Задачи по курсу «Электродинамика сплошных сред», предлагаемые студентам 3 курса ФТФ и ФЭФ в 6 семестре

В порядковом номере задачи в скобках указывается либо номер этой же задачи в «Сборнике задач по электродинамике» В.В. Батыгина и И.Н. Топтыгина, либо номер задачи и страница в учебнике «Электродинамика сплошных сред» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, издание 1982 г. (сокращенно – ЭСС).

I. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Задание 1.

1 (69). Бесконечная плоская плита толщиной a равномерно заряжена по объёму с плотностью ρ. Найти потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля.

2 (70). Заряд распределен в пространстве по периодическому закону $\rho = \rho_0 \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z$, образуя бесконечную пространственную периодическую решетку. Найти потенциал φ электрического поля.

3 (71). Плоскость $z = 0$ заряжена с плотностью, меняющейся по закону $\sigma = \sigma_0 \sin\alpha x \sin\beta y$, где σ_0, α, β – постоянные. Найти потенциал φ этой системы зарядов.

4 (73). Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нити.

5 (74). Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля равномерно заряженного прямолинейного отрезка длиной $2a$, занимающего часть оси z от $-a$ до $+a$; заряд отрезка q.

6 (75). Найти форму эквипотенциальных поверхностей равномерно заряженного отрезка, рассмотренного в предыдущей задаче.

7 (76). Найти потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля шара, равномерно заряженного по объему. Радиус шара R, заряд q.

8 (78). Внутри шара радиуса R, равномерно заряженного по объему с плотностью ρ, имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой R_1, а центр отстоит от центра шара на расстояние a ($a + R_1 < R$). Найти электрическое поле $\mathbf{E}$ в полости.

Задание 2.

9 (79). Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), заряжено с объемной плотностью $\rho = \alpha/r^2$. Найти полный заряд q, потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля. Рассмотреть предельный случай $R_2 \to R_1$, считая при этом $q = \text{const}$.

10 (117). Равномерно заряженные нити, несущие заряды $\varkappa_1$ и $-\varkappa_2$ на единицу длины, параллельны между собой и отстоят друг от друга на расстояние h. Найти, при каком соотношении между $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ в числе поверхностей равного потенциала этой системы будут круговые цилиндры конечного радиуса. Определить радиусы и положение осей цилиндров.

11 (118). Точечные заряды q_1 и $-q_2$ находятся на расстоянии h друг от друга. Показать, что в числе поверхностей равного потенциала этой системы имеется сфера конечного радиуса. Определить координаты ее центра и радиус.

12 (123). Центры двух шаров с зарядами q_1 и q_2 находятся на расстоянии a друг от друга ($a > R_1 + R_2$, где R_1, R_2 – радиусы шаров). Заряды распределены сферически симметричным образом. Найти энергию взаимодействия U шаров и действующую между ними силу F.

13 (147). Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен α_0. Внутри угла находится точечный заряд q. Найти методом электрических изображений электрическое поле. Рассмотреть случай $\alpha_0 = 90°$.

II. ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

Задание 3.

14 (129). Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти потенциал φ, напряженность $\mathbf{E}$, индукцию $\mathbf{D}$ электрического поля.

15 (130). От некоторой прямой, на которой находится точечный заряд q, расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла α_1, α_2, α_3 ($\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 2\pi$). Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью ε_1, ε_2, ε_3 соответственно. Определить потенциал φ, напряженность $\mathbf{E}$ и индукцию $\mathbf{D}$ электрического поля в трех областях.

16 (131). Центр проводящего шара радиуса a, заряд которого q, находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти потенциал φ электрического поля, а также распределение заряда σ на шаре.

17 (132). Пространство между обкладками сферического конденсатора частично заполнено диэлектриком, расположенным внутри телесного угла Ω с вершиной в центре обкладок. Радиусы обкладок a и b, проницаемость диэлектрика ε. Найти емкость C конденсатора.

18 (134). Сферический конденсатор с радиусами обкладок a и b заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния r до центра по закону $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 a^2/r^2$. Показать, что емкость такого конденсатора равна емкости плоского конденсатора, заполненного однородным диэлектриком с проницаемостью ε_0, у которого площадь обкладки $4\pi a^2$, расстояние между обкладками $b-a$ (краевым эффектом пренебречь).

19 (135). Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по линейному закону $\varepsilon = \varepsilon_0(x+a)/a$, где a – расстояние между обкладками, ось x направлена перпендикулярно обкладкам, площадь которых S. Пренебрегая краевым эффектом, найти емкость C такого конденсатора и распределение в нем связанных зарядов, если к обкладкам приложена разность потенциалов V.

Задание 4: Решить методом изображений.

20 (153*). Проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q, отстоящего от центра шара на расстояние $a > R$. Система погружена в однородный диэлектрик с проницаемостью ε. Найти потенциал φ и распределение σ индуцированных зарядов на шаре, если задан: а) потенциал шара V (на бесконечности $\varphi = 0$); б) заряд шара Q. Представить потенциал в виде суммы потенциалов нескольких точечных зарядов – изображений.

21 (154). В проводнике с потенциалом V имеется сферическая полость радиуса R, заполненная диэлектриком с проницаемостью ε. На расстоянии a от центра полости ($a < R$) находится точечный заряд q. Определить поле в полости. Найти эквивалентную систему зарядов – изображений.

22 (155). Заземленная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса a. Центр сферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы, на расстоянии $b > a$ от плоскости находится заряд q. Используя метод изображений, найти поле φ, а также заряд Q, индуцированный на выступе.

23 (156). Проводящий шар радиуса R_1 находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_1. Внутри шара имеется сферическая полость радиуса R_2, заполненная однородным диэлектриком с проницаемостью ε_2. В полости на расстоянии a от ее центра ($a < R_2$) расположен точечный заряд q. Найти поле φ во всем пространстве.

Задание 5: Решить задачи с помощью уравнения Пуассона (сферические координаты).

20 (153*). Проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q, отстоящего от центра шара на расстояние $a > R$. Система погружена в однородный диэлектрик с проницаемостью ε. Найти потенциал φ и распределение σ индуцированных зарядов на шаре, если задан: а) потенциал шара V (на бесконечности $\varphi = 0$); б) заряд шара Q.
Указание: Использовать решение уравнения Лапласа в виде ряда по шаровым гармоникам и разложение поля точечного заряда.

21 (154). В проводнике с потенциалом V имеется сферическая полость радиуса R, заполненная диэлектриком с проницаемостью ε. На расстоянии a от центра полости ($a < R$) находится точечный заряд q. Определить поле в полости.

24 (157*). Диэлектрический шар радиуса R с проницаемостью ε_1 находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_2. На расстоянии $a > R$ от центра шара расположен точечный заряд q. Найти поле φ во всем пространстве и получить соответствующим предельным переходом поле проводящего шара; найти также силу, действующую на заряд q вследствие созданной им поляризации шара. Как изменится эта сила, если поместить симметрично относительно центра диэлектрического шара другой такой же точечный заряд?

25 (158). Точечный заряд q находится внутри диэлектрического шара радиуса R с проницаемостью ε_1 на расстоянии a от центра шара. Диэлектрическая проницаемость среды вне шара равна ε_2. Найти поле во всем пространстве. Рассмотреть, в частности, случай $a = 0$ (заряд в центре шара).

Задание 6.

26 (161). Найти энергию U и силу F взаимодействия точечного заряда q с заземленным проводящим шаром радиуса R. Заряд находится на расстоянии a от центра шара. Система помещена в однородную диэлектрическую среду с проницаемостью ε.

27 (162). Точечный заряда q находится в диэлектрике на расстоянии a от центра проводящей изолированной сферы радиуса R. Заряд сферы Q. Найти энергию U и силу F взаимодействия заряда со сферой.

28 (164*). Электрический диполь $\mathbf{p}$ находится в однородном диэлектрике на расстоянии r от центра заземленного проводящего шара радиуса R. Найти систему изображений, эквивалентную индуцированным зарядам, энергию взаимодействия U диполя с шаром, силу F и вращательный момент N, приложенные к диполю. Рассмотреть предельный случай $r \to R$ ($r > R$).

29 (165). В проводнике вырезана сферическая полость радиуса R. В центре полости находится электрический диполь с моментом $\mathbf{p}$. Найти распределение σ зарядов, индуцированных на поверхности полости. Какое поле $\mathbf{E}'$ создается в полости этими зарядами?

Задание 7.

30 (172). Электростатическое поле образовано двумя проводящими цилиндрами с параллельными осями, радиусами R_1, R_2 и зарядами на единицу длины $\pm\varkappa$. Расстояние между осями цилиндров $a > R_1 + R_2$. Найти взаимную емкость $C_{\text{вз}}$ цилиндров на единицу длины. ($C_{\text{вз}} = \varkappa/(\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 – потенциалы цилиндров).
Указание: Воспользоваться результатом задачи **10 (117)**.

31 (174). Конденсатор образован двумя цилиндрическими проводящими поверхностями с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. Расстояние между осями цилиндров $a < R_2 - R_1$. Найти емкость C конденсатора.

32 (175). Определить поле φ точечного заряда в однородной анизотропной среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik}.

Задание 8.

