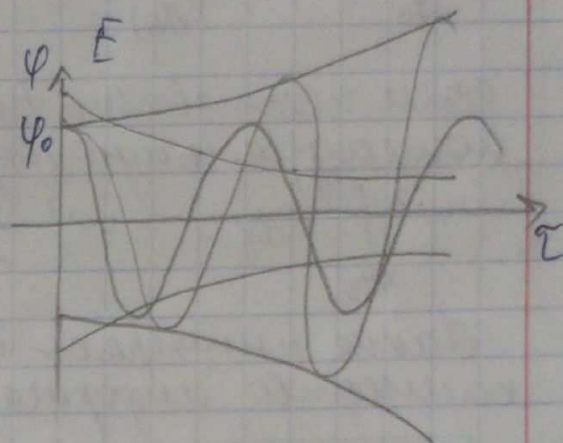
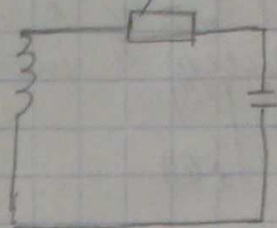
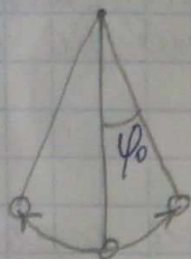


Буч Вячеслав Александрович.

Примеры:

1. Линейный осциллятор



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\gamma > 0$$

$$\gamma < 0$$

2) Автономные системы

$$i = \{1, 2\}$$

$$k = \{1, 2\}$$

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^2 A_{ik} F_k(\vec{x}) = A_{i1} F_1 + A_{i2} F_2$$

$$\dot{x}_1 = A_{11} F_1(x_1, x_2) + A_{12} F_2(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_i = \sum_k A_{ik} x_k$$

нужно чтобы  $\gamma, \omega = \text{const} \Rightarrow$  автономная система.

$\omega = \omega(t) \Rightarrow$  не автономная система.

Эта модель осциллятора очень широко используется.

3) Консервативные системы

системы, у которых полная энергия сохраняется.

$$\omega = \omega_k + \omega_n = \text{const}$$

Примеры таких систем:

$$m\ddot{x} = F(x) \quad | \cdot \dot{x} ; \int dt'$$

$$m \int_{t_0}^t \ddot{x} \dot{x} dt = \frac{m}{2} (\dot{x})^2 \Big|_{t_0}^t$$

$$\int_{t_0}^t F(x) \dot{x} dt = \int_{x(t_0)}^{x(t)} F(x) dx$$

$$\dot{x} dt = dx$$

если подставить  $F(x) = -w^2 x$ , то получаем  
 консервативную систему с мощностью  $go \text{ const}$ :

$$-w^2 \int_{x(t_0)}^{x(t)} x dx = -w^2 \frac{x^2}{2} \Big|_{x(t_0)}^{x(t)}$$

Такие интегралы помогают получить огромное количество информации о таких системах.

$$W = W_k + W_n = \text{const}$$

Конструирование кинематических систем.

Модель системы Вольфенгута.

1) "Кинематика - перемещение".

$N_k$  - число перемещений.

$\Delta N_k$  - изменение количества перемещений (прирост)

$$1) \Delta N_k = \frac{\partial}{\partial t} N_k \cdot \Delta t$$

$\frac{\partial}{\partial t}$  - коэффициент прироста.

$$\Delta t \rightarrow 0 : \dot{N}_k = \frac{\partial}{\partial t} N_k ; N_k = N_k(0) e^{+\frac{\partial}{\partial t} t}$$

$$2) \Delta N_k = -\frac{\partial}{\partial t} N_k \cdot \Delta t \quad (\text{убавление перемещений})$$

$$\dot{N}_k = -\frac{\partial}{\partial t} N_k ; N_k = N_k(0) e^{-\frac{\partial}{\partial t} t}$$

$$3) \begin{cases} \dot{N}_k = \frac{\partial}{\partial t} N_k - \eta_1 N_k \cdot N_x & (\text{убавление}) \\ \dot{N}_x = \frac{\partial}{\partial t} N_x + \eta_2 N_x \cdot N_k & (\text{прирост}) \end{cases}$$

4) Стационарные точки  
 особые точки

$$\dot{N}_{k0} = \dot{N}_{x0} = 0$$

$$1) N_k (\frac{\partial}{\partial t} - \eta_1 N_x) = 0 \Rightarrow N_k = 0 ; N_{x0} = \frac{\partial}{\partial t} / \eta_1$$

$$N_x (-\frac{\partial}{\partial t} + \eta_2 N_k) = 0 \Rightarrow N_x = 0 ; N_{k0} = \frac{\partial}{\partial t} / \eta_2$$

$$5) N_x = N_{x0} + h_2 ; h_2 \ll N_{x0}$$



$$N_{\text{к}} \approx N_{\text{к0}} + n_1; \quad n_1 \ll N_{\text{к0}} \quad (n_1 \gg 3)$$

$n_{1,2}$  - малые приближения.

$$3) \quad \begin{aligned} \dot{N}_{\text{к0}} + \dot{n}_1 &\approx \tilde{g}_1 (N_{\text{к0}} + n_1) - g_1 [N_{\text{к0}} + n_1] [N_{\text{к0}} + n_1] \\ \dot{n}_1 &\approx \tilde{g}_1 n_1 + \underbrace{[\tilde{g}_1 N_{\text{к0}} - g_1 N_{\text{к0}} N_{\text{к0}}]}_0 - g_1 n_1 N_{\text{к0}} - g_1 n_1 N_{\text{к0}} \end{aligned}$$

$$6) \quad \begin{cases} \dot{n}_1 \approx -\tilde{g}_1 g_1 / g_1 n_1 \\ \dot{n}_2 \approx \tilde{g}_2 g_2 / g_2 n_2 \end{cases}$$

$$\ddot{n}_1 \approx -\tilde{g}_1 \tilde{g}_1 n_1; \quad \boxed{\ddot{n}_1 + \Omega^2 n_1 = 0} - \text{уравнение осциллятора}$$

$$\Omega^2 \approx \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 & \tilde{g}_2 \\ \tilde{g}_1 & \tilde{g}_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{n}_1 \approx \tilde{g}_1 n_1 - g_1 N_1 n_1 - g_1 n_1 N_{\text{к0}} \approx n_1 (\tilde{g}_1 - g_1 N_{\text{к0}}) - g_1 N_{\text{к0}} n_1$$

$$\begin{cases} \dot{n}_1 \approx n_1 d_1 - \beta_1 n_1 \\ \dot{n}_2 \approx n_2 d_2 + \beta_2 n_2 \end{cases} \quad n_i \approx e^{\lambda t} \cdot a_i$$

## Фазовое пространство.

Все процессы могут быть описаны внутри этого пространства.

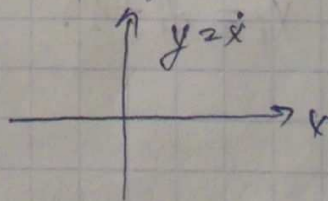
$$\dot{x}_i \approx \sum_{k=1}^N A_{ik} F_k(x, t)$$

размерность фазового пространства  $\approx N$   
число степеней свободы  $\approx N/2$

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} + F(t)$$

$$\frac{dt}{dx} = 1$$



$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dx} = -\omega^2 x; \quad \frac{dt}{dx} = 1$$

## Резонанс:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x \approx f \cos \omega t$$

1) Переход к комплексным переменным

$$\ddot{x} + d\omega\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cdot e^{i\omega t}$$

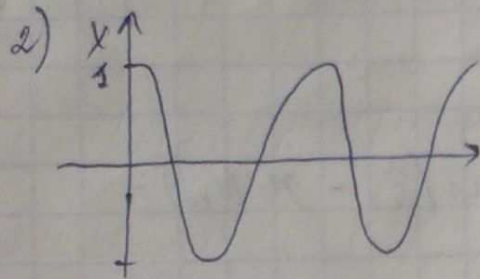
практика

$$I) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 y \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \cdot \omega_0 \\ dx/dx = 1 \\ dy/dx = -x \end{cases}$$

