

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ – 5 СЕМЕСТР

А. А. Пожарский

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	2
1 занятие	
1. Комплексные числа.	4
2. Регулярные функции комплексного переменного.	8
2 занятие	
3. Восстановление регулярной функции по ее вещественной (мнимой) части.	12
4. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши.	17
3 занятие	
5. Интегральная формула Коши. Вычисление простейших интегралов с помощью ИФК.	20
6. Ряды Тейлора элементарных функций.	23
7. Нахождение нескольких первых членов ряда Тейлора.	24
4 занятие	
8. Ряд Лорана. Ряды Лорана рациональных функций.	27
9. Классификация изолированных особых точек.	33
5 занятие	
10. 1-ая контрольная работа (1 час).	37
11. Нахождение главной части ряда Лорана функции в окрестности ее полюса.	38
6 занятие	
12. Вычисление вычетов функции.	40
13. Теорема о вычетах. Вычисление интегралов по замкнутому контуру.	44
7 занятие	
14. Вычисление интегралов от тригонометрических функций по периоду.	47
15. Вычисление интегралов от рациональных функций по вещественной оси.	50
8 занятие	
16. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, по вещественной оси.	54
17. Вычисление интегралов по вещественной оси от функций, содержащих устранимые особенности на контуре интегрирования.	57
9 занятие	
18. 2-ая контрольная работа (2 часа).	60
10 занятие	
19. Однозначные регулярные ветви, аналитическое продолжение, точки ветвления.	62
20. Римановы поверхности простейших многозначных функций: $\sqrt[n]{z-a}$, $\ln z$.	70
21. Римановы поверхности многозначных функций вида: $\sqrt[n]{(z-a)(z-b)}$, ...	73
11 занятие	

22.	Вычисление интегралов от многозначных функций по полуоси (степенные и логарифмические особенности).	81
23.	Вычисление интегралов от многозначных функций по отрезку (степенные особенности).	88
12 занятие		
24.	3-ая контрольная работа (1 час).	93
25.	Свойства конформных отображений. Теорема Римана.	94
26.	Отображения: z^n , $\sqrt[n]{z}$, e^z , $\ln z$.	96
13 занятие		
27.	Дробно-линейные отображения. Отображение круга на полуплоскость.	101
28.	Отображение луночек.	105
14 занятие		
29.	Γ -функция, интегралы с Γ -функцией.	108
30.	Преобразование Лапласа, основные свойства, таблица основных изображений.	110
15 занятие		
31.	Формула обращения Меллина.	113
32.	Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	116
16 занятие		
33.	4-ая контрольная работа (1 час).	122
34.	Свойства обобщенных функций.	123
35.	Обобщенная производная, дифференцирование скачков.	126
17 занятие		
36.	Формулы, упрощающие выражения вида $h(x)\delta^{(n)}(x)$.	129
37.	Регуляризация степенных особенностей. Деление на полином.	130
38.	Обобщенные решения дифференциальных уравнений со степенными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$.	134
18 занятие		
39.	Преобразование Фурье обобщенных функций.	140
40.	Свертка обобщенных функций.	148
41.	Метод Фурье для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$.	151
18 занятие		
42.	Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Выражение фундаментального решения через решение задачи Коши.	154
43.	Решение неоднородных уравнений с использованием фундаментального решения.	156
19 занятие		
44.	Метод Фурье для решения простейших линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R}^2)$.	159
45.	Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля.	162
20 занятие		
46.	Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля (продолжение).	165
47.	Решение неоднородной задачи Штурма-Лиувилля с использованием функции Грина.	167
21 занятие		
48.	5-ая контрольная работа (2 часа).	170

Предисловие

Предлагаемое «методическое пособие» предназначено для студентов и преподавателей физического факультета СПбГУ. «Пособие» содержит теоретический и практический материал, который предполагается изучать на практических занятиях по математической физике в пятом семестре.

Для удобства использования «пособия» весь материал разбит на 21 секцию, каждая из которых примерно соответствует одному двух-часовому практическому занятию. Порядок изложения материала в каждой главе соответствует порядку его изложения на практических занятиях. В конце каждого раздела приводятся формулировки задач для самостоятельного решения.