33 (176). В пустоте находится плоскопараллельная пластинка из анизотропного однородного диэлектрика с тензором проницаемости ε_{ik}. Вне пластинки однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$. Используя граничные условия для вектора поля, определить поле $\mathbf{E}$ внутри пластинки.

34 (177). Найти емкость C плоского конденсатора с площадью обкладок S и расстоянием между ними a, если пространство между обкладками заполнено анизотропным диэлектриком с проницаемостью ε_{ik}. Краевым эффектом пренебречь.

35 [ЭСС №1 с.132]. В проводящую среду погружена система электродов, поддерживаемых при постоянных потенциалах φ_a. С каждого из электродов стекает ток I_a. Определить полное джоулево тепло, выделяющееся в среде за 1 сек.

36 (178). Найти изменение направления линий вектора $\mathbf{E}$ при переходе из пустоты в анизотропный диэлектрик. Воспользоваться результатом задачи **33 (176)**.

III. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

37 (226). В пространство между обкладками плоского конденсатора вставлены две плоскопараллельные проводящие пластинки, плотно прилегающие друг к другу и к обкладкам конденсатора. Пластинки имеют толщины h_1, h_2, проводимости $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и диэлектрические проницаемости ε_1, ε_2. На обкладки конденсатора, изготовленные из материала с проводимостью, много большей чем $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, подана разность потенциалов V. Определить напряженность электрического поля E, электрическую индукцию D и плотность тока j в пластинках, а также плотности свободных σ и связанных $\sigma_{\text{св}}$ зарядов на всех трех границах.

Задание 9.

38 (229). Три проводника с круглыми сечениями одного и того же радиуса r соединены последовательно, образуя замкнутое кольцо. Длины проводников $l_0,\ l_1,\ l_2 \gg r$, проводимости $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. По объему проводника с проводимостью $\varkappa_0$ равномерно распределена сторонняя э.д.с. $\mathcal{E}_0$, не зависящая от времени. Найти электрическое поле E и распределение электрических зарядов внутри кольца.

39 (231). Распределение тока в трехмерном проводнике с проводимостью $\varkappa$ обладает такой симметрией, что во всех точках каждой его эквипотенциальной поверхности напряженность электрического поля, а следовательно, и плотность тока имеют одно и тоже значение. Доказать, что в этом случае сопротивление проводника выражается той же формулой, что и сопротивление квазилинейного проводника с переменным сечением[1].

40 (232). Используя результат предыдущей задачи, найти сопротивления R:
а) сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b, $a < b$, заполненного однородной средой с проводимостью $\varkappa$;
б) такого же конденсатора, заполненного двумя однородными слоями с проводимостями $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ (слой с $\varkappa_1$ прилегает к внутренней обкладке), границей раздела между которыми является сфера радиуса c;
в) цилиндрического конденсатора с радиусами обкладок a и b, $a < b$ и длиной l, заполненного однородной проводимостью $\varkappa$ (краевого эффекта не рассматривать).

41 (233). Заземление осуществляется с помощью проводящего шара радиуса a, наполовину утопленного в землю (проводимость земли $\varkappa_1 = \text{const}$). Слой земли радиуса b, концентрический с шаром и прилегающий к нему, имеет искусственно повышенную проводимость $\varkappa_2$. Найти сопротивление R такого заземлителя.

42 (235). Конденсатор произвольной формы заполнен однородным диэлектриком с проницаемостью ε. Найти емкость C этого конденсатора, если известно, что при заполнении его однородным проводником с проводимостью $\varkappa$ он оказывает постоянному току сопротивление R.

43 (240*). Частицы с зарядом e и массой m могут в неограниченном количестве испускаться плоским электродом $x = 0$. Испущенные с нулевой скоростью частицы ускоряются электрическим полем в направлении к другому электроду, параллельному первому и отстоящему от него на расстояние a. Разность потенциалов между электродами φ_0. Эмиссия из первого электрода продолжается до тех пор, пока поле образовавшегося между электродами объемного заряда с плотностью ρ не скомпенсирует внешнее поле у поверхности первого электрода, так что напряженность электрического поля $E_x(0) = 0$. Найти зависимость плотности стационарного тока j между электродами от разности потенциалов φ_0.
Указание: Потенциал в пространстве между электродами определяется уравнением Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, $\rho = j/v$, где v - скорость частиц в данной точке пространства.

[1] Сформулированные условия совпадают с условиями, при выполнении которых можно пользоваться электростатической теоремой Гаусса в соответствующей электростатической задаче.

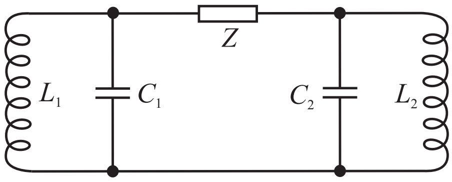

Рис. 1

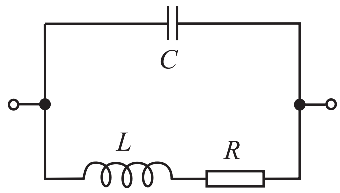

Рис. 2

IV. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Задание 10.

44 (241). Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный с ней провод радиуса a. По этим проводникам текут токи одинаковой величины $\mathscr{I}$ в противоположных направлениях. Определить магнитное поле $\mathbf{H}$, создаваемое такой системой во всех точках пространства. Решить задачу двумя способами: интегрированием уравнений Максвелла и с помощью уравнения Максвелла в интегральной форме.

45 (242). Определить напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ и магнитную индукцию $\mathbf{B}$, создаваемые постоянным током $\mathscr{I}$, текущим по бесконечному цилиндрическому проводнику кругового сечения радиуса a. Магнитная проницаемость проводника равна μ_0, окружающего проводник вещества – μ . Решить задачу наиболее простым способом – с помощью уравнения Максвелла в интегральной форме, а также путем введения векторного потенциала $\mathbf{A}$.

46 (243). Решить предыдущую задачу для полого цилиндрического проводника (внутренний радиус a, наружный b).

47 (244). Прямолинейная, бесконечно длинная полоса имеет ширину a. Вдоль полосы течет ток $\mathscr{I}$, равномерно распределенный по ее ширине. Найти магнитное поле $\mathbf{H}$. Проверить результат, рассмотрев предельный случай поля на больших расстояниях.

Задание 11.

48 (246). Найти векторный потенциал $\mathbf{A}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$, создаваемые двумя прямолинейными параллельными токами $\mathscr{I}$, текущими в противоположных направлениях. Расстояние между токами $2a$.

49 (247). Определить магнитное поле $\mathbf{H}$, создаваемые двумя параллельными плоскостями, по которым текут токи с одинаковыми поверхностными плотностями $i = \text{const}$. Рассмотреть два случая: а) токи текут в противоположных направлениях; б) токи направлены одинаково.

50 (248). Определить магнитное поле $\mathbf{H}$ в цилиндрической полости, вырезанной в бесконечно длинном проводнике. Радиусы полости и проводника соответственно a и b, расстояние между их параллельными осями d $(b > a + d)$. Ток $\mathscr{I}$ распределен равномерно по сечению.

Указание: Использовать принцип суперпозиции полей.

51 (252). Определить магнитное поле $\mathbf{H}$ на оси соленоида с густой намоткой, имеющего форму цилиндра. Высота цилиндра h, радиус a, число витков на единицу длины n, сила тока $\mathscr{I}$.

52 (262). Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный провод радиуса a, магнитная проницаемость которого μ_0. Пространство между проводом и оболочкой заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ. Найти коэффициент самоиндукции $\mathscr{L}$ такой линии на единицу длины.

53 (263). Линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек с радиусами a и b $(a < b)$, пространство между ними заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ. Найти коэффициент самоиндукции $\mathscr{L}$ на единицу длины.

V. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Задание 12.

54 (354). Определить собственные частоты ω_1, ω_2 электрических колебаний в двух контурах (рис. 1), связь между которыми осуществляется через емкость C $(Z = i/\omega C)$.

Указание: Составить систему уравнений для определения токов и приравнять нулю определитель системы.

55 (355). Решить предыдущую задачу для случая, когда связь между контурами осуществляется через индуктивность. (см. рис. 1, $Z = -i\omega L/c^2$).

56 (356). Найти собственные частоты колебаний $\omega_{1,2}$ в двух индуктивно связанных контурах с емкостями C_1, C_2, индуктивностями L_1, L_2 и коэффициентом взаимной индукции L_{12}.

57 (358). В контур с индуктивностью L_1, емкостью C_1 и сопротивлением R_1 включена сторонняя э.д.с. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$. С этим контуром индуктивно связан второй контур, параметры которого L_2, C_2 и R_2; коэффициент взаимной индукции L_{12}. Определить токи $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$ в обоих контурах. Рассмотреть, в частности, случай, когда второй контур содержит только индуктивность $(R_2 = 0,\ C_2 = \infty)$; определить частоту ω, при которой ток $\mathscr{I}_1$ максимален.

58 (359). Найти комплексное сопротивление Z участка цепи (двухполюсника), изображенного на рис. 2.

59 [ЭСС №2 стр.301]. Определить собственные частоты электрических колебаний для цепи из параллельно соединенных сопротивления R, емкости C и самоиндукции L.

VI. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Задание 13.

