ОРИЕНТИРОВОЧНЫЙ ПЛАН ЗАНЯТИЙ

Тема	Занятия
1. Элементы элементарной математики	2
2. Элементы мат. логики и теория множеств	1
3. Теория пределов	6
4. Непрерывность и дифференцируемость	4
5. Применение дифференциального исчисления	5
6.Комплексные числа	3
7. Неопределенные интегралы	6

Методические материалы содержат задачи для решения на практических занятиях и для домашних заданий.

Литература.

1. **Д. Демидович.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
2. **Волковысский, Лунц, Араманович.** Сборник задач по теории функций комплексного переменного.
3. **К. Кудрявцев.** Задачи по математическому анализу. Ч.1
4. ***.** Задачи без определенного адреса.

Баллы для зачета набираются следующим образом:

1. Посещение лекций 10 баллов (н –2 балла).
2. Посещение практических занятий 5 баллов (н –1 балл).
3. Участие в практических занятиях 15 баллов.
4. Контрольные работы 15 баллов.
5. Домашние задания 15 баллов.
6. Коллоквиум 15 баллов (н –10).
7. Зачет 25 баллов.

Всего 100 баллов.

Оценки по зачету: 0–49 **FX** (не зачет)**,**
50–59 **E,** 60–69 **D,** 70–79 **C,** 80–89 **B,** 90–100 **A**

После зачета количество набранных баллов умножается на 0,6 и получившееся количество баллов есть стартовым для сдачи экзамена. **На экзамен** выносится 40 баллов:

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.

<u>План занятий</u>

А. Множества. Отношение включения и равенства. Операции над множествами ($CA, \vec{A}, A\bigcup B, A\bigcap B, A\setminus B, A\Delta B$ симм. разн.).

Б. Некоторые свойства операций над множествами:

1) $A\bigcup B = B\bigcup A$; 2) $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C)$;

3) $A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$;

4) $A\bigcup(B\bigcap C) = (B\bigcup A)\bigcap(A\bigcup C)$;

5) $\overline{A\bigcup B} = \bar{A}\bigcap\bar{B}$; 6) $\overline{A\bigcap B} = \bar{A}\bigcup\bar{B}$.

<u>Задачи для решения</u> 1*, 2*, 3*, 4*

1*. *Доказать тождества*:

1) $A\setminus(B\bigcup C) = (A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$; 2) $A\setminus(A\setminus B) = A\bigcap B$;

3) $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$; 4) $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\bigcup C)$;

5) $A\bigcap(B\Delta C) = (A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)$; 6) $A\bigcup B = (A\Delta B)\bigcup(A\bigcap B)$.

2*. *Доказать, что*:

1) $A\bigcap B\subseteq C \Leftrightarrow A\subseteq \bar{B}\bigcup C$; 2) $A\subseteq B\bigcup C \Leftrightarrow A\bigcap\bar{B}\subseteq C$;

3) $(A\setminus B)\bigcup B = A \Leftrightarrow B\subseteq A$; 4) $(A\bigcap B)\bigcup C = A\bigcap(B\bigcup C) \Leftrightarrow C\subseteq A$;

5) $A\subseteq B \Rightarrow A\bigcup C\subseteq B\bigcup C$; 6) $A\bigcup B = A\bigcap B \Rightarrow A = B$.

3*. *Для множеств X и Y определить тип включения* $(X\subset Y, Y\subset X, X = Y)$:

а) $X = A\bigcup(B\setminus C)$, $Y = (A\bigcup B)\setminus(A\bigcup C)$;

б) $X = (A\bigcap B)\setminus C$, $Y = (A\setminus C)\bigcap(B\setminus C)$;

в) $X = A\setminus(B\bigcup C)$, $Y = (A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$.

4*. *Доказать, что*:

1) $A\bigcup B = B \Leftrightarrow A\subset B$; 2) $A\bigcap B = A \Leftrightarrow A\subset B$;

3) $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\bigcup C \Leftrightarrow C\subset A$; 4) $A\setminus(A\setminus B) = A\bigcap B$;

5) $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A) = (A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$; 6) $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\bigcup C)$;

7) $(A\setminus B)\bigcap C = (A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$; 8) $A\setminus B\subset C \Leftrightarrow A\subset B\bigcup C$;

9) $A\bigcup(B\setminus C)\supset(A\bigcup B)\setminus C$; 10) $(A\bigcup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\bigcup C$.

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

1.

Задачи для решения. Демидович 389, 390, 391,401*, *, 407,412, 416, 418*, 419

389. *Определить точную нижнюю и верхнюю грани функции*

$f(x) = 1/(1 + x^2)$ *для* $x \in \mathbf{R}$.

Определить точную верхнюю и нижнюю грани функций:

390. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $x \in (0,+\infty)$. **391**. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

401*. *На языке «ε – δ» доказать, что* $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$. *Указать правило нахождения δ по заданному ε.*

*. *Что обозначают следующие записи*:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \big|\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

$$\exists\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \big|\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon\ \ \exists\delta>0\ \big|\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \big|\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta\ \big|\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \big|\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon$$

407. *Сформулировать с помощью неравенств*:

а) $y\to b-0,\quad x\to a$; ж) $y\to b-0,\quad x\to\infty$;

в) $y\to b-0,\quad x\to a+0$; з) $y\to b-0,\quad x\to-\infty$;

д) $y\to b+0,\quad x\to a-0$; и) $y\to b+0,\quad x\to+\infty$;

*) $y\to\infty,\quad x\to a-0$; *) $y\to-\infty,\quad x\to+\infty$.

Найти пределы:

412. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$. **416.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+20)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

418*. $\lim\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ $\begin{matrix} x\to 1, & x\to 2 \\ x\to 5, & x\to 3 \end{matrix}$. **419**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$.

2.

Задачи для решения. Демидович 420, 424.1, 436,437, 440, 446, 448, 458, 469, 474, 475, 476,495, 499, 503, 505,507

420. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$. **424.1** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$. **437**. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

440. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. **446**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

448. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. **458**. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

469. *Найти постоянные a и b из условия*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0 .$$

Найти пределы:

474. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **475**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

476. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$. **495**. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$. **503**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

505. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$. **507**. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

3.

Задачи для решения. Демидович 508, 523, 525, 532, 533,535, 544, 545.3, 561(а,б), 563, 571, 579

508. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. **523**. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln\left(x^{10}+x+1\right)}$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$.

544. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

545.3 $\lim\limits_{x\to+1}\frac{\sin^2\left(\pi\cdot 2^{x}\right)}{\ln\left[\cos\left(\pi\cdot 2^{x}\right)\right]}$.

561 (а, б). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(1+3^{x}\right)}{\ln\left(1+2^{x}\right)}$.

562. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2^{x}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

579. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

4.

Задачи для решения. Демидович 1325, 1326, 1331, 1332, 1333, 1349, 1354, 1363.3, 1398, 1399, 1402, 1404

Найти пределы:

1325. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(e^{x}+1\right)-2\left(e^{x}-1\right)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

1332. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

1349. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)$.

1363.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1398. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

1399. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

5.

Задачи для решения. Демидович 646, 650, 651,652, 653,655

O-символика. Главный член.

646. *Показать, что при* $x\to a$:

а) $o(o(f(x)))=o(f(x))$; б) $O(o(f(x)))=o(f(x))$;

в) $o(O(f(x)))=o(f(x))$; г) $O(O(f(x)))=O(f(x))$;

650. *Пусть* $x\to 0$. *Доказать, что*:

а) $2x-x^2=O(x)$; б) $x\sin\sqrt{x}=O\left(x^{3/2}\right)$;

в) $x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$; г) $\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)\quad(\varepsilon>0)$;

д) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$; е) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=O(1)$;

651. *Показать, что при* $x\to+\infty$:

а) $2x^3-3x^2+1=O\left(x^3\right)$; б) $\frac{x+1}{x^2+1}=O\left(\frac{1}{x}\right)$;

в) $x+x^2\sin x=O\left(x^2\right)$; г) $\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

652. *Доказать, что при достаточно больших* $x>0$ *имеют место неравенства*:

а) $x^2+10x+100<0{,}001x^3$; б) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$; в) $x^{10}e^{x}<e^{2x}$.

