};\ \ D^{(1)}(P) = A^{(1)};$$

2) Двумерное представление группы G. Выберем в E^2 базис $\{e_1, e_2\}$ и рассмотрим в этом базисе матрицы преобразований: $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; операции задаются таблицей:

	$A^{(2)}$	$B^{(2)}$
$A^{(2)}$	$A^{(2)}$	$B^{(2)}$
$B^{(2)}$	$B^{(2)}$	$A^{(2)}$

Получим двумерное представление группы G с помощью соотношений: $D^{(2)}(I) = A^{(2)}$; $D^{(2)}(P)= B^{(2)}$;

Этими соотношениями определяется изоморфизм группы G на подгруппу $\{A^{(2)};\ B^{(2)}\}$ группы $GL(2)$, т.е. это точное представление группы G.

1) Трехмерное представление группы G. Рассмотрим в E^3 в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ линейное преобразование $A^{(3)}$ с матрицей $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и законом умножения: $A^{(3)} \cdot A^{(3)} = A^{(3)}$.

Получаем трехмерное представление $D^{(3)}(G)$ с помощью соотношений:

$$D^{(3)}(I) = A^{(3)};\ \ D^{(3)}(P) = A^{(3)}.$$

4) Четырехмерное представление группы G. Рассмотрим в E^4 линейные преобразования $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$ с матрицами: $A^{(4)} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$; $B^{(4)} = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Преобразования $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$ образуют подгруппу в $GL(4)$ с законом умножения, аналогичным примеру **2,** соотношениями:

$$D^{(4)}(I) = A^{(4)},\ \ D^{(4)}(P) = B^{(4)}.$$

Заметив, что $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$ можно записать в виде $A^{(4)} = \begin{pmatrix} A^{(2)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}$; $B^{(4)} = \begin{pmatrix} B^{(2)} & 0 \\ 0 & B^{(2)} \end{pmatrix}$, можно записать (условно): $D^{(4)}(G) = D^{(2)}(G) + D^{(2)}(G) = 2D^{(2)}(G)$.

Аналогично можно условно записать $D^{(3)}(G) = 3D^{(3)}(G)$.

Используя это замечание можно без труда построить представление группы G любой конечной размерности.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТЕНЗОРОВ

§1. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ГРАММА

Def: Определителем Грамма, системы векторов $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k\}$ **называется определитель**

$$\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_k) = \begin{vmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & \dots & (e_1,e_k) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & \dots & (e_2,e_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_k,e_1) & (e_k,e_2) & \dots & (e_k,e_k) \end{vmatrix}.$$

T°. Для того чтобы система векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ евклидова пространства E_n была линейно-зависимой необходимо и достаточно чтобы $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_k)$ был равен нулю.

◀ Необходимость. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_k$ линейно зависимы. Тогда $e_k = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + e_{k-1}\alpha_{k-1}$ и в $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_k)$ элементы последней строки имеют вид $\alpha_1(e_1,e_i) + \alpha_2(e_2,e_i) + \dots + \alpha_{k-1}(e_{k-1},e_i)$, т.е. последняя строка есть линейная комбинация остальных $\Rightarrow$ $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_k) = 0$.

Достаточность. Пусть $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_k) = 0 \Rightarrow$строки его линейно зависимы $\Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ $\beta_1(e_1,e_i) + \dots + \beta_k(e_k,e_i) = 0 \Rightarrow (\beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k = 0$ и не все $\beta_i = 0 \Rightarrow e_1, e_2, \dots, e_k$ линейно зависимы. Противоречие ▶

Следствие. Если $e_1, e_2, \dots, e_k$ линейно независимы, то $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_k) \neq 0$. Более того, $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_k) > 0$

◀ Рассматриваем $\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_k)$. Тогда (e_k,e_i) – элементы матрицы некоторой симметрической билинейной формы, соответствующая которой квадратичная форма определяет скалярное произведение, т.е. является положительно определенной. Следовательно, по критерию Сильвестра $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_k > 0$. Но $\Delta_k = \Gamma(e_1, e_2, \dots, e_k)$ ▶

§2. ВЗАИМНЫЕ БАЗИСЫ. КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ

Пусть E_n – евклидово пространство, пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис в E_n и $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ другой базис в E_n. Базисы $\{e_i\}$ и $\{e^i\}$ называются взаимными, если $(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

↑символ

Кронекера-Капелли.

T°. Любой базис $\{e_i\}$ из E_n имеет единственный взаимный базис.

◀ Пусть $e^j = x_1^j e_1 + x_2^j e_2 + \dots + x_n^j e_n$. Умножим равенство скалярно на e_i.

$$(e_i, e^j) = x_1^j(e_i, e_1) + x_2^j(e_i, e_2) + \dots + x_n^j(e_i, e_n) = \delta_i^j,\ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Имеем неоднородную систему n-линейных уравнений с n неизвестными $\left(x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j\right)$, Определитель этой системы есть $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n) \neq 0$, т.е. система имеет единственное ненулевое решение.

Следовательно векторы e^j определяются однозначно. Убедимся в том, что они образуют базис (т. е. являются линейно независимыми).

Пусть $\alpha_1 e^1 + \alpha_1 e^2 + \dots + \alpha_n e^n = 0$. Умножим скалярно на e_i.

$\alpha_1(e_i, e^1) + \alpha_2(e_i, e^2) + \dots + \alpha_n(e_i, e^n) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ ▶

<u>Замечание</u>: если базис $\{e_i\}$ ортонормированный, то его взаимный базис совпадает с данным базисом.

Пусть $\{e_i\}$ и $\{e^j\}$ взаимные базисы в E_n.

Тогда $\forall x \in E_n$
$$\begin{aligned} x &= x_1 e^1 + x_2 e^2 + \ldots + x_n e^n \\ x &= x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n \end{aligned} \qquad (1)$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **называются ковариантными координатами вектора** x.
$(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ **называются контравариантными координатами вектора** x.

Смысл названий мы поясним далее.

<u>Соглашение</u>: Пусть имеется выражение, составленное из сомножителей, которые снабжены конечным числом индексов (верхних и нижних). При этом договариваются, что все нижние индексы обозначаются разными символами (аналогично верхние). Если в таком выражении встречаются два одинаковых индекса, из которых один верхний, а другой – нижний, то считается, что по таким индексам производится суммирование от 1 до n.

Например:
$$\begin{aligned} x_i e^i &= x_1 e^1 + x_2 e^2 + \ldots + x_n e^n \\ \delta_i^i &= \delta_1^1 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^n \end{aligned}.$$

Используя, это соглашение формула (1) записывается так: $x = x_i e^i$, $x = x^i e_i$, (индекс суммирования может быть обозначен любым символом, результат не изменится – и часто **называется** «немым» (иногда «глухим») индексом).

Пусть $x = x_i e^i$. Умножив на e_j, получим $(x,e_j) = x_i(e^i,e_j) = x_i\,\delta_i^j = x_j$. Аналогично $x = x^i e_i$ умножим на e^j и получим $(x,e^j) = x^i(e_i,e^j) = x^i\,\delta_i^j = x^j$. Т.е. получили формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= (x,e_i)\,e^i \\ x &= (x,e^i)\,e_i \end{aligned}\right\}$$

Эти формулы **называются формулами Гиббса**.

Тогда используя формулы Гиббса, запишем: $e_j = (e_j,e_i)e^i$ и $e^j = (e^j,e^i)e_i$ и обозначив $g_{ji} = (e_j,e_i)$, $g^{ji} = (e^j,e^i)$ получим $e_j = g_{ji}e^i$; $e^j = g^{ji}e_i$.

> Т.е. для получения взаимного базиса $\{e_j\}$ по базису $\{e^i\}$ достаточно знать матрицу $g_{ji} = (e_j,e_i)$ и наоборот: для получения базиса $\{e^j\}$ по базису $\{e_i\}$ достаточно знать матрицу $g^{ji} = (e^j,e^i)$. (Точнее их обратные матрицы).

<u>Т°</u>. Матрицы g_{ji} и g^{ji} – взаимнообратные.

◀ Соотношение $e_i = g_{ji}e^j$ умножим на e^k : $\delta_i^k = (e_i,e^k) = g_{ji}(e^j,e^k) = g_{ji}g^{jk} \Rightarrow g_{ji}g^{jk} = \delta_i^k$, т.е. произведение матриц (g_{ji}) и (g^{ji}) есть единичная матрица ▶

Задача 1. По заданному базису $\{e_i\}$ (нижнему) построить ему взаимный базис $\{e^i\}$ (верхний), по заданному верхнему базису построить взаимный нижний.

◀ а) Чтобы построить базис взаимный к нижнему надо найти матрицу $G_H = (g_{ik}) = (e_i, e_k)$, обратить матрицу, получив $(G_H)^{-1}$ и подействовать этой матрицей на матрицу F_H, строками которой являются векторы нижнего базиса. После перемножения получится матрица $F_{B,}$ строками которой являются векторы верхнего базиса.

б) Чтобы построить базис взаимный к верхнему надо найти матрицу $G_B = (g^{ik}) = (e^i, e^k)$, обратить ее, получив $(G_B)^{-1}$ и подействовать этой матрицей на матрицу F_B, строками которой являются векторы верхнего базиса. После перемножения получится матрица F_H, строками которой, являются векторы нижнего базиса.

в) именно так трактуются формулы: $e_i = g_{ij}e^i = (g^{ij})^{-1}e^i$; $e^i = g^{ij}e_i = (g^{ij})^{-1}e_i$ ▶

Примеры.

1°. Найти базис, взаимный к базису: $e_1(1, 1, 0)$, $e_2(1, 0, 1)$, $e_3(0, 1, 1)$.