60 (675). Доказать, что при равномерном движении заряженной свободной частицы в среде с показателем преломления $n(\omega)$ (масса частицы m, заряд e, скорость $\mathbf{v}$) может происходить излучение электромагнитных волн (эффект Вавилова–Черенкова)[2]. Выразить угол θ между направлением распространения волны и направлением скорости $\mathbf{v}$ частицы через v, ω, $n(\omega)$.

Указание: В покоящейся среде с показателем преломления $n(\omega)$ фотон обладает энергией $\mathcal{E} = \hbar\omega$ и импульсом $p = n(\omega)\frac{\hbar\omega}{c}$.

61 (676). Доказать, что свободный электрон, движущийся в среде со скоростью v может поглощать электромагнитные волны, частоты ω которых удовлетворяют неравенству $v > c/n(\omega)$, где $n(\omega)$ – показатель преломления среды.

62 (677). Частица, имеющая, вообще говоря, сложную структуру и содержащая внутри себя электрические заряды (например, атом), движется равномерно со скоростью $\mathbf{v}$ в среде с показателем преломления $n(\omega)$ и находится в возбужденном состоянии. При переходе в нормальное состояние частица излучает квант с частотой ω_0 (в системе покоя). Этот квант наблюдается в лабораторной системе отсчета под углом ϑ к направлению движения частицы. Какая частота ω наблюдается в лабораторной системе (эффект Допплера в преломляющей среде)? Рассмотреть, в частности, случай $\omega_0 \to 0$.

Указание: Члены второго порядка по $\hbar$ не учитывать, считать, что $\hbar\omega_0 \ll mc^2$, где m – масса частицы.

63 [ЭСС №1 стр.411]. Найти закон обращения коэффициента отражения в 1 вблизи угла полного отражения.

64 [ЭСС №2 стр.411]. Найти коэффициент отражения при почти скользящем падении света из пустоты на поверхность тела с близким к 1 значением ε.

[2] Аналогичный эффект может иметь место также при прохождении через вещество нейтральной частицы, обладающей электрическим или магнитным моментом.

Вспомогательный материал и ответы к задачам по курсу «Электродинамика сплошных сред», предлагаемые студентам 3 курса ФТФ и ФЭФ в 6 семестре

I. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

В этой главе содержатся задачи на определение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ и напряженности поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ по заданному распределению зарядов, характеризуемому объемной $\rho(\mathbf{r})$, поверхностной $\sigma(\mathbf{r})$ или линейной $\varkappa(\mathbf{r})$ плотностью. Распределение точечных зарядов может быть описано объемной плотностью $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$, где q_i – величина i-го заряда, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-го заряда, $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$ – δ-функция Дирака. Напряженность электрического поля удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{1}$$

Бывает полезна интегральная форма первого из этих уравнений (электростатическая теорема Гаусса):

$$\oint_S E_n\, dS = 4\pi q, \tag{2}$$

где S – некоторая замкнутая поверхность, q – полный заряд внутри этой поверхности. Потенциал и напряженность электрического поля связаны соотношениями

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}, \quad \varphi(\mathbf{r}_0) = 0. \tag{3}$$

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{4}$$

Потенциал непрерывен и конечен во всех точках пространства, где нет точечных зарядов.

Задание 1.

1 (69). $\varphi_1 = -2\pi\rho z^2$, $\mathbf{E}_1 = -4\pi\rho z\mathbf{e}_z$ $\left(|z| < \dfrac{a}{2}\right)$; $\quad \varphi_2 = -\dfrac{1}{2}\pi\rho a\,(4|z|-a)$, $\mathbf{E}_2 = -2\pi\rho a\dfrac{z}{|z|}\mathbf{e}_z$ $\left(|z| > \dfrac{a}{2}\right)$.
Ось z направлена по нормали к поверхности плиты.

2 (70). $\varphi(x,y,z) = \dfrac{4\pi\rho_0}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos\alpha x\cos\beta y\cos\gamma z$.

3 (71). При $z>0$: $\varphi = \dfrac{2\pi\sigma_0}{\lambda}e^{-\lambda z}\sin\alpha x\sin\beta y$; при $z<0$: $\varphi = \dfrac{2\pi\sigma_0}{\lambda}e^{\lambda z}\sin\alpha x\sin\beta y$, $\lambda = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Экспоненциальное убывание потенциала вдоль оси z объясняется тем, что плоскость содержит разноименно заряженные участки.

4 (73). $\varphi = -2\varkappa\ln r$, $E = \dfrac{2\varkappa}{r}$, где $\varkappa$ – заряд на единицу длины.
Произвольная постоянная в потенциале выбрана так, что $\varphi = 0$ при $r = 1$.

5 (74). $\varphi(x,y,z) = -\dfrac{q}{2a}\ln\left|\dfrac{z-a+\sqrt{(z-a)^2+x^2+y^2}}{z+a+\sqrt{(z+a)^2+x^2+y^2}}\right|$.

6 (75). Введем обозначения $z_1 = z+a$, $z_2 = z-a$, $r_{1,2} = \sqrt{x^2+y^2+z_{1,2}^2}$, $C = \dfrac{z_1+r_1}{z_2+r_2}$.
Из результата предыдущей задачи следует, что (нужно учесть, что $z_1 - z_2 = 2a$, $\; r_1^2 - r_2^2 = z_1^2 - z_2^2$)

$$r_1 + r_2 = 2a\frac{C+1}{C-1} = \text{const}. \tag{5}$$

Равенство (5) показывает, что эквипотенциальные поверхности представляют собой эллипсоиды вращения, фокусы которых совпадают с концами отрезка.

7 (76). $\varphi_1(r) = \dfrac{q}{R}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{r^2}{2R^2}\right)$, $\mathbf{E}_1(r) = \dfrac{q\mathbf{r}}{R^3}$ $(r\leqslant R)$; $\quad \varphi_2(r) = \dfrac{q}{r}$, $\mathbf{E}_2(r) = \dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}$ $(r\geqslant R)$.

8 (78). Электрическое поле в полости однородно: $\mathbf{E} = \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r} - \dfrac{4}{3}\pi\rho(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{a}$.

Задание 2.

9 (79). $q = 4\pi\alpha(R_2-R_1)$; $E_1 = 0$, $\varphi_1 = \dfrac{q}{R_2-R_1}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ при $r\leqslant R_1$; $E_2 = \dfrac{q(r-R_1)}{(R_2-R_1)r^2}$, $\varphi_2 = \dfrac{q}{R_2-R_1}\left(1-\ln\dfrac{r}{R_2}-\dfrac{R_1}{r}\right)$ при $R_1\leqslant r\leqslant R_2$; $E_3 = \dfrac{q}{r^2}$, $\varphi_3 = \dfrac{q}{r}$ при $r\geqslant R_2$; При $R_2\to R_1 \equiv R$ и фиксированном значении заряда q получаем поле сферы, равномерно заряженной по поверхности.

10 (117). Выберем цилиндрическую систему координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра (рис. 3). Вместо условия $\varphi|_S = \text{const}$ на поверхности S цилиндра удобнее использовать вытекающее из него условие $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|_S = 0$. В результате дифференцирования получим

$$\frac{\varkappa_1 x_1}{R^2+x_1^2-2Rx_1\cos\alpha} = \frac{\varkappa_2 x_2}{R^2+x_2^2-2Rx_2\cos\alpha}.$$

Освободимся от знаменателей и приравняем по отдельности члены с $\cos\alpha$ и без него. В результате получим, что при $\varkappa_1 = \varkappa_2$ эквипотенциальной поверхностью будет любая цилиндрическая поверхность, ось которой параллельна

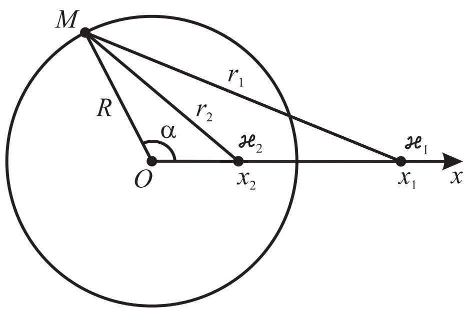

Рис. 3

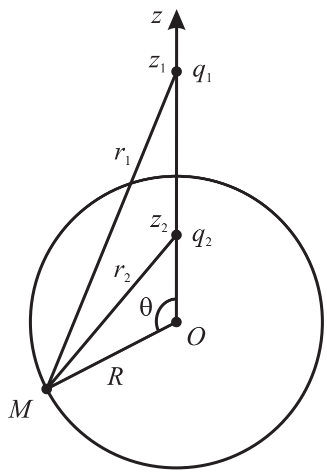

Рис. 4

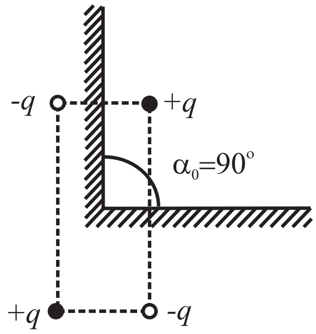

Рис. 5

заряженным нитям и лежит с ними в одной плоскости, а радиус удовлетворяет условию $R^2 = x_1 x_2$. При $x_1 = 0$ существует решение $\varkappa_2 = 0$. этот случай соответствует цилиндрическим эквипотенциальным поверхностям в поле одной нити.