Настоящее «пособие» может содержать опечатки и, быть может, ошибки. Автор будет признателен за любые исправления, замечания и всевозможные пожелания, которые можно отправлять по адресу: *sofyto@mail.ru* (Пожарский Алексей Андреевич).

1. Комплексные числа.

Определение 1.1. Комплексными числами z называют объекты вида $x + iy$, где x и y – вещественные числа, если для этих объектов следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения.

- (1) Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называют равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
- (2) Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называют комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- (3) Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называют комплексное число $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
 - Иначе говоря, комплексные числа складывают и умножают, как многочлены относительно символа i , но символ i^2 заменяют числом -1 .
 - Число x называют вещественной частью (или действительной частью) комплексного числа $z = x + iy$ и обозначают символом $\operatorname{Re} z$.
 - Число y называют мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначают символом $\operatorname{Im} z$.
 - Символ i называют мнимой единицей.

Пример 1.2. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $\frac{1+i}{1-i}$.

Решение.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{Re} \left(\frac{1+i}{1-i} \right) = 0$, $\operatorname{Im} \left(\frac{1+i}{1-i} \right) = 1$.

Определение 1.3. Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называют величину

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Любое число φ , удовлетворяющее равенствам

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

называют аргументом комплексного числа $z = x + iy$ и обозначают $\arg z$. Величина $\arg z$ определяется только для $z \neq 0$.

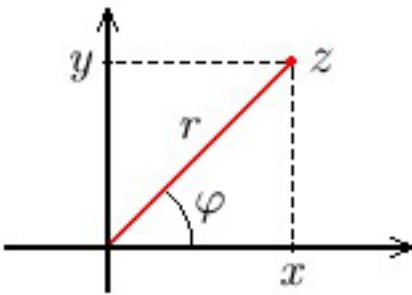


Рис. 1. Здесь $z = x + iy$, $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$.

Комплексные числа удобно изображать точками на плоскости. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка с координатами (x, y) . При этом модуль $|z|$ комплексного числа z равен расстоянию от точки (x, y) до начала координат, а аргумент $\arg z$ – углу φ между положительным направлением оси абсцисс и лучом, соединяющим начало координат и точку (x, y) , см. рисунок 1.

Пример 1.4. Найти модуль и все аргументы комплексного числа $1 + i$.

Решение. Воспользуемся определением 1.3

$$|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2},$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Ответ: $|1 + i| = \sqrt{2}$, $\arg = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 1.5. Функцию e^z для комплексных значений z определяют как сумму ряда

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

который сходится при $|z| < \infty$.

Теорема 1.6. Любое комплексное число z можно записать в показательной форме $z = |z|e^{i \arg z}$.

Пример 1.7. Записать комплексное число $i - 1$ в показательной форме.

Решение. Воспользуемся теоремой 1.6

$$|i - 1| = \sqrt{2}, \quad \arg(i - 1) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В качестве $\arg(i - 1)$ можно взять любое из найденных значений, например, $\arg(i - 1) = \frac{3\pi}{4}$. $\square$

Ответ: $i - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}$.

Теорема 1.8. Для любого $\varphi \in \mathbb{C}$ справедливы формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Пример 1.9. Упростить выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1.$$

Решение. Из теоремы 1.8 следует, что $\sin(n\varphi) = \operatorname{Im}(e^{in\varphi})$ при вещественных φ . Отсюда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \operatorname{Im}(e^{in\varphi}) = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{in\varphi} \right) = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (ae^{i\varphi})^n \right).$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (ae^{i\varphi})^n \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - ae^{i\varphi}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - a \cos \varphi - ia \sin \varphi} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1 - a \cos \varphi + ia \sin \varphi}{(1 - a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} \right) = \frac{a \sin \varphi}{(1 - a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n\varphi) = \frac{a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}$.

Определение 1.10. Логарифмом комплексного числа z называют величину

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + i \arg z.$$

Величину $\operatorname{Ln} z$ определяют только для $z \neq 0$.