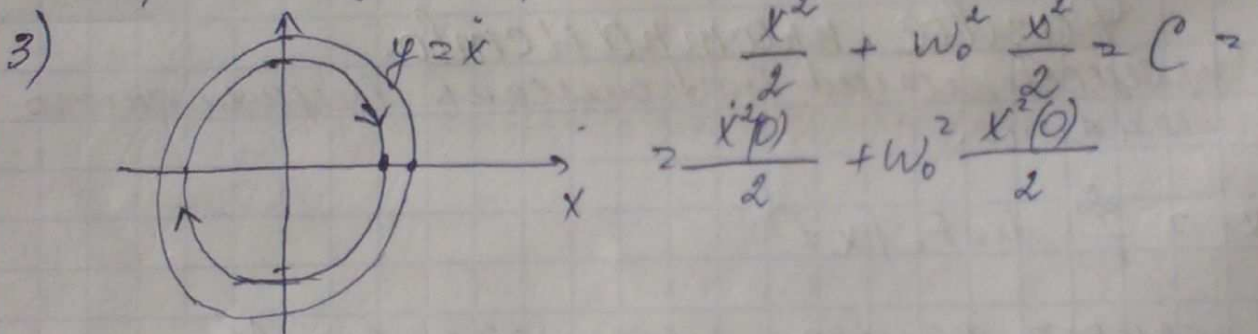
динамическая система:

$t \geq 0$

$x(0) = 1$



построить фазовое пространство



$N \approx 1000$

$h \approx 0,1$

$x_0 = 1$

$y_0 = 1$

$y_0 \neq h(x_0 + 5)$

$x_{i+1} = \phi$

$x_i = \phi(-1)$

for  $i = 1$  to  $N$   
begin

$x_{i+1} = x_i + h$

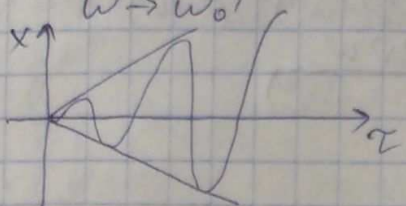
Chart  $(x_{i+1}, y_{i+1})$   
end.



Осциллятор без затухания.

19.02.13

1)  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$   $\gamma > 0$   
 $\omega \rightarrow \omega_0$



$x \sim t$   
 $(\omega - \omega_0) \equiv \delta; \delta t \ll 1$

чем определяется max амплитуды?  
 Для линейного резонанса  $\rightarrow$  др. Параметрический резонанс не имеет ограничений в отличие от линейного.

$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$   
 $2\gamma \dot{x}$  - диссипативный член.

1) Решение:

$x = x_{\text{однор.}} + x_{\text{заст. неоднор.}}$

а)  $x_{\text{однор.}}$ :

$x = A e^{\lambda t}, \lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \rightarrow$  общее реш. однородного уравнения ( $f=0$ )  
 $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$x_{\text{заст.}} = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \sim e^{-\gamma t} \rightarrow$  общее решение однород. уравнения затухает  
 $\omega \gg \gamma$

2)  $\gamma t \gg 1$

3)  $x_{\text{заст. решение}}$  = установившийся процесс

$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = f e^{i\omega t}; z = x + iy$   
 $\text{Re } z \equiv x$

$z_{\text{заст.}} = B e^{i\omega t}; [(-\omega^2 + \omega_0^2) + 2\gamma i\omega] B = f$

$B = \frac{f}{[-\omega^2 + \omega_0^2] + 2\gamma i\omega}$

4) Анализ решения.

справедливо для всех  $\omega$  и  $\gamma$ . все  $\omega$  и  $\gamma$  имеют.

$B = B' + iB'' = b \cdot e^{i\delta}$   
 $b = \sqrt{(B')^2 + (B'')^2}; \delta = \arctg \left( \frac{B''}{B'} \right)$



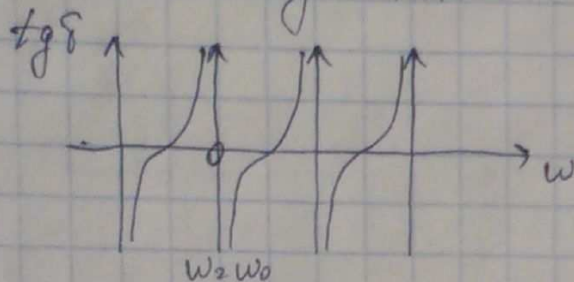
$$B = \frac{f[(-w^2 + w_0^2) - 2i\gamma w]}{(-w^2 + w_0^2)^2 + 4\gamma^2 w^2} = \frac{f(-w^2 + w_0^2) - 2i\gamma f w}{(-w^2 + w_0^2)^2 + 4(\gamma w)^2}$$

$$B' = \frac{f(w_0^2 - w^2)}{(w_0^2 - w^2)^2 + (2\gamma w)^2}; \quad B'' = -\frac{2\gamma f w}{(w_0^2 - w^2)^2 + (2\gamma w)^2}$$

$$b = \frac{f}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\gamma^2 w^2}}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2\gamma w}{(w^2 - w_0^2)}$$

$$b_{\max} = \frac{f}{2\gamma w}$$

Всегда наличие затухания приводит к тому, что раскачать систему внешней резонансной силой невозможно.



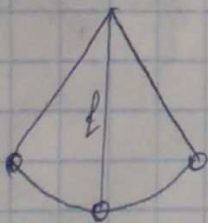
скачок при  $w = w_0$

Старомодный резонанс

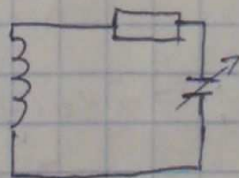
пример: качели  $\rightarrow$  период малотенее секунды  
2 раза  $\rightarrow$  амплитуда колебаний растёт.

Модель:

$$\ddot{x} + w_0^2 [1 + \xi \cos 2wt] x = 0$$



при применении  $\xi \cos 2wt$



$\xi$  - амплитуда изменения

$$\xi \ll 1$$

Уравнение Матве.

Андрей Матвей

$$1) \quad x \sim e^{\lambda t}$$

сравнить с  $x \sim t$

$$2) \quad \gamma \neq 0$$

не ограничивает ампл.  $x$ , но ограничивает  
при  $x \sim \exp[(\alpha - \gamma)t]$ ;  $\alpha > 0$ ;  $\gamma > 0$ ;  $\alpha \sim \xi$

$$x = A(t) \cos wt + B(t) \sin wt + \xi v(t)$$



$$\omega - \omega_0 = \delta \approx \xi$$

$$\xi = 0 \Rightarrow A = \text{const}; B = \text{const}$$

$$\dot{x} = \dot{A} = \dot{B}$$

$$A \sim B \sim \xi; \ddot{A} \sim \ddot{B} \sim \frac{\xi}{\tau} \rightarrow \xi \rightarrow$$

$$2) \xi [\ddot{V} + \omega_0^2 V] = -\omega_0 [-\dot{A} \sin \omega t + \dot{B} \cos \omega t] + 2\omega_0 \delta \times \\ \times [A \cos \omega t + B \sin \omega t] - \xi \cdot \omega_0^2 \cos(\omega t) [A \cos \omega t + \\ + B \sin \omega t].$$

$$3) \xi [\ddot{V} + \omega_0^2 V] = \omega_0 [\dot{A} + 2\delta B - 2\omega_0 B] \sin \omega t - \\ - \omega_0 [\dot{B} - 2\delta A + \xi \omega_0 A] \cos \omega t + \xi$$

$$4) \begin{cases} \dot{A} + 2\delta B - 2\omega_0 B = 0 \\ \dot{B} - 2\delta A + \xi \omega_0 A = 0 \\ \dot{A} = -B(2\delta + \omega_0 \xi) \\ \dot{B} = -A(\omega_0 \xi - 2\delta) \\ A = a e^{\gamma t}; B = b e^{\gamma t} \end{cases}$$

$$\gamma^2 = (\omega_0^2 \xi^2 - 4\delta^2)$$

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_0^2 \xi^2 - 4\delta^2}$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$A = a e^{\gamma t}$$

$$\omega_0 \xi > 4\delta^2$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 [1 + \xi \cos \omega t] x = 0$$

$$x = z e^{-\gamma t}; \quad x \sim e^{+\xi t} e^{-\gamma t} \Rightarrow \text{норос.}$$

$$\ddot{z}$$

$$\xi > \gamma \quad ! \quad \text{— неуст.}$$

8

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 y$$

$$dx = y dt$$

$$x = y t + C_1$$

$$\frac{dy}{y} = -\omega_0^2 dt$$

$$\ln y = -\omega_0^2 t$$

$$y = e^{-\omega_0^2 t} + C_2$$

$$x = y t + C_1$$

$$y = e^{-\omega_0^2 t} + C_2$$

$$x =$$



26.02.13

## Теорема Флоке

Дано:  $\ddot{x} + w^2(t)x = 0$ ;  $w(t+\tau) = w(t)$

Пример:  $\ddot{x} + w^2(1 + \epsilon \cos 2wt) = 0$   
 $\sum \cos mwt$

Найти:  $x = A \varphi_1(t) e^{\lambda_1 t} + B \varphi_2(t) e^{-\lambda_1 t}$ ;  $A, B = \text{const}$   
 $\varphi_i(t+\tau) = \varphi_i(t)$ , если  $\text{Re } \lambda_i \neq 0$

Решение (доказательство)

1.  $x_1(t)$ ;  $x_2(t)$  — линейно независимые решения (они образуют фундаментальную систему решений).