653. *Найти главный член при* $x\to 0$:

а) $2x-3x^3+x^5$; б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

в) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$; г) $\operatorname{tg}x-\sin x$.

655. *Найти главный член при* $x\to 1$:

а) x^3-3x+2; б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

в) $\ln x$; г) $e^{x}-e$; д) $x^{x}-1$.

6.

Задачи для решения. Демидович 656, 657,658, *, *, *.

656. *Пусть* $x\to+\infty$. *Найти главный член и определить порядок роста величин*:

а) $x^2+100x+10000$; б) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

657. *Пусть* $x\to+\infty$. *Найти главный член и определить порядок малости величин*:

а) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$; в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$; г) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

658. *Найти главный член при* $x\to1$:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; в) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; г) $\dfrac{1}{\sin\pi x}$; д) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

*****. *Определить главные члены простейшего вида для величин*:

а) $\ln\left(x^2+e^x\right)\cdot\arcsin\mathrm{tg}\dfrac{1}{x^2}\quad(x\to\pm\infty)$;

б) $\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)\left[\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\pi}-1\right]\cdot\cos\dfrac{x+2}{x+3}\quad(x\to\infty)$;

в) $\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\cos\dfrac{\pi(x-1)}{2}\cdot\ln(2+x)\;(x\to\pm0)$;

г) $\mathrm{arctg}x^3\cdot\sin\left(2^{x^2}-1\right)\cdot\left[\left(\cos x+x^2\right)^{\pi}-1\right]\;(x\to0)$.

*****. *На языке «ε – δ» для* $x\to a$ *и для* $x\to\infty$ *записать утверждения в том, что функция y(x):*

а) *ограничена*; б) *неограничена*;
в) *имеет предел*; г) *бесконечно мала*;
д) *бесконечно большая*; е) *отделена от нуля.*

*. *Записать определение множества:*

а) ограниченного сверху; б) ограниченного снизу;
в) ограниченного; c) неограниченного сверху;
d) неограниченного снизу; е) неограниченного.

*. *Записать, что функция f(x) на множестве X является:*

а) ограниченной сверху: б) ограниченной снизу;
в) ограниченной; c) неограниченной сверху;
d) неограниченной снизу; е) неограниченной.

***** Дополнение.**

Формулы, связанные с замечательными пределами

(здесь везде $x\to0$)

I. Замечательные пределы:

$\lim\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$; $\lim\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

$\lim\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; $\lim\dfrac{e^x-1}{x}=1$; $\lim\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$.

II. Замечательные эквивалентности:

$\sin x\sim x$; $\mathrm{tg}x\sim x$; $\arcsin x\sim x$; $(1+x)^{1/x}\sim e$;

$\ln(1+x)\sim x$; $a^x-1\sim x\ln a$; $e^x-1\sim x$; $(1+x)^{\mu}\sim1+\mu x$.

III. Замечательные равенства:

$\sin x=x+o(x)$; $\mathrm{tg}x=x+o(x)$; $\arcsin x=x+o(x)$;

$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e+o(1)$; $\ln(1+x)=x+o(x)$; $e^x=1+x+o(x)$;

$a^x=1+x\ln a+o(x)$; $(1+x)^{\mu}=1+\mu x+o(x)$.

IV. Пять замечательных разложений функций в ряд Маклорена.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+..$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

1.

Задачи для решения. Демидович 687, 689, 690, 692,702, 723, 762, 1*, 2*, 3*, 4*, 846, 850, 854, 871, 895,5*, 6* ,7* ,8* ,9*, 10*.

687. *Определить характер точек разрыва функции* $y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек:

689. $y = \dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$. **690**. $y = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

692. $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$. **702**. $y = x - [x]$.

723. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n} x$.

762. *Показать, что уравнение* $\mathrm{ctg}x = kx$ $\forall k\in\mathbf{R}$ и $x\in(0, \pi)$ *имеет единственный непрерывный корень* $x = x(k)$.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек:

1*. $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$. **2***. $y = \dfrac{x}{\cos x}$. **3***. $y = \dfrac{2}{1-2^x}$. **4***. $y = \mathrm{sgn}\left(x^2-2x\right)$.

Найти производные следующих функций:

846. $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$. **850**. $y = \dfrac{x^2(1-x)^3}{1+x}$.

854. $y = x\sqrt{1+x^2}$. **871**. $y = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} - \mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$.

895. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

5*. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. **6***. $y = e^{-x^2}$.

7*. $y = e^x\left(x^2-2x+2\right)$. **8***. $y = e^x + e^{e^x}$.

9*. $y = \sin(\sin(\sin x))$. **10***. $y = \ln(\ln(\ln x))$. **11***. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

12*. $y = \left(x^2+x+1\right)^{x^2-x+1}$. **13***. $y = \sin\left(\cos^2\left(\mathrm{tg}^3 x\right)\right)$.

2.

Задачи для решения. Демидович 979, 984,985, 986,999, 1004,1036, 1040, 1041, 1044, 1048, 1054.

979. *Найти* y' *и построить графики* $y(x)$ и $y'(x)$, *если*:

$$y = \begin{cases} 1-x & x<1 \\ (1-x)(2-x) & 1\le x\le 2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}.$$

984. *Производная от логарифма данной функции* $y = f(x)$ *называется логарифмической производной этой функции:*

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\ln|f(x)| \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найти логарифмическую производную, если:

а) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$;

в) $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$; г) $y = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

Найти y'_x *если*:

985. а) $y = \sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; б) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

986. а) $y = f\left(x^2\right)$; б) $y = f\left(\sin^2 x\right) + f\left(\cos^2 x\right)$;
в) $y = f\left(e^x\right)\cdot e^{f(x)}$; г) $y = f(f(f(x)))$.

999. *Исследовать на дифференцируемость*:
а) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; б) $y = |\cos x|$;
в) $y = |\pi^2 - x^2|\cdot\sin^2 x$; г) $y = \arcsin(\cos x)$.

1004. *Для* $f(x)$ *определить левую* $f'_-(x)$ *и правую* $f'_+(x)$ *производную, если* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

1036. *Определить область существования обратных функций* $x = x(y)$ *и найти* x'_y *если*:

а) $y = x + \ln x$; б) $y = \operatorname{sh} x$; в) $y = x + e^x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

Найти формулу для вычисления x''_{yy} .

Найти y'_x, *если*:

1040. $\begin{cases}x=\sin^2 t\\ y=\cos^2 t\end{cases}$. **1041**. $x=a\cos t,\ \ y=b\sin t$.

1044. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$. **1048**. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

1054. *Найти* y'_x, *если*:

а) $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда); б) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида);

в) $\rho = ae^{m\varphi}$ (логарифмич. спираль); ρ, φ – полярные координаты.

3.

Задачи для решения. Демидович 1087, 1088, 1090, 1092, 1093,1094, 1096, *, 1100, 1102, 1103, 1105.

Найти dy, *если*:

1087. $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$. **1088**. $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$.

1090. *Найти*:

а) $d(xe^x)$; б) $d(\sin x - x\cos x)$; в) $d\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$;

г) $d\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; д) $d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$; е) $d\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

Найти dy, *если* :

1092. $y=\dfrac{u}{v^2}$. **1093**. $y=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$. **1094**. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

1096. *Найти:* г) $\dfrac{d(\operatorname{tg}x)}{d(\operatorname{ctg}x)}$; д) $\dfrac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

*****. *Найти*: а) $\dfrac{d}{dx^3}\left(x^3-2x^6-x^9\right)$; б) $\left(x+\ln x\right)'_{x+e^x}$.

Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

1100. а) $\sqrt{0{,}98}$; б) $\sin 29°$.

1102. arctg1,05. **1103** lg11.