Определение 1.11. Величину z^a для комплексных значений z и a определяют равенством

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Величину z^a определяют только для $z \neq 0$.

Пример 1.12. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа i^i .

Решение. Воспользуемся определением 1.11

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\frac{\pi}{2}i + 2\pi in)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{Re}(i^i) = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n}$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im}(i^i) = 0$.

Домашнее задание:

Задача 1.13. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $\frac{2-i}{3+i}$.

Ответ: $\frac{2-i}{3+i} = \frac{1-i}{2}$.

Задача 1.14. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $\frac{1+2i}{2+3i}$.

Ответ: $\frac{1+2i}{2+3i} = \frac{8+i}{13}$.

Задача 1.15. Найти вещественную и мнимую части, а также модуль и все аргументы комплексного числа $\frac{3+4i}{(3-4i)^2}$.

Ответ: $\frac{3+4i}{(3-4i)^2} = -\frac{3}{25} + \frac{4i}{25}$, $\left| \frac{3+4i}{(3-4i)^2} \right| = \frac{1}{5}$, $\arg \left(\frac{3+4i}{(3-4i)^2} \right) = 3 \arctg \left(\frac{4}{3} \right) + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.16. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $(i-1)^{98}$.

Ответ: $(i-1)^{98} = -2^{49}i$.

Задача 1.17. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $(\sqrt{3}+i)^{100}$.

Ответ: $(\sqrt{3}+i)^{100} = 2^{99}(-1+i\sqrt{3})$.

Задача 1.18. Найти вещественную и мнимую части числа $\sin(a+ib)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Ответ: $\sin(a+ib) = \sin a \operatorname{ch} b + i \cos a \operatorname{sh} b$.

Задача 1.19. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $(\operatorname{Ln}(1+i))^2$.

Ответ: $(\operatorname{Ln}(1+i))^2 = \ln 2 - \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)^2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \ln 2$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.20. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $\operatorname{Ln}((2i)^i)$.

Ответ: $\operatorname{Ln}((2i)^i) = i \ln 2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n + 2\pi i k$, где $n, k \in \mathbb{N}$.

Задача 1.21. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $(1+i)^i$.

Ответ: $(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi n} (\cos(\ln \sqrt{2}) + i \sin(\ln \sqrt{2}))$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.22. Упростить выражение $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos \{(3n+1)\varphi\}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ и $0 < a < 1$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos \{(3n+1)\varphi\} = \frac{\cos \varphi - a \cos(2\varphi)}{1 - 2a \cos(3\varphi) + a^2}$.

Задача 1.23. Упростить выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin \{(2n-1)\varphi\}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ и $|a| < 1$.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin \{(2n-1)\varphi\} = \frac{a(a+1) \sin \varphi}{1-2a \cos(2\varphi)+a^2}$.

Задача 1.24. Упростить выражение $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin \{(4n+1)\varphi\}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ и $|a| < 1$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin \{(4n+1)\varphi\} = \frac{\sin \varphi + a \cos(3\varphi)}{1-2a \cos(4\varphi)+a^2}$.

Задача 1.25. Найдите все корни уравнения $\cos z = 3$.

Ответ: $z = i \ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Задача 1.26. Найдите все корни уравнения $\sin z = i$.

Ответ: $z = i \ln(\sqrt{2} - 1) + (2n+1)\pi$, $z = i \ln(\sqrt{2} + 1) + 2n\pi$, где $n \in \mathbb{N}$.

2. Регулярные функции комплексного переменного.

Определение 2.1. Функцию $f(z)$ называют дифференцируемой в смысле комплексного анализа в точке z_0 , если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

называемый производной функции $f(z)$ в точке z_0 .

Определение 2.2. Функцию $f(z)$ называют регулярной в области D , если она дифференцируема в смысле комплексного анализа в каждой точке этой области¹.

Пример 2.3. Найти область, в которой функция $f(z) = z^2$ регулярна, и вычислить ее производную в этой области.