◀ а) Строим матрицу: $G_H = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix}$. Получаем: $G_H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$(G_H)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

б) Составляем матрицу $F_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) и находим: $F_B = G_H^{-1}F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

г) Строки полученной матрицы F_B и есть векторы взаимного базиса, т.е. $e^1(1/2, 1/2, -1/2)$, $e^2(1/2, -1/2, 1/2)$, $e^3(-1/2, 1/2, 1/2)$ ▶

2°. Найдем базис взаимный к базису: $e^1(1, 1, 1)$, $e^2(0, 1, 1)$, $e^3(0, 0, 1)$.

◀ Строим матрицу: $G_B = (g^{ik}) = \begin{pmatrix} (e^1,e^1) & (e^1,e^2) & (e^1,e^3) \\ (e^2,e^1) & (e^2,e^2) & (e^2,e^3) \\ (e^3,e^1) & (e^3,e^2) & (e^3,e^3) \end{pmatrix}$, т.е. $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

; $(G_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Находим $F_H = (G_B)^{-1}F_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом найдены векторы взаимного базиса: $e_1(1, 0, 0)$, $e_2(-1, 1, 0)$, $e_3(0, -1, 1)$ ▶

Задача 2. Вектор x (5, 2, 1) задан своими координатами в том же базисе, в котором заданы векторы двух взаимных базисов: $e_1(1, 1, 0)$, $e_2(1, 0, 1)$, $e_3(0, 1, 1)$ и $e^1(1/2, 1/2, -1/2)$, $e^2(1/2, -1/2, 1/2)$, $e^3(-1/2, 1/2, 1/2)$. Найти ковариантные и контравариантные координаты вектора x в базисе $\{e_1, e_2, e_3, e^1, e^2, e^3\}$.

◀ Вектор $x = (xe_i)e^i = 7e^1 + 6e^2 + 3e^3$ поэтому $(x_1, x_2, x_3) = (7, 6, 3)$ – ковариантные координаты x.

Вектор $x = (xe^i)e_i = 3e_1 + 2e_2 - e_3$, следовательно $(x^1, x^2, x^3) = (3, 2, -1)$ – контравариантные координаты x ▶

§3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БАЗИСА И КООРДИНАТ

Пусть в E_n задана $\{e_i\}$ и $\{e^i\}$ –пара взаимных базисов, а $\{e_{i'}\}$ и $\{e^{i'}\}$ некоторая другая пара взаимных базисов. Запишем формулы преобразования базисных векторов:

1°. Переход $e_i \leftrightarrow e_{i'}$: $e_{i'} = b^i_{i'} e_i$; $e_i = b^{i'}_i e_{i'}$. Здесь $b^i_{i'}$ – матрица перехода от e_i к $e_{i'}$; $b^{i'}_i$ – матрица перехода $e_{i'}$ от к e_i; т.е.матрицы $b^i_{i'}$ и $b^{i'}_i$ взаимно-обратны: $\left(b^i_{i'}\right)^{-1} = \left(b^{i'}_i\right)$.

2°. Переход $e^i \leftrightarrow e^{i'}$: $e^{i'} = \tilde{b}^{i'}_i e^i$; $e^i = \tilde{b}^i_{i'} e^{i'}$. Здесь $\tilde{b}^{i'}_i$ – матрица перехода e^i от к $e^{i'}$; $\tilde{b}^i_{i'}$ – матрица перехода от e^i к $e^{i'}$; т.е.матрицы $\tilde{b}^{i'}_i$ и $\tilde{b}^i_{i'}$ взаимно-обратны.

Т°. $b_i^{i'} = \widetilde{b}_i^{i'}$ и (следовательно $b_{i'}^i = \widetilde{b}_{i'}^i$).

◀ $\begin{array}{l} e_{i'} = b_{i'}^i e_i \;\; | \, e^k \Rightarrow (e_{i'}, e^k) = b_{i'}^i (e_i, e^k) = b_{i'}^i \delta_i^k = b_{i'}^k \\ e^i = \widetilde{b}_{i'}^i e^{i'} \;\; | \, e_{k'} \Rightarrow (e^i, e_{k'}) = \widetilde{b}_{i'}^i (e^{i'}, e_{k'}) = \widetilde{b}_{i'}^i \delta_{k'}^{i'} = b_{k'}^i \end{array}$.Положим $k = i$, $k' = i'$ $\Rightarrow$

$\begin{array}{l} (e_{i'} e^i) = b_{i'}^i \\ (e_{i'} e^i) = \widetilde{b}_{i'}^i \end{array}$, т.е. матрицы $b_{i'}^i$ и $\widetilde{b}_{i'}^i$ совпадают ▶

Примечание: Правило нахождения матрицы $b_{i'}^i$

$$b_{i'}^i = (e_{i'}, e^i).$$

Итак: $\begin{cases} e_{i'} = b_{i'}^i e_i; & e_i = b_i^{i'} e_{i'}; \\ e^{i'} = b_i^{i'} e^i; & e^i = b_{i'}^i e^{i'}; \end{cases}$ – формулы преобразования базисных векторов. Здесь $(b_{i'}^i)$ матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$.

Таким образом для перехода от базиса $\{e_i, e^i\}$ к базису $\{e_{i'}, e^{i'}\}$ достаточно знать лишь матрицу перехода $b_{i'}^i$ от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$.

Задача . Имеется две пары взаимных базисов $\{e_1, e_2, e_3, e^1, e^2, e^3\}$ и $\{e_1, e_2, e_3, e^{1'}, e^{2'}, e^{3'}\}$. Записать формулы для преобразования при переходе от одного базиса к другому и найти соответствующие матрицы перехода.

◀ Формулы преобразования базисных векторов:

1) $e_{i'} = b_{i'}^i e_i$, $b_{i'}^i$ – матрица перехода от e_i к $e_{i'}$; i' – строки, i – столбцы(строки слева) $\}B_1$.

2) $e_i = b_i^{i'} e_{i'}$, $b_{i'}^i$ – матрица перехода от $e_{i'}$ к e_i; i – строки, i' – столбцы (строки слева) $\}B_2$,

при этом $B_2 = (B_1)^{-1}$.

3) $e^{i'} = b_i^{i'} e^i$, $b_i^{i'}$ – матрица перехода от e^i к $e^{i'}$; i' – строки, i – столбцы (строки слева) $\}B_3$,

при этом $B_3 = (B_{12})^T$.

4) $e^i = b_{i'}^i e^{i'}$, $b_{i'}^i$ – матрица перехода от $e^{i'}$ к e^i; i – строки, i' – столбца (строки слева) $\}B_4$,

при этом $B_4 = (B_1)^T$.

5) Элементы матрицы $B_1 = (b_{i'}^i)$ находят так $b_{i'}^i = (e_{i'}, e^i)$ ▶

Пример: Пусть

$e_1(1, 1, 0)$		$e_{1'}(1, 0, 0)$
$e_2(1, 0, 1)$		$e_{2'}(-1, 1, 0)$
$e_3(0, 1, 1)$		$e_{3'}(0, -1, 1)$
$e^1(1/2, 1/2, -1/2)$	$\leftrightarrow$	$e^{1'}(1, 1, 1)$.
$e^2(1/2, -1/2, 1/2)$		$e^{2'}(0, 1, 1)$
$e^3(-1/2, 1/2, 1/2)$		$e^{3'}(0, 0, 1)$

Строим матрицу $B_1 = (b_{i'}^i) = (e_i, e^i) = \begin{pmatrix} (e_1,e^1) & (e_1,e^2) & (e_1,e^3) \\ (e_2,e^1) & (e_2,e^3) & (e_2,e^3) \\ (e_3,e^1) & (e_3,e^2) & (e_3,e^3) \end{pmatrix}$. Имеем $B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$B_2 = B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B_3 = B_2^T$; $B_4 = B_1^T$. Чтобы проверить формулу 1) $e_{i'} = b_{i'}^i e_i$ мы должны матрицу B_1 умножить на матрицу у которой в строках стоят e_i – получим матрицу у которой в строках $e_{i'}$, аналогично проверяются формулы 2), 3), 4).

1) $\underset{B_1}{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{e_i}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{e_{i'}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$;

2) $\underset{B_2}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{e_{i'}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{e_i}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$;

3) $\underset{B_3}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{e^i}{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}} = \underset{e^{i'}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$;

4) $\underset{B_4}{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{e^{i'}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{e^i}{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$ ►

Информация к размышлению:

Та же **задача**: В базисе, в котором заданы координаты всех векторов, построить матрицу перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$ (а также от базиса $\{e^i\}$ к базису $\{e^{i'}\}$).

◄ а) пусть $P_{S\to e}$ – матрица перехода из стандартного базиса в базис $\{e_i\}$, т.е. для построения матрицы $P_{S\to e}$ координаты векторов e_i пишутся в столбцы;

б) $P_{e\to S} = (P_{S\to e})^{-1}$;

в) $P_{S\to e'}$ – матрица перехода из стандартного базиса в базис $\{e_{i'}\}$;

г) $P_{e\to e'} = (P_{S\to e'})(P_{S\to e})^{-1}$ ►

Примеры:

1°. $e_1(1, 1, 0)$ $e_{1'}(1, 0, 0)$

$e_2(1, 0, 1)$ $e_{2'}(-1, 1, 0)$

$e_3(0, 1, 1)$ $e_{3'}(0, -1, 1)$.

Тогда $P_{S\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(P_{S\to e})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $P_{S\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Получаем

$$P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

При этом $P_{e'\to e} = (P_{e\to e'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. И при этом: если обозначить $P_1 = P_{e\to e'}$, $P_2 = P_{e'\to e}$, то:

$P_1 e_1 = e_{1'}$; $P_1 e_2 = e_{2'}$; $P_1 e_3 = e_{3'}$; $P_2 e_{1'} = e_1$; $P_2 e_{2'} = e_2$; $P_2 e_{3'} = e_3$.

2°. $e^1(1/2,\ 1/2,\ -1/2)$ $\qquad$ $e^{1'}(1,\ 1,\ 1)$

$e^2(1/2,\ -1/2,\ 1/2)$ $\qquad$ $e^{2'}(0,\ 1,\ 1)$

$e^3(-1/2,\ 1/2,\ 1/2)$ $\qquad$ $e^{3'}(0,\ 0,\ 1)$.