1105. *Доказать приближенную формулу*:

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad (a>0),$$

где $|x| \ll a$ *и с ее помощью вычислить*:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

4.

Задачи для решения. Демидович 1125,1128, 1132,1133, 1141,1142, 1144, 1156, 1158,1159, 1161,1165, 1166, 1169, 1173, 1189, 1207, *.

Найти y'''_{x^3} : **1125**. $y = f(x^2)$; **1128**. $y = f(\ln x)$.

Найти d^2y: **1132**. $y=\dfrac{\ln x}{x}$. **1133**. $y = x^x$.

Найти $y'_x,\ y''_{x^2},\ y'''_{x^3}$:

1142. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$. **1144**. $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$. **1141**. $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$;

Найти производные указанного порядка:

1056. $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$; $y^{(6)}$, $y^{(7)}$ – ?

1158. $y=\sqrt{x}$; $y^{(10)}$ – ? **1159**. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$; $y^{(8)}$ – ?

1161. $y=x^2e^{2x}$; $y^{(20)}$ – ? **1165**. $y=x^2\sin 2x$; $y^{(50)}$ – ?

1166. $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; y''' – ? **1169**. $y = e^x\cos x$; y^{IV} – ?

1173. *Найти* $d^{10}y$, *если* $y = x\cos 2x$.

Найти $y^{(n)}$: **1189**. $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$. **1207**. $y = e^x\sin x$.

*****. *Найти* d^2f, *если* $f = f(1 + x^2)$, *где* $x = \sin t$.

ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.

Задачи для решения. 1*, 2*, 3*,4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 9*, 10*, 11*, 12*, 13.

Следующие функции разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0$:

1*. $y = x^2 + 3x - 3$, $x_0 = 0$; **2*.** $y = x^2 + 3x - 3$, $x_0 = 1$;

3*. $y=e^{x^2-x}$, $x_0=0$ (до x^5); **4***. $y=\sqrt{x}$, $x_0 = 1$, (до $(x-1)^3$);

Следующие функции разложить в ряд Тейлора до указанных степеней:

5*. $y=\ln(1+\sin x)$, $x_0 = 0$, (до x^5). **6***. $\dfrac{x}{e^x-1}$ до x^4;

7*. $\mathrm{tg}x$ до x^5; **8***. $\sin(\sin x)$ до x^3;

9*. $\ln\cos x$ до x^6; **10***. $x^x - 1$ до $(x - 1)^3$;

11*. $\sqrt{1+x^2}-x$ до $\dfrac{1}{x^3}$.

12*. *Найти погрешность формулы*: $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}$:

а) для $x\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$; б) для $x\in\left[0,\ \dfrac{1}{4}\right]$.

13*. *Вычислить с указанной точностью*:

а) $\sqrt{e}$ до 10^{-5}; б) $\sqrt{e}$ до 10^{-8}; в) $\sqrt[4]{e}$ до 10^{-5};
г) $\sqrt[4]{e}$ до 10^{-8}; д) $\cos 1°$ до 10^{-5}.

2.

Задачи для решения. Демидович 1288, 1289, 1394, 1395, 1397, 1414, 1414, 1419, 1429, 1431, 1432, 1437,1438.

1288. *Доказать теорему*: *Если*

1) *функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *n–кратно дифференцируемы*;
2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots n-1$;
3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, $\forall x > x_0$,

то имеет место неравенство: $\varphi(x) > \psi(x)$, $\forall x > x_0$.

1289. *Доказать неравенства*:

в) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x\ (x>0)$; г) $\mathrm{tg}x>x+\dfrac{x^3}{3}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1394. *Оценить погрешность формул*:

в) $\mathrm{tg}x\approx x+\dfrac{x^3}{3}\ \left(|x|\le 0{,}1\right)$; г) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\ (x\in[0,1])$.

1395. *Для каких x справедлива, с точностью до* 0,0001, *приближенная формула*: $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}$?

1397. *Вычислить*: в) $\cos 9°$ ($\varepsilon = 10^{-5}$); г) $\sqrt{5}$ ($\varepsilon = 10^{-5}$).

1410. *При каком подборе коэффициентов a и b величина* $x - (a + b\cos x)\sin x$ *будет бесконечно малой 5^{го} порядка относительно x.*

Исследовать на экстремум:

1414. $y = 2 + x - x^2$. **1419**. $y = (x + 1)^{10}e^{-x}$.

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; **1431**. $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$.

1432. $y=x+\dfrac{1}{x}$; **1437.** $y = xe^{-x}$. **1438**. $y=\sqrt{x}\ln x$.

3.

Задачи для решения. Демидович 1445, 1446, 1447, 1452, 1453, 1454, 1462, 1473, 1476, 1477, 1479.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на множестве:

1445. $y = 2^x$, $x\in[-1, 5]$; **1446**. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $x\in[-3, 10]$;

1447. $y = |x^2 - 3x + 2|$, $x\in[-10, 10]$.

1452. *Найти* sup *и* inf *функции* $y = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $x \in [0, +\infty)$.

1453. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*:

$$f(x) = e^{-x^2}\cos x^2, \quad x\in\mathbf{R}.$$

1454. *Найти верхнюю и нижнюю грань функции* $f(\xi) = \dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ *на интервале* $x < \xi < +\infty$. *Построить графики функций*

$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi); \qquad m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

1462. *Определить число вещественных корней уравнения*:
$x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$ *и отделить эти корни*.

Построить графики следующих функций:

1473. $y = (x + 1)(x - 2)^2$. **1476**. $y = \dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$;

1477. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$. **1479**. $y = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$;

4.

Задачи для решения. Демидович 1491,1497, 1498, 1507, 1509.1, 1531, 1534, 1536, 1541, 1547.

Построить графики следующих функций:

1491. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. **1497**. $y = \sin x + \cos^2 x$.

1498. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$. **1507**. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

1509. 1. $y = e^{-2x}\sin^2 x$. **1531**. $x = \dfrac{(t+1)^2}{4}$; $y = \dfrac{(t-1)^2}{4}$.

1534. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$; **1536**. $x = a\cos 2t$; $y = a\cos 3t$, $(a > 0)$.

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. **1547**. $\rho = a\sin 3\varphi$, $(a > 0)$.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.

Задачи для решения. Волковысский 1*, 1, 2*, 2, 3*, 3, 7, 8, 4*.

1*. *Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме*: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 2 - 3i$; $z_3 = -2 + 6i$. *Найти*:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $3z_1 - 2z_3$; $z_1\cdot z_3$; $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\dfrac{z_1}{z_3}$; z_1^2; z_2^3.

1. *Выполнить действия*: 3) $\dfrac{2}{1-3i}$; 4) $(1+i\sqrt{3})^3$.

2*. *Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа*: $1 + i$; $2 - 2i$; $-1 - i$; $1-\sqrt{3}\,i$; $\sqrt{3}+i$; i; $3i$; 5; -8; $3 - 4i$; $3 + 4i$.

2. *Найти модули и аргументы чисел*: 5) $2 + 5i$; 6) $-2 + 5i$.

3*. *Используя тригонометрическую форму выполнить действия над комплексными числами*: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1+\sqrt{3}\,i$.

Найти $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\dfrac{z_2}{z_1}$; z_1^{40}; z_2^{66}.

3. *Решить уравнение*: $z^* = z^{n-1}$ $(n \neq 2,\ n\in\mathbf{N})$.

7. *Исходя из геометрических рассмотрений, доказать неравенства*:

$$1)\ |z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|;\qquad 2)\ |z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

Доказать эти же неравенства алгебраическим путем. Выяснить, когда имеет место знак равенства.