Решение. Воспользуемся определением 2.1

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = z + z_0.$$

Отсюда следует, что для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0. \quad \square$$

Ответ: Функция $f(z) = z^2$ регулярна в $\mathbb{C}$ и $f'(z) = 2z$.

Пример 2.4. Найти все точки, в которых функция $f(z) = \operatorname{Re} z$ дифференцируема в смысле комплексного анализа.

Решение. Введем обозначения $z = x + iy$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и $\Delta z = z - z_0$. Воспользуемся определением 2.1

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что если $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$ (т. е. точка z стремится к z_0 вдоль оси Ox), то

$$\lim_{\Delta z = \Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = 1.$$

Аналогично, если $\Delta z = \Delta y \rightarrow 0$ (т. е. точка z стремится к z_0 вдоль оси Oy), то

$$\lim_{\Delta z = \Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0, \Delta x = 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = 0.$$

Таким образом, предел отношения (2.1) различен в зависимости от направления подхода точки z к z_0 при всех $z \in \mathbb{C}$. Согласно определению 2.1 это означает, что производная функции $f(z)$ не существует ни при каких $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Ответ: Функция $f(z) = \operatorname{Re} z$ не является дифференцируемой в смысле комплексного анализа ни при каких $z \in \mathbb{C}$.

Из примеров 2.3 и 2.4 видно, что для проверки регулярности с использованием определения 2.1 требуется прикладывать заметные усилия даже в случае весьма простых функций. Это одна из причин, по которым может быть полезна следующая теорема.

¹Иногда, ради упрощения некоторых доказательств, дополнительно предполагают, что производная $f'(z)$ является непрерывной функцией в области D .

Теорема 2.5. Пусть $f(z)$ – функция комплексного переменного $z = x + iy$ и

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Пусть вещественно-значные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D . Тогда для регулярности функции $f(z)$ в области D (в точке $z_0 \in D$) необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяли условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

в области D (в точке $z_0 \in D$).

Пример 2.6. Найти все точки, в которых функция $f(z) = x^2 - 2iy$ дифференцируема в смысле комплексного анализа.

Решение. Проверим условия Коши-Римана

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2, \\ v(x, y) = -2y, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = -2, \\ 0 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: Функция $f(z) = x^2 - 2iy$ дифференцируема в смысле комплексного анализа при $z = x + iy$ таких, что $x = -1$.

Пример 2.7. Найти область, в которой функция $f(z) = e^{2z}$ регулярна.

Решение. Выделим вещественную и мнимую части функции $f(z)$

$$\begin{aligned} e^{2z} &= e^{2x+2iy} = e^{2x} e^{2iy} = e^{2x} \cos(2y) + ie^{2x} \sin(2y), \\ u(x, y) &= e^{2x} \cos(2y), \quad v(x, y) = e^{2x} \sin(2y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2e^{2x} \cos(2y), & \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2e^{2x} \sin(2y), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2e^{2x} \sin(2y), & \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2e^{2x} \cos(2y). \end{cases} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что условия Коши-Римана выполнены при всех $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Ответ: Функция $f(z) = e^{2z}$ регулярна во всей комплексной плоскости.

Иногда бывает удобно вместо переменных x и y использовать переменные z и $\bar{z}$

$$\begin{cases} z = x + iy, & \begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \end{cases} \end{cases} \quad (2.3)$$

Введем в рассмотрение операции $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, которые определены равенствами

$$\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Замечание 2.8. Не следует путать операцию $\frac{\partial}{\partial z}$ с операцией дифференцирования, которая введена в определении 2.1.

Пример 2.9. Доказать, что условия Коши-Римана эквивалентны условию $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Решение. Перейдем в выражении $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ к переменным x и y

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + iv(x, y)) = \frac{1}{2} (u_x(x, y) + iv_x(x, y) + iu_y(x, y) - v_y(x, y)) = \\ &= \frac{1}{2} (u_x(x, y) - v_y(x, y)) + \frac{i}{2} (v_x(x, y) + u_y(x, y)). \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемое утверждение. $\square$

Обсудим теперь результаты примера 2.9. Пусть нам задана *элементарная* комплексно-значная функция f , зависящая от переменных x и y . С помощью замены переменных (2.3) можно перейти к переменным z и $\bar{z}$. Пример 2.9 показывает, что такая функция f регулярна тогда и только тогда, когда она явно не зависит от переменной $\bar{z}$. Например, функция e^z элементарная и зависит только от переменной z , поэтому она регулярна.