Построение: $P^{S\to e} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $(P^{S\to e})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{S\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$P^{e\to e'} = \left(P^{S\to e'}\right)\left(P^{S\to e}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и кроме того: $P^{e\to e'} = \left(P^{e\to e'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Если обозначить $P^{e\to e'}=P_3$, $P^{e'\to e}=P_4$, то $P_3e^1 = e^{1'}$; $P_3e^2 = e^{2'}$; $P_3e^3 = e^{3'}$; $P_4e^{1'} = e^1$; $P_4e^{2'} = e^2$; $P_4e^{3'} = e^3$. Для P_1, P_2, P_3, P_4 справедливы те же соотношения, что и для B_1, B_2, B_3, B_4:

B_1; $B_2 = B_1^{-1}$; $B_3 = \left(B_1^{-1}\right)^T$; $B_4 = B_1^T$;

P_1; $P_2 = P_1^{-1}$; $P_3 = \left(P_1^{-1}\right)^T$; $P_4 = P_1^T$.

Вопрос: Почему же B_1 и P_1 (а также остальные) матрицы различны? Правда, они симметричны относительно второй большой диагонали?

Попробуйте ответить на этот вопрос прежде чем вы прочитаете последующие две строчки.

Ответ: Матрицы B_1^T и матрицы P_1 это одна и та же матрица перехода но P_1 в стандартном базисе, а B_1^T в базисе $\{e_i\}$.

Пусть $x \in E_n$.Пусть в базисе $\{e_{i'},\ e^{i'}\}$ $x = x_{i'} e^{i'}$ т.е. $x_{i'}$ ковариантные координаты вектора x.

$$x_{i'} = (x, e_{i'}) = \left(x, b^i_{i'} e_i\right) = b^i_{i'}(x, e_i) = b^i_{i'} x_i, \quad \text{т.е.} \quad x_{i'} = b^i_{i'} x_i.$$

При переходе к новому базису ковариантные координаты вектора x преобразуются с помощью матрицы перехода $b^i_{i'}$ от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e^{i'}\}$ (т.е. так же как координаты базисных векторов). Этим и обусловлено название – ковариантные (согласованные) .

Кроме того : $x^{i'} = (x, e^{i'}) = \left(x, b^{i'}_i e^i\right) = b^{i'}_i (x, e^i) = b^{i'}_i x^i.$

При переходе к новому базису контравариантные координаты вектора x преобразуются с помощью матрицы перехода $b^{i'}_i$ от базиса нового к старому. Это несогласование преобразований и обусловило название контравариантные (несогласованные) координаты.

Задача . Вектор $x(5,\ 2,\ 1)$ в базисе $\{e_1(1,\ 1,\ 0),\ e_2(0,\ 1,\ 1),\ e_3(0,\ 1,\ 1),\ e^1(1/2,\ 1/2,\ 1/2),\ e^2(1/2,\ -1/2,\ 1/2),\ e^3(-1/2,\ 1/2,\ 1/2)\}$ имеет ковариантные координаты (7, 6, 3) и контравариантные координаты (3, 2, –1). Это было установлено при решении задач в предыдущем параграфе . Найти ковариантные и контравариантные координаты этого же вектора в базисе $\{e_{1'}(1,\ 0,\ 0),\ e_{2'}(-1,\ 1,\ 0),\ e_{3'}(0,\ -1,\ 1),\ e^{1'}(1,\ 1,\ 1),\ e^{2'}(0,\ 1,\ 1),\ e^{3'}(0,\ 0,\ 1)\}$.

◀ Как известно, ковариантные и контравариантные координаты вектора x преобразуются по-разному: с помощью формул: $x_{i'} = b_{i'}^{i} x_i$ и $x^{i'} = b_i^{i'} x_i$, тогда $x_{i'} = b_{i'}^{i} x_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$ т.е. $x' = 5e^{1'} - 3e^{2'} - e^{3'}$ (это $x(5, 2, 1)$). Итак $(7, 6, 3) \to (5, -3, -1)$ для ковариантных координат.

Далее: $$x^{i'} = b_i^{i'} x^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$ т.е. $x' = 8e_{1'} + 3e_{2'} + e_{3'}$ (это $x(5, 2, 1)$). Итак $(3, 2, -1) \to (8, 3, 1)$ для контравариантных координат.

Здесь матрицы перехода взяты из предыдущей задачи. ▶

§4. ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРА

Пусть V – вещественное (не обязательно евклидово) линейное пространство ($\dim V = n$).

***Def*:** Тензором типа (p, q), (p раз ковариантным, q раз контравариантным) называется геометрический объект, который:

1) в любом базисе $\{e_i\}$ линейного пространства V_n определяется n^{p+q} координатами $A_{i_1 i_2 .. i_p}^{k_1 k_2 .. k_q}$ (индексы принимают значения 1, 2, …, n каждый);
2) обладает свойством, что его координаты $A_{i'_1 i'_2 .. i'_p}^{k'_1 k'_2 .. k'_q}$ в базисе $\{e_{i'}\}$ связаны с координатами $A_{i_1 i_2 .. i_p}^{k_1 k_2 .. k_q}$ в базисе $\{e_i\}$ соотношениями:

$$A_{i'_1 i'_2 .. i'_p}^{k'_1 k'_2 .. k'_q} = b_{i'_1}^{i_1} \ldots b_{i'_p}^{i_p} b_{k_1}^{k'_1} .. b_{k_q}^{k'_q} A_{i_1 i_2 .. i_p}^{k_1 k_2 .. k_q} \; ; \qquad (*)$$

и здесь $b_{i'}^{i}$ элементы матрицы перехода от старого базиса к новому ($e_i \to e_{i'}$), а $b_i^{i'}$ – элементы матрицы обратного перехода.

Число $r = p + q$ **называется рангом тензора**.

Формула (*) **называется формулой преобразования тензора при изменении базиса**.

<u>Замечание</u>: Индексы $i_1 i_2 \ldots i_p$ **называются ковариантными**, а $k_1 k_2 \ldots k_q$ – **контравариантными**.

<u>Отметим</u>: Ковариантные и контравариантные координаты вектора преобразуется по формуле (*) ($p = 1$, $q = 0$ для ковариантных координат, $p = 0$, $q = 1$ для контравариантных координат).

Поэтому вектор представляет собой тензор первого ранга (1 раз ковариантный, либо 1 раз контравариантный – в зависимости от выбора типа координат этого вектора).

<u>Отметим</u>: Скаляр – тензор нулевого ранга – имеет одну координату, причем не имеющую индексов и не изменяющуюся при изменении системы координат.

Замечание: Нетрудно убедиться в том, что последовательный переход от $\{e_i\}$ к $\{e_{i'}\}$, а затем от $\{e_{i'}\}$ к $\{e_{i''}\}$, приводит к тем же результатам, что непосредственный переход от $\{e_i\}$ к $\{e_{i''}\}$, т.е. определение тензора корректно.

Замечание: Любая система n^{p+q} чисел $A^{k_1k_2..k_q}_{i_1i_2..i_p}$ может в данном базисе e_i рассматриваться как координаты некоторого тензора A типа (p, q).

§5. ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРОВ

1°. **Нуль-тензор** – это тензор все координаты которого, в некотором (а, следовательно, в любом базисе) равны нулю.

2°. Символ Кронекера. Тензор A типа (1, 1) в базисе $\{e_i\}$ имеет координаты δ^k_i.

$$\delta^k_i \to b^i_{i'} b^{k'}_k \delta^k_i = b^i_{i'} b^{k'}_i = \delta^{k'}_{i'}$$

Т.е. δ^k_i действительно можно рассматривать как тензор типа (1, 1).

3°. Пусть $A(x, y)$ – билинейная форма. Напомним, что в базисе $\{e_i\}$: $A(x, y) = A(x^i e_i, y^j e_j) = A(e_i, e_j)x^i y^j = a_{ij}x^i y^j$. Здесь a_{ij} – элементы матрицы билинейной формы A в базисе $\{e_i\}$.

Рассмотрим, как изменяется матрица билинейной формы при переходе к базису $\{e_{i'}\}$.

$$a_{ij} = A(e_{i'}, e_{j'}) = A\left(b^i_{i'} e_i, b^j_{j'} e_j\right) = b^i_{i'} b^j_{j'} A(e_i, e_j) = b^i_{i'} b^j_{j'} a_{ij}.$$

Равенство $a_{ij} = b^i_{i'} b^j_{j'} a_{ij}$, показывает, что матрица билинейной формы представляет собой тензор A типа (2, 0) ранга 2.

4^0. Пусть A линейный оператор: $y=Ax$. В некотором базисе e_i: $y^j e_j$ $=A(x^i e_i) = x^i A e_i = x^i b^j_i e_j$

Т.е. $y^j = a^j_i x^i$, a^j_i – элементы матрицы линейного оператора в базисе $\{e_{i'}\}$.

Рассмотрим базис $\{e_{i'}\}$.

$y^{j'} = a^{j'}_{i'} x^{i'}$. Воспользуемся тем, что $x^i = b^i_{i'} x^{i'}$; $y^j = b^j_{k'} y^{k'}$.

$y^{k'} b^j_{k'} = a^j_i b^i_{i'} x^{i'}$ | умножим обе части на $b^{j'}_j$ и просуммируем по j.

$y^{k'} b^j_{k'} b^{j'}_j = a^j_i b^i_{i'} b^{j'}_j x^{i'} \Rightarrow y^{k'} \delta^{j'}_{k'} = (b^i_{i'} b^{j'}_j a^j_i)\, x^{i'} \Rightarrow y^{j'} = a^{j'}_{i'} x^{i'}$.

Тогда $a^{j'}_{i'} = b^i_{i'} b^{j'}_j a^j_i$

Последнее равенство показывает, что матрица линейного оператора может рассматриваться как тензор A типа (1,1) ранга 2.