11 (118). Воспользуемся рис. 4. Радиус R искомой сферы и положение ее центра определяются уравнениями

$$R^2 = z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2}.$$

Потенциал на поверхности этой сферы равен нулю.

12 (123). $U = \dfrac{q_1 q_2}{a}$, $F = \dfrac{q_1 q_2}{a^2}$.

13 (147). Поле внутри двугранного угла создается системой зарядов, изображенной на рис. 5.

II. ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

Электростатическое поле в диэлектрике характеризуется вектором напряженности электрического поля **E** и вектором электрической индукции **D**, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{6}$$

или в интегральной форме

$$\oint_l E_l\, dl = 0, \quad \oint_S D_n\, dS = 4\pi q, \tag{7}$$

где ρ – плотность свободных зарядов в диэлектрике, q – полный свободный заряд, заключенный внутри поверхности S. Плотность связанных зарядов в диэлектрике можно выразить через вектор поляризации **P** (электрический дипольный момент единицы объема диэлектрика, создаваемый связанными зарядами):

$$\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}. \tag{8}$$

Вектор поляризации **P** выражается через **E** и **D**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \tag{9}$$

Для изотропных диэлектриков в достаточно слабых полях

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{10}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды. В анизотропных диэлектриках ε – тензор II ранга, т.е.

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \tag{11}$$

(суммирование по k). Для описания поля удобно пользоваться скалярной величиной – потенциалом φ:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}, \tag{12}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения, $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$.

Потенциал удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\varphi) = -4\pi\rho, \tag{13}$$

которое в тех областях, где диэлектрик однороден, сводится к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{14}$$

На поверхностях раздела сред с разными диэлектрическими проницаемостями должны выполняться граничные условия[3]

[3] Граничные условия в форме (15) имеют место как в изотропных, так и в анизотропных средах.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \tag{15}$$

или

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \tag{16}$$

Орт нормали $\mathbf{n}$ проведен из первой среды во вторую; τ – орт, касательный к поверхности, σ – поверхностная плотность свободных зарядов. Поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{св}}$ на границах раздела определяется формулой

$$\sigma_{\text{св}} = P_{1n} - P_{2n}. \tag{17}$$

Основная задача электростатики – нахождение потенциала φ электрического поля. Она может быть решена разными методами. Основным методом является решение дифференциальных уравнений (13) или (14) с граничными условиями (15) или (16). Иногда удается подобрать такую систему фиктивных точечных зарядов, поле которой в рассматриваемой области удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и граничным условиям (метод изображений). В ряде случаев удается найти систему изображений простым подбором (см., например, далее, задачи **20–23**).

Внутри проводников, находящихся в постоянном электрическом поле, $E = 0$. Поэтому, граничные условия на поверхности проводника имеют вид:

$$E_\tau = 0, \quad \varphi = \text{const}. \tag{18}$$

Если некоторая область пространства занята диэлектриком с проницаемостью ε, и известно электростатическое поле во всем пространстве, то при $\varepsilon \to \infty$ это поле принимает такой же вид, какой оно имело бы, если бы данная область была занята проводником.

Задача об определении электрического поля, создаваемого заданной ограниченной системой заряженных проводников, находящихся в диэлектрике, имеет единственное решение, если известен либо полный заряд каждого проводника, либо его потенциал. В первом из этих случаев, наряду с условиями (18) нужно использовать граничное условие

$$q = \oint_S \sigma\, dS = \oint_S \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS, \tag{19}$$

где q – заряд проводника, а интеграл берется по поверхности проводника.

Емкостью C конденсатора называется отношение заряда на одной из обкладок (первой) к разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}\,. \tag{20}$$

Емкостью C уединенного проводника называется отношение заряда проводника к его потенциалу (при этом нужно считать, что потенциал $\varphi = 0$ на бесконечности).

Задание 3.

14 (129). $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\dfrac{q}{r}, \quad \mathbf{D}_1 = \dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{D}_2 = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}.$

15 (130). $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dfrac{2\pi}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3}\dfrac{q}{r}, \quad \mathbf{D}_i = \dfrac{2\pi\varepsilon_i}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3}\dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}.$

16 (131). Граничным условием ($\varphi = \text{const}$ на поверхности проводника и $\varphi = 0$ при $r \to \infty$) можно удовлетворить потенциалом вида $\varphi = C/r$; постоянная C определяется из условия $\oint_S D_n\, dS = 4\pi q$, $C = 2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Отсюда находим распределение поверхностных зарядов:

$$\sigma_1 = \frac{q\varepsilon_1}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{q\varepsilon_2}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}; \quad \sigma_{1\text{св}} = \frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_{2\text{св}} = \frac{q(\varepsilon_2 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

17 (132). $C = \left[\dfrac{(\varepsilon - 1)\Omega}{4\pi} + 1\right]\dfrac{ab}{b - a}.$

19 (135). Емкость конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi a \ln 2}.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma_{\text{св}} = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \text{ при } x = 0, \quad \sigma_{\text{св}} = \sigma\left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_0}\right) \text{ при } x = a.$$

Объемная плотность

$$\rho_{\text{св}} = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0 (x + a)^2}.$$

($\sigma = \varepsilon V/(4\pi a \ln 2)$ – поверхностная плотность заряда обкладки при $x = 0$).

Задание 4: Решить методом изображений.

20 (153*). Так как поверхность шара является эквипотенциальной, то, в соответствии с задачей **11 (118)**, потенциал, создаваемый индуцированными на шаре зарядами, эквивалентен потенциалу, создаваемому точечным зарядом-изображением q' (см. рис. 6),

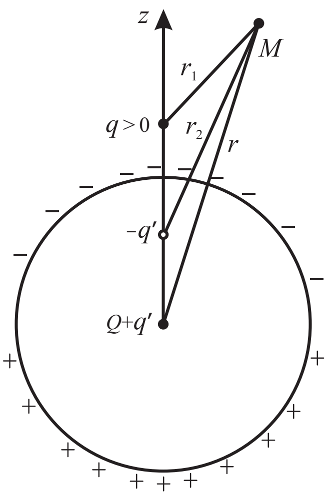

Рис. 6

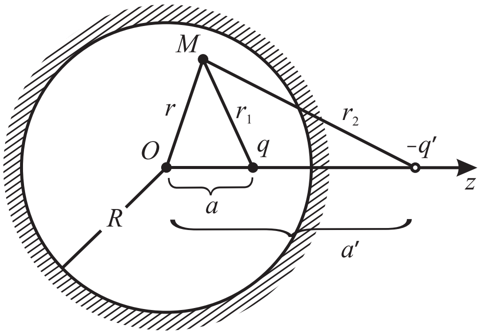

Рис. 7

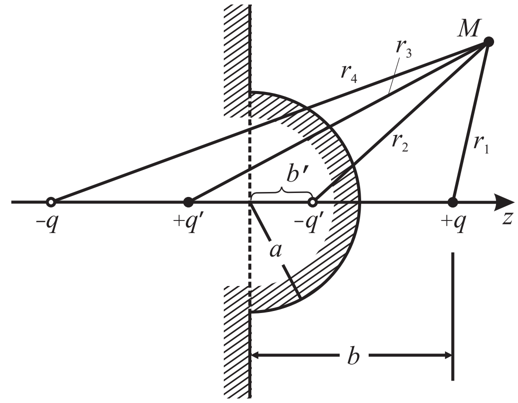

Рис. 8

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} - \frac{q'}{\varepsilon r_2}, \quad \text{где } q' = qR/a,\ r_2 = \sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r\cos\theta},\ a' = R^2/a.$$

В случае а) поверхность шара поддерживается при постоянном потенциале V. Это эквивалентно помещению дополнительного заряда Q' в центр шара, $\varphi(R) = [Q'/(\varepsilon r)]|_{r=R} = V$. Отсюда $Q' = V\varepsilon R$, а значит

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{VR}{\varepsilon r} - \frac{q'}{\varepsilon r_2}.$$

Поверхностную плотность заряда можно определить из граничных условий (16),

$$\sigma(R,\theta) = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\varepsilon V}{4\pi R} - \frac{q(a^2-R^2)}{4\pi R(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}}.$$

В случае б) потенциал V неизвестен и должен быть выражен через заряд Q шара. Очевидно,

$$Q = 2\pi\int \sigma(R,\theta)R^2\sin\theta d\theta = \varepsilon VR - \frac{qR}{a}.$$

откуда $V = Q/(\varepsilon R) + q/(\varepsilon a)$. В результате получим

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{Q+q'}{\varepsilon r} - \frac{q'}{\varepsilon r_2}.$$

Таким образом, потенциал точечного заряда и заряженного шара в области $r > a$ сводится к потенциалу четырех точечных зарядов, расположенных на оси симметрии: заряда q на расстоянии a от начала координат и трех его изображений – зарядов Q и $q' = qR/a$ в начале координат и заряда $-q'$ в гармонически сопряженной относительно поверхности шара точке $a' = R^2/a$. Заряд $-q'$ описывает действие зарядов, индуцированных на ближайшей к q стороне поверхности шара. Знак этих зарядов, очевидно, противоположен знаку q. Заряд $+q'$ описывает действие зарядов одного с q знака, индуцированных на удаленной от q части шара.