Функция $\operatorname{Re}(z)$ зависит только от переменной z , но не является элементарной. Чтобы применить к ней результаты примера 2.9 перепишем ее в переменных x и y , $\operatorname{Re}(z) = x$. Функция x уже элементарная и ее можно выразить через переменные z и $\bar{z}$ по формулам (2.3), $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$. Функция $\frac{z+\bar{z}}{2}$ уже явно зависит от $\bar{z}$, а потому не является регулярной.

Теорема 2.10. *Производные (в смысле определения 2.1) элементарных функций можно вычислять по обычным правилам, известным из вещественного анализа. В частности,*

$$\begin{aligned}(z^n)' &= n z^{n-1}, & (e^z)' &= e^z, & (\ln z)' &= \frac{1}{z}, \\ (\sin z)' &= \cos z, & (\cos z)' &= -\sin z, & (\operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z, & (\operatorname{ch} z)' &= \operatorname{sh} z.\end{aligned}$$

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в некоторых, быть может различных, областях. Тогда производная от суммы, произведения, частного и композиции вычисляется по обычным правилам, известным из вещественного анализа,

$$\begin{aligned}(f(z) + g(z))' &= f'(z) + g'(z), & (f(z)g(z))' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\ \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, & (f(g(z)))' &= f'(g(z))g'(z).\end{aligned}$$

При этом каждое равенство справедливо в той области, в которой корректно определены обе части этого равенства.

Замечание 2.11. Функции $|z|$, $\operatorname{Re}(z) = x$, $\operatorname{Im}(z) = y$ не являются ни элементарными, ни регулярными и к ним не может быть применена теорема 2.10.

Пример 2.12. Найти область, в которой функция $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$ регулярна, и вычислить ее производную.

Решение. Согласно теореме 2.10 функция $f(z)$ регулярна при $z \neq -1$. Ее производную можно вычислить с помощью той же теоремы

$$f'(z) = \frac{2z(z+1) - z^2}{(z+1)^2} = \frac{z(z+2)}{(z+1)^2}. \quad \square$$

Ответ: Функция $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$ регулярна при $z \neq -1$ и $f'(z) = \frac{z(z+2)}{(z+1)^2}$.

Домашнее задание:

Задача 2.13. Найти все точки, в которых функция $f(z) = x + i \sin y$ дифференцируема в смысле комплексного анализа, и вычислить ее производную.

Ответ: Функция $f(z) = x + i \sin y$ дифференцируема при $z = x + iy$ таких, что $y = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. В этих точках $f'(z) = 1$.

Задача 2.14. Найти все точки, в которых функция $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$ дифференцируема в смысле комплексного анализа, и вычислить ее производную.

Ответ: Функция $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ дифференцируема при $z = 0$ и $f'(0) = 0$.

Задача 2.15. Найти все точки, в которых функция $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + 2i \operatorname{Im}(z)$ дифференцируема в смысле комплексного анализа, и вычислить ее производную.

Ответ: Функция $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + 2i \operatorname{Im}(z)$ дифференцируема при $z = 1$ и $f'(1) = 2$.

Задача 2.16. Найти область, в которой функция $f(z) = ze^{3z}$ регулярна, и вычислить ее производную.

Ответ: Функция $f(z) = ze^{3z}$ регулярна во всей комплексной плоскости и $f'(z) = (1 + 3z)e^{3z}$.

Задача 2.17. Найти область, в которой функция $f(z) = (z - 1)^{-2}$ регулярна, и вычислить ее производную.

Ответ: Функция $f(z) = (z - 1)^{-2}$ регулярна при $z \neq 1$ и $f'(z) = -2(z - 1)^{-3}$.