8. *Исходя из геометрических рассмотрений, доказать*:

$$1)\ \left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le|\arg z|;\qquad 2)\ |z-1|\le\ \big||z|-1\big|+|z|\cdot|\arg z|.$$

4*. *Найти геометрические места точек удовлетворяющих следующим соотношениям*:

1) $\mathrm{Re}(z+2)>1$; 2) $\mathrm{Re}(z+2)\ge 1$; 3) $\mathrm{Im}(z-2+i)>1$;
4) $|z|\le 3$; 5) $2\le|z-2+i|<4$; 6) $0<\arg z\le\pi/4$;
7) $0<\arg(z-i)\le\pi/4$; 8) $\mathrm{Re}z+\mathrm{Im}z=1$;
9) $\mathrm{Re}\{z(1+i)\}=2$; 10) $0<\arg\{z(1-i)\}\le\pi/4$;
11) $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z}=1$; 12) $|z-3|=|z-1|$.

2.

Задачи для решения. Волковысский 26, 28, 30, 32, 34, 35, 5*, 6*, 7*, 59, 60, 61.

Найти геометрические места точек:

26. $|z-z_1|=|z-z_2|$. **28**. $0<\mathrm{Re}(iz)<1$. **30**. $|z|=\mathrm{Re}z+1$.

32. $\mathrm{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$; $\mathrm{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$.

34. 1). $|z|<\arg z$, $0\le\arg z<2\pi$; 2) $|z|<\arg z$, $0<\arg z<2\pi$.

35. 1) $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z}=c$; 2) $\mathrm{Im}\dfrac{1}{z}=c$, ($c\in\mathbf{R}$).

5*. *Найти значения корней и построить их*:

4) $\sqrt[6]{-8}$; 5) $\sqrt[8]{1}$; 6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

6*. *Вычислить значения корней из комплексных чисел*:

$$\sqrt{1+i};\qquad \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i};\qquad \sqrt[5]{1};\qquad \sqrt[8]{-1}.$$

7*. *Представить следующие комплексные числа в показательной форме*: $1+i$; $1-\sqrt{3}\,i$; $-2+2i$; $4i$; 5; -8.

59. *Представить числа в показательной форме*: ±1; $\pm i$; $\pm1\pm i$.

60. *Найти*: $e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$, $e^{k\pi i}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$).

61. *Найти модули и главные значения аргументов чисел*:

e^{2+i}; e^{2-3i}; e^{3+4i}; e^{-3-4i}; $-ae^{i\varphi}$ ($a>0$, $|\varphi|\le\pi$);
$e^{-i\varphi}$ ($|\varphi|\le\pi$); $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ ($0\le\beta<\alpha\le 2\pi$).

3.

Задачи для решения. Волковысский 8*, 9*, 10*, 62, 64, 68, 71, 74.

8*. *Найти геометрическое место точек, удовлетворяющих соотношению* $\dfrac{\pi}{2}<\arg z^2\le\pi$.

9*. *Найти вещественную и мнимую часть чисел:*

e^{2+3i}; $\cos i$; $\sin i$; $\mathrm{tg}\, i$.

10*. *Вычислить*: $2^{\sqrt{2}}$; $(-1)^{\sqrt{2}}$; 3^i; i^i; $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$; $\left(\sqrt{3}+i\right)^{i-1}$; 2^2.

62. *Найти суммы*: 1) $1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$;
2) $\sin x+\sin 2x+\ldots\sin nx$.

64. *Доказать, что* 1) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$; 2) $\sin z=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)$.

68. *Найти действительные и мнимые части значений следующих функций*: 1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $\mathrm{tg}(2-i)$.

71. *Вычислить*: $\mathrm{Ln}4$; $\mathrm{Ln}(-1)$; $\ln(-1)$; $\mathrm{Ln}i$;
$\ln i$; $\mathrm{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{Ln}(2-3i)$; $\mathrm{Ln}(-2+3i)$.

74. *Вычислить*: $1^{\sqrt{2}}$; $(-2)^{\sqrt{2}}$; 2^i; 1^{-i}; i^i;
$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; $(3-4i)^{1+i}$; $(-3+4i)^{1+i}$.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.

Задачи для решения. Демидович. 1628, 1635, 1636, 1640,1643, 1646,1648, 1649, 1656, 1658, 1659, 1662, 1663, 1665,1677, 1681, 1682, 1685.

Вычислить неопределенные интегралы:

1628. $\int\left(3-x^2\right)^3 dx$.

1635. $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

1636. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

1640. $\int\frac{x^2dx}{1-x^2}$.

1643. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

1646. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

1648. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx\ \ (0\le x\le\pi)$.

1649. $\int\mathrm{ctg}^2x\,dx$.

1656. $\int(2x-3)^{10}dx$.

1658. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

1659. $\int\frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$.

1662. $\int\frac{dx}{2-3x^2}$.

1663. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

1665. $\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx$. .

1677. $\int\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

1681. $\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

1682. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

1685. $\int\frac{x^2dx}{\left(8x^3+27\right)^{2/3}}$.

2.

Задачи для решения. Демидович. 1709, 1715*, 1723, 1727, 1729, 1733, 1737, 1747, 1749, 1768, 1774, 1777, 1792, 1799, 1808, 1811, 1819.

1709. $\int\frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$.

1715*. $\int\frac{x^{17/2}dx}{\sqrt{1+x^{19}}}$.

1723. $\int\frac{x^2}{1+x}dx$.

1727. $\int\frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$.

1729. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

1733. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

1737. $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)}$.

1747. $\int\sin^3x\,dx$.

1749. $\int\sin^4x\,dx$.

1768. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$.

1774. $\int\frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

1777. $\int\frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$.

1792. $\int x^n\ln x\,dx\ \ (n\ne-1)$.

1799. $\int x^2\sin 2x\,dx$.

1808. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

1811. $\int x^5e^{x^2}\,dx$.

1819. $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$.

3.

Задачи для решения. Демидович. 1837, 1843, 1851, 1853, 1857, 1859, 1864, 1866, 1867, 1869, *, 1872, 1878, 1882, 1892, 1893.

1837. $\int\frac{dx}{x^2-x+2}$.

1843. $\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}$.

1851. $\int\frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

1853. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$.

1857. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

1859. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1864. $\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

1866. $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

1867. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1869. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

*****. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)^2\left(x^2+x+1\right)}$.

1872. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

1878. $\int\frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)}$.

1882. $\int\frac{xdx}{x^3-1}$.

1892. $\int\frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}$.

1893. $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

4.

Задачи для решения. Демидович. 1896, 1904, 1914, 1920, 1928,1933*, 1938, 1948, 1952, 1954, 1968, 1971, 1977, 1981, 1987, 1995.

1896. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$.

1904. $\int \frac{xdx}{x^8-1}$.

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

1933*. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}$.

1938. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1948. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

1952. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1977. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

1981. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

1987. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

1995. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

5.

Задачи для решения. Демидович. 2012, 2072, 2076, 2080, 2084, 2098, 2022, 2035, 2167, 2168, 2171, 2172, 2173, 2176.

2012. *Вывести формулы понижения для интегралов* $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ и $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$ *и с их помощью вычислить интегралы*:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x}; \qquad \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

2072. $\int x^7 e^{-x^2}dx$.

2076. $\int xe^x \sin x\,dx$.

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

2098. $\int \ln^n x\,dx$.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\sin a}$.

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

2167. $\int x|x|\,dx$.

2168. $\int (x+|x|)^2\,dx$

2171. $\int \max(1,x^2)dx$.

2173. $\int [x]|\sin \pi x|\,dx\ (x\ge 0)$.

2166. $\int |x|dx$.

2169. $\int \{|1+x|-|1-x|\}dx$.

2174. $\int f(x)dx$, *где* $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\le 1\\ 1-|x|, & |x|>1\end{cases}$.

***** Дополнение 1**.

Подстановки Эйлера:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx:$$

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t\ (a>0)$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}\ (c>0)$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)\ (a>0)\ (D>0)$.

Подстановки Чебышева (Дифференциальный бином):

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx:$$

1) $p\in\mathbf{Z}$; $x=t^N$ (N – общий знаменатель m и n);

2) $\frac{m+1}{n}\in\mathbf{Z}$; $(a+bx^n)=t^N$ (N – знаменатель p);

3) $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbf{Z}$; $ax^{-n}+b=t^N$ (N – знаменатель p).