21 (154). $\varphi(M) = \dfrac{q}{\varepsilon r_1} - \dfrac{q'}{\varepsilon r_2} + V$ (рис. 7), где $q' = q\dfrac{R}{a},\ a' = \dfrac{R^2}{a}$.

22 (155). $\varphi(M) = \dfrac{q}{r_1} - \dfrac{q'}{r_2} + \dfrac{q'}{r_3} - \dfrac{q}{r_4}$ (рис. 8), где $q' = q\dfrac{a}{b},\ b' = \dfrac{a^2}{b}$. Заряд на выступе $Q = -q\left[1 - \dfrac{b^2-a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\right]$.

23 (156). $\varphi \equiv \varphi_1 = \dfrac{q}{\varepsilon_1 r_1}$ – вне шара, $\varphi \equiv \varphi_3 = \dfrac{q}{\varepsilon_1 R_1}$ – в проводнике, $\varphi \equiv \varphi_2 = \dfrac{q}{\varepsilon_2 r_1} - \dfrac{q'}{\varepsilon_2 r_2} + \dfrac{q}{\varepsilon_1 R_1}$ – в полости (рис. 9), где $q' = q\dfrac{R_2}{a},\ a' = \dfrac{R_2^2}{a}$.

Задание 5: Решить задачи с помощью уравнения Пуассона (сферические координаты).

20 (153*). Выберем полюс сферической системы координат в центре шара (рис. 6), полярную ось проведем через точечный заряд. Будем искать потенциал в форме

$$\varphi(r,\theta,\alpha) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \sum_{l,m}\left(a_{lm}r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right)P_{lm}(\cos\theta)e^{im\alpha}, \tag{21}$$

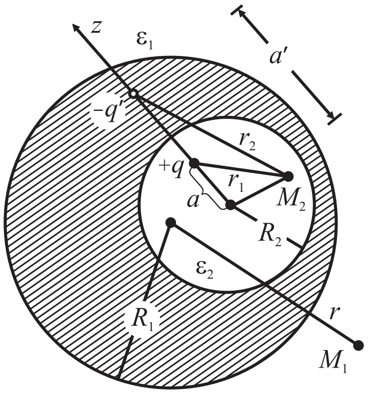

Рис. 9

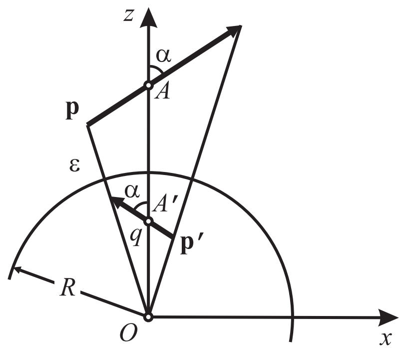

Рис. 10

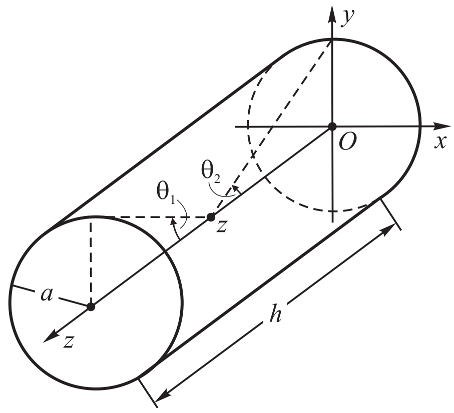

Рис. 11

где r_1 – расстояние от q_1 до точки наблюдения. Ряд, входящий в (21), описывает поле зарядов, индуцированных на шаре. Это поле должно исчезать на бесконечности, поэтому $a_{lm} = 0$. Вследствие симметрии потенциал не зависит от угла α, поэтому члены с $m \neq 0$ также отсутствуют. Оставшиеся константы $b_l \equiv b_{l0}$ определим из граничных условий.

В случае а) потенциал шара $\varphi(r,\theta) = V = \text{const}$. Воспользуемся разложением поля для точечного заряда по шаровым гармоникам (ответ к задаче **(96)**; заряд q находится в точке с координатами $(r_0, \theta_0, \alpha_0)$):

$$\varphi(r,\theta,\alpha) = q\sum_{l,\,m}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r^l}{r_0^{l+1}}Y^*_{lm}(\theta_0,\alpha_0)Y_{lm}(\theta,\alpha), \quad \text{при} \quad r < r_0;$$

$$\varphi(r,\theta,\alpha) = q\sum_{l,\,m}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_0^l}{r^{l+1}}Y^*_{lm}(\theta_0,\alpha_0)Y_{lm}(\theta,\alpha), \quad \text{при} \quad r > r_0.$$

В результате получим выражение для потенциала на шаре

$$\varphi(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{qR^l}{\varepsilon a^{l+1}} + \frac{b_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) = V.$$

Отсюда $b_l = -\dfrac{qR^{2l+1}}{\varepsilon a^{l+1}}$ при $l \neq 0$, $b_0 = VR - \dfrac{Rq}{\varepsilon a}$, так что потенциал вне шара:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{VR}{r} - \frac{qR}{\varepsilon a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R^2}{a}\right)^l\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}. \tag{22}$$

Теперь находим плотность зарядов, наведенных на поверхности шара:[4]

$$\sigma(R,\theta) = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\varepsilon V}{4\pi R} - \frac{q}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{R^{l+1}}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta). \tag{23}$$

В случае б) потенциал V неизвестен и должен быть выражен через заряд Q шара. Очевидно,

$$Q = 2\pi\int\sigma(R,\theta)R^2\sin\theta d\theta = \varepsilon VR - \frac{qR}{a}.$$

откуда $V = Q/(\varepsilon R) + q/(\varepsilon a)$. В результате получим

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{Q+q'}{\varepsilon r} - \frac{qR}{\varepsilon a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R^2}{a}\right)^l\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}, \quad \text{где } q' = qR/a.$$

21 (154). $\varphi(M) = \dfrac{q}{\varepsilon r_1} - \dfrac{q}{\varepsilon R}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{ar}{R^2}\right)^l P_l(\cos\theta) + V.$

24 (157*). $\varphi_1(r,\theta) = q\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{2l+1}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}\cdot\dfrac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)$ при $r \leq R$;

$\varphi_2(r,\theta) = \dfrac{q}{\varepsilon_2 r_1} + q\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{l}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}\cdot\dfrac{R^{2l+1}}{a^{l+1}}\dfrac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}$ при $r \geq R$,

[4] Члены, подобные последнему слагаемому в (22), иногда могут быть преобразованы в потенциал фиктивного точечного заряда с помощью выражения для производящей функции для полиномов Лежандра, $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$

где r_1 – расстояние от q до точки наблюдения. Здесь потенциал не может быть представлен простой системой изображений, в отличие от случая проводящего шара. При $\varepsilon \to \infty$ получим результат задачи **20 (153)**.

25 (158). $\varphi_1(r,\theta) = \dfrac{q}{\varepsilon_1 r_1} + q\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{l+1}{\varepsilon_1 l+\varepsilon_2(l+1)}\cdot\dfrac{a^l r^l}{R^{2l+1}}P_l(\cos\theta)$ при $r\le R$;

$\varphi_2(r,\theta) = q\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{2l+1}{\varepsilon_1 l+\varepsilon_2(l+1)}\cdot\dfrac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$ при $r\ge R$,

где r_1 – расстояние от точки наблюдения до заряда q. При $a=0$, $\varphi_1 = \dfrac{q}{\varepsilon_1 r}\left(1-\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\dfrac{q}{\varepsilon_2 R}$, $\varphi_2 = \dfrac{q}{\varepsilon_2 r}$.

Задание 6.

26 (161). При увеличении заряда q на dq энергия U его взаимодействия с шаром возрастает на $dU = \varphi' dq$, где φ' – потенциал индуцированных на шаре зарядов. Но этот потенциал сам пропорционален q: $\varphi' = \mathrm{const}\cdot q$. Поэтому

$$U = \int\limits_0^q dU = \frac{\mathrm{const}}{2}\,q^2 = \frac{1}{2}\,\varphi' q. \tag{24}$$

Если бы величина φ' не зависела от q (потенциал внешнего поля), то энергия взаимодействия была бы вдвое больше ($U=\varphi' q$). Используя (24) и результаты задачи **20 (153)**, получим

$$U = -\frac{q^2 R}{2\varepsilon(a^2-R^2)}, \quad \text{откуда} \quad F = -\frac{q^2 a R}{\varepsilon(a^2-R^2)^2}.$$

27 (162). $U = \dfrac{Qq}{\varepsilon a} - \dfrac{q^2R^3}{2a^2\varepsilon(a^2-R^2)}$; $F = \dfrac{Qq}{\varepsilon a^2} - \dfrac{q^2R^3(2a^2-R^2)}{\varepsilon a^3(a^2-R^2)^2}$.

В случае одноименных зарядов $Qq>0$, и сила взаимодействия может обратиться в нуль, а при достаточно больших q или малых расстояниях a – даже стать отрицательной (притяжение).