2.  $t \rightarrow t + \tau$  (сдвин по времени)

$x_1(t+\tau)$ ;  $x_2(t+\tau)$  — решения.

$x_i(t+\tau) = \alpha_i x_1(t) + \beta_i x_2(t)$  — в силу лн. независимости  $x_1$  и  $x_2$

3.  $x_1(t+\tau) = \eta_1 x_1(t)$ ;  $x_2(t+\tau) = \eta_2 x_2(t)$

Симметрично! Можно ли?

$x_1(t+\tau) = \eta_1 x_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2$

$x_1(\eta_1 - \alpha_1) + x_2 \beta_1 = 0 \rightarrow$  комбинация лн. незав. реш.

$\beta_1 = 0$ ;  $\eta_1 = \alpha_1$

Результат:  $x_1(t+\tau) = \eta_1 x_1(t)$ ;  $x_2(t+\tau) = \eta_2 x_2(t)$

4.  $\begin{cases} \ddot{x}_1 + w^2(t)x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + w^2(t)x_2 = 0 \\ \ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$  найдём связь между  $x_1$  и  $x_2$ , а следовательно между  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

9



$$\frac{d}{dt} [\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1] = 0 \Rightarrow [\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1] = \text{const}$$

$$\dot{x}_1(t+\tau) x_2(t+\tau) - \dot{x}_2(t+\tau) x_1(t+\tau) = C.$$

$$5. \quad p_1 p_2 [\dot{x}_1(t) x_2(t) - \dot{x}_2(t) x_1(t)] = [\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1]_t$$

$$p_1 p_2 = 1$$

$$6. \quad p_i = \exp[\lambda_i T], \quad \lambda_i - \text{новая const}$$

$$p_1 p_2 = \exp[(\lambda_1 + \lambda_2) T] = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1$$

$$7. \quad \text{Введём новые функции: } \varphi_i = x_i(t) e^{-\lambda_1 t}$$

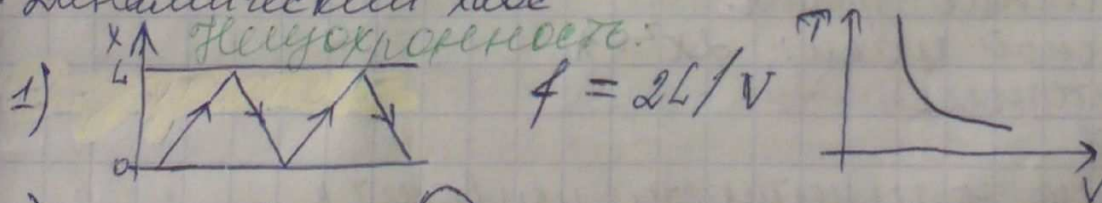
$$\varphi_i(t+\tau) = x_i(t+\tau) \exp[-\lambda_1(t+\tau)] = p_i x_i(t) e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\lambda_1 t} = \varphi_i(t)$$

$$8. \quad x = A x_1(t) + B x_2(t) = A \varphi_1(t) e^{\lambda_1 t} + B \varphi_2(t) e^{-\lambda_1 t}$$

та форма решений, которую мы сформулировали сначала.

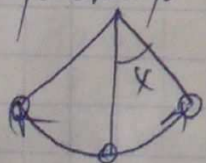
## Фундаментальные свойства нелинейности.

1. Неизотропность:  $\omega = \omega(x, v)$
2. Ангармонизм:  $x = A \cos(\omega t)$  - гармоническое колебание.
3. Авангармонизм
4. Мультистабильность
5. Динамический хаос



$$2) \quad \omega_H = \frac{eH}{mc} \quad \rightarrow \quad m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

пример неизотропности:



$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

$$x \ll 1$$

$$\ddot{x} + \omega^2 \left( \frac{\sin x}{x} \right) \cdot x = 0$$

$$\Omega^2 = \omega^2 \left( \frac{\sin x}{x} \right)$$



## Анализ гармоник

$x = \sum_n C_n \exp[i n \omega_0 t]$  - гармоническое колебание

если 1 частота, то это гармоническое колебание.

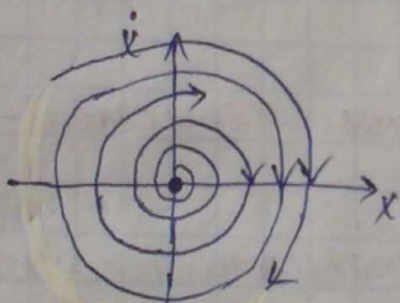
$$\hat{N}(x) = \sum_{k=2}^N a_k x^k = a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots$$

$$x = \frac{eE}{m\omega} \ll 1$$

- 1) Гармоническое колебание:  $x = A \cos \omega t$ ;  
 $x \rightarrow a_2 A \cos \omega t$   
 $x \rightarrow a_3 [A^2 \cos^2 \omega t] = a_3 A^2 [1 - \cos 2\omega t] / 2$   
↑ детектирование  
↑ гармоника

$x \rightarrow a_3 [\underbrace{\cos \omega t}_{\text{самовоздействие}} - \underbrace{\cos 3\omega t}_{\text{генерация}}]$

## Автоколебания



$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\gamma < 0$$

$$\ddot{x} - (\gamma - \alpha x^2) \dot{x} + \omega^2 x = 0 \rightarrow \text{Ван-дер-Поля}$$

$$\gamma > 0$$

отрицательное трение.

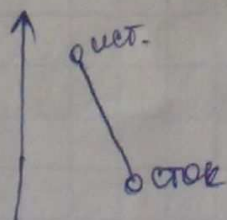
Автоколебания: раскручивание происходит до определённого уровня

Предельной циклы:  $\alpha x^2 = \gamma$

$\gamma \rightarrow$  источник

~~колебаний~~

Наличие нелинейности приводит к  $\phi$ -энергии



Внешнее уравнение Ван-дер-Поля:



$$1) x = A(t) e^{i\omega t} + A^*(t) e^{-i\omega t}$$

практика

Линейный и параметрический резонанс:

$$\begin{aligned} \text{I. } \ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega_0^2 x &= A \cos \omega t \\ \text{II. } \ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega_0^2 (1 + \epsilon \cos \omega t) x &= 0 \end{aligned}$$

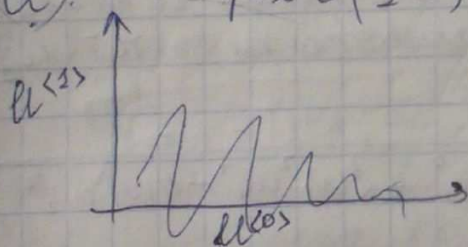
$$\text{IC} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{x}{\dot{x}} \rightarrow \text{нач. условия}$$

$$\mathcal{D}(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \dots \\ y_{n+1} \dots \end{pmatrix}$$

$M = 100 \rightarrow$  кол-во точек

$$t_n := 0; t_k := 10$$

$$u := \text{rkFixed}(\text{IC}, t_n, t_k, M, \mathcal{D})$$



$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \dots \\ t_k^{(1)} &= \dots \\ u_2^{(2)} &= \dots \end{aligned}$$

$$x_{\text{gen}} = A e^{\gamma_1 t} + B e^{\gamma_2 t}$$

Связанные линейные осцилляторы.  
Параметрический резонанс. Нормальное состояние  
"Рассечение".