Тригонометрические подстановки:

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx$$

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: $\cos x = t$;

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: $\sin x = t$;

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$: $\quad \operatorname{tg} x = t$;

4) Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t;\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная гиперболическая подстановка:

$$\int R(\operatorname{sh}x,\ \operatorname{ch}x)dx$$

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = t;\ \operatorname{sh}x = \frac{2t}{1-t^2};\ \operatorname{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2};\ \ dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

***** Дополнение 2.**

Некоторые формулы полезные при интегрировании:

1. $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

2. $$\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = \int\frac{\alpha\cdot знам + \beta\cdot(знам)'}{a\sin x + b\cos x}dx;$$

3. $$\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx = \int\frac{\alpha\cdot знам + \beta\cdot(знам)' + \gamma}{a\sin x + b\cos x + c}dx;$$

4. $$\int\frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cdot\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}dx =$$
$$= \int\frac{\alpha\cos x\cdot знам + \beta\sin x\cdot знам + \gamma}{a\sin x + b\cos x}dx;$$

5. $$\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x}dx = \alpha\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1} + \beta\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

где λ_1, λ_2 – корни уравнения $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x,\ k_i\ \dfrac{1}{a-\lambda_i}$;

6. $$\int\frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{\alpha\sin x + \beta\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + \gamma\int\frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}};$$

7. $$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{\alpha\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \beta\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \gamma\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

$(\,|a| \neq |b|\,)$.

***** <u>ДОПОЛНЕНИЕ 1.</u>**

ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

1.
Формулы сокращенного умножения. Метод интервалов решения дробно-рациональных (и не только!) неравенств.

Формулы сокращенного умножения для запоминания:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, **2.** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,

3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, **4.** $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$,

5. $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + ...$

$.... + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$,

6. $a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 + ...$

$.... + a^2b^{n-2} - ab^{n-1} + b^n)$, n – *четное.*

Задачи для решения :1*, 2*, …, 11*

Применяя метод интервалов решить следующие неравенства:

1*. $\dfrac{(x-4)(x+5)}{(x-7)(3-x)} \le 0$, **2*.** $\dfrac{(x-2)^3(7-x)(x^2+x-1)(9+2x)}{(x-4)^2(x^2-4x+3)(x-3)} \ge 0$,

3*. $\dfrac{(2x-5)}{(x^2-6x-7)} < \dfrac{1}{x-3}$, **4*.** $\dfrac{8+4x}{4x+x^2} \le \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4+x}$,

5*. $|x-3| > 4x$, **6*.** $|x+2| - |3-x| < x$,

7*. $|x+1| + 2|7-x| - 6|2x-1| + |x-3| \ge 7x$, **8*.** $x^2 + x - 10 < 2|x-1|$,

9*. $|4x-1| \le \dfrac{1}{3x-1}$, **10*.** $||x-1|-2| > 1$, **11*.** $||x-1|+2| > 1$.

2.
Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$. Квадратные уравнения и задачи связанные с исследованием квадратичных функций .

Формулы для запоминания:

Для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{если} \quad b^2 - 4ac \ge 0.$$

Для уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \text{если} \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \ge 0.$$

Задачи для решения :1*, 2*, …, 14*

1*. *Найти все значения параметра а, при которых сумма корней уравнения* $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ *равна сумме квадратов этих корней.*

2*. *Не решая уравнения* $x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$, *установить значения параметра а, при которых один из корней уравнения в два раза больше другого.*

3*. *Решить следующие уравнения, используя то, что они имеют общий корень:*

$$2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0 \text{ и } 6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

4*. *Определить при каких значениях параметра а, один из корней уравнения*

$x^3 - (a^2 - a + 7)x - (3a^2 - 3a - 6) = 0$ *равен (–1). Найти остальные корни этого уравнения при установленных значениях параметра а.*

5*. *Найти p и q если известно, что среди корней уравнения:* $x^4 - 10x^3 + 37x^2 + px + q = 0$ *есть две пары равных между собой чисел.*

6*. *При каких m неравенство* $\dfrac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$ *выполнено для любых x.*

7*. *При каких m корни уравнения:* $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ *отрицательны.*

8*. *При каких m корни уравнения:* $4x^2 - (3m+1)x - m - 2 = 0$ *заключены в промежутке* $x \in [-1, 2]$.

9*. *Найти коэффициенты уравнения* $x^2 + px + q = 0$ *при условии, что разность его корней равна 5, а разность их кубов равна 35.*

10*. *При каком значении а оба корня уравнения* $x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$ *будут положительны.*

11*. *При каких значениях* m *неравенство* $x^2 - mx > \frac{2}{m}$ *выполняется для любых значений x.*

12*. *При каких n корни уравнения:* $(n-2)x^2 - 2nx + n + 3 = 0$ *находятся на промежутке* $x \in [1, 4]$.

13*. *При каких* m *неравенство* $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ *выполняется для любых значений x.*

14*. *При каких p система неравенств выполняется для любых x:*

$$-9 < \frac{3x^2 + px - 6}{x^2 - x + 1} < 6.$$

3.

Системы двух и трех линейных уравнений. Совместимость, определенность, неопределенность. Метод Гаусса исключения неизвестных.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 15*

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

1*. $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$; **2*.** $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 18 \\ 2x + 4y - 3z = 26 \\ x - 6y + 8z = 0 \end{cases}$;

3*. $\begin{cases} 10x - 9z = 19 \\ 8x - y = 10 \\ y - 12z = 10 \end{cases}$; **4*.** $\begin{cases} x + 2y + z + 7 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ 3x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$.

Исследовать на совместность и решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными:

5*. $\begin{cases} 3x + ay = 5a^2 \\ 3x - ay = a^2 \end{cases}$; **6*.** $\begin{cases} x + ay - 1 = 0 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$;

7*. $\begin{cases} ax - y = b \\ bx + y = a \end{cases}$; **8*.** $\begin{cases} (a+5)x + (2a+3)y = 3a + 2 \\ (3a+10)x + (5a+6)y = 2a + 4 \end{cases}$;

9*. $\begin{cases} a(a-1)x + a(a+1)y = a^3 + 2 \\ (a^3 - 1)x + (a^3 + 1)y = a^4 - 1 \end{cases}$;

10*. $\begin{cases} (a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y = a^2 \\ (a+b)x + (a-b)y = a \end{cases}$.

11*. *Числа* a *и* b *таковы, что система* $\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$ *имеет единственное решение* $x = 1$, $y = 1$. *Найти* a *и* b.

12*. *При каких* a *и* b *система* $\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$ *имеет бесконечно много решений?*

13*. *При каких* a *система* $\begin{cases} a^2x + (2-a)y = 4 + a^3 \\ ax + (2a-1)y = a^5 - 2 \end{cases}$ *не имеет решений?*

14*. *Числа* a, b *и* c *таковы, что система*

$\begin{cases} ax - by = 2a - b \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$ *имеет бесконечно много решений, причем* $x = 1$, $y = 3$, *одно из них. Найти* a *и* b.

15*. *Найти все такие значения a, чтобы при любом* b, *нашлось такие с при которых система имеет хотя бы одно решение:*

а) $\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b-6)x + 2by = c + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2by = a \\ bx + (1-b)y = c^2 + c \end{cases}$.

4.

Многочлены. Теорема Безу и ее следствия. Рациональные корни уравнений. Схема Горнера. Возвратные уравнения.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 21*

Решить алгебраические уравнения:

1*. $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$; **2*.** $\frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2$;

3*. $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$; **4*.** $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$;

5*. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$;

6*. *Найти сумму коэффициентов многочлена:*

$$P_n(x)=\left(1+4x-6x^2\right)^{147}\left(2+5x+7x^2-13x^3\right)^{257}.$$

7*. *Делится ли многочлен* $x^{100}-3x+2$ *на* x^2-1 ?