28 (164*). Изображением электрического диполя $\mathbf{p} = p(\mathbf{e}_x\sin\alpha + \mathbf{e}_z\cos\alpha)$ в заземленном шаре является система, состоящая из точечного заряда $q = \dfrac{pR}{r^2}\cos\alpha$ и диполя $\mathbf{p}' = p\left(\dfrac{R}{r}\right)^3(-\mathbf{e}_x\sin\alpha+\mathbf{e}_z\cos\alpha)$, находящихся в точке A' (рис. 10) на расстоянии $r' = \dfrac{R^2}{r}$ от центра шара.

$$U = -\frac{p^2R(r^2\cos^2\alpha+R^2)}{2\varepsilon(r^2-R^2)^3}, \quad F = -\frac{p^2Rr}{\varepsilon(r^2-R^2)^4}\left[(2r^2+R^2)\cos^2\alpha+3R^2\right], \quad N = -\frac{p^2Rr^2\sin 2\alpha}{2\varepsilon(r^2-R^2)^3}.$$

В предельном случае $r\to R$ получим, полагая $r=R+z$, $R\to\infty$, $z=\mathrm{const}$, результаты задачи **(148)** (диполь у проводящей плоскости).

29 (165). $\sigma = -\dfrac{3p}{4\pi R^3}\cos\theta$, где θ – угол между $\mathbf{p}$ и направлением из центра в точку наблюдения. Индуцированные заряды создают в полости однородное поле $\mathbf{E} = \mathbf{p}/R^3$.

Задание 7.

30 (172). $C_{\text{вз}} = \dfrac{\varkappa}{\varphi_1-\varphi_2} = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{arch}\dfrac{a^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}\right]^{-1}$.

31 (174). $C = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{arch}\dfrac{R_1^2+R_2^2-a^2}{2R_1R_2}\right]^{-1}$.

32 (175). Если оси $x,\ y,\ z$ параллельны главным осям тензора ε_{ik}, то

$$\varphi(x,y,z) = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\left[\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}}+\frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}}+\frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}}\right]^{-1/2}. \tag{25}$$

При произвольной ориентации координатной системы формула (25) запишется в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{\sqrt{|\varepsilon_{ik}|\varepsilon_{ik}^{-1}x_ix_k}}, \quad \text{где } |\varepsilon_{ik}| \text{ – определитель тензора } \varepsilon_{ik}.$$

Задание 8.

33 (176). $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \dfrac{(\varepsilon_{ik}-\delta_{ik})n_iE_{0k}}{\varepsilon_{lm}n_ln_m}$, где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности пластинки.

34 (177). $C = \dfrac{S\varepsilon^{(z)}}{4\pi a}$, где z – координата, нормальная к пластинам конденсатора.

35 [ЭСС №1 с.132]. Искомое тепло Q дается интегралом.

$$Q = \int \mathbf{j}\,\mathbf{E}\,dV = -\int \mathbf{j}\,\nabla\varphi\,dV = -\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j})\,dV,$$

взятым по объему среды. Преобразуем этот интеграл в интеграл по поверхности, учитывая, что на внешней границе среды $j_n = 0$, а на поверхности электродов $\varphi = \text{const} \equiv \varphi_a$. В результате получим

$$Q = \sum_a \varphi_a I_a$$

36 (178). Если выбрать оси $x,\ z$ в плоскости $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{n}$, $z \parallel \mathbf{n}$ то

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_x}{E_z} = \frac{\varepsilon_{zz}\operatorname{tg}\theta_0}{1 - \varepsilon_{zx}\operatorname{tg}\theta_0}, \quad \text{где } \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{E_{0x}}{E_{0z}}.$$

При этом силовая линия в диэлектрике остается в плоскости $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{n}$.

III. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Распределение постоянных токов в проводящей среде с удельной проводимостью $\varkappa(\mathbf{r})$ описывается объемной плотностью тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, удовлетворяющей уравнению

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{26}$$

Уравнение (26) является следствием закона сохранения заряда. Плотность тока в среде пропорциональна сумме напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и напряженности поля электродвижущих сил (э.д.с.) $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ (закон Ома):

$$\mathbf{j} = \varkappa\,(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}). \tag{27}$$

Поле сторонних электродвижущих сил $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ учитывает действие на заряды среды сил неэлектрического происхождения.

Для описания электрического поля $\mathbf{E}$ и распределения токов $\mathbf{j}$ в проводнике удобно, как и в электростатике, ввести скалярный потенциал φ, связанный с напряженностью поля формулой $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Из этого определения и из (26), (27) следует основное дифференциальное уравнение для φ:

$$\operatorname{div}(\varkappa\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{div}\varkappa\,\mathbf{E}_{\text{ст}}. \tag{28}$$

На поверхностях разрыва $\varkappa$ или $\mathbf{j}_{\text{ст}} = \varkappa\,\mathbf{E}_{\text{ст}}$ уравнение (28) заменяется граничными условиями

$$\varkappa_2 E_{2n} - \varkappa_1 E_{1n} = j_{\text{ст}\,1n} - j_{\text{ст}\,2n}, \tag{29}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{30}$$

Задание 9.

37 (226). $E_1 = \dfrac{\varkappa_2 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1}$, $D_1 = \dfrac{\varepsilon_1\varkappa_2 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1}$; $E_2 = \dfrac{\varkappa_1 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1}$, $D_2 = \dfrac{\varepsilon_2\varkappa_1 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1}$; $j_1 = j_2 = \dfrac{\varkappa_1\varkappa_2 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1}$.

На границе раздела между пластинами:

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{E_2 - E_1}{4\pi} - \sigma = \frac{\varkappa_2(\varepsilon_1 - 1) - \varkappa_1(\varepsilon_2 - 1)}{4\pi(\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1)}V, \quad \sigma = \frac{D_2 - D_1}{4\pi} = \frac{(\varepsilon_2\varkappa_1 - \varepsilon_1\varkappa_2)V}{4\pi(\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1)}.$$

Величина V больше нуля, если первая пластинка прилегает к положительно заряженной обкладке. У границы обкладки и первой пластинки

$$\sigma = \frac{D_1}{4\pi}, \quad \sigma_{\text{св}} = \frac{E_1 - D_1}{4\pi}.$$

У границы обкладки и второй пластинки

$$\sigma = -\frac{D_2}{4\pi}, \quad \sigma_{\text{св}} = -\frac{E_2 - D_2}{4\pi}.$$

38 (229). $E_0 = -k(\varkappa_2 l_1 + \varkappa_1 l_2)\mathcal{E}_0$, $E_1 = k\varkappa_2\mathcal{E}_0$, $E_2 = k\varkappa_1\mathcal{E}_0$, где $k = \dfrac{\varkappa_0}{l_0(\varkappa_0\varkappa_1 l_2 + \varkappa_0\varkappa_2 l_1 + \varkappa_1\varkappa_2 l_0)}$, $\mathcal{E}_0 = E_{\text{ст}} l_0$ – э.д.с. источника. Внутри него электрическое поле противоположно току ($E_0 < 0$).

Заряды, создающие это электрическое поле, возникают на границах раздела проводников с разными проводимостями и могут быть определены с помощью граничных условий; например, заряд на границе 01 равен

$$q_{01} = \frac{r^2}{4}(E_1 - E_0).$$

39 (231). $R = \int\limits_1^2 \dfrac{dl}{S\varkappa}$, где элемент dl направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности с площадью S; цифрами 1 и 2 обозначены граничные поверхности проводника.

40 (232). а) $R = \dfrac{1}{4\pi\varkappa}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$; б) $R = \dfrac{1}{4\pi\varkappa_1}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{1}{4\pi\varkappa_2}\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)$; в) $R = \dfrac{1}{2\pi l\varkappa}\ln\dfrac{b}{a}$.

41 (233). $R = \dfrac{1}{2\pi\varkappa_2}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{1}{2\pi\varkappa_1}\dfrac{1}{b}$.

42 (235). $C = \dfrac{\varepsilon}{4\pi\varkappa R}$.

43 (240*). Плотность тока в пространстве между электродами

$$j = \rho v \tag{31}$$

не зависит от x ($v(x)$ – скорость частиц в данной точке x). Скорость связана с потенциалом $\varphi(x)$ формулой

$$v = \sqrt{-\frac{2e\varphi}{m}} \qquad (\varphi = 0 \text{ при } x = 0). \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует, что $\rho = j\sqrt{-\dfrac{m}{2e\varphi}}$, так как уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 4\pi j\sqrt{-\frac{m}{2e\varphi}}. \tag{33}$$

Интегрируя (33) с граничными условиями $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ и $\varphi|_{x=a} = \varphi_0$, получим

$$j = \frac{1}{9\pi a^2}\sqrt{\frac{2|\,e\,|}{m}}\;|\,\varphi_0\,|^{3/2} \qquad (\text{«закон трех вторых»}).$$

IV. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Уравнения Максвелла в случае постоянного магнитного поля принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{34}$$

где $\mathbf{B}$ – магнитная индукция, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{j}$ – плотность объемного тока, c – электродинамическая постоянная ($c = 3\times10^{10}$ *см/сек*).