§6. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ

1^0. Сложение и вычитание тензоров. Определяется для тензоров одинакового типа, как покоординатное сложение и вычитание.

2^0. Умножение тензора на число. Определяется для любых тензоров. Умножается каждая координата тензора на число.

3^0. Умножение тензоров. Определяется для любых тензоров,заданными своими координатами в некотором (общем) базисе.

Чтобы умножить тензор A с координатами $A^{k_1k_2...k_q}_{i_1i_2...i_p}$ на тензор B с координатами $B^{m_1m_2...m_s}_{e_1e_2...e_r}$ надо в тензоре B переименовать индексы $e_1\, e_2 \ldots e_r$ на $i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_{p+r}$, а индексы $m_1 m_2 \ldots m_s$ на

$k_{q+1}k_{q+2}...k_{q+s}$ и составить тензор D типа (p+r,q+s) с координатами $D^{k_1k_2...k_{q+s}}_{i_1i_2...i_{p+r}} = A^{k_1k_2...k_q}_{i_1i_2...i_p}$ $B^{k_{q+1}k_{q+2}...k_{q+s}}_{i_{p+1}i_{p+2}...i_{p+r}}$.

Замечание: операция умножения тензоров, вообще говоря, не коммутативна: $AB \neq BA$. (хотя элементы и одинаковые, но порядок их, вообще говоря, разный).

4^0. Свёртка тензора: Применяется для тензоров типа (p,q) где $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Среди индексов тензора отмечается один верхний индекс и один нижний, заменяются одной буквой и производят суммирование по этому индексу согласно соглашению. Свертка тензора переводит тензор типа (p,q) в тензор типа (p-1,q-1) т.е. понижает его ранг на 2.

Замечание: Термин свертка можно применить и к паре перемножаемых тензоров A и B, когда у одного тензора отмечается верхний индекс, а другого нижний и по этим индексам производится суммирование.

5^0. Симметрирование тензора по паре нижних индексов (или верхних).

$$A^{k_1k_2...k_q}_{i_1...i_m...i_n...i_p} \to \frac{1}{2}(A^{k_1k_2...k_q}_{i_1...i_m...i_n...i_p} + A^{k_1k_2..k_q}_{i_1..i_n..i_m..i_p})$$

Аналогично для пары верхних индексов.

Получаемый тензор симметричен по указанной паре индексов.

6^0. Альтернирование тензора по паре нижних индексов (или верхних).

$$A^{k_1k_2...k_q}_{i_1...i_m...i_n...i_p} \to \frac{1}{2}(A^{k_1k_2...k_q}_{i_1...i_m...i_n...i_p} - A^{k_1k_2..k_q}_{i_1..i_n..i_m..i_p})$$

Аналогично для пары верхних индексов.

Получаем тензор кососимметричный по указанной паре индексов.

§7.АФИННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ

Пусть E_n — эвклидово пространство и $\{e_i\}$ его ортонормированный базис. Если поставить задачу нахождения базиса $\{e^i\}$ взаимного к базису $\{e_i\}$, то нетрудно видеть что ортонормированный базис взаимен самому себе: $\forall i \quad e^i = e_i$.

Тогда $\forall x \in E_n$,

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + ... + x_ne^n$$
$$x = x^1e_1 + x^2e_2 + ... + x^ne_n$$

Следовательно получим, что $x^i = x_i$.

Т.е. в ортонормированном базисе ковариантные и контравариантные координаты вектора x совпадают.

При этом можно записать:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = x_ie_i = (xe_i)e_i$$

В ортонормированном базисе вместо формул Гиббса имеем формулу: $x = (xe_i)e_i$.

Рассмотрим переход от одного ортонормированного базиса $\{e_i\}$ к другому ортонормированному базису $\{e_{i'}\}$.

Формулы преобразования для произвольных базисов имели вид:

$$e_{i'} = b^i_{i'}e_i; \; e_i = b^{i'}_i e_{i'};$$
$$e^{i'} = b^{i'}_i e^i; \; e^i = b^i_{i'}e^{i'};$$

Обозначая $p_{i'i}$ элементы матрицы P перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_{i'}\}$ можно указанные формулы переписать в виде:

$$e_{i'} = p_{i'i}\ e_i\ ;\ e_i = p_{ii'}\ e_{i'}\ ;$$

умножая скалярно первое равенство на e_i, а второе на $e_{i'}$ получим:

$$p_{i'i} = (e_{i'}, e_i) = (e_i, e_{i'}) = p_{ii'}\ ;$$

Т.е. для матрицы перехода P справедливо соотношение $P^{-1}=P^{T}$ или то же самое: $PP^{T}=P^{T}P$ следовательно матрица оператора перехода ортогональна.

Формулы для преобразования ковариантных и контравариантных координат вектора x имели вид: $x_{i'} = b^{i}_{i'}\ x_i$ и $x^{i'} = b^{i'}_{i}\ x^i$. В случае ортонормированных базисов они будут иметь вид: $x_{i'} = p_{i'i}\ x_i$ и $x^{i'} = p_{i'i}\ x^i$,

Т.е. и ковариантные и контравариантные координаты преобразуются с помощью одной и той же матрицы перехода P от базиса $\{ e_i \}$ к базису $\{ e_{i'} \}$, т.е.согласованно с базисными векторами. В силу этого для ортонормированных базисов все координаты векторов ковариантны и преобразуются по одному и тому же закону: $x_{i'} = p_{i'i}\ x_i$.

В дальнейшем, в соответствии с выше сказанным, в ортонормированных базисах (т.е. при ортогональных преобразованиях) все координаты будут ковариантны, т.е. все индексы нижние.

И наконец:

Def: Аффинным ортогональным тензором A ранга r называется объект, который :

1) В каждом ортонормированном базисе $\{ e_i \}$ евклидова пространства E_n определяется n^r координатами $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ (индексы принимают значения от1 до n).

2) Обладает свойством, что его координаты $A_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r}$ в другом ортонормированном базисе $\{ e_{i'} \}$ связаны с координатами $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ в ортонормированном базисе $\{ e_i \}$ соотношениями:

$$A_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r} = p_{i'_1 i_1}\ p_{i'_2 i_2} \ldots p_{i'_r i_r}\ A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

В дальнейшем изложение будет вестись для аффинных ортогональных тензоров, и для простоты, в дальнейшем именно их будем именовать словом: тензор.

§8. ОПЕРАЦИИ НАД АФФИННЫМИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ТЕНЗОРАМИ

Отношение равенства тензоров, операции сложения, вычитания и умножения тензоров на число определяются как операции покоординатного равенства, сложения, вычитания и умножения на число в некотором базисе. Умножение и свёртка тензоров производится, как и в случае тензоров общего вида, но при свёртке отмечается не один верхний и один нижний индексы а, естественно, два нижних.

Свёртка тензора $A_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_m \ldots i_r}$ по индексам i_k и i_m это фактически умножение на тензор $\delta_{i_k i_m}$ (Здесь $\delta_{i_k i_m}$ тензор Кронекера).

Скалярное произведение тензоров. Часто в тензорной алгебре применяется комбинация операций умножения тензоров с последующей свёрткой по паре индексов. При этом ранг результирующего тензора будет равен ($r_1 + r_2 - 2$), где r_1, r_2 - ранги перемножаемых тензоров.

В частности для тензоров первого ранга (векторов) A_i и B_k получаем: $A_i\ B_k\ \delta_{ik} = A_i\ B_i = A_1\ B_1 + A_2\ B_2 + A_3\ B_3$, а это просто скалярное произведение двух векторов.

По аналогии с этим простейшим случаем, комбинацию перемножения тензоров с последующей свёрткой называют скалярным или внутренним произведением тензоров.

§9 ПРИЗНАК ТЕНЗОРНОСТИ ВЕЛИЧИНЫ

Согласно определению, тензорный характер величины устанавливается по тому, как она преобразовывается при линейном ортогональном преобразовании координат.

Существует, однако, еще один способ установления тензорного характера величины. Проиллюстрируем этот способ на следующем примере:

Пусть A_i и B_k компоненты двух произвольных векторов. Если с помощью n^2 чисел T_{ik} можно образовать скаляр φ по правилу $\varphi = T_{ik} A_i B_k$, то n^2 чисел T_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Действительно:

$$T_{i'k'} A_{i'} B_{k'} = T_{ik} A_i B_k = T_{ik}\, p_{i'i}\, p_{k'k} A_{i'} B_{k'}$$

Вычитаем из левой части равенства правую:

$$(T_{i'k'} - p_{i'i}\, p_{л'л} T_{ik}) A_{i'} B_{k'} = 0$$

Отсюда, в силу произвольности векторов A_i и B_k:

$$T_{i'k'} = p_{i'i}\, p_{k'k} T_{ik}$$

Т.е. числа T_{ik} действительно являются компонентами тензора второго ранга.

Аналогично формулируется и доказывается признак тензорности для тензора любого ранга.

Пользуясь признаком тензорности, легко проверить, что совокупность n^2 чисел образующих символ Кронекера $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ является тензором 2-го ранга.

Действительно, возьмем произвольные векторы A_i и B_k и образуем выражение $\delta_{ik} A_i B_k$:

$$\delta_{ik} A_i B_k = \delta_{1k} A_1 B_k + \delta_{2k} A_2 B_k + \ldots + \delta_{nk} A_n B_k =$$
$$= (\delta_{11} A_1 B_1 + \delta_{12} A_1 B_2 + \ldots + \delta_{1n} A_1 B_n) + (\delta_{21} A_2 B_1 + \delta_{22} A_2 B_2 + \ldots + \delta_{2n} A_2 B_n) + \ldots$$
$$+ (\delta_{n1} A_n B_1 + \delta_{n2} A_n B_2 + \ldots + \delta_{nn} A_n B_n) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_n B_n = A_i B_i$$ - скаляр.

Следовательно, δ_{ik} тензор 2-го ранга. Он называется единичным тензором. Этот тензор обладает интересным свойством: он инвариантен относительно преобразования координат.