8*. *Найти остаток от деления* $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ *на* $x-1$.

9*. *Некоторый многочлен при делении на* $(x-5)$ *дает в остатке 5, а при делении на* $(x-1)$ *дает в остатке 3. Найти остаток от деления того же многочлена на* $(x-1)(x-5)$.

10*. *Остаток от деления* ax^3+2x^2+3x+5 *на* $(x-2)$ *равен* 35, *а от деления на* $(x-c)$ *остаток равен* 320. *Найти a и c.*

С помощью схемы Горнера решить следующие уравнения:

11*. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$,

12*. $8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0$,

13*. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5=0$,

14*. $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

Решить возвратные уравнения:

15*. $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$,

16*. $x^5+7x^4+x^3+x^2+7x+1=0$,

17*. $x^4-10x^3-9x^2-10x+1=0$,

18*. $2x^4+3x^3-4x^2+3x+2=0$.

19*. *Решить следующие уравнения разложив левую часть в произведение двух квадратных трехчленов:*

а) $x^4+4x-1=0$, б) $x^4-8x+63=0$.

20*. *Найти a при которых уравнение* $x^5-5x+a=0$ *имеет два совпадающих корня.*

21*. *Число* $1+\sqrt{2}$ *является корнем уравнения*

$$x^5+ax^3+bx^2+5x+2=0.$$

Найти остальные корни, зная что a и b рациональные числа.

5.
Степенная, показательная, логарифмическая функции. Основные свойства и графики. Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 24*

Решить следующие показательные неравенства:

1*. $25^{-x}+5^{-x+1}\ge 50$; **2*.** $2\cdot 3^{2x^2}+4\le 3^{x^2+2}$;

3*. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$; **4*.** $98-7^{x^2+5x-48}\ge 49^{x^2+5x-49}$;

5*. $5\cdot 4^x+2\cdot 25^x\le 7\cdot 10^x$; **6*.** $\sqrt{13^x-5}\le\sqrt{2\left(13^x+12\right)}-\sqrt{13^x+5}$;

7*. $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<3^{\sqrt{x^2-3}-1}\cdot 28$; **8*.** $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2^{3-x}+25^{1/\log_3 5}$;

9*. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x}\ge 1$; **10*.** $(0{,}008)^x+5^{1-3x}+(0{,}04)^{\frac{3}{2}(x+1)}<30{,}04$;

11*. $(0{,}03)^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots}<\sqrt[3]{0{,}3^{3x^2+5x}}<1$; **12*.** $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$;

13*. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\ge\left(x^2+x+1\right)^3$;

Решить следующие логарифмические неравенства:

14*. $\log_{5/8}\left(2x^2-x-\frac{3}{8}\right)\ge 1$; **15*.** $\log_{1/4}\frac{2x-1}{x+1}<\cos\frac{2\pi}{3}$;

16*. $\log_{1/4}(2x+3)>\log_9 27$; **17*.** $\log_4\left(3^x-1\right)\cdot\log_{1/4}\frac{3^x-1}{16}\le\frac{3}{4}$;

18*. $2\log_4 x-\frac{1}{2}\log_2\left(x^2-3x\right)+2\le\cos\frac{4\pi}{3}$;

19*. $\log_2\left(\sqrt{x+3}-x-1\right)\le 0$; **20*.** $\log_{1/x}\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)}\ge 1$;

21*. $\log_{\frac{x^2+1}{x}}\left(x^2+\frac{1}{x^2}-4\right)\ge 1$; **22*.** $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0$;

23*. $\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$; **24*.** $\log_x\left(\log_2\left(4^x-6\right)\right)\le 1$.

6.
Тригонометрические функции углового и числового аргументов. Определение и свойства. Обратные тригонометрические функции. Формулы двойного и половинного аргумента. Формулы приведения.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 18*

Доказать тождества:

1*. $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$; **2*.** $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

3*. $\frac{1}{\mathrm{tg}3\alpha-\mathrm{tg}\alpha}-\frac{1}{\mathrm{ctg}3\alpha-\mathrm{ctg}\alpha}=\mathrm{ctg}2\alpha$;

4*. $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cdot\cos\alpha$.

Вычислить без помощи таблиц:

5*. $\frac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ\cos 51^\circ\sin 69^\circ}$; **6*.** $\sin^2 70^\circ\cdot\sin^2 50^\circ\cdot\sin^2 10^\circ$;

7*. $\sin 15^\circ$; **8*.** $\sin 18^\circ$; **9*.** $\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}$.

Вычислить: **10*.** $\sin(2\arccos\frac{1}{4})$; **11*.** $\cos[\arcsin(-\frac{1}{2})]$;

12*. $\sin(\arcsin\frac{3}{6}+\arcsin\frac{8}{17}]$. **13*.** $\mathrm{tg}(2\arcsin\frac{2}{3})$;

14*. $\arcsin(\sin 2)$; **15*.** $\sin(\mathrm{arctg}2+\mathrm{arctg}3)$;

16*. $\sin(2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{3})+\cos(\mathrm{arctg}\,2\sqrt{3})$.

Проверить равенства:

17*. $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; **18*.** $\mathrm{arctg}3-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\pi}{4}$.

7.
Решение простейших (и не только!) тригонометрических уравнений и неравенств.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 20*

Решить следующие тригонометрические уравнения:

1*. $2\sin^2 x+\sin x-1=0$; **2*.** $4\sin^4 x+\cos 4x=1+12\cos^4 x$;

3*. $\mathrm{tg}^3 x+2\mathrm{tg}^2 x\ \ 3\mathrm{tg}x=0$.

Следующие уравнения свести к однородным и решить:

4*. $2\sin x\cos x+5\cos^2 x=4$; **5*.** $8\sin 2x-3\cos^2 x=4$;

6*. $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$; **7*.** $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=\frac{1}{16}$.

Вводя дополнительный аргумент решить уравнения:

8*. $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x)$;

9*. $\sin 11x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x+\frac{1}{2}\cos 7x=0$;

10*. $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\sin 15x$; **11*.** $4\sin 3x+3\cos 3x=5{,}2$.

Применяя универсальную тригонометрическую подстановку:

$t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$; $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\mathrm{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}$, *решить:*

12*. $\sin x+\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=2$; **13*.** $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4}-x)=5\mathrm{tg}2x+7$;

14*. $3\sin 4x=(\cos 2x-1)\mathrm{tg}x$;

Применяя подстановку $t=\cos x+\sin x$, решить:

15*. $5(\sin x+\cos x)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}(2+\sin 2x)$;

16*. $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$; **17*.** $\sin x+\cos x-2\sin x\cos x=1$.

Решить: **18*.** $\sin^2 6x+8\sin^2 3x=0$;

19*. $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$; **20*.** $\cos 2x+4\sin^4 x=8\cos^6 x$.

8.
Построение графиков функций с помощью элементарных движений. Общая схема исследование функций с помощью производной.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 31*

Построить графики функций:

1*. $y = |x-2|\cdot(x+2)$; **2*.** $y = \dfrac{x-1}{|x-1|}\left(x^2-4\right)$; **3*.** $y = \dfrac{x}{|x|}\sin 2x$;

4*. $y = \dfrac{2-x}{|x+1|}\left(x^2-x-2\right)$; **5*.** $y = \log_2 \dfrac{x^2-4}{x^2-2}$;

6*. $y = (0{,}5)^{\left(2x^2-6x\right)/(x-3)}$; **7*.** $y = \log_3 \dfrac{x^2-9}{|x|-3}$;

8*. $y = \left|\log_2 \dfrac{x-4}{x^2-16}\right|$; **9*.** $y = \sqrt{\log_2 \cos x}$;

10*. $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x}$; **11*.** $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$; **12*.** $y = |4x^2-1| - 3x$;

13*. $y = \left|\dfrac{1}{2}\log_2 x^2\right|$; **14*.** $y = \dfrac{1}{2}\log_2\left(|x|-1\right)^2$.