05.03.

**Теорема единственности.**

Пример: две связанные линейных осциллятора

$$(1) \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \mu_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \mu_2 x_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\mu_1, \mu_2 - \text{коэф. связи.} \\ &\omega_1, \omega_2 - \text{те частоты, на которых} \\ &\text{колеблется бр осциллятор при } \mu_i = 0 \end{aligned}$$

$\omega_1, \omega_2$  - нормальные частоты.

Какие свойства у сист. (1)? Нужно её решить.

Решение:

1) Найдем характеристическое уравнение:

$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2 = a_2 e^{i\omega t}$$

$$2) a_1 (\omega_1^2 - \omega^2) = \mu_1 a_2$$

$$a_2 (\omega_2^2 - \omega^2) = \mu_2 a_1$$



$$\begin{vmatrix} (w_1^2 - w^2) & -\mu_1 \\ -\mu_2 & (w_2^2 - w^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{для нахождения не тривиального решения}).$$

$$(w_1^2 - w^2)(w_2^2 - w^2) - \mu_1 \mu_2 = 0$$

дисперсионное уравнение

$$\mu_1 = \mu_2 \quad (w_1^2 - w^2)(w_2^2 - w^2) - \mu^2 = 0 \equiv \Delta(w) = 0$$

$\mu_1 \neq \mu_2$  - независимые связи (система); не выполняются III закон Ньютона.

$$3) w^4 - w^2(w_1^2 + w_2^2) + [w_1^2 w_2^2 - \mu^2] = 0$$

док-во

$$(w^2)_{1,2} = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(w_1^2 + w_2^2)^2 - [w_1^2 w_2^2 - \mu^2]}$$

Свойства норм частот.

$$\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \omega_1 \quad \omega_2$$

Min норм. частота:  $\Omega_1 < \min$  парциальная частоты.  
Max норм. частота:  $\Omega_2 > \max$  парциальная частоты  $\omega_2$

Доказательство:

1)  $\mu = 0$

$$(w^2)_{1,2} = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{w_1^4 + w_2^4 + 2w_1^2 w_2^2 - 4w_1^2 w_2^2} = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) \pm \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2)$$

Значит тот факт, что есть связи, тогда:

2)  $\mu \neq 0$

$$(w^2)_{1,2} = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{w_1^4 + w_2^4 + 2w_1^2 w_2^2 - 4w_1^2 w_2^2 + 4\mu^2}$$

Колес. сист., которая состоит из 2 осей и она еще колебл.

$$w^2 \geq (+)/(-)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(w_1^2 - w_2^2)^2 + 4\mu^2} = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) + (\text{расщепление нормальных частот}) + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) \times \sqrt{1 + 4\mu^2/(w_1^2 - w_2^2)^2}$$

**Теорема взаимности.**

2 связанных осциллятора и на один из них действует на какой-то частоте.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + w_1^2 x_1 = \mu x_2 \\ \ddot{x}_2 + w_2^2 x_2 = \mu x_1 + F \cos \Omega t \end{cases} \quad (2)$$

Воздействие внешних сил на систему связанных осцилляторов

Мы хотим посмотреть на частотное решение



1) Решение:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \Omega t \\ x_2 = B \cos \Omega t \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \textcircled{*} \begin{cases} A = \frac{MF}{\Delta(\Omega)} \\ B = \frac{F(\omega_1^2 - \Omega^2)}{\Delta(\Omega)} \end{cases}$$

Это и будет частное решение.

2) Представим в (2):

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)A = \mu B \\ (\omega_2^2 - \Omega^2)B = \mu A + F \end{cases} \Rightarrow$$

3) Анализ решений:

$$\Delta(\omega) = 0 \equiv (\omega_2^2 - \Omega^2)$$

Это частота внешней силы.  
Если частота внешней силы будет совпадать с одной из частот, то знаменатель " $= 0$ "  $\rightarrow$  резонанс

1.  $\Omega$ -форм. частота  $\Rightarrow \Delta(\Omega) = 0 \rightarrow$  резонанс

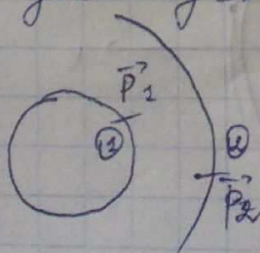
2. динамическое демпфирование.

Амплитуда колебаний  $i$  осей совпадает с максимальной частотой  $i$  осей. Можно сильно уменьшить колебания внешних воздействий (раньше применяли на кораблях).

$$(*) \textcircled{*} \begin{cases} B = \frac{MF}{\Delta(\Omega)} \\ A = \frac{F(\omega_2^2 - \Omega^2)}{\Delta} \end{cases}$$

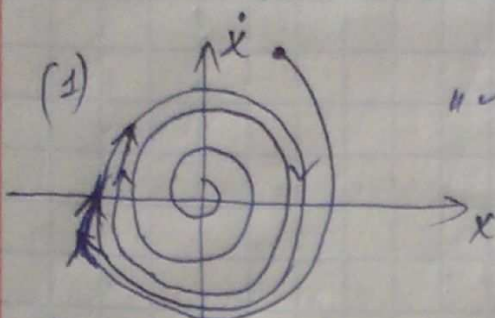
$\textcircled{*}$  - амплитуда колебаний  $i$  осей, когда внешняя сила действует на  $j$  осей. (B)

$(*) \textcircled{*}$  - амплитуда колебаний  $j$  осей, когда внешняя сила действует на  $i$  осей.



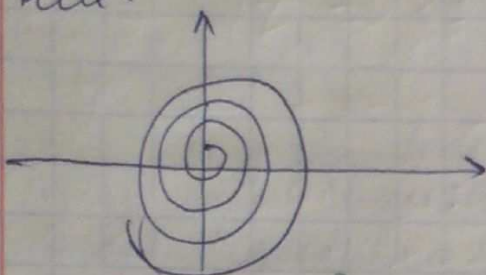


# Предельные циклы. Релаксационные уравнения Ван-дер-Поля



"мягкое" возбуждение.

если все точки фазового пространства приведут к одной кривой, то это означает, что будет раскручиваться.



уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - (\lambda - \alpha x^2)\dot{x} + x = 0$$

частота у такого осциллятора:  $\omega \approx 1$ .

1)  $x \ll 1$ ;  $\lambda > 0$ , тогда уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} - \lambda \dot{x} + x = 0$$

это осциллятор с отрицательным трением.

2)  $x$  растёт;  $\alpha x^2 > \lambda$

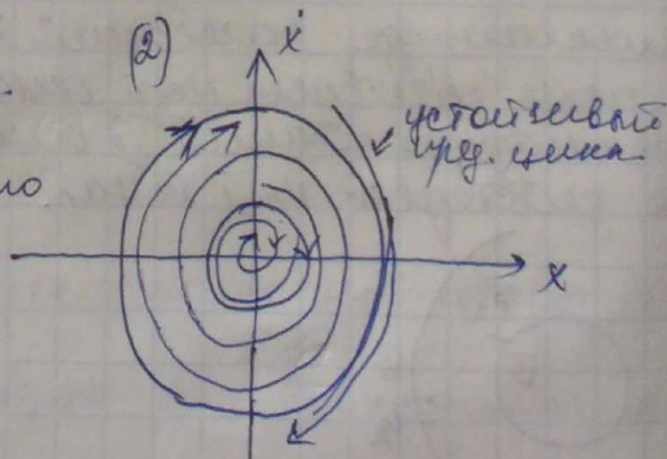
$$\alpha > 0$$

$$\ddot{x} + (\alpha x^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0$$

На самом предельном числе колебание отриц. и полож., это приводит к взаимокompенсации, и в результате это возникает немотивированно и спонтанно, а результирующая частота  $\omega \approx 0$ .

"жесткое" возбуждение.

если есть затухание, то идёт суживание, а если во всех областях затухание, то идёт раскручивание.





уменьшившей предельной цикла  $\rightarrow$  к нему сходятся все траектории, которые находятся в области между. А самая маленькая (циркулярная) спираль отвечает за уменьшившей предельной цикла.