В изотропных диа- и парамагнетиках $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{35}$$

где μ – магнитная проницаемость вещества (скаляр); в случае анизотропных веществ μ является тензором II ранга. Плотность молекулярных токов $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ в веществе, находящемся в постоянном магнитном поле, выражается через вектор намагниченности $\mathbf{M}$ (магнитный момент единицы объема) по формуле

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = c\operatorname{rot}\mathbf{M}, \tag{36}$$

Вектор $\mathbf{M}$ связан с $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \tag{37}$$

Основные методы решения задачи об определении магнитного поля в неферромагнитной среде:

а) *Использование закона Био-Савара.* Элемент тока $\mathscr{I}d\mathbf{l}$ создает в вакууме или в однородной среде магнитное поле

$$d\mathbf{H} = \frac{\mathscr{I}}{cr^3}(d\mathbf{l}\times\mathbf{r}). \tag{38}$$

По принципу суперпозиции полное поле в данной точке можно получить интегрированием (38) по всем элементам тока (по $d\mathbf{l}$).

б) *Непосредственное интегрирование* системы уравнений (34), (35) с граничными условиями

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \tag{39}$$

где $\mathbf{i}$ – плотность поверхностного тока и нормаль $\mathbf{n}$ направлена из первой области во вторую. Если распределение токов обладает аксиальной симметрией, бывает полезна интегральная форма первого из уравнений (34):

$$\oint H_l\,dl = \frac{4\pi}{c}\mathscr{I}, \tag{40}$$

Здесь интеграл берется по произвольному замкнутому контуру; $\mathscr{I}$ – полный ток, протекающий через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур.

в) *Метод векторного потенциала.* Векторный потенциал $\mathbf{A}$ определяется соотношением

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{41}$$

и дополнительным условием

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{42}$$

В тех областях, где магнетик однороден, $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}. \tag{43}$$

Граничные условия для векторного потенциала вытекают из граничных условий (39) для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$. Векторный потенциал, созданный заданным распределением токов, может быть записан (в однородной среде с магнитной проницаемостью μ) в виде интеграла по объему, занятому током:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{44}$$

Реальные системы токов ограничены в пространстве, плотности токов, потенциалы и напряженности поля таких систем становятся равными нулю на бесконечности. Однако в ряде случаев бывает удобно рассматривать бесконечные проводники с током, поле которых не исчезает на бесконечности. Получаемые при этом результаты правильно описывают поле в средней части конечного проводника, на расстояниях, малых по сравнению с его длиной.

Энергия магнитного поля, локализованная внутри некоторого объема V, выражается интегралом по этому объему:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\,dV. \tag{45}$$

Если система токов имеет конечные размеры, ее полная энергия может быть вычислена также по формуле

$$W = \frac{1}{2}\int (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\,dV, \tag{46}$$

в которой интегрирование производится по объему, занятому токами.

Магнитная энергия квазилинейного проводника с током $\mathscr{I}$ выражается через коэффициент самоиндукции L проводника:

$$W = L\mathscr{I}^2/2c^2. \tag{47}$$

Индуктивность можно также выразить через двойной интеграл по объему проводника:

$$L = \frac{1}{\mathscr{I}^2}\iint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV\,dV'. \tag{48}$$

Энергия взаимодействия двух проводников с током дается выражениями

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{B}_2)\,dV = \frac{1}{c}\int (\mathbf{j}_1\cdot\mathbf{A}_2)\,dV_1 \qquad (W_{12}=W_{21}). \tag{49}$$

Первый интеграл берется по всему пространству, второй – по объему одного из проводников. В случае квазилинейных токов энергия может быть выражена через коэффициент взаимной индукции L_{12}:

$$W_{12} = L_{12}\mathscr{I}_1\mathscr{I}_2/c^2. \tag{50}$$

Формулу (50) можно представить в виде

$$W_{12} = \mathscr{I}_1\Phi_{12}/c. \tag{51}$$

где Φ_{12} – поток магнитной индукции, создаваемый вторым током через контур первого тока:

$$\Phi_{12} = \int \mathbf{B}_2\cdot d\mathbf{S}_1 = \oint \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{l}_1 = \frac{1}{c}L_{12}\mathscr{I}_2. \tag{52}$$

Коэффициент взаимной индукции может быть получен из выражения энергии (50), потока магнитной индукции (52) или, в случае линейных токов, вычислен по формуле

$$L_{12} = \mu\oint\oint \frac{d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}. \tag{53}$$

Задание 10.

44 (241). $H_r = H_z = 0;\qquad H_\alpha = \dfrac{2\mathscr{I}r}{ca^2}\ \ (r<a),\quad H_\alpha = \dfrac{2\mathscr{I}}{cr}\ \ (a\le r\le b),\quad H_\alpha = 0\ \ (r>b).$

45 (242). Рассмотрим решение задачи методом векторного потенциала. Если направить ось z вдоль оси цилиндра, то прямоугольные компоненты $\mathbf{A}$ будут удовлетворять уравнениям:

$$\Delta A_x = 0,\quad \Delta A_y = 0,\quad \Delta A_z = -\frac{4\pi\mu_0}{c}j_z\,,$$

причем $j_z = 0$ при $r>a$, $j_z = \mathscr{I}/\pi a^2$ при $r\le a$.

Поскольку в уравнения для A_x и A_y заданный ток $\mathscr{I}$ не входит, эти компоненты можно считать равными нулю; A_z будет зависеть только от расстояния r до оси r. Интегрируя уравнение для A_z и используя условия непрерывности A_z и H_α на границе $r=a$ и ограниченности H при $r=0$, получим:

при $r<a$ $\qquad A_z = C - \dfrac{\mu_0\mathscr{I}}{c}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2,\qquad B_\alpha = \dfrac{2\mu_0\mathscr{I}}{ca^2}r,\qquad H_\alpha = \dfrac{2\mathscr{I}}{ca^2}r;$

при $r>a$ $\qquad A_z = C - \dfrac{\mathscr{I}}{c}\left(\mu_0 + 2\mu\ln\dfrac{r}{a}\right),\qquad B_\alpha = \dfrac{2\mu\mathscr{I}}{cr},\qquad H_\alpha = \dfrac{2\mathscr{I}}{cr}.$ $\qquad$ Константа C– произвольна.

46 (243). При $r<a\quad A_z = C_1,\quad \mathbf{B}=0;$

при $a\le r\le b$ $\qquad A_z = \dfrac{2\mu_0\mathscr{I}a^2}{c\,(b^2-a^2)}\left(\ln\dfrac{r}{a} - \dfrac{r^2}{2a^2}\right) + C_2,\qquad B_\alpha = \dfrac{2\mu_0\mathscr{I}}{c\,(b^2-a^2)}\left(r - \dfrac{a^2}{r}\right);$

при $r>b$ $\qquad A_z = \dfrac{2\mu\mathscr{I}}{c}\ln\dfrac{b}{r} + C_3,\qquad B_\alpha = \dfrac{2\mu\mathscr{I}}{cr}.$

Остальные компоненты $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ равны нулю. Две любые константы, входящие в A_z, можно выразить через третью, использовав условия непрерывности векторного потенциала на границах.

47 (244). $H_x = \dfrac{2\mathscr{I}}{ca}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a+2x}{2y} + \operatorname{arctg}\dfrac{a-2x}{2y}\right), \quad H_y = \dfrac{\mathscr{I}}{ca}\ln\dfrac{(x-a/2)^2+y^2}{(x+a/2)^2+y^2}, \quad H_z = 0.$
Ось y перпендикулярна полосе и проходит через ее середину.

__Задание 11.__

48 (246). $A_z = \dfrac{2\mathscr{I}}{c}\ln\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{\mathscr{I}}{c}\ln\dfrac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}, \quad H_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} = -\dfrac{8\mathscr{I}}{c}\dfrac{axy}{r_1^2 r_2^2}, \quad H_y = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x} = -\dfrac{\mathscr{I}}{c}\left(\dfrac{a-x}{r_1^2} + \dfrac{a+x}{r_2^2}\right).$
Координаты проводников с током в перпендикулярной к ним плоскости равны $(a,0)$ для тока $+\mathscr{I}$ и $(-a,0)$ для тока $-\mathscr{I}$; r_1 и r_2 – расстояния от точек $(a,0)$ и $(-a,0)$ до точки наблюдения.

49 (247). а) Между плоскостями $H = 4\pi i/c$, в остальном пространстве $H = 0$; б) между плоскостями $H = 0$, в остальном пространстве $H = 4\pi i/c$. В обоих случаях магнитное поле направлено перпендикулярно току и параллельно токонесущим плоскостям.

50 (248). $H_y = \dfrac{2\mathscr{I}d}{c(b^2-a^2)}$, $H_x = H_z = 0$; ось y нормальна к плоскости, проведенной через оси цилиндров.

51 (252). $H_z = \dfrac{2\pi n\mathscr{I}}{c}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$, где (см. рис. 11) $\cos\theta_1 = \dfrac{h-z}{\sqrt{a^2+(h-z)^2}}$, $\cos\theta_2 = \dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}$.

52 (262). $\mathscr{L} = \dfrac{1}{2}\mu_0 + 2\mu\ln\dfrac{b}{a}$.

53 (263). $\mathscr{L} = 2\mu\ln\dfrac{b}{a}$.

V. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Если период колебаний электромагнитного поля значительно превышает время распространения поля через систему:

$$T \gg \frac{l}{c}, \quad \omega \ll \frac{c}{l}, \tag{54}$$

где c – скорость света, l – линейный размер системы, то можно пренебречь конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений внутри системы. Такое приближение называется квазистационарным.

Ток в замкнутой цепи с э.д.с. $\mathcal{E}(t)$, емкостью C, индуктивностью L и сопротивлением R, удовлетворяет в квазистационарном приближении дифференциальным уравнениям

$$\mathscr{I} = \frac{dq}{dt}, \qquad \frac{1}{c^2}L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t),$$

где q – заряд на обкладке конденсатора. При гармонической зависимости э.д.с. от времени ($\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$) и установившемся режиме ток пропорционален э.д.с.:

$$\mathscr{I} = \frac{\mathcal{E}}{Z}, \qquad Z = R + i\left(\frac{1}{\omega C} - \frac{\omega L}{c^2}\right). \tag{55}$$

Величина Z называется комплексным сопротивлением (импедансом) цепи.

Собственная частота ω_0 колебаний в контуре, состоящем из емкости C и самоиндукции L, дается формулой Томсона

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \tag{56}$$

Для разветвленной цепи дифференциальные уравнения, определяющие токи в отдельных участках, могут быть составлены на основе законов Кирхгофа.

__Задание 12.__

54 (354). $\omega_{1,2}^2 = \dfrac{c^2[(L_1+L_2)C + L_1C_1 + L_2C_2] \pm c^2\{[L_1(C+C_1) - L_2(C+C_2)]^2 + 4L_1L_2C^2\}^{1/2}}{2L_1L_2(C_1C_2 + CC_1 + CC_2)}.$
При отсутствии связи между контурами, т.е. при $C = 0$, ω_1 и ω_2 становятся равными $c/\sqrt{L_1C_1}$ и $c/\sqrt{L_2C_2}$, что соответствует независимым колебаниям в каждом из одиночных контуров.

При очень сильной связи ($C \gg C_1,\ C_2$) остается одна частота $\omega = c/\sqrt{L'C'}$, где $L' = L_1L_2/(L_1+L_2)$, $C' = C_1 + C_2$. Это соответствует колебаниям в одиночном контуре, в котором параллельно включены емкости C_1, C_2 и индуктивности L_1, L_2.

55 (355). $\omega_{1,2}^2 = \dfrac{c^2}{2}\left(\dfrac{1}{LC_1} + \dfrac{1}{LC_2} + \dfrac{1}{L_1C_1} + \dfrac{1}{L_2C_2}\right) \pm \dfrac{c^2}{2}\left\{\left[\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{L} + \dfrac{1}{L_1}\right) - \dfrac{1}{C_2}\left(\dfrac{1}{L} + \dfrac{1}{L_2}\right)\right]^2 + \dfrac{4}{L^2C_1C_2}\right\}^{1/2}.$

56 (356). $\omega_{1,2}^2 = c^2\dfrac{L_1C_1 + L_2C_2 \pm \left[(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4C_1C_2L_{12}^2\right]^{1/2}}{2C_1C_2(L_1L_2 - L_{12}^2)}.$

57 (358). $\mathscr{I}_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{Z_1\left(1 + \dfrac{\omega^2L_{12}^2}{c^4Z_1Z_2}\right)}, \quad \mathscr{I}_2 = \dfrac{i\omega L_{12}}{c^2Z_2}\mathscr{I}_1; \qquad Z_1 = R_1 + i\left(\dfrac{1}{\omega C_1} - \dfrac{\omega L_1}{c^2}\right), \quad Z_2 = R_2 + i\left(\dfrac{1}{\omega C_2} - \dfrac{\omega L_2}{c^2}\right);$

$\mathscr{I}_{1\,\max} = \dfrac{\mathcal{E}_0}{R_1}$ при $\omega = \dfrac{c}{\sqrt{L_1C_1\left(1 - \dfrac{L_{12}^2}{L_1L_2}\right)}}$.

58 (359). $Z = \dfrac{R - \dfrac{i\omega L}{c^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2} - i\omega RC}$, где $\omega_1 = c/\sqrt{LC}$ – собственная частота колебаний в контуре. При $R = 0$ и $\omega = \omega_1$ Z становится бесконечно большим. Это свойство рассмотренного двухполюсника используется в радиотехнике (запирающие фильтры).

59 [ЭСС №2 стр.301]. Импедансы трех ветвей цепи равны $Z_1 = R,\ Z_2 = \dfrac{i}{\omega C},\ Z_3 = -\dfrac{i\omega}{c^2}L$, а токи в них связаны соотношениями

$$\mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_3 = 0, \qquad Z_1\mathscr{I}_1 = Z_2\mathscr{I}_2 = Z_3\mathscr{I}_3.$$

Отсюда находим уравнение

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = 0,$$

решение которого дает

$$\omega = -\frac{i}{2RC} \pm \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}\,.$$

VI. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Задание 13.

60 (675). Если частица, двигавшаяся с 4-импульсом p_{0i}, испустила в среде фотон с 4-импульсом $k_i = \left(\dfrac{\hbar\omega}{c}, \dfrac{\hbar\omega n}{c}\right)$, то законы сохранения энергии и импульса могут быть выражены четырехмерным равенством

$$p_{0i} = p_i + k_i,$$

где p_i – импульс частицы после излучения фотона. Перенесем k_i налево и возведем обе части получившегося равенства в квадрат. После элементарных преобразований получим

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta}\left[1 + \frac{\pi\Lambda}{n\lambda}(n^2-1)\sqrt{1-\beta^2}\right], \tag{57}$$

где $\Lambda = \hbar/mc$ – комптонова длина волны частицы, $\lambda = 2\pi c/\omega n$ – длина волны фотона, $\beta = v/c$. Второй член, равный по порядку величины Λ/λ, обычно очень мал. Если опустить этот член, выражающий квантовые поправки (Λ пропорциональна $\hbar$), то выражение (57) сведется к классическому условию излучения Вавилова–Черенкова:

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta}.$$

62 (677). Обозначив через p_{0i} и p_i 4-импульсы частицы до и после излучения, через k_i – «4-импульс» фотона, напишем закон сохранения энергии и импульса в виде

$$p_{0i} - k_i = p_i.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и отбрасывая член с $\hbar^2$, получим

$$(m^2 - m_0^2)\,c^2 - 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{k} + \frac{2\mathcal{E}_0 k}{c} = 0,$$

где m_0 – масса возбужденной частицы, m – масса частицы в нормальном состоянии.

Представим разность $c^2(m_0^2 - m^2)$ в виде $c^2(m_0 - m)(m_0 + m) \approx 2\hbar\omega_0 m$. Тогда

$$n(\omega)\beta\cos\theta = 1 - \frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{58}$$

где $\beta = v/c$. При $\omega_0 \to 0$ равенство (58) переходит в условие

$$n(\omega)\beta\cos\theta = 1$$

возникновения излучения Вавилова–Черенкова. Это излучение не связано, таким образом, с изменением внутреннего состояния частицы.

При $\omega_0 \neq 0$ перепишем (58) в виде

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1 - n(\omega)\beta\cos\theta}. \tag{59}$$

Формулой (59) описывается эффект Доплера в преломляющей среде (ср. с задачей **(585)**). Она применима, если $n(\omega)\beta\cos\theta < 1$ и отличается от соответствующей формулы, описывающей эффект Доплера в вакууме, только наличием $n(\omega)$ в знаменателе. При $\beta \ll 1$ никаких качественно новых явлений не возникает, но при $\beta \approx 1$ и при наличии дисперсии в среде явление усложняется.

В общем случае формула (59) представляет собой нелинейное уравнение относительно ω (n – функция ω!) и может иметь более чем одно решение. При этом вместо одной смещенной линии, как в обычном эффекте Доплера, в лабораторной системе будет наблюдаться несколько линий (сложный эффект Доплера).

63 [ЭСС №1 стр. 411]. Коэффициент отражения электромагнитных волн на границе раздела двух сред при их наклонном падении из первой среды задается формулой:

$$R_\perp = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_0}} \right|^2, \qquad R_\parallel = \left| \frac{\varepsilon_2\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_0)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_0)}} \right|^2. \tag{60}$$

Оба коэффициента (60) обращаются в 1 при угле полного внутреннего отражения θ_r, $\sin\theta_r = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n_2/n_1$.

Таким образом, полагаем $\theta_0 = \theta_r - \delta$, где δ – малая величина, и разлагаем в формулах (60) $\sin\theta_0$ и $\cos\theta_0$ по степеням δ. В результате получаем:

$$R_\perp = 1 - 4\sqrt{2\delta}(n^2-1)^{-1/4}, \qquad R_\parallel = 1 - 4\sqrt{2\delta}n^2(n^2-1)^{-1/4},$$

где $n^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2 > 1$. Производные $dR/d\delta$ обращаются при $\delta \to 0$ в бесконечность как $\delta^{-1/2}$.

64 [ЭСС №2 стр. 411]. Формулы (60) дают одинаковый коэффициент отражения:

$$R_\perp \approx R_\parallel \approx \frac{\left(\varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 + \varepsilon - 1}\right)^4}{(\varepsilon-1)^2}, \quad \text{где} \ \ \varphi_0 = \pi/2 - \theta_0\,.$$