В самом деле: $\delta_{i'k'} = p_{i'i}\, p_{k'k} \delta_{ik} = p_{i'i}\, p_{k'i} = \delta_{ik}$ - в силу ортогональности матрицы P.

§10 ЕЩЕ РАЗ О СВОЙСТВАХ СИММЕТРИИ ТЕНЗОРОВ

Def: Если $A_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_m \ldots i_r} = A_{i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k \ldots i_r}$, то тензор A называется симметричным по индексам i_m и i_k.

Если $A_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_m \ldots i_r} = -A_{i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k \ldots i_r}$, то тензор A называется антисимметричным (или кососимметричным) по индексам i_m и i_k.

1° Симметрия и антисимметрия тензоров инвариантна относительно преобразования системы координат.

◀ (На примере тензора ранга 2)

$T_{i'k'} = p_{i'i}\, p_{k'k} T_{ik} = p_{i'i}\, p_{k'k} T_{ki} = T_{k'i'}$ - симметричность

$T_{i'k'} = p_{i'i}p_{k'k}T_{ik} = -p_{i'i}p_{k'k}T_{ki} = -T_{k'i'}$ - антисимметричность. ▶

В пространстве E_3 (размерности 3) антисимметричный и симметричный тензоры 2-го ранга имеют вид: $\begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$, т.е. симметричный тензор имеет только шесть независимых переменных, а антисимметричный и вовсе три независимых переменных.

Это дает возможность предложить следующую геометрическую интерпретацию симметричного и антисимметричного тензоров 2-го ранга в пространстве размерности 3:

2°. Каждому антисимметричному тензору 2-го ранга может быть поставлен в соответствие вектор и наоборот, каждый вектор связан с некоторым антисимметричным тензором 2-го ранга.

3° Любому не нулевому симметричному тензору 2-го ранга соответствует некоторая, и притом, единственная поверхность второго порядка определяемая уравнением: $S_{ik}x_ix_k = \pm 1$ $\quad$ ($Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_2^2 + Dx_1x_2 + Ex_1x_3 + Fx_2x_3 = 1$).

4° Произведение симметрического S_{ik} и антисимметрического A_{ik} тензоров 2-го ранга с последующим двукратным свертыванием равно 0.

◀ Действительно : $S_{ik}A_{lm}\delta_{kl}\delta_{im} = S_{ik}A_{ki}$,

Из симметрии S : $S_{ik}A_{ki} = S_{ki}A_{ki}$,

индексы k и i немые, поэтому k обозначим i, а i обозначим k : $S_{ki}A_{ki} = S_{ik}A_{ik}$

Из антисимметрии A : $S_{ik}A_{ik} = -S_{ik}A_{ki}$, $\quad$ Т.е. $S_{ik}A_{ki} = -S_{ik}A_{ki} = 0$. ▶

5° Любой тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, т.е. $\forall T_{ik}$ - тензора 2-го ранга

$$◀ \quad T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = S_{ik} + A_{ik}. \quad ▶$$

§11. ПСЕВДОТЕНЗОРЫ

В аналитической геометрии при рассмотрении $\left[\vec{A} \times \vec{B}\right]$ направление результирующего вектора устанавливается условно в зависимости от выбора системы координат. В физике такая ситуация встречается при определении направления векторов угловой скорости, момента сил и др. .

В то же время направление таких векторов, как скорость, ускорение, сила определяется физическим смыслом и не зависит от выбора системы координат.

В свете этого:

Для ортогональных преобразований: $PP^T = E \Rightarrow \det P \cdot \det P^T = (\det P)^2 = 1$, $\Delta = \det P = \pm 1$

Поэтому все линейные ортогональные преобразования разбиваются на два класса: класс собственных линейных ортогональных преобразований, для которых $\Delta = 1$ (непрерывные преобразования) и класс несобственных линейных ортогональных преобразований, для которых $\Delta = -1$ (преобразования отражения).

В зависимости от закона преобразования компонент по отношению к этим классам линейных ортогональных преобразований все тензорные величины можно разделить на истинные тензоры (или просто тензоры) и псевдотензоры.

Def: Псевдотензоры – это величины компоненты, которых преобразуются по закону: $\Pi_{i_1',i_2',i_3'} = p_{i_1',i_1} p_{i_2',i_2} p_{i_3',i_3} \ldots \Pi_{i_1,i_2,i_3} \ldots \cdot \Delta$.

Напомним, что для истинного тензора закон преобразования имеет вид:

$$T_{i_1',i_2',i_3'} = p_{i_1',i_1} p_{i_2',i_2} p_{i_3',i_3} \ldots T_{i_1,i_2,i_3} \ldots .$$

Из законов преобразования тензоров и псевдотензоров легко убедиться, что:

1°. Сумма двух псевдотензоров – псевдотензор.

2°. Произведение двух псевдотензоров – истинный тензор.

3°. Произведение псевдотензора на истинный тензор – псевдотензор.

4°. Свертка псевдотензора дает псевдотензор низшего ранга.

Примеры: 1) Если $V \overset{def}{\equiv} \int\int\int dx_1 dx_2 dx_3$, то $V' = \int\int\int dx_{1'} dx_{2'} dx_{3'} = \int\int\int \frac{\partial(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'})}{\partial(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 =$

$$= \Delta \cdot \int\int\int dx_1 dx_2 dx_3 = \Delta \cdot V, \text{ т.е. } V' = \Delta \cdot V, \text{ где } \Delta = \pm 1.$$

Таким образом, V согласно определению, есть псевдотензор нулевого ранга, т.е. псевдоскаляр.

2) Символ Кронекера δ_{ik} представляет собой единичный, симметричный, инвариантный относительно ортогонального преобразования системы координат, истинный тензор 2го ранга.

3) В паространстве E_3 в фиксированной системе координат K с ортами e_1, e_2, e_3 рассмотрим величины $\varepsilon_{ikl} = (e_i \times e_k)e_l$.

Ясно, что в правой системе координат: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$; $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$. Остальные ε_{ikl} равны нулю.

Рассмотрим, как преобразуются величины ε_{ikl} при линейных ортогональных преобразованиях. Перейдем в систему K' с ортами $e_{1'}$, $e_{2'}$, $e_{3'}$:

$$\varepsilon_{i'k'l'} = (e_{i'} \times e_{k'})e_{l'} = (p_{i'i} e_i \times p_{k'k} e_k) p_{l'l} e_l = p_{i'i} p_{k'k} p_{l'l} (e_i \times e_k) e_l.$$

Если k и k' – обе правые (или левые), то $\varepsilon_{ikl} = (e_i \times e_k)e_l$. Если k и k' разной ориентации, то: $-\varepsilon_{ikl} = (e_i \times e_k)e_l$. Тогда: $\varepsilon_{i'k'l'} = p_{i'i} p_{k'k} p_{l'l} \varepsilon_{ikl} \cdot \Delta$ ($\Delta = \pm 1$, в зависимости от того рассматривается собственное или несобственное преобразование)

По определению величины ε_{ikl} образуют псевдотензор 3го ранга. Он **называется алгебраическим символом Леви-Чивита** и образует единичный абсолютно антисимметричный псевдотензор 3го ранга, инвариантный относительно любого ортогонального преобразования координат.

Легко видеть, что $(A \times B)_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l$

4) Непосредственным вычислением можно убедиться, что $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{abc} = \begin{vmatrix} \delta_{ia} & \delta_{ib} & \delta_{ic} \\ \delta_{ka} & \delta_{kb} & \delta_{kc} \\ \delta_{la} & \delta_{lb} & \delta_{lc} \end{vmatrix}$, свертка

по индексам l и c дает: $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{abl} = \begin{vmatrix} \delta_{ia} & \delta_{ib} \\ \delta_{ka} & \delta_{kb} \end{vmatrix} = \delta_{ia}\delta_{kb} - \delta_{ib}\delta_{ka}$, свертка еще по двум индексам k и b дает: $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{akl} = 2\delta_{ia}$, и наконец полная свертка приводит к: $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{abc} = 6$.

5) С помощью символа Леви-Чивита легко получить, например, известную формулу для двойного векторного произведения трех векторов:

$$\{A\times (B\times C)\}_i = \varepsilon_{ikl}A_k(B\times C)_l = \varepsilon_{ikl}A_k\varepsilon_{lmn}B_mC_n = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}A_kB_mC_n = (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})A_kB_mC_n =$$
$$= \delta_{im}\delta_{kn}A_kB_mC_n - \delta_{in}\delta_{km}A_kB_mC_n = \delta_{im}A_nB_mC_n - \delta_{in}A_mB_mC_n = B_iA_nC_n - C_iA_mB_m = B_i(A\cdot C) - C_i(A\cdot B) =$$
$$\{B(A\cdot C) - C(A\cdot B)\}_i.$$

§12. СВЯЗЬ ТЕНЗОРОВ 2^го^ РАНГА С МАТРИЦЕЙ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И С ОПРЕДЕЛИТЕЛЯМИ

Пусть в E_n задан линейный оператор A с матрицей (a_{ij}). Тогда: $y_i = a_{ij}x_j$ (в базисе e_i). Рассмотрим в E_n базис $\{e_{i'}\}$: $y_{i'} = a_{i'j'}x_{j'} \Rightarrow p_{i'i}y_i = a_{i'j'}p_{j'j}x_j$. Умножим обе части равенства на $p_{i'k}$. $p_{i'i}p_{i'k}y_i = a_{i'j'}p_{j'j}p_{i'k}x_j \Rightarrow \delta_{ik}y_i = a_{i'j'}p_{j'j}p_{i'k}x_j \Rightarrow y_k = p_{i'k}p_{j'j}a_{i'j'}x_j$. С другой стороны: $y_i = a_{ij}x_j$, т.е. $a_{ij} = p_{i'i}p_{j'j}a_{ij}$.

Таким образом, элементы матрицы линейного оператора образуют тензор 2^го^ ранга.