Нужно составить уравнение для решения такой динамики:

$$\ddot{x} + (\gamma - \alpha x^2) \dot{x} + x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \gamma \dot{x} + x = 0 \rightarrow \text{постоянное трение.}$$

Для того, чтобы раскатать осциллятор (2), его нужно раскатать  $\rightarrow$  поэтому, "естественно".

$$\ddot{x} + (\gamma - \alpha x^2 + \beta x^4) \dot{x} + x = 0.$$

if  $x \ll 1$ , то в скобках работает только  $\gamma$ , а если пока дам в другую обл., то начинает работать и  $\beta$  трен, а при больших амплитудах работают все 3.

Факт. значение:

$$\textcircled{I} \quad \ddot{x} - (\gamma - \alpha x^2) \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{уравн. Ван дер Поля}$$

$$1) \omega = 1; \quad \tau = \omega t$$

$\Rightarrow \ddot{x} - (\gamma - \alpha x^2) \dot{x} + x = 0 \Rightarrow$  осциллятор и основная динамика содержится в  $\dot{x}$  и  $x \rightarrow$  нужно выбирать в (...) маленькую величину.

$$x \sim 0,1; \quad \gamma \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$$

$$x^2 \ll 1; \quad \alpha \approx 1$$

$\rightarrow$  то нелинейная параметризация.



$$\textcircled{II} \quad \ddot{x} + (\gamma - \alpha x^2 + \beta x^4) \dot{x} + x = 0$$



12.03.13



## Общая схема анализа (нелинейных систем)

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} f_i(x, t) \rightarrow \text{нелин. система.}$$

1)  $\dot{\xi}_k = \xi \sum \beta_{ki} F(\frac{t}{\xi}, \frac{x}{\xi}); \xi \ll 1$  каноническая система  
 $\xi \sim \xi \cdot t + 1; t \sim 1/\xi$

2) усреднение  
 новые независимые переменные будут меняться в соответствии с малым параметром  $\xi$ .

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \Rightarrow \langle \dot{\xi} \rangle = \dot{\xi} =$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi; \quad \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 0$$

Решение уравнения Ван дер Поля:

1. Заключается в том, что вводимые две и более независимых переменных и на них накладываются определенные ограничения.

$$x = [A(t) e^{it} + A^* e^{-it}]; \quad x \rightarrow \{A = A' + iA''\}$$

$$\dot{x} = [\dot{A} e^{it} + \dot{A}^* e^{-it}] + i[A e^{it} - A^* e^{-it}]$$

1) Накладываем дополнительные требования

$$2) \ddot{x} = -[A e^{it} + A^* e^{-it}] + i[\dot{A} e^{it} - \dot{A}^* e^{-it}] =$$

$$= -x + 2i\dot{A} e^{it}$$

$$3) 2i\dot{A} - i(\gamma - |A|^2)A + iA^3 e^{2it} + i(\gamma - |A|^2)A^* e^{-2it} - i(A^*)^3 e^{-3it} = 0$$

$$2i\dot{A} = i(\gamma - |A|^2)A - iA^3 e^{2it} - i(\gamma - |A|^2)A^* e^{-2it} + i(A^*)^3 e^{-3it}$$

4) Усредняем:  $2i\dot{A} = i(\gamma - |A|^2)A$  укороченное уравн. (усреднённое)  
 $\boxed{\dot{A} = \frac{\gamma}{2} (1 - |A|^2) A} \rightarrow$

5)  $A = a \cdot e^{i\varphi}; \quad \dot{A} = (\dot{a} + i\dot{\varphi}a) e^{i\varphi}$   
 $|A|^2 = a^2$

$$\dot{a} + i\dot{\varphi}a = \frac{\gamma}{2} (1 - a^2) a$$

6) Приравниваем мнимые и действительные части  
 $\boxed{\dot{a} = \frac{\gamma}{2} (1 - a^2) a; \quad \dot{\varphi} = 0} \Rightarrow \varphi = C$

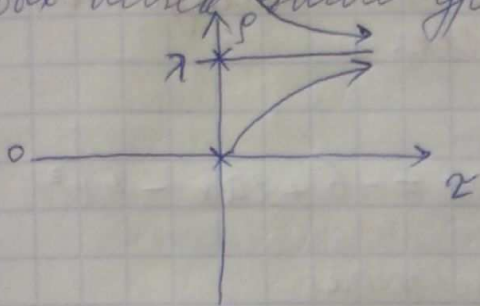


$$(\ddot{a} + i\dot{\varphi} a) e^{i\varphi + it} + (\ddot{a} - i\dot{\varphi} a) e^{-i\varphi - it} = 0.$$

$$\Rightarrow a\ddot{a} = (\gamma - a^2)a^2; \quad p = a^2$$

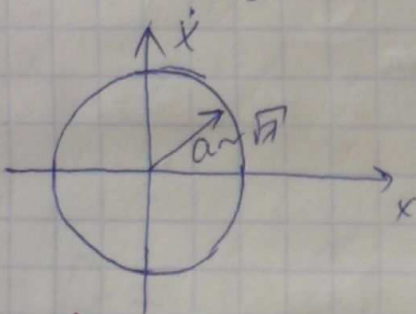
$$\boxed{\dot{p} = (\gamma - p)p}$$

г) Качественный анализ  $\Rightarrow$  рассмотрим в найденных особых точках этого уравнения:  $p = \gamma; p = 0$ .



Определим устойчивость стационарных (особых) точек:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \delta \\ \delta &= \delta \cdot \gamma \Leftarrow p_0 = 0 \Rightarrow \gamma > 0 \rightarrow \text{неустойчивая точка} \\ p_0 = \gamma &\Rightarrow (\dot{\gamma} + \delta) = p_0(-\delta); \quad \boxed{\dot{\delta} = -\gamma\delta} - \text{устойчивая ст. точка.} \end{aligned}$$



### Теорема Бендиксона.

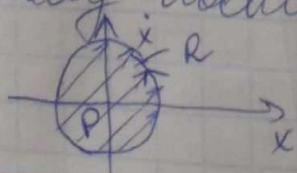
(об отсутствии предельных циклов).

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad \left| \quad \text{Если } \left[ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right] - \text{знакопостоянная} \right.$$

то предельный цикл отсутствует.

### Доказательство:

г) Если есть предельный цикл, то траектория по пред. циклу непрерывно движется:



$$\begin{aligned} \dot{x} &\neq 0 \\ \dot{y} &\neq 0 \end{aligned}$$



$$\frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q} \Rightarrow dx \cdot Q - P \cdot dy = 0$$

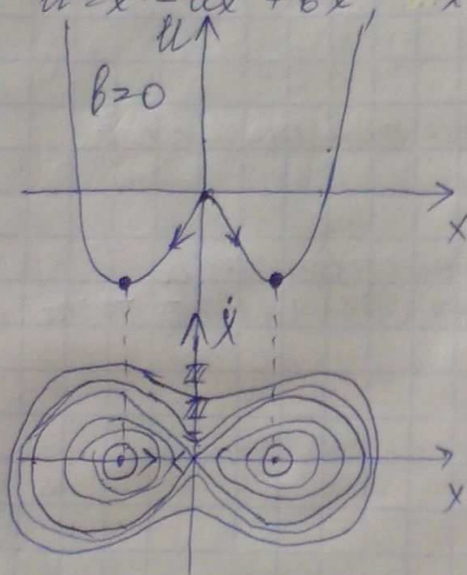
$$2. \iint_S \left[ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right] dx \cdot dy = \oint_R [Q \cdot dx - P \cdot dy] \quad \begin{matrix} \text{формула} \\ \text{Грина} \end{matrix}$$

Мирьмистабильность. Бассейны притяжения. Бифуркационные диаграммы, устойчивые и неустойчивые точки.

Пример (урав-е Хуффмана)

и-потенциал.

$$U = x^4 - ax^2 + bx; \quad \dot{x} = -\partial U / \partial x = -b + 2ax - 4x^3$$



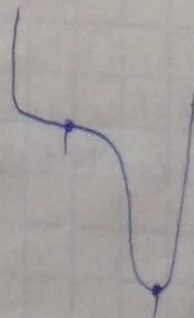
потенциал

фазовый портрет

Мирьмистабильность  $\Rightarrow$  в зависимости от начальных условий, мы можем оказаться либо в одной яме, либо в другой  $\Rightarrow$  в состоянии устойчивого равновесия.