Применяя общую теорию, исследовать функции и построить графики:

15*. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; **16*.** $y = \dfrac{x}{1-x^2}$; **17*.** $y = x^2e^{-x}$;

18*. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$; **19*.** $y = x + \sin x$; **20*.** $y = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$;

21*. $y = \dfrac{1}{e^x-1}$; **22*.** $y = x\sin x$; **23*.** $y = e^{\frac{1}{x}} - x$;

24*. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$; **25*.** $y = \dfrac{2x}{4x^2+1}$;

26*. $y = \dfrac{4|x|}{x^2-x-6}$; **27*.** $y = \dfrac{3x}{x^2+4x+4}$; **28*.** $y = \dfrac{5x=1}{x-2}$;

29*. $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x-1}$; **30*.** $y = \dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$.

31*. *Построить графики функций:*

а) $y = \dfrac{5}{x^4-4x^2+5}$; б) $y = \dfrac{12}{x^4-4x^2+12}$;

в) $y = \log_{|x-2|} e$; г) $y = \ln|x^2-x-6|$;

д) $y = \cos(3\arcsin x)$; е) $y = \sin(3\arccos x)$;

ж) $y = \sin(3\arcsin x)$; з) $y = \mathrm{tg}(3\,\mathrm{arctg}\,x)$.

9.
Метод сечений при решении задач с параметром. Задачи, связанные с исследованием функций.

Задачи для решения :1*, 2*, …, 14*

Применяя метод сечений решить уравнения и неравенства:

1*. $(x+1)\cdot|x-1| - a = 0$; **2*.** $|1-|x|| < a - x$;

3*. $\sqrt{a^2-x^2} > x+1$;

4*. $4 - x^2 > \sqrt{a^2-x^2}$; **5*.** $|x+a| - |2x-a+2| = a$.

6*. *Найти a, при которых минимум функции*
$f(x) = 2|x-1| + |x+3| - 2|x-a^2-a|$ *будет больше* 1.

7*. *Найти значения a, при которых минимум функции меньше* 2
$f(x) = 3|x-a| + |x^2+x-2|$.

8*. *Найти a, при которых существует хотя бы одно решение системы*:

а) $\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2+(2-3a)x+2a^2-2a<0 \\ ax>1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x^2+(-3a-1)x+2a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=0 \end{cases}$.

9*. *При каких a следующие системы имеют ровно 2 решения*:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ xy = a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$; в) $\begin{cases} (x-y)^2 = \dfrac{2}{3} \\ xy = 5a - \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

10*. *Найти количество корней уравнения в зависимости от параметра a:*

а) $e^{\frac{x-5}{2}} + ax = 3a$; б) $e^{\frac{x-5}{3}} + ax = 2a$.

11*. *Задана парабола и прямая. При каком значении a, наименьшее из расстояний между точками параболы и прямой равно* ρ?

а) $y = x^2 - 2ax + a^2 - a + 1$, $y = -2x$, $\rho = \sqrt{5}$;

б) $y = x^2 - 2ax + a^2 + a - 2$, $y = -4x$, $\rho = \sqrt{17}$.

12*. *Доказать, что на множестве* $x \in (0, 4]$ *выполнено неравенство:*

а) $6x - 4\ln x \ge x^2$; б) $8x - 6\ln x \ge x^2$.

13*. *Определить количество корней уравнения, в зависимости от параметра a:*

а) $x\ln^{10} x = a$; б) $x\ln^{\pi} x = a$; в) $\ln \pi x = ax$.

14*. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции* $f(x)$ *для* $x \in [-2, 1]$:

а) $f(x) = (2ax^2 - x^4 - 3a^2)^{-1}$; б) $f(x) = (x^4 - 6ax^2 + a^2)^{-1}$.

***** ДОПОЛНЕНИЕ 2.**

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Определения.

Алфавит: $\sigma = \sigma_1 \bigcup \sigma_2 \bigcup \sigma_3$, *где* $\sigma_1 = \{A_0, A_1, A_2, ...\}$ - переменные высказывания или пропозициональные переменные, $\sigma_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ – логические связки; $\sigma_3 = \{(,)\}$ – дополнительные символы.

Формула :: = {пропозициональная переменная | $\neg U$ | $(U \wedge V)$ | $(U \vee V)$ | $(U \Rightarrow V)$ | $(U \Leftrightarrow V)$}, где U и V – формулы.

а) Если $\exists$ набор параметров, при которых формула истинна, то - формула **выполнима**.

б) Если $\forall$ набора параметров формула истинна – формула тождественно-истинна или **тавтология**.

в) Если $\exists$ набор параметров, при которых формула ложна, то – формула **опровержима**.

г) Если $\forall$ набора параметров формула ложна – формула тождественно- ложна или **противоречие**.

Элементарная $\begin{Bmatrix} \textit{конъюнкция} \\ \textit{дизъюнкция} \end{Bmatrix}$ это – произвольная $\begin{Bmatrix} \textit{конъюнкция} \\ \textit{дизъюнкция} \end{Bmatrix}$ формул, каждая из которых есть пропозициональная переменная или отрицание пропозициональной переменной.

Дизъюнктивная нормальная форма (д. н. ф.) – произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Конъюнктивная нормальная форма (к. н. ф.) – произвольная конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная форма называется **совершенной** с. д. н. ф. (с. к. н. ф.), если каждая переменная формулы входит в элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз с отрицанием или без него.

Формула называется формулой с **тесными отрицаниями**, если в ней нет символов $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$, и отрицания относятся только к пропозициональным переменным.

План занятий

А. Высказывания (формулы). Примеры высказываний. Простые и составные высказывания.

Б. Операции над высказываниями: $\neg$ – (отрицание); $\wedge$ – (конъюнкция); $\vee$ – (дизъюнкция); $\Rightarrow$ – (импликация); $\Leftrightarrow$ – (эквиваленция). Таблицы истинности. Порядок выполнения операций. Рассмотреть высказывание:

$$((P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow (Q \wedge P))).$$

В. Некоторые свойства операций над высказываниями:

а) $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$ – коммутативный закон;

б) $\left.\begin{array}{l} a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c \end{array}\right\}$ – ассоциативные законы;

в) $\left.\begin{array}{l} a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow a \wedge b \vee a \wedge c \\ a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{array}\right\}$ – дистрибутивные законы;

г) $\left.\begin{array}{l} \neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b \\ \neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b \end{array}\right\}$ – законы де Моргана;

д) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ – д. н. ф. для импликации;

Г. Исчисление высказываний с помощью моделирования высказывания электроцепью.

Д. Исчисление высказывания с помощью представляющих функций:

$f(и) = 1$; $f(л) = 0$; $f(\neg a) = 1 - f(a)$; $f(a \vee b) = f(a) + f(b) - f(a) \cdot f(b)$;

$f(a \wedge b) = f(a) \cdot f(b)$; $f(a \Rightarrow b) = 1 - f(a) + f(a) \cdot f(b)$.

Задачи для решения 1*, 2*, …, 7*

1*. *Построить таблицы истинности*:

1) $(\neg (P \Rightarrow \neg (Q \wedge P)) \Rightarrow (P \vee R))$;
2) $((P \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow \neg P)$;
3) $(((P \wedge \neg Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$;
4) $((P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \Rightarrow P) \vee Q))$.

2*. *Доказать выполнимость формул*:

1) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$;
2) $((Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg ((P \vee R) \Rightarrow Q))$.

3*. *Доказать тождественную истинность*:

1) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q)))$;
2) $((\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$;
3) $(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$;
4) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$;

4*. *Доказать эквивалентности*:

1) $(A \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg A$;
2) $(A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;

5*. *На вопрос, кто из трех студентов изучил логику, был получен правильный ответ:* «*Если изучал 1^й, то изучал и 3^й; но, не верно, что, если изучал 2^й, то изучал и 3^й*». *Кто из студентов изучал логику*?