Наоборот всякий тензор 2^го^ ранга можно истолковать как матрицу линейного оператора.

Поэтому теория тензоров 2^го^ ранга непосредственно связана с теорией линейных операторов и с теорией матриц.

Это дает возможность выявить связь тензоров 2^го^ ранга с определителями и т.д.

Теперь: пусть φ_{ik} – произвольный тензор 2^го^ ранга. Построим тензор 3^го^ ранга χ_{abc} по правилу: $\chi_{abc} = \varepsilon_{ikl}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc}$. Тогда $\chi_{bac} = \varepsilon_{ikl}\varphi_{ib}\varphi_{ka}\varphi_{lc} \overset{(i\leftrightarrow k)}{=} \varepsilon_{kil}\varphi_{kb}\varphi_{ia}\varphi_{lc} = \varepsilon_{kil}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = -\varepsilon_{ikl}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = -\chi_{abc}$. Следовательно абсолютно антисимметричный тензор 3^го^ ранга всегда можно представить в виде: $\chi_{abc} = \varphi\varepsilon_{abc}$, где φ – скаляр. Т.е. каждому тензору 2^го^ ранга φ_{ik} можно поставить в соответствие скаляр φ такой, что:

$$\varepsilon_{ikl}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = \varphi\varepsilon_{abc} \qquad (*)$$

Оказывается, что этот скаляр равен определителю, составленному из компонент φ_{ik}: $\varphi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}$, в этом легко убедиться непосредственным вычислением, например, зафиксировав в (*) говорящие индексы (скажем $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$) и выполнив суммирование по немым индексам i, k, l: $\varphi\varepsilon_{123} = \varepsilon_{ikl}\varphi_{i1}\varphi_{k2}\varphi_{l3} = \ldots$

В этой же идеологии нетрудно ввести понятия тензора обратного к данному тензору 2^го^ ранга (Если $\varphi^{-1}_{ik}\varphi_{km} = \delta_{im}$, то тензор φ^{-1}_{ik} обратный к тензору φ_{ik}), и получить условия обратимости тензора 2^го^ ранга.

Можно сформулировать (а для симметричного тензора и всегда решить) задачу о приведении тензора 2^го^ ранга к главным осям. Эта задача равносильна задаче построения собственного базиса для линейного оператора.

§13.ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

В физических приложениях, как правило, встречаются тензоры, компоненты которых представляют собой функции координат (x_1, x_2, x_3) точек пространства.

Def: Тензорным полем $r^{\text{го}}$ ранга $T_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x_1,\ x_2,\ x_3)$ является совокупность 3^r функций, которые в любой данной точке пространства образуют тензор $r^{\text{го}}$ ранга.

Изучение тензорных полей и составляет предмет тензорного анализа.

В дальнейшем речь будет идти о непрерывных тензорных полях $T_{ikl\ldots}(\bar{r})$, (где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки с координатами $x_1,\ x_2,\ x_3$). Это значит, что абсолютные величины разностей $T_{ikl}(\bar{r}+\Delta\bar{r}) - T_{ikl}(\bar{r})$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, при достаточно малых $|\Delta\bar{r}|$.

§14. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ ПО КООРДИНАТАМ ТОЧКИ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $T_{ikl\ldots}(\bar{r})$ – тензорное поле $r^{\text{го}}$ ранга. Каждую из 3^r компонент этого поля продифференцируем по каждой из трех координат $x_1,\ x_2,\ x_3$. Получим совокупность 3^{r+1} функций вида $\dfrac{\partial T_{i_1,i_2,\ldots i_r}}{\partial x_j}$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$.

<u>T°.</u> Если $T_{i_1,i_2,\ldots,i_r}(\bar{r})$ – тензорное поле ранга r, то $\dfrac{\partial T_{i_1,i_2,\ldots i_r}}{\partial x_j}$ будет тензорным полем ранга $(r+1)$.

◀ Отметим что, если $x_i = p_{ii'}\, x_{i'}$ то $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_{i'}} = p_{ii'} = \underbrace{p_{i'i}}_{\text{обратн. итранс}}$, и следовательно

$$\frac{\partial T_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r}}{\partial x_{j'}} = \frac{\partial}{\partial x_{j'}}\, p_{i'_1 i_1}\, p_{i'_2 i_2} \cdots p_{i'_r i_r} T_{i_1 i_2 \ldots i_r} =$$

$$= p_{i'_1 i_1}\, p_{i'_2 i_2} \cdots p_{i'_r i_r} \frac{\partial T_{i_1 i_2 \ldots i_r}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_{j'}} = p_{i'_1 i_1}\, p_{i'_2 i_2} \cdots p_{i'_r i_r}\, p_{j'j} \frac{\partial T_{i_1 i_2 \ldots i_r}}{\partial x_j} \quad ▶$$

Итак, дифференцирование тензорного поля по координатам повышает ранг тензорного поля на единицу.

В частности, применение этой операции к скалярному полю φ порождает векторное поле $A_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, которое называется градиентом скалярного поля.

По аналогии с градиентом скалярного поля, тензорное поле $\dfrac{\partial T_{i_1,i_2,\ldots i_r}}{\partial x_j}$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ **называют градиентом тензорного поля ранга** r.

§15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ 1$^{\text{го}}$ ПОРЯДКА

1°. Для векторного поля A_i образуем градиент векторного поля $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}$, а затем получившийся тензор свернем по индексам i, j: $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}\delta_{ij} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x_i}$.

Как известно, такая величина в векторном анализе называется дивергенцией векторного поля A ($\operatorname{div} A$). Подобным образом можно получить дивергенцию тензорного поля любого ранга, выше нулевого.

Результирующее тензорное поле имеет ранг на единицу меньший, чем исходное поле.

Для тензорного поля ранга r можно получить r различных тензорных полей $(r-1)^{\text{го}}$ ранга типа «дивергенции» в зависимости от того, какой из индексов исходного поля сворачивается с индексом дифференцирования: $\dfrac{\partial T_{i_1,i_2,..i_r}}{\partial x_{i_1}}, \dfrac{\partial T_{i_1,i_2,..i_r}}{\partial x_{i_2}}, \ldots, \dfrac{\partial T_{i_1,i_2,..i_r}}{\partial x_{i_r}}$.

2°. В векторном анализе известна такая дифференциальная операция, как $\operatorname{rot} A = \nabla \times A$. В тензорном представлении $(\mathbf{rot}\vec{A})_i = \varepsilon_{ikl}\dfrac{\partial}{\partial x_k}A_l$. Оператором $\varepsilon_{ikl}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ можно действовать на тензор любого ранга выше нулевого и затем сворачивать индекс l с одним из индексов этого тензора. Результирующее тензорное поле имеет тот же ранг, что и исходное.

Для тензорного поля ранга r можно получить r различных тензорных полей $r^{\text{го}}$ ранга типа «ротор» в зависимости от того с каким из индексов исходного поля сворачивать индекс l.

$$\varepsilon_{iki_1}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{i_1,i_2,\ldots i_r},\ldots,\varepsilon_{iki_r}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{i_1,i_2,\ldots i_r}.$$

3°. Схематически операции градиента, дивергенции и ротора тензорного поля произвольного ранга можно задать следующим образом:

$$(\operatorname{grad} T\ldots)_i = \frac{\partial T\ldots}{\partial x_i},$$

$$(\operatorname{div} T\ldots_i\ldots) = \delta_{ik}\frac{\partial T\ldots_i\ldots}{\partial x_k} = \frac{\partial T\ldots_i\ldots}{\partial x_i},$$

$$(\operatorname{rot} T\ldots_l\ldots) = \varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}T\ldots_l\ldots.$$

§16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ 2$^{\text{го}}$ ПОРЯДКА

1°. Для скалярной функции φ: $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)\delta_{ij} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^{\,2}} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^{\,2}} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^{\,2}} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^{\,2}} = \Delta\varphi$, и такая величина называется лапласианом функции.

Аналогично можно ввести лапласиан произвольного тензора ранга r и получить тензорное поле того же ранга: $\Delta T_{i_1,\ldots i_r} = \dfrac{\partial T_{i_1,\ldots i_r}}{\partial x_i x_j}\delta_{ij} = \dfrac{\partial^2 T_{i_1,\ldots i_r}}{\partial x^2_i}$

Рассмотрим $\operatorname{div}\operatorname{rot} A$, где A – произвольное векторное поле:

$$\operatorname{Div}\operatorname{rot} A = \delta_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = \frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = \underline{\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m} \overset{\substack{\text{поменяем}\\ \text{местами}\\ k\ \text{и}\ l}}{=}$$

$$= -\varepsilon_{lkm}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}A_m \overset{\substack{\text{переименуем}\\ l\leftrightarrow k}}{=} \underline{-\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m}.$$

Равенство подчеркнутых выражений позволяет заключить, что $\operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0$ для любого векторного поля A.

Аналогичное тождество имеет место для тензорного поля любого ранга (кроме нулевого): $\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{\ldots l\ldots}=0$.

3°. Проверим справедливость тождества: rot rot A = grad div A $-\Delta A$.

◀ $$(\mathrm{rot\,rot}\,A)_i=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n=\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n=\left(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n=$$

$$=\delta_{im}\delta_{kn}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_m}A_n-\delta_{in}\delta_{km}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_m}A_n=\delta_{im}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_n}A_n-\delta_{in}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}A_n=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_n}{\partial x_n}\right)-\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{div}A)-(\Delta A)_i=(\mathrm{grad\,div}A)_i-(\Delta A)_i=(\mathrm{grad\,div}A-\Delta A)_i$$ ▶

Аналогичное тождество можно записать и для произвольного тензорного поля.

§17. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

1°. В векторном анализе поток векторного поля $A(r)$ через поверхность S определяется как: $\int\limits_S\int\vec{A}d\vec{s}=\int\limits_S\int\vec{A}\vec{n}dS$ (здесь n – орт нормали к поверхности S). При этом поток векторного поля это скаляр.

Аналогично можно определить поток тензорного поля ранга r через поверхность S, как $\int\limits_S\int T_{\ldots i\ldots}dS_i=\int\limits_S\int T_{\ldots i\ldots}n_i dS$.

При этом поток тензорного поля ранга r через поверхность S это тензор (r – 1)$^{\text{го}}$ ранга (*покажите, что поток это тензор*). Всего существует r различных полей ранга (r – 1) <u>типа «поток»</u> в зависимости от того по какому индексу тензора T идет свертка.

2°. Для векторных полей известна формула Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_V\int\int\frac{\partial a_i}{\partial x_i}dV=\oint\limits_S\oint a_i n_i dS=\oint\limits_S\oint a_i dS_i\,.$$

Для тензорных полей существует r формул типа «Гаусса-Остроградского»

$\int\limits_V\int\int\frac{\partial T_{\ldots i\ldots}}{\partial x_i}dV=\oint\limits_S\oint T_{\ldots i\ldots}dS_i$ (справа и слева немой индекс должен быть один и тот же)

3°. Формула Стокса для векторного поля имеет вид $\int\limits_S\int \mathbf{rot}\vec{A}d\vec{S}=\oint\limits_L\vec{A}d\vec{l}$.

Та же формула в тензорной записи выглядит так: $\int\limits_S\int\varepsilon_{ikl}\frac{\partial A_l}{\partial x_k}dS_i=\oint\limits_L A_i dl_i$.

Формула Стокса может быть записана и для тензорных полей ранга r:

$$\int\limits_S\int\varepsilon_{ikl}\frac{\partial T_{\ldots l\ldots}}{\partial x_k}dS_i=\oint\limits_L T_{\ldots i\ldots}dl_i\,.$$

Всего может быть записано r формул типа «Стокса».

§18. ТЕНЗОРЫ (ЗАДАЧИ)

1) Показать, что произведение скаляра на тензор 2-го ранга является тензором 2-го ранга.

2) Показать, что величина $A_{ikl}B_{ik}$ (где A_{ikl} - тензор 3-го ранга, B_{ik} – тензор 2-го ранга) является вектором.

3) Доказать инвариантность свойств антисимметрии антисимметричного тензора 2-го ранга A_{ik}.

4) Показать, что произведение тензоров 3-го ранга и 2-го ранга является тензором 5-го ранга.

5) Компоненты тензора T_{ik} в некотором ортонормированном базисе $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ образуют матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ и, в том же базисе, вектор B имеет координаты (1,2,3).

а) Разложить тензор T_{ik} в сумму симметричного S_{ik} и антисимметричного A_{ik} тензоров. б) Найти:

1)$T_{ik}B_k; T_{ik}B_i; T_{ik}B_kB_i$

2)$A_{ik}T_{ik}; \delta_{ik}A_{ik}; A_{ik}B_i; A_{ik}B_iB_k$

3)$T_{ik}\delta_{ik}; A_{ik}\delta_{ik}; \delta_{ik}\delta_{ik};$

6) Пользуясь аппаратом тензорной алгебры, проверить тождества:

1)$A(B\times C) = C(A\times B)$

2)$(\overline{A}\times\overline{B})(\overline{C}\times\overline{D}) = (\overline{A}\overline{C})(\overline{B}\overline{D}) - (\overline{D}\overline{A})(\overline{B}\overline{C})$

3)$(A\times B)\times(C\times D) = (A(B\times D))C - (A(B\times C))D = (A(C\times D))B - A(B(C\times D))$

7) Записать в векторной форме выражение:

$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{ztp}a_ka_rb_mc_t$

8) Пользуясь аппаратом тензорной алгебры, проверить тождества:

1)$\mathbf{div}\,\mathbf{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\mathbf{div}\,\vec{a} + \vec{a}\,\mathbf{grad}\,\varphi$

2)$\mathbf{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\mathbf{rot}\,\vec{a} - (\vec{a}\times\mathbf{grad}\,\varphi)$

3)$\mathbf{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\,\mathbf{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\,\mathbf{rot}\,\vec{b}$

4)$\mathbf{rot}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\,\mathbf{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathbf{div}\,\vec{a} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\nabla\vec{a})\vec{b}$

9) Пользуясь аппаратом тензорной алгебры, вычислить: $\mathbf{div}\,\vec{r},\ \mathbf{rot}\,\vec{r},\ \mathbf{grad}(\vec{a}\vec{r}), (\nabla\vec{a})\vec{r})$ (радиус – вектор – r, (постоянный вектор – a))

10) Найти дивергенции и роторы следующих векторов: $(\overline{a}\overline{r})\overline{b}, (\overline{a}\overline{r})\overline{r}; (\overline{a}\times\overline{r}); \overline{r}\times(\overline{a}\times\overline{b})$. (радиус – вектор – r, (постоянный вектор – a, b))

11) Вычислить интеграл $\oint\limits_S\int(\overline{c}\overline{r})(\overline{a}\overline{n})dS$, где a, c – постоянные вектора, $n(r)$ – орт нормали к поверхности S, которая ограничивает объем V.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Часть II.

Линейные и полуторалинейные формы в унитарном пространстве.

1. Линейные формы в унитарном пространстве. Теорема о специальном представлении линейных форм.
2. Полуторалинейные формы в унитарном пространстве. Теоремы о специальном представлении полуторалинейных форм.
3. Связь между матрицей полуторалинейной формы и матрицей линейного оператора.

Сопряженные и самосопряженные операторы в унитарном пространстве.

1. Сопряженный оператор и его свойства.
2. Эрмитовы (самосопряженные) операторы.
3. Коммутирующие операторы.
4. Собственные числа и собственные векторы эрмитового оператора.
5. Норма линейного и эрмитового оператора.
6. Свойства эрмитовых операторов.
7. Теорема о собственном базисе эрмитового оператора.
8. Спектральное разложение эрмитового оператора. Теорема Гамильтона-Кэли.
9. Положительные операторы. Корень n -й степени из оператора.

Эрмитовы формы.

1. Полуторалинейные эрмитовы формы. Квадратичные формы в унитарном пространстве.
2. Приведение квадратичной формы и пары квадратичных форм к каноническому виду.

Унитарные и нормальные операторы.

1. Унитарные операторы. Необходимое и достаточное условие унитарности оператора.
2. Нормальные операторы. Диагонализуемость матрицы нормального и унитарного операторов.

Канонический вид линейного оператора.

1. Нормальная жорданова форма. Схема построения жорданова базиса и приведения матрицы линейного оператора к жордановой форме.
2. Примеры приведения матрицы к жордановому виду.

Линейные операторы в евклидовом пространстве.

1. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Билинейные формы.
2. Самосопряженные операторы. Спектр самосопряженного оператора. Диагонализуемость матрицы самосопряженного оператора.
3. Ортогональные операторы. Ортогональные матрицы. Общий вид произвольного ортогонального оператора.

Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве.

1. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов.
2. Экстремальные свойства квадратичной формы.

Элементы теории тензоров.

1. Определитель Грамма. Линейная зависимость и независимость системы векторов.
2. Взаимные базисы. Ковариантные и контравариантные координаты векторов.

3. Преобразование координат векторов при изменении базиса. Ковариантные и контравариантные координаты. Формулы Гиббса..
4. Понятие тензора. Примеры тензоров.
5. Основные операции над тензорами.
6. Афинные ортогональные тензоры. Операции над афинными ортогональными тензорами.
7. Признак тензорности величины. О свойствах симметрии тензоров.
8. Псевдотензоры. Примеры псевдотензоров.
9. Алгебраический символ Леви-Чивита.
10. Связь тензоров 2-го ранга с матрицей линейного оператора и с определителями.
11. Тензорные поля. Дифференцирование тензорного поля по координатам.
12. Дифференциальные операции 1-го порядка. Градиент, дивергенция и ротор тензорного поля.
13. Дифференциальные операции 2-го порядка для тензорных полей.
14. Интегральные формулы тензорного анализа. Формула Гаусса-Остроградского и формула Стокса для тензорных полей.

Элементы теории групп.

1. Определение группы. Подгруппы. Примеры.
2. Группа самосовмещений правильного многоугольника (на примере треугольника).
3. Группа перестановок. Таблица Кэли для группы перестановок трех элементов.
4. Свойства групп. Изоморфные группы. Примеры.
5. Смежные классы. Нормальные делители группы.
6. Гомоморфизмы групп. Фактор-группа.
7. Теоремы о гомоморфизмах групп.
8. Группы линейных преобразований. Ортогональная группа, группа Лоренца.
9. Линейные представления групп. Приводимые и неприводимые представления. Примеры.

Элементы теории гильбертовых пространств.

1. Бесконечномерное евклидово пространство E_∞. Норма в E_∞.
2. Ортонормированные системы в E_∞. Примеры. Ряд Фурье.
3. Замкнутые и полные системы векторов в E_∞. Сходимость по норме и слабая сходимость в E_∞.
4. Компактные и слабо компактные множества в E_∞. Полнота и сепарабельность пространств.
5. Линейные функционалы в E_∞. Непрерывные и ограниченные линейные функционалы. Норма линейного функционала.
6. Пространство бесконечных последовательностей l^2.
7. Пространство интегрируемых функций L_E^2
8. Изоморфизм пространств l^2 и L_E^2.
9. Определение гильбертового пространства. Примеры.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

ПО КУРСУ "ВЫСШАЯ АЛГЕБРА". Часть II

1. Найти матрицу A^* оператора сопряженного к линейному оператору A по заданной матрице оператора A и матрице Грамма Г:

а) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$; $\Gamma=\begin{pmatrix}3&2\\2&2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$; $\Gamma=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу A^* оператора сопряженного к линейному оператору A по заданной матрице оператора A и скалярному произведению:

а) $A=\begin{pmatrix}5&-3\\-1&1\end{pmatrix}$, $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$;

б) $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$, $(x,y)=x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$;

в) $A=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$, $(x,y)=x_1\bar{y}_1+(1+i)x_1\bar{y}_2+(1-i)x_2\bar{y}_1+3x_2\bar{y}_2$.

3. Оператор A переводит векторы a_1, a_2, в векторы b_1, b_2, соответственно. Найти оператор A^*, если базис в котором заданы a_1, a_2, b_1, b_2 - ортонормирован:

а) $a_1(1,1), a_2(1,4)$; $b_1(0,-2), b_2(-3,7)$;

б) $a_1(0,1), a_2(1,3)$; $b_1(3,1), b_2(2,3)$.

4. Оператор $A=\begin{pmatrix}2&1+i\\-1-i&1-i\end{pmatrix}$ задан матрицей в базисе f_1, f_2, где $f_1=e_1+e_2, f_2=e_1-ie_2$. Найти A^* в том же базисе.

5. Оператор $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ задан матрицей в базисе f_1, f_2, f_3, где $f_1=e_1+e_2+e_3$, $f_2=e_2+e_3$, $f_3=e_2-e_3$. Найти A^* в том же базисе.

6. В евклидовом пространстве полиномов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q)=\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$ (здесь α_i и β_i коэффициенты полиномов p и q при x^i) задан оператор $A\,p(x)=\dfrac{d}{dx}p(x)$. Найти A^* в следующих базисах:

а) $\{1, x, x^2\}$; б) $\{1, x, 3x^2-1\}$.

7. В евклидовом пространстве полиномов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q)=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$ задан оператор $A\,p(x)=\dfrac{d}{dx}p(x)$. Найти A^* в следующих базисах: а) $\{1, x, x^2\}$; б) $\{1, x, 3x^2-1\}$.

8. Пусть в унитарном пространстве дифференцируемых и периодичных с периодом 2π функций, скалярное произведение имеет вид: $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$. Доказать, что оператор $A=\dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ - эрмитов.

9. Установить является ли оператор A самосопряженным, если оператор A задан матрицей в базисе с матрицей Грамма Γ:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Gamma=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ \text{б) } A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \Gamma=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},\ \Gamma=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

10. Оператор задан матрицей $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$ в базисе с матрицей Грамма $\Gamma=\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Будет ли оператор A - эрмитовым?

11. Установить, является ли ортогональным оператор A, действующий на векторы ортонормированного базиса по формулам:

$$\text{а) } Ae_1=e_1+e_2,\ Ae_2=e_1-e_2;\quad \text{б) } Ae_1=\frac{1}{5}(3e_1+4e_2),\ Ae_2=\frac{1}{5}(4e_1+3e_2).$$

12. Установить, является ли оператор A унитарным, если A действует на векторы ортонормированного базиса по формулам:

$$Ae_1=e_1+ie_2,\ Ae_2=ie_1+e_2.$$

13. Установить, является ли ортогональным линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

14. Установить, является ли ортогональным оператор A, если он задан матрицей в базисе $\{f_i\}$, а векторы f_i выражаются через векторы ортонормированного базиса $\{e_i\}$:

$$\text{а) } A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix},\ f_1=e_1+e_2,\ f_2=e_2;$$

$$\text{б) } A=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix},\ f_1=3e_1+e_2,\ f_2=2e_1+e_2;$$

$$\text{в) } f_1=e_2+e_3,\ f_2=e_1+e_3,\ f_3=e_1+e_2,\ A=\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Построить собственный ортонормированный базис самосопряженного оператора, который, в некотором ортонормированном базисе, задан матрицей:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Построить собственный ортонормированный базис эрмитового оператора, который, в некотором ортонормированном базисе, задан матрицей:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{pmatrix} 0 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{pmatrix};\quad \text{в) } A=\begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

17. Построить собственный ортонормированный базис унитарного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $A=\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Привести матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

19. Найти:

а) A^{28}, $A=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$; б) A^{100}, $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\sqrt{A}$, $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\sqrt{A}$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\sqrt{A}$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; е) $\sqrt{A}$, $A=\begin{pmatrix} 0{,}15 & -0{,}09 \\ -0{,}25 & 0{,}15 \end{pmatrix}$.

20. Установить, являются ли следующие квадратичные формы положительно определенными:

а) $A(x,x)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

б) $A(x,x)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

21. Установить, при каких λ следующие квадратичные формы являются положительно определенными:

а) $A(x,x)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$;

б) $A(x,x)=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

22. Найти ортонормированный базис, в котором следующие квадратичные формы (заданные тоже в ортонормированном базисе) имеют диагональный вид:

а) $A(x,x)=7x_1^2+4\sqrt{3}x_1x_2+3x_2^2$;

б) $A(x,x)=-4x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2$.

23. Привести следующие квадратичные формы к нормальному виду:

а) $A(x,x)=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$;

б) $A(x,x)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

в) $A(x,x)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

24. С помощью одного преобразования привести пару форм к каноническому виду:

а) $A(x,x)=-4x_1x_2$, $B(x,x)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2$;

б) $A(x,x)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$, $B(x,x)=4x_1^2+16x_1x_3+6x_2^2$;

в) $A(x,x)=9x_1^2-10x_1x_2+3x_2^2$, $B(x,x)=4x_1^2+16x_1x_2+6x_2^2$;

г) $A(x,x)=11x_1^2-6x_1x_2+x_2^2$, $B(x,x)=13x_1^2-10x_1x_2+3x_2^2$;

д) $A(x,x)=2x_1^2-3x_1x_2+\frac{5}{2}x_2^2$, $B(x,x)=2x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2$;

е) $A(x,x)=x_1^2+10x_1x_2+26x_2^2$, $B(x,x)=x_1^2+16x_1x_2+56x_2^2$.

25. Найти базис, взаимный к данному:

а) $e_1(1,1,0)$, $e_2(1,0,1)$, $e_3(0,1,1)$;

б) $e^1(1,0,0)$, $e^2(-1,1,0)$, $e^3(0,-1,1)$.

26. Вектор $x(5,2,1)$ задан своими координатами в том же базисе, в котором заданы координаты векторов двух взаимных базисов: $e_1(1,1,0)$, $e_2(1,0,1)$, $e_3(0,1,1)$ и $e^1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $e^2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $e^3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Найти ковариантные и контравариантные координаты вектора x.

27. Доказать инвариантность свойства антисимметрии тензора второго ранга A_{ik}.

28. Используя тензорную форму записи проверить тождества:

а) $(A\times B)\times(C\times D)=(A\cdot(C\times D))B-A(B\cdot(C\times D))$;

б) $(A\times B)\times(C\times D)=(A\cdot(B\times D))C-(A\cdot(B\times C))D$.

29. Используя тензорную форму записи, вычислить:

а) $\mathbf{grad}(a\cdot r)$; б) $\mathbf{div}((a\cdot r)\,b)$; в) $\mathbf{div}((a\cdot r)\,r)$; г) $\mathbf{div}\,a\times(r\times b)$;

д) $\mathbf{rot}((a\cdot r)\,b)$; е) $\mathbf{rot}((a\cdot r)\,r)$; ж) $\mathbf{rot}\,a\times(r\times b)$; з) $(a\,\nabla)\,r$.

(здесь a, b - постоянные векторы, r - радиус вектор).

30. Используя тензорную форму записи, доказать тождества:

а) $\mathbf{div}(\varphi\, a)=\varphi\,\mathbf{div}\,a+a\cdot\mathbf{grad}\,\varphi$;

б) $\mathbf{div}(a\times b)=b\cdot\mathbf{rot}\,a-a\cdot\mathbf{rot}\,b$;

в) $\mathbf{rot}(\varphi\, a)=\varphi\,\mathbf{rot}\,a-(a\times\mathbf{grad}\,\varphi)$;

г) $\mathbf{rot}(a\times b)=a\,\mathbf{div}\,b-b\,\mathbf{div}\,a+(b\,\nabla)a-(a\,\nabla)b$.

(здесь a, b - векторные поля, φ - скалярное поле).

31. Вычислить (используя интегральные теоремы тензорного исчисления) $\oint\!\!\int_S (cr)(an)\,dS$, где a, c - постоянные векторы, $n(r)$ - орт нормали к поверхности S, которая ограничивает объем V.

32. Найти результат действия перестановок:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

32. Возвести перестановки в степень:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}^{81}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&6&2&4&3&5\end{pmatrix}^{57}$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&4&7&6&3&1\end{pmatrix}^{93}$; г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&5&2&4&3\end{pmatrix}^{67}$.

33. Найти перестановку, обратную перестановке: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

34. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-25}$.

35. Найти:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{17} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{23}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{31} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{17}$

36. Если S_n группа перестановок n чисел, то найти все подгруппы S_3.

37. Построить смежные классы к C_3 в C_6, где C_3 и C_6 - группы корней 3-й и 6-й степени из 1, соответственно.

38. Построить смежные классы к C_4 в C_8, где C_4 и C_8 - группы корней 4-й и 8-й степени из 1, соответственно.

39. Доказать, что C_3 - нормальный делитель группы C_6, где C_3 и C_6 - группы корней 3-й и 6-й степени из 1, соответственно.

40. Доказать, что C_4 - нормальный делитель группы C_8, где C_4 и C_8 - группы корней 4-й и 8-й степени из 1, соответственно.

41. Найти все гомоморфизмы C_6 в C_3, где C_n группа корней n-й степени из 1.

42. Найти фактор-группу G/H, если:

а) G - группа целых чисел, H - подгруппа чисел, кратных заданному целому числу n;

б) G - группа всех вещественных чисел по сложению, H - подгруппа целых чисел;

в) G - группа всех комплексных чисел по сложению, H - группа вещественных чисел тоже по сложению;

г) G - группа ненулевых комплексных чисел по умножению, H - группа положительных вещественных чисел по умножению;

д) G - группа ненулевых комплексных чисел по умножению, H - подгруппа чисел по модулю равных 1.

43. Найти нормальную жорданову форму матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -12 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Оглавление