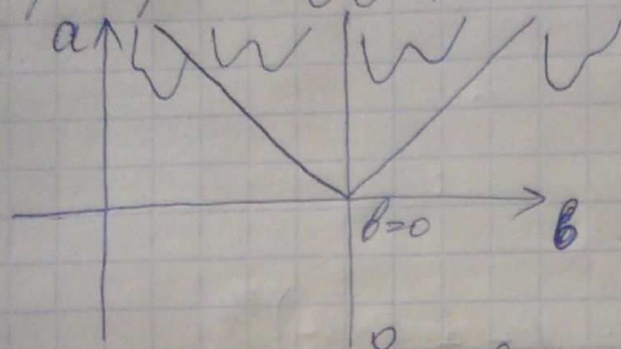
Бассейн притяжения  $\rightarrow$  при наименьшем малейшем возмущении мы попадём в какую-то (яму) область

Бифуркация - слияние двух точек





Трансплантация параметров:



$b = b_0 \cos \omega t$   
мелкие бифуркации;  
мелкие складки.

так и  $\min$  сливаются и остаются только  
одни  $\min$ .

Уравнение линий "складок"  
либо бифуркационных линий.

$$\dot{x}_0 = x_1$$

$$\dot{x}_1 = -\nu x_1 - \omega_0^2 x_0 + A \cos \omega t$$

$$D = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_1 - \omega_0^2 x_0 + A \cos \omega t \end{pmatrix}$$

1) Найти уравнение для линий складок:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x^3 + 2ax - b \end{cases}$$

$$2. y = \dot{x} = 0; 4x^3 - 2ax + b = 0 -$$

на линиях  $\dot{x} = \dot{y} = 0$

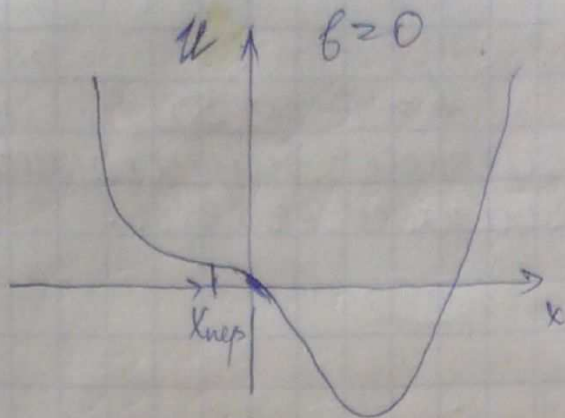
(линии стационар. или особые точки).

3. На линиях  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \leftarrow$  точки перегиба

$$12x^2 - 2a = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{a/6}$$

10.03.13



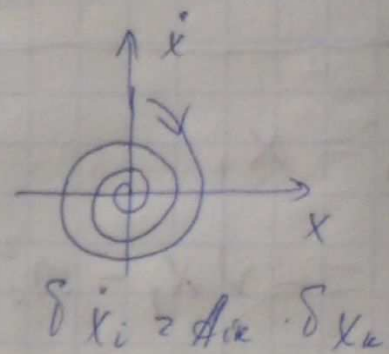
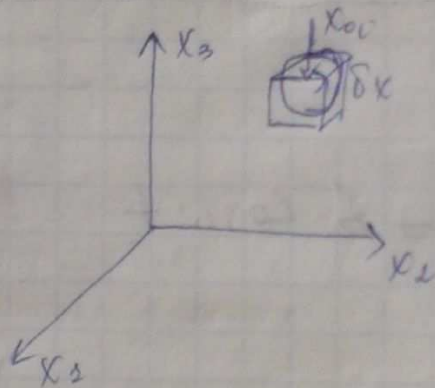


$$4. \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \left[ \frac{2a - 6a}{3} \right] + b = 0 ; \quad b = \pm 8 \left( \frac{a}{b} \right)^{3/2}$$

Мелкие бифуркации — это стационарные точки сменяемые неустойчивыми точками.

**Сжатие фазового объёма**

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\vec{x}) \\ \dot{x}_{i0} = f_i(\vec{x}_0) \end{cases} \quad x_i \approx x_{i0} + \delta x_i$$



Определение дельта фазового объёма.

1. Объём маленеким.
2. Выбираем  $x_{0i}$ . Для неё  $\dot{x}_{0i} = f_i(\vec{x}_0)$
3. Получаем уравнение для  $V$
4. Для любой точки  $x_i \approx x_{i0} + \delta x_i$
5. Подставляем

$$\dot{x}_{i0} + \delta \dot{x}_i \approx f_i(\vec{x}_0 + \delta \vec{x}) \approx f_i(\vec{x}_0) + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta x_k$$

Для 3-х мерного фазового объёма:

$\delta x_2 \delta x_3$

$$\delta \dot{x}_1 \approx \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \delta x_3$$

$\delta x_1 \delta x_3$

$$\delta \dot{x}_2 \approx \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \delta x_3$$

$\delta x_1 \delta x_2$

$$\delta \dot{x}_3 \approx \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \delta x_3$$



$$6. V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3; \dot{V} = \delta \dot{x}_1 \delta x_2 \delta x_3 + \delta x_1 \delta \dot{x}_2 \delta x_3 + \delta x_1 \delta x_2 \delta \dot{x}_3$$

$$7. \nabla \cdot \text{div } f = \nabla \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right]$$

$$\dot{V} = V(\text{div } f) + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \delta x_2 \right) (\delta x_1) + \dots \quad \textcircled{=}$$

$$() = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_3 \delta x_2 \delta x_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \delta x_2 \delta x_3 \delta x_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} (\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3) +$$

$$+ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} (\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3) = \nabla \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right]$$

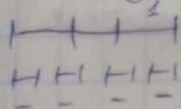
$$\textcircled{=} 3V(\text{div } f)$$

8. Вывод:  $\dot{x}_i = f_i(x)$ ;  $\text{div } f < 0$  - сжатие фазового объёма

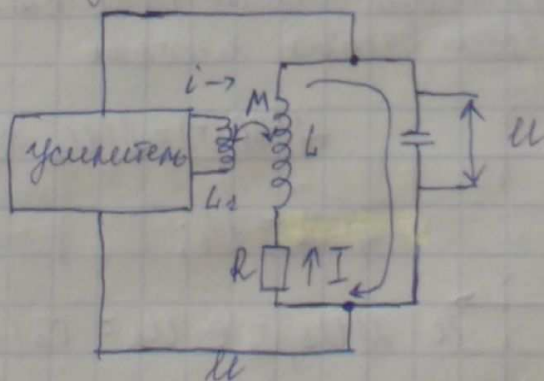
Пример:  
идеальное сопротивление

$$\begin{cases} \dot{x} = -p(x-y) \\ \dot{y} = -y + 2x - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad \text{div } f = -(p+1+b)$$

$p > 0, b > 0 \Rightarrow \text{div } f < 0 \Rightarrow$  сжатие фазового объёма.



Пример возмущенного идеального индуктивного контура.



$$i = a_0 U - a_1 U^3$$

Мат. модель: 1. Правильно Кирхгофа:  $\sum_k I_k = 0$ ;  $\sum U_k = 0$  конт.

$$RI + L \frac{dI}{dt} + U = M \frac{di}{dt}; \quad U = \frac{1}{C} \int I dt$$

$$U - \omega_0^2 (Ma_0 - R C - 3Ma_1 U^2) U + \omega_0^2 U = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$



26.03.13

# Анализ автономных уравнений

Уравнение Ванье:

$$\ddot{y} - (\gamma + \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0 - \text{ур. Ванье}$$

Особенности этого уравнения:

- 1)  $y^2 \rightarrow \dot{y}^2$
- 2)  $\gamma \gg 1$

Задача: проанализировать уравнение Ванье:

- 1) Цель  $\rightarrow$  у большого параметра, сделать малым.  
 $\tau = t/\gamma, u = y/\gamma^{3/2} \Rightarrow \ddot{u} - (1 - \dot{u}^2)\dot{u} = 0$ ;  
 $\xi = 1/\gamma^2, \dot{u} = du/d\tau, \dot{y} = dy/dt$   
 $\xi \ll 1$

Класс уравнений с малым параметром при старшей производной.

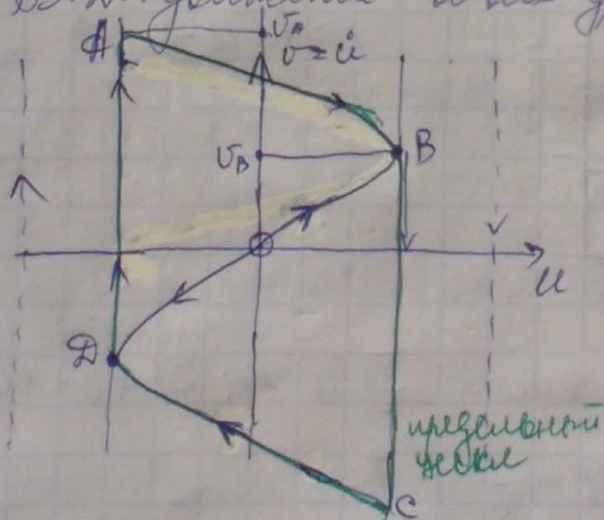
$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \xi \dot{v} = (1 - v^2)v - u \end{cases} \quad (*) \quad \xi \ll 1$$

3) Введём быстрое и медленное движения.

М.Д. (медленное движ.):

Движение по кривой (\*) будет медленным, а по всем остальным кривым будет быстрым.

Б.Д.: движение во всех других точках



$$A(u, v) = A(u_A, v_A) = A(u_0, v_0)$$

$$1) v_0 = u_0;$$

$$2) u_A, v_A \in u_A = v_A(1 - v_A^2)$$

4) Б.Д.:

$$\frac{dv}{du} = \frac{(1 - v^2)v - u}{\xi v}$$



$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow dv/d\epsilon \rightarrow \infty$  (вертикальная линия)

5) Анализ нулевой точки

$$u_0=0; v_0=0; u=v_0+\delta u; v=v_0+\delta v \Rightarrow \begin{cases} \delta \dot{u} = \delta v \\ \delta \ddot{u} = \delta \ddot{v} - \delta u \end{cases}$$

$$\delta \ddot{u} - \delta \ddot{v} + \delta u = 0$$

«определяющее уравнение (всё «высчитается»).

6) перемещение по предельной скорости:

будем анализировать только по предельным участкам предельной скорости.

$$\frac{du}{d\tau} = v \Rightarrow \frac{du}{v} = d\tau$$

уменьшительные преобразования:

$$\frac{d(1-v^2)v}{v} = d\tau; 2 \int_{v_A}^{v_B} \left[ \frac{1}{v} - 3v \right] dv = T$$

$$2 \left[ \ln v - \frac{3}{2} v^2 \right] \Big|_{v_A}^{v_B} = T$$

7)  $v_B = ?$   $\frac{dv}{d\epsilon} \rightarrow \infty; \frac{du}{dv} = 0 \Rightarrow 1 - 3v^2 = 0$

$$v_B = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

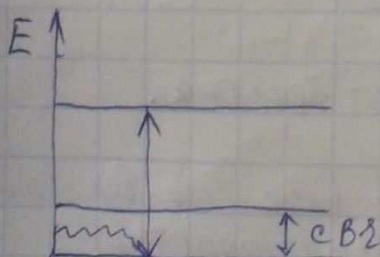
Аналогично:  $v_A = -1/\sqrt{3}$

Окончательно:

$$T = 7 [3 - 2 \ln 2]$$

$T \approx 7$  в единицах « $T$ ».

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots \left( \frac{1}{2} \right)^n +$$



Квантовый эффект Зенона.

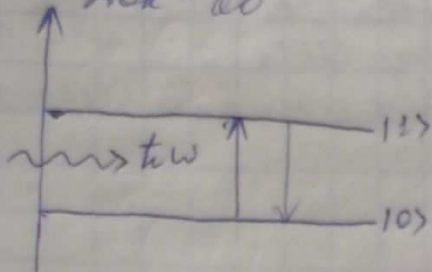
1. Закон распада в общем случае не есть экспоненциальный.



## 2. Коллапс волновой функции (Наблюдение)

- 1)  $N = N_0 e^{-\Gamma t}$ ;  $W = e^{-\Gamma t}$ ;  $\Gamma t \ll 1 \Rightarrow W \approx 1 - (\Gamma t)$   
 2) Переход на малых временах не подчиняется закону.

Док-во:



$\Psi_1 \sim A_1 \rightarrow$  амплитуда волн. ф. на верхнем уровне.

$\Psi_0 \sim A_0$

$$1. \begin{cases} i\hbar \dot{A}_0 = V_0 A_1 \\ i\hbar \dot{A}_1 = V_1 A_0 \end{cases} \quad \begin{cases} V \sim E_{\text{внеш.}} (\text{разн.}) \\ \hbar W = (E_1 - E_0) \end{cases}$$

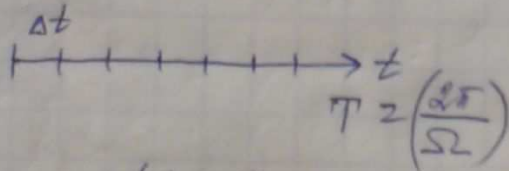
2.  $A_1 \approx \cos \Omega t$ ;  $A_0 \approx \sin \Omega t$ ;  $(\Omega = V/\hbar)$  — частота Раби.

$$W = |\Psi|^2 \sim |A_1|^2 \approx \cos^2 \Omega t$$

как будем интересоваться малые времена:

$$W \approx \left(1 - \frac{(\Omega t)^2}{2}\right)^2 \approx 1 - (\Omega t)^2$$

3.



$$T \approx n \Delta t; n \gg 1$$

$$W_1 \approx [1 - (\Omega \cdot \Delta t)^2]$$

$$W_n \approx [1 - (\Omega \cdot \Delta t)^2]^n$$

$$W_{12} \approx [1 - (\Omega \Delta t)^2]^2$$

$$W_{1n} \approx [1 - (\Omega \Delta t)^2]^n$$

$$\ln W_n = n \ln [1 - (\Omega \Delta t)^2] \approx -n (\Omega \Delta t)^2 \approx -\frac{1}{n}$$

наблюдение:

$$(\Omega \Delta t)^2 = \left(\frac{2\hbar}{T} \Delta t\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \ln W_n \rightarrow 0$$

$$W_{1n} \rightarrow 1$$

! эффект Зенона

↓  
 вероятность остаться на верхнем уровне  $\Rightarrow$  слет. не распадается.



Квантовый эффект Зенона - парадокс квантовой механики, заключающийся в том, что время распада нестабильного квантового состояния некоторой системы с дискретным энергетическим спектром прямо зависит от частоты совершаемых измерений её состояния. В предельном случае нестабильное состояние в условиях частого наблюдения за ней никогда не может распасться.

Частота Раби:

$$\Omega_0 = \frac{\vec{d} \cdot \vec{E}}{\hbar}$$

$\vec{d}$  - дипольный момент;  
 $\vec{E}$  - электрическое поле излучения.

Частота Раби характеризует скорость взаимодружественного резонансного излучения с дипольным моментом атома или молекулы.

$V$  - добротность в объёме моды резонатора.

Осцилляции Раби - периодическое изменение населённости уровней двухуровневой квантовой системы в поле электромагнитной волны. Частота осцилляций зависит от интенсивности волны и матричного элемента перехода между уровнями.



$$\lambda^2 - \lambda \left( \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) + \left[ \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \right] = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = f_0 \\ \dot{x}_1 = f_1 \end{cases} \quad \text{div } \vec{F} \quad \vec{x} = \vec{F}(\vec{x})$$

$\text{div } F = 0$  - замкнутый элемент.

$\text{div } F < 0$

$\text{div } F > 0$

$$\lambda^2 - \lambda(T_2 M) + \text{Det } M = 0$$

(SpM)

Пример:  $\ddot{x} + 2\nu \dot{x} + \omega^2 x = 0$

можно указать все особые точки, которые нас интересуют на плоскости.

$$1. \begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = -2\nu x_1 - \omega^2 x_0 \end{cases}$$

Анализ:

1. Стационарные точки:  $x_1^* = 0; x_0^* = 0$ .

2. Характер точек:  $x_i = x_i^* + \delta x_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \dot{x}_0 = \delta x_1 \\ \delta \dot{x}_1 = -2\nu \delta x_1 - \omega^2 \delta x_0 \end{cases}$$

3. Получение характеристического уравнения:

$$\delta x_i = \delta i e^{\lambda t} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + 2\nu \lambda + \omega^2 = 0}$$

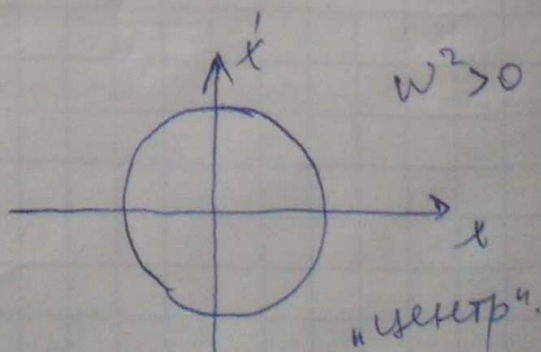
$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega^2}}$$

4. Классификация: 4.1  $\nu > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega^2}$

$$\omega^2 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

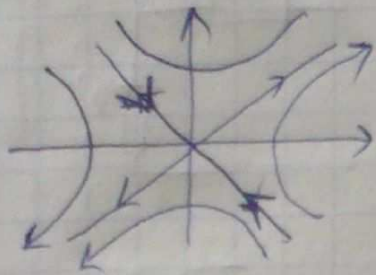
$$\omega^2 < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm |\omega|$$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$





седловая точка при  $\omega^2 < 0$ :

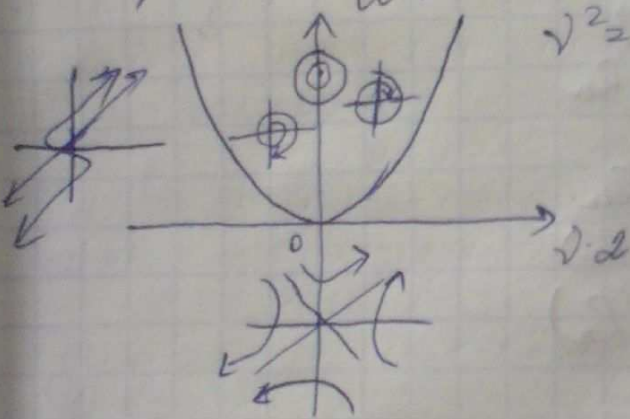


"седло"

4.2

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$  - устойчивый ( $\gamma > 0$ ) фокус  
- неустойчивый ( $\gamma < 0$ ) фокус

пространство параметров.



Пример (когда задача может быть сформулирована в терминах точных отображений)

(I) Задача:  $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$   $\gamma \ll \omega$

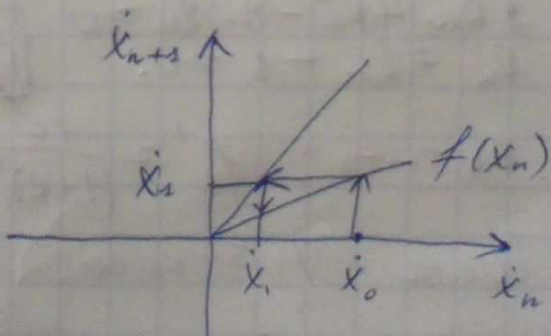
1.  $x = C_1 \sin \omega t e^{-\gamma t}$ ;  $\dot{x} = C_2 \cos \omega t e^{-\gamma t} + O(\gamma)$

2.  $t=0$   $x_0 = C_1$

$t_1 \approx \frac{2\pi}{\omega} \approx T$ ;  $\dot{x}_1 \approx C_2 e^{-\gamma T}$

$t_2 \approx 2T$ ;  $\dot{x}_2 \approx C_2 e^{-2\gamma T}$

$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n K$ ;  $K \approx e^{-\gamma T} < 1$

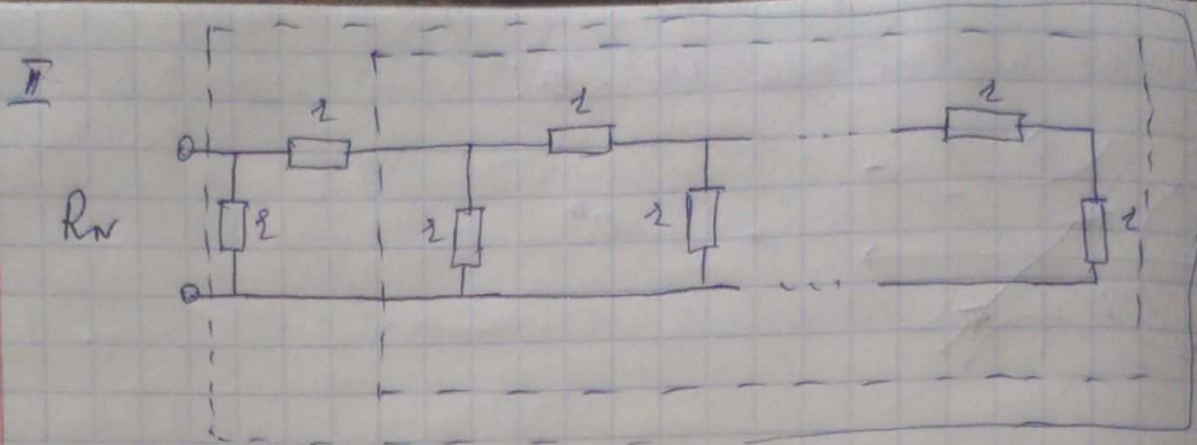


лестница Ляпунова



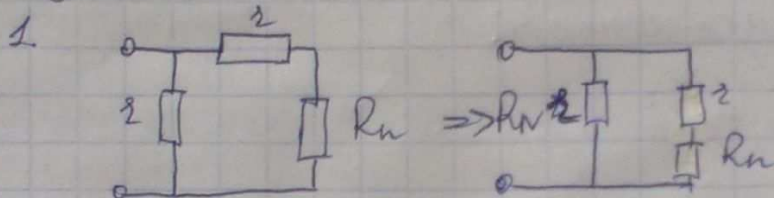
$$\dot{x}_{n+1} = K \cdot \dot{x}_n + P$$





$R_n - ?$

Решение:



$$\frac{1}{R_n} = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2+R_n} \right] = \frac{2+R_n}{2(2+R_n)}$$

$$R_n \equiv R_{n+1} = \frac{2(2+R_n)}{2+R_n} = f(R_n)$$

2. Особенности:  $R_n \equiv \left( \frac{R_n}{2} \right)$

$$R_{n+1} = \frac{4+R_n}{2+R_n} = 1 - \frac{1}{2+R_n} = f(R_n)$$

3. Стационарные точки:

$$R_n = f(R_n)$$

$$2R_n + R_n - 2 - R_n = 0$$

$$R_n^2 + 2R_n - 2 = 0$$

$$R = -1/2 \pm 1/2 \sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)/2$$

4. Уст-во:  $f' = \frac{1}{(1+R)^2} = \frac{4}{3+\sqrt{5}} = 0,145 < 1$

5. Знак Рибонами,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$



число звеньев		%
1	$R_1 = 1$	7,86
2	$R_2 = 2/3$	1,12
3	$R_3 = 5/8$	0,16
4	$R_4 = 13/23$	0,02
5	$R_5 = 34/55$	

## Динамический хаос.

Хаос - случайное поведение.

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t)$$

$$\frac{1}{2} n \approx N$$

$n$  - кол-во уравнений;  $N$  - кол-во степеней свободы.  
 $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$  не зависят от случайного параметра  
и  $x_i(t)$  ведёт себя случайным образом  $\rightarrow$  в такой  
сист. уравнений есть динамический хаос.

Для существования динамического хаоса необходимо следующие условия:

- 1) При любых 2-х бесконечно близких начальных условиях зависимость  $x_i(t)$  от  $t$  отличается на  $\infty$ -мале.
- 2) Сист. уравнений должна быть нелинейной.
- 3) кол-во уравнений в системе  $> 3$ .