6*. *Кто из четырех студентов сдал экзамен, если*:

а) *если 1^й сдал, то и 2^й сдал*;
б) *если 2^й сдал, то 3^й сдал или 1^й не сдал*;
в) *если 4^й не сдал, то 1^й сдал, а 3^й не сдал*;
г) *если 4^й сдал, то и 1^й сдал*.

7*. *Требуется, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных переключателей таким образом, чтобы, каждый из них включал свет, если он не горит, и выключал его, когда свет горит.*

Экзаменационные вопросы по курсу
“МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ”
ПЕРВЫЙ КУРС. ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

1. Высказывания. Логические связки. Кванторы всеобщности, существования, существования и единственности. Действие отрицания на сложные высказывания и кванторы.
2. Понятие множества. Отношения равенства и включения на множествах. Операции над множествами.
3. Нижняя и верхняя грань множества. Точная нижняя и верхняя грань множества. Существование граней числовых множеств. Наибольший и наименьший элемент множества.
4. Числовые промежутки и окрестности точек вещественной оси. Расширенная числовая ось. Действия с несобственными элементами.
5. Расположение точек относительно множества: внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки соприкосновения. Отделимость и полуотделимость точек числовой прямой.
6. Отображение множеств. Сюръективные, инъективные, биективные отображения. Примеры.
7. Соответствие между элементами множеств. Равномощные множества. Счетные множества и множества мощности континиум. Счетность множества рациональных чисел и несчетность множества вещественных чисел.
8. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения и область значений функции. Последовательность, как функция натурального аргумента. арифметические действия над числовыми функциями.
9. Предел функции и последовательности. Непрерывность функции. Односторонняя непрерывность. Теорема о непрерывности элементарных функций.
10. Бесконечно малые, бесконечно большие, ограниченные величины. Величины, отделенные от нуля. Эквивалентные величины. Необходимое и достаточное условие эквивалентности величин. Примеры.
11. Леммы о бесконечно малых величинах. Теоремы о пределах. Действия с несобственными элементами. Неопределенности. Правило Лопиталя. Замена переменных в предельном переходе.
12. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Теорема о частичных пределах.
13. Предельный переход в равенствах и неравенствах. Принцип двустороннего ограничения.
14. Первый замечательный предел. Непрерывность тригонометрических функций. Теорема об односторонних пределах.
15. Действия над монотонными функциями. Суперпозиция монотонных функций. Теорема о существовании предела монотонной последовательности.
16. Элементы комбинаторики. Перестановки, сочетания, размещения. Бином Ньютона.
17. Число e. Иррациональность числа e.
18. Предел функции по Гейне (предел функции по последовательности).
19. Второй замечательный предел. Пределы, связанные с показательными, логарифмическими и степенными функциями. Степенно-показательные выражения.
20. Шкала асимптотического сравнения. Символы асимптотического сравнения. Степенные асимптотические разложения. Действия над асимптотическими разложениями.
21. Асимптотические разложения Маклорена для основных элементарных функций.
22. Теорема о вложенных промежутках (Коши-Кантора). Лемма о конечном покрытии (Бореля-Лебега). Теорема о предельной точке (Больцано-Вейерштрасса).
23. Верхние и нижние пределы последовательностей и функций. Критерий Коши существования предела последовательности и функции.
24. Теорема Штольца. Примеры применения теоремы Штольца.
25. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Односторонние разрывы. Примеры. Разрывы монотонной функции.

26. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции (Больцано-Коши). Существование экстремумов функции непрерывной на сегменте (теорема Вейерштрасса).
27. Теорема об обратной функции. Обратные тригонометрические функции. Гиперболические функции и функции им обратные.
28. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Колебание функций. Модуль непрерывности.
29. Функциональное уравнения для линейной функции.
30. Функциональное уравнения для показательной и логарифмической функции.
31. Функциональное уравнение для тригонометрических функций.
32. Дифференцируемость функций. Производная функции. Дифференциал функции. Геометрическая и физическая интерпретация производной и дифференциала.
33. Производная суммы, произведения и частного дифференцируемых функций.
34. Дифференцирование сложной функции. Цепное правило. Дифференцирование обратной функции.
35. Таблица производных.
36. Производные и дифференциалы высших порядков. Таблица производных высших порядков.
37. Формула Лейбница нахождения производных высших порядков для функций, заданных в виде произведения. Дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница для высших дифференциалов.
38. Логарифмическая производная. Высшие производные от сложных и обратных функций. Высшие производные функций, заданных параметрически.
39. Инвариантность формы первого дифференциала и не инвариантность формы высших дифференциалов функции относительно замены переменных.
40. Основные теоремы о функциях, дифференцируемых на промежутке. Теоремы Ферма и Ролля.
41. Основные теоремы о функциях, дифференцируемых на промежутке. Теоремы Лагранжа и Коши. Их геометрическая интерпретация.
42. Основные теоремы о функциях, дифференцируемых на промежутке. Теорема Дарбу и ее следствие: теорема об односторонней производной.
43. Ряд Тейлора. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Формула Тейлора в терминах дифференциалов.
44. Остаточный член формулы Тейлора в форме Шлемильха-Роша.
45. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, Коши. Теорема единственности.
46. Ряды Тейлора для основных элементарных функций. Области их сходимости.
47. Необходимое и достаточное условия постоянства функции дифференцируемой на промежутке. Условие не убывания (не возрастания) функции. Условие строгой монотонности.
48. Дифференцирование неравенств.
49. Необходимое и достаточное условие локального экстремума функции. Примеры.
50. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Примеры вычисления пределов с помощью формулы Тейлора и правила Лопиталя.
51. Выпуклость (вогнутость) функций. Необходимые и достаточные условия выпуклости (вогнутости) функций. Точки перегиба.
52. Неравенства Иенсена, Коши.
53. Неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского и Минковского.
54. Общая схема исследования свойств функции и построение графика функции. Примеры.
55. Комплексные числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.
56. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Формула Муавра. Возведение комплексного числа в натуральную степень и извлечение корня натуральной степени из комплексного числа.

57. Функции с комплексными или вещественными аргументами и значениями. Последовательности. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана дифференцируемости функции комплексного переменного.
58. Экспонента комплексного числа. Тригонометрические функции комплексного переменного. Формулы Эйлера связи между тригонометрическими функциями и экспонентой.
59. Показательная форма записи комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Возведение комплексного числа в комплексную степень.
60. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Принцип Руше. Основная теорема алгебры.
61. Теорема Безу и ее следствия. Разложение многочлена на множители в множестве комплексных чисел.
62. Комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на неприводимые множители.
63. Решение алгебраических уравнений третьей степени. Формулы Кардано.
64. Решение алгебраических уравнений четвертой степени. Метод Феррари. Теорема Абеля.
65. Первообразная и неопределенный интеграл. Теорема об общем виде первообразной. Связь неопределенного интегрирования и дифференцирования. Линейность неопределенного интеграла.
66. Таблица неопределенных интегралов.
67. Замена переменных в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям.
68. Интегрирование простейших (элементарных) дробей.
69. Интегрирование дробно-рациональных функций методом разложения дроби на простейшие. Примеры.
70. Метод Остроградского выделения рациональной части интеграла. Примеры.
71. Интегрирование биноминального дифференциала (дифференциального бинома). Примеры. Теорема Чебышева.
72. Подстановки Эйлера интегрирования квадратичных иррациональностей. Примеры.
73. Другие (кроме подстановок Эйлера) методы интегрирования квадратичных иррациональностей. Подстановка Абеля. Примеры.
74. Интегрирование функций рациональным образом выражающихся через тригонометрические и гиперболические функции (без универсальных подстановок). Примеры.
75. Универсальная тригонометрическая и гиперболическая подстановки.
76. Эллиптические интегралы.
77. Интегральная экспонента и интегральный логарифм.
78. Интеграл вероятности и интеграл ошибок.
79. Интегральные синус и косинус.
80. Интегральные синус и косинус гиперболические.
81. Интегралы Френеля.

Для заметок:

Для заметок:

Для заметок: