Волновое уравнение на полупрямой. Метод продолжения и метод характеристик

№ <u>447</u>, <u>449</u>, <u>451</u>, 448, 450, 452, <u>454</u>, 453, 455, 456, 457, I, II, III, IV, V.

1. Метод продолжения

Рассмотрим задачу Коши на прямой для простейшего случая волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\,t), & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty). \end{cases} \tag{1.1}$$

Вспомним утверждения, доказанные в номерах 445 и 446:
№ 445.

<u>Усл.</u> $f(x,\,t) \equiv 0$.

<u>Утв.</u> а) из нечётности $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\psi(-x) = -\psi(x)$ функций φ и ψ следует, что

$$u(0,\,t) = 0;$$

б) из чётности $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и $\psi(-x) = \psi(x)$ функций φ и ψ следует, что

$$u_x(0,\,t) = 0.$$

№ 446.

<u>Усл.</u> $\varphi(x),\ \psi(x) \equiv 0$.

<u>Утв.</u> а) из нечётности $f(-x,\,t) = -f(x,\,t)$ по переменной x функции f следует, что

$$u(0,\,t) = 0;$$

б) из чётности $f(-x,\,t) = f(x,\,t)$ по переменной x функции f следует, что

$$u_x(0,\,t) = 0.$$

Это наблюдение и легло в основу метода продолжения. Продемонстрируем его на примерах, а затем сформулируем в виде теоремы.

2. № 447

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t > 0; \\ v(x,\,0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ v_t(x,\,0) = \psi_1(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{2.2}$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ построены по функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ их **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -\psi(-x), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\, t)$ на промежутке $x \in (0,\, +\infty)$. Так как v – решение (2.2), то:

1) из первого равенства (2.2) следует, что
$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \qquad x \in (0,\, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (2.2) следует, что
$$v(x,\, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty), \quad t > 0;$$

3) из третьего равенства (2.2) следует, что
$$v_t(x,\, 0) = \psi_1(x) \equiv \psi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty), \quad t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 445, для решения $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (2.2) справедливо соотношение
$$v(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (2.2) является также решением задачи (2.1) на полупрямой**[1]:
$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t), \qquad x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

А для решения задачи (2.2) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $f(x,\, t) \equiv 0$ получаем:
$$v(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds.$$

Ответ:
$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds,$$
где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ определены равенствами (2.3).

3. № 449

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0, \ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

[1] То, что другого решения у задачи (2.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,\,t), & x \in (-\infty,\ +\infty),\quad t > 0; \\ v(x,\,0) = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ v_t(x,\,0) = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{3.2}$$

где функции $f_1(x,\,t)$ построена по функции $f(x,\,t)$ её **<u>нечётным продолжением</u>** по переменной x на всю числовую ось:

$$f_1(x,\,t) = \begin{cases} f(x,\,t), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -f(-x,\,t), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\,t)$ на промежутке $x \in (0,\ +\infty)$. Так как v – решение (3.2), то:

1) из первого равенства (3.2) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\,t), \qquad x \in (0,\ +\infty),\quad t > 0;$$

2) из второго равенства (3.2) следует, что

$$v(x,\,0) = 0 \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\ +\infty),\quad t > 0;$$

3) из третьего равенства (3.2) следует, что

$$v_t(x,\,0) = 0 \equiv \psi(x), \qquad x \in (0,\ +\infty),\quad t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446, для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (3.2) справедливо соотношение

$$v(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (3.2) является также решением задачи (3.1) на полупрямой**[2]:

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t), \qquad x \geqslant 0,\quad t \geqslant 0.$$

А для решения задачи (3.2) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ получаем:

$$v(x,\,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\,\tau)\,ds\,d\tau.$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\,\tau)\,ds\,d\tau,$$

где функция $f_1(x,\,t)$ определена равенством (3.3).

[2] То, что другого решения у задачи (3.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

4. № 451

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\,t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи на полупрямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x,\,t > 0; \\ v(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ v_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ v(0,\,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\,t), & x,\,t > 0; \\ w(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ w_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ w(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Как легко заметить, функция

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t) + w(x,\,t)$$

является решением исходной задачи (4.1).
С другой стороны, задачи (4.2) мы уже решили, соответственно, в номерах 447 и 449. Воспользуемся их результатами:

$$v(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds,$$

$$w(x,\,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\,\tau)ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\,t)$ определены равенствами

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -\psi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$f_1(x,\,t) = \begin{cases} f(x,\,t), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -f(-x,\,t), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Поэтому для решения $u(x,\,t) \equiv v(x,\,t) + w(x,\,t)$ задачи (4.1) получаем:
Ответ:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\,\tau)ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\,t)$ определены равенствами (4.3) и (4.4), соответственно.

5. № 448

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty),\quad t > 0; \\ v(x,\,0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ v_t(x,\,0) = \psi_1(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{5.2}$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ построены по функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ их **чётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при}\quad x \geqslant 0; \\ \varphi(-x), & \text{при}\quad x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при}\quad x \geqslant 0; \\ \psi(-x), & \text{при}\quad x < 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\,t)$ на промежутке $x \in (0,\ +\infty)$. Так как v – решение (5.2), то:

1) из первого равенства (5.2) следует, что
$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \qquad x \in (0,\ +\infty),\quad t > 0;$$

2) из второго равенства (5.2) следует, что
$$v(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\ +\infty),\quad t > 0;$$

3) из третьего равенства (5.2) следует, что
$$v_t(x,\,0) = \psi_1(x) \equiv \psi(x), \qquad x \in (0,\ +\infty),\quad t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446, для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (5.2) справедливо соотношение

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (5.2) является также решением задачи (5.1) на полупрямой**[3]:

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t), \qquad x \geqslant 0,\quad t \geqslant 0.$$

А для решения задачи (5.2) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $f(x,\,t) \equiv 0$ получаем:

$$v(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds.$$

Ответ:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds,$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ определены равенствами (5.3).

[3] То, что другого решения у задачи (5.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

6. № 450

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,\, t), & x \in (-\infty,\, +\infty),\ t > 0; \\ v(x,\, 0) = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty); \\ v_t(x,\, 0) = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty), \end{cases} \tag{6.2}$$

где функции $f_1(x,\, t)$ построена по функции $f(x,\, t)$ её **чётным продолжением** по переменной x на всю числовую ось:

$$f_1(x,\, t) = \begin{cases} f(x,\, t), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ f(-x,\, t), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\, t)$ на промежутке $x \in (0,\, +\infty)$. Так как v – решение (6.2), то:

1) из первого равенства (6.2) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\, t), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0;$$

2) из второго равенства (6.2) следует, что

$$v(x,\, 0) = 0 \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0;$$

3) из третьего равенства (6.2) следует, что

$$v_t(x,\, 0) = 0 \equiv \psi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446, для решения $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (6.2) справедливо соотношение

$$v_x(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение** $v(x,\, t)$ **вспомогательной задачи** (6.2) **является также решением задачи** (6.1) **на полупрямой**[4]:

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t), \qquad x \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0.$$

А для решения задачи (6.2) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ получаем:

$$v(x,\, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau)\, ds\, d\tau.$$

Ответ:

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau)\, ds\, d\tau,$$

где функция $f_1(x,\, t)$ определена равенством (6.3).

[4] То, что другого решения у задачи (6.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

7. № 452

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи на полупрямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x,\, t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ v_x(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t), & x,\, t > 0; \\ w(x, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ w_t(x, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ w_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Как легко заметить, функция

$$u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$$

является решением исходной задачи (7.1).
С другой стороны, задачи (7.2) мы уже решили, соответственно, в номерах 448 и 450. Воспользуемся их результатами:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds,$$

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ определены равенствами

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ \varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ \psi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{7.3}$$

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ f(-x, t), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Поэтому для решения $u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$ задачи (7.1) получаем:
Ответ:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ определены равенствами (7.3) и (7.4), соответственно.
Результаты номеров 447 – 452 сформулируем в виде теоремы:

Теорема 7.1 (Метод продолжения).

Утв. 1. *Решение задачи*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

задаётся формулой Даламбера

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau)ds d\tau,$$

*где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ есть **нечётные** по x продожения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\, t)$ на всю числовую прямую.*

Утв. 2. *Решение задачи*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

задаётся формулой Даламбера

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau)ds d\tau,$$

*где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ есть **чётные** по x продожения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\, t)$ на всю числовую прямую.*

Замечание 7.1. Метод продолжения в приведённом виде не распространяется на

- краевое условие 3-го рода и
- на неоднородные краевые условия.

При этом случай неоднородных краевых условий (при $\varphi,\ \psi,\ f \equiv 0$) мы научимся решать методом характеристик.

8. Метод характеристик

Будем рассматривать задачу нахождения функции $u(x,\, t)$ на полупрямой $x > 0$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ \text{(КУ)} & \end{cases} \tag{8.1}$$

где краевое условие (КУ) имеет один из видов:

$$\left[\begin{array}{lll} u(0,\,t)=\mu(t), & t>0\ - & \text{краевое условие I-го рода;} \\ u_x(0,\,t)=\nu(t), & t>0\ - & \text{краевое условие II-го рода;} \\ u_x(0,\,t)-hu(0,\,t)=\varkappa(t), & t>0\ - & \text{краевое условие III-го рода.} \end{array}\right. \tag{КУ}$$

Поскольку решение уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ имеет вид

$$u(x,\,t)=\underbrace{f_1(x+at)}_{\longleftarrow}+\underbrace{f_2(x-at)}_{\longrightarrow}$$

двух волн, одна из которых бежит влево, а другая вправо, внешней силы f нет, в начальный момент струна справа от $x=0$ имеет нулевое отклонение от положения равновесия и нулевую скокрость, то обе волны $f_1(x+at)$ и $f_2(x-at)$ имеют в начальный момент $t=0$ носитель (то есть множество точек, где они отличны от нуля) слева от $x=0$. При этом волна $f_1(x+at)$ при $t>0$ побежит влево, и поэтому никак не повлияет на решение справа от нуля. Поэтому мы смело можем считать, что $f_1(s)\equiv 0,\quad s\in\mathbb{R}$.

Вывод: Решение задачи (8.1) для уравнения колебаний на полупрямой представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a, вызванную движением края $x=0$:

$$u(x,\,t)=\underbrace{f_2(x-at)}_{\longrightarrow},\qquad x,\,t\geqslant 0.$$

9. № 454

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x>0,\ t>0; \\ u(x,\,0)=0, & x\geqslant 0; \\ u_t(x,\,0)=0, & x\geqslant 0; \\ u_x(0,\,t)=\nu(t), & t>0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Так как решение задачи (9.1) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a, вызванную движением края $x=0$:

$$u(x,\,t)=\underbrace{f_2(x-at)}_{\longrightarrow},\qquad x,\,t\geqslant 0, \tag{9.2}$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (9.1).

1) Уравнение $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ выполняется автоматически для любой $f_2(s)\in C^2(\mathbb{R})$;

2) начальное условие $u(x,\,0)=0,\ \ x\geqslant 0$ требует, чтобы $f_2(s)=0$ при $s>0$;

3) начальное условие $u_t(x,\,0)=0,\ \ x\geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(s)=0$ при $s>0$;

4) краевое условие $u_x(0,\,t)=\nu(t),\ \ t\geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(-at)=\nu(t),\ \ t>0$ или, после замены переменной $s=-at$,

$$f_2'(s)=\nu\left(-\frac{s}{a}\right)\quad\text{при}\quad s<0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.
Из условия 4) найдём $f_2(s)$ при $s < 0$:

$$f_2(s) = \int_0^s \nu\left(-\frac{p}{a}\right) dp + \underbrace{f_2(0)}_{=0} = \left[r = -\frac{p}{a}\right] = -a \int_0^{-\frac{s}{a}} \nu(r)\, dr, \qquad s < 0.$$

Подставляя вместо s выражение $(x - at)$ и вспоминая условие 2), получаем:
Ответ:

$$u(x,\, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ -a \int\limits_0^{-\frac{x-at}{a}} \nu(r)\, dr, & x < at. \end{cases}$$

10. № 453

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

Так как решение задачи (10.1) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a, вызванную движением края $x = 0$:

$$u(x,\, t) = \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}, \qquad x,\, t \geqslant 0, \tag{10.2}$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (10.1).

1) Уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ выполняется автоматически для любой $f_2(s) \in C^2(\mathbb{R})$;
2) начальное условие $u(x,\, 0) = 0$, $x \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2(s) = 0$ при $s > 0$;
3) начальное условие $u_t(x,\, 0) = 0$, $x \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(s) = 0$ при $s > 0$;
4) краевое условие $u(0,\, t) = \mu(t)$, $t \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2(-at) = \mu(t)$, $t > 0$ или, после замены переменной $s = -at$,

$$f_2(s) = \mu\left(-\frac{s}{a}\right) \quad \text{при} \quad s < 0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.
Подставляя вместо s выражение $(x - at)$, из условий 2) и 4) получаем:
Ответ:

$$u(x,\, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right), & x < at. \end{cases}$$

11. № 455

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) - hu(x,\,0) = \varkappa(t), & t > 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Так как решение задачи (11.1) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a, вызванную движением края $x = 0$:

$$u(x,\,t) = \underbrace{f_2(x-at)}_{\longrightarrow}, \qquad x,\,t \geqslant 0, \tag{11.2}$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (11.1).

1) Уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ выполняется автоматически для любой $f_2(s) \in C^2(\mathbb{R})$;

2) начальное условие $u(x,\,0) = 0,\ \ x \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2(s) = 0$ при $s > 0$;

3) начальное условие $u_t(x,\,0) = 0,\ \ x \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(s) = 0$ при $s > 0$;

4) краевое условие $u_x(0,\,t) - hu(x,\,0) = \varkappa(t),\ \ t \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(-at) - hf_2(-at) = \varkappa(t),\ \ t > 0$ или, после замены переменной $s = -at$,

$$f_2'(s) - hf_2(s) = \varkappa\left(-\frac{s}{a}\right) \quad \text{при} \quad s < 0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.
Из условия 4), которое есть линейное ОДУ, найдём $f_2(s)$ при $s < 0$.
Обозначим $\varkappa\left(-\frac{s}{a}\right) = \gamma(s)$. Тогда уравнение для $f_2(s)$ примет вид:

$$f_2'(s) - hf_2(s) = \gamma(s). \tag{11.3}$$

Сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения:

$$f_{2o}'(s) - hf_{2o}(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{df_{2o}}{f_{2o}} = hds \qquad \Longrightarrow \qquad f_{2o}(s) = ce^{hs}.$$

Далее, в соответствии с методом вариации постоянной, будем искать решение $f_2(s)$ неоднородного уравнения (11.3) в виде

$$f_2(s) = c(s)e^{hs}. \tag{11.4}$$

Подставляем искомый вид решения в (11.3):

$$\underbrace{c'(s)e^{hs} + hc(s)e^{hs}}_{f_2'(s)} - \underbrace{hc(s)e^{hs}}_{hf_2(s)} = \gamma(s) \qquad \Longrightarrow \qquad c'(s) = \gamma(s)e^{-hs} \qquad \Longrightarrow$$

$$c(s) = \int\limits_0^s \gamma(p)e^{-hp}dp + c_1.$$

Подставим найденную функцию $c(s)$ в (11.4):

$$f_2(s) = e^{hs} \cdot \int\limits_0^s \gamma(p) e^{-hp} dp + c_1 e^{hs}.$$

Учитывая, что в силу условия 2) функция $f_2(s)$ должна в точке $s = 0$ обратиться в ноль, найдём c_1:

$$f_2(0) = e^0 \cdot \int\limits_0^0 \gamma(p) e^{-hp} dp + c_1 e^0 = c_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = 0.$$

Поэтому, окончательно,

$$f_2(s) = e^{hs} \cdot \int\limits_0^s \gamma(p) e^{-hp} dp, \qquad s < 0. \tag{11.5}$$

Вспомним, что $\gamma(p) = \varkappa\left(-\frac{p}{a}\right)$. Тогда после замены $p = -ar$ получим

$$f_2(s) = -ae^{hs} \cdot \int\limits_0^{-\frac{s}{a}} \varkappa(r) e^{ahr} dr, \qquad s < 0.$$

Подставляя вместо s выражение $(x - at)$ и вспоминая условие 2), находим функцию $u(x,\, t)$:
<u>**Ответ:**</u>

$$u(x,\, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ -ae^{h(x-at)} \cdot \int\limits_0^{-\frac{x-at}{a}} \varkappa(r) e^{ahr} dr, & x < at. \end{cases}$$

12. № 456

Найти решение общей задачи для волнового уравнения на полупрямой с краевым условием первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Представим решение данной задачи в виде суммы решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\, t), & x,\, t > 0; \\ v(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ v_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ v(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x,\, t > 0; \\ w(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w(0,\, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{12.2}$$

В силу линейности этих задач, функция

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t) + w(x,\, t)$$

является решением исходной задачи (12.1).
С другой стороны, задачи (12.2) мы уже решили, соответственно, в номерах 551 и 553. Воспользуемся их результатами:

$$v(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ есть нечётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\, t)$ на всю ось $x \in (-\infty,\, +\infty)$.

$$w(x,\, t) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) dr, & x < at. \end{cases}$$

Поэтому для решения $u(x,\, t) \equiv v(x,\, t) + w(x,\, t)$ задачи (12.1) получаем:
Ответ:

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau)dsd\tau +$$
$$+ \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) dr, & x < at. \end{cases}$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ есть нечётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\, t)$ на всю ось $x \in (-\infty,\, +\infty)$.

13. № 457

Найти решение общей задачи для волнового уравнения на полупрямой с краевым условием первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = \nu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{13.1}$$

Представим решение данной задачи в виде суммы решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2v_{xx} = f(x,\, t), & x,\, t > 0; \\ v(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ v_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ v(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2v_{xx} = 0, & x,\, t > 0; \\ w(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w_x(0,\, t) = \nu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{13.2}$$

В силу линейности этих задач, функция

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t) + w(x,\, t)$$

является решением исходной задачи (13.1).
С другой стороны, задачи (13.2) мы уже решили, соответственно, в номерах 552 и 554. Воспользуемся их результатами:

$$v(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau)dsd\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ есть чётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\, t)$ на всю ось $x \in (-\infty,\, +\infty)$.

$$w(x,\, t) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ -a\int\limits_0^{-\frac{x-at}{a}} \nu\,(r)\, dr, & x < at. \end{cases}$$

Поэтому для решения $u(x,\,t) \equiv v(x,\,t) + w(x,\,t)$ задачи (13.1) получаем:
Ответ:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\,\tau)dsd\tau +$$
$$+\begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ -a\int\limits_0^{-\frac{x-at}{a}} \nu\,(r)\,dr, & x < at. \end{cases}$$

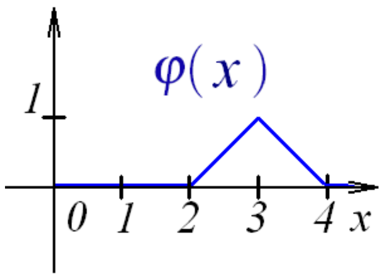
где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\,t)$ есть чётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\,t)$ на всю ось $x \in (-\infty,\ +\infty)$.

Задание на самостоятельную работу:

1) **I.** *Нарисовать профиль полубесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{9}{4a},\ \frac{3}{a},\ \frac{5}{a}$, *если её колебания описываются задачей:*

а) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$

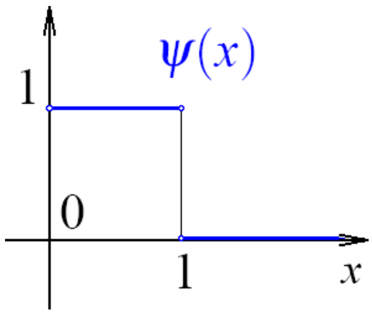
где функция $\varphi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*



2) **II.** *Нарисовать профиль полубесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{1}{a},\ \frac{2}{a},\ \frac{4}{a}$, *если её колебания описываются задачей:*

а) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$

где функция $\psi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*

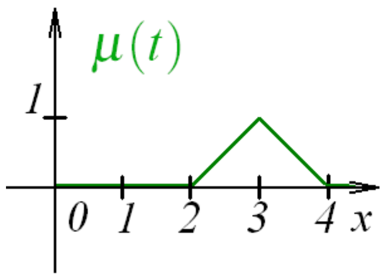


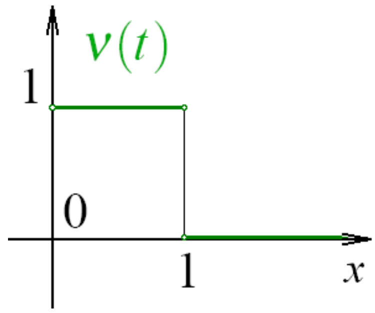
3) **III.** *Нарисовать профиль полубесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{9}{4a},\ \frac{3}{a},\ \frac{5}{a}$, *если её колебания описываются задачей:*

а) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = \mu(t), & t \geqslant 0, \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = \nu(t), & t \geqslant 0, \end{cases}$

где функции $\mu(x)$ *и* $\nu(x)$ *имеют вид, приведённый на рисунке.*





4) **IV.** *Решить задачи:*

а) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Axt, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \sin x, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \sin 2x, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) - hu(0,\,t) = U_0 \sin t, & t \geqslant 0. \end{cases}$