Задача 2.18. Найти область, в которой функция $f(z) = \cos\left(\frac{1}{e^z - 1}\right)$ регулярна, и вычислить ее производную.

Ответ: Функция $f(z)$ регулярна при $z \neq 2\pi in, n \in \mathbb{Z}$ и $f'(z) = \sin\left(\frac{1}{e^z - 1}\right) \frac{e^z}{(e^z - 1)^2}$.

Задача 2.19. Доказать, не используя теорему 2.5, что регулярная функция в области удовлетворяет в этой области условиям Коши-Римана.

Задача 2.20. Доказать, что условия Коши-Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Задача 2.21. Используя результат задачи 2.20 доказать, что функция $f(z) = z^n$ при $n \in \mathbb{N}$ регулярна во всей комплексной плоскости.

3. Восстановление регулярной функции по ее вещественной (мнимой) части.

Определение 3.1. Функция $u(x, y)$ называется гармонической в области D , если $\Delta u = 0$ в этой области, где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Пример 3.2. Пусть $f(z)$ регулярная функция в области D . Доказать, что ее вещественная и мнимая части являются гармоническими функциями.

Решение. Воспользуемся условиями Коши-Римана

$$\begin{aligned}\Delta u &= \partial_x(\partial_x u) + \partial_y(\partial_y u) = \partial_x(\partial_y v) + \partial_y(-\partial_x v) = 0, \\ \Delta v &= \partial_x(\partial_x v) + \partial_y(\partial_y v) = \partial_x(-\partial_y u) + \partial_y(\partial_x u) = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Определение 3.3. Область D называется односвязной, если любой замкнутый контур, лежащий в D , может быть непрерывно продеформирован к некоторой точке области D .

Теорема 3.4. Пусть $u(x, y)$ (или $v(x, y)$) – гармоническая функция в односвязной области D . Тогда существует гармоническая функция $v(x, y)$ (соответственно $u(x, y)$) такая, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ регулярна в области D , где $z = x + iy$.

Доказательство. Пусть задана гармоническая функция $u(x, y)$ и нам требуется найти функцию $v(x, y)$, удовлетворяющую условиям теоремы. Из требования регулярности функции $f(z)$ следует, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны удовлетворять условиям Коши-Римана в области D . Отсюда можно найти дифференциал функции $v(x, y)$

$$dv = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy. \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) позволяет найти функцию $v(x, y)$ в терминах криволинейного интеграла второго рода

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} d\tilde{x} + \frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y}. \quad (3.2)$$

Здесь (x_0, y_0) – произвольная точка области D , а интеграл в равенстве (3.2) берется по любому контуру, лежащему в области D и соединяющему точки (x_0, y_0) и (x, y) . Последний интеграл в равенстве (3.2) не зависит от пути интегрирования в силу гармоничности функции $u(x, y)$ ².

Для завершения доказательства остается проверить, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана. Эти условия легко выводятся из формулы (3.2) и независимости соответствующего интеграла от пути интегрирования.

Доказательство теоремы в случае когда регулярная функция $f(z)$ восстанавливается по ее мнимой части $v(x, y)$ проводится аналогично. $\square$

Пример 3.5. Восстановить регулярную функцию $f(z)$ по ее мнимой части $v(x, y) = 2xy$.

Решение. Несложно проверить, что $v(x, y)$ гармоническая функция во всей комплексной плоскости. Согласно теореме 3.1 вещественная часть $u(x, y)$ может быть восстановлена с помощью

²Для того чтобы интеграл $\int_{(a,b)}^{(c,d)} g dx + h dy$ не зависел от пути интегрирования, лежащего в односвязной области D , необходимо и достаточно, чтобы в области D выполнялось соотношение $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$.

криволинейного интеграла

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} du = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} + \frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} d\tilde{x} - \frac{\partial v(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y}. \quad (3.3)$$

Подставим функцию $v(x, y) = 2xy$ в (3.3) и выберем контур интегрирования как на рисунке 2. В результате получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{\gamma_1} 2\tilde{x} d\tilde{x} - 2\tilde{y} d\tilde{y} + \int_{\gamma_2} 2\tilde{x} d\tilde{x} - 2\tilde{y} d\tilde{y} = \\ &= 2 \int_{\gamma_1} \tilde{x} d\tilde{x} - 2 \int_{\gamma_2} \tilde{y} d\tilde{y} = 2 \int_{x_0}^x \tilde{x} d\tilde{x} - 2 \int_{y_0}^y \tilde{y} d\tilde{y} = \\ &= \tilde{x}^2 \Big|_{x_0}^x - \tilde{y}^2 \Big|_{y_0}^y = x^2 - y^2 + y_0^2 - x_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy + C = \\ &= (x + iy)^2 + C = z^2 + C, \end{aligned}$$

где C – произвольная вещественная постоянная. $\square$

Ответ: $f(z) = z^2 + C$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Заметим, что в примере 3.5 для перехода от переменных x и y к комплексной переменной z необходимо было догадаться выделить полный квадрат. Несмотря на то, что сделать это было не сложно, для других примеров подобный переход может оказаться значительно менее очевидной процедурой. Для того чтобы описать более короткую процедуру восстановления регулярной функции, нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3.6 (Теорема единственности). Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в области D и их значения совпадают на некоторой последовательности точек a_n , сходящейся к внутренней точке a области D . Тогда функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают всюду в D .

Предположим теперь, что в области D задана регулярная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, и область D содержит некоторый интервал (x_0, x_1) вещественной оси. Предположим также, что корректно определена вспомогательная функция $g(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$ для комплексных z . Это предположение будет выполнено, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются элементарными. Заметим теперь, что функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на интервале (x_0, x_1) вещественной оси

$$f(z) = u(x, 0) + iv(x, 0) = g(z), \quad \text{где } z = x + i0, \quad x \in (x_0, x_1).$$

Применяя теорему 3.6, получим, что функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают всюду в D

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0), \quad z \in D. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) позволяет восстанавливать регулярную функцию $f(z)$ по значениям ее вещественной и мнимой частей на вещественной оси. Это, например, означает, что нам достаточно вычислить интеграл в формуле (3.2) (или (3.3)) только при $y = 0$ и этого будет достаточно для восстановления $f(z)$ по формуле (3.4).

Приведем теперь для удобства план восстановления регулярной функции $f(z)$ по ее вещественной части $u(x, y)$.

(1) Проверяем, что функция $u(x, y)$ гармоническая.

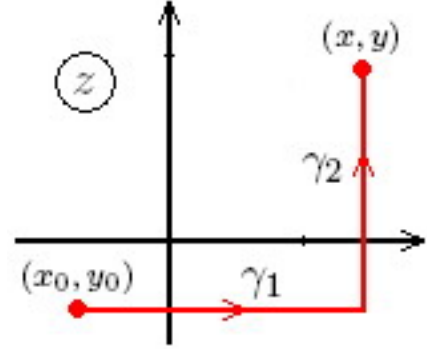


Рис. 2. Контур интегрирования $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

(2) Находим $v(x, y)$ при $y = 0$

$$v(x, 0) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(\tilde{x}, 0)}{\partial y} d\tilde{x}.$$

(3) Восстанавливаем $f(z)$ по формуле (3.4).

Приведем также план восстановления регулярной функции $f(z)$ по ее мнимой части $v(x, y)$.

(1) Проверяем, что функция $v(x, y)$ гармоническая.

(2) Находим $u(x, y)$ при $y = 0$

$$u(x, 0) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial y} d\tilde{x}.$$

(3) Восстанавливаем $f(z)$ по формуле (3.4).

Пример 3.7. Восстановить регулярную функцию $f(z)$ по ее вещественной части

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Легко проверить, что $u(x, y)$ – гармоническая функция во всей комплексной плоскости.

Шаг 2: Находим мнимую часть $v(x, y)$ на вещественной оси

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x \cos y, \quad v(x, 0) = - \int_{x_0}^x e^{\tilde{x}} d\tilde{x} = - e^{\tilde{x}} \Big|_{x_0}^x = -e^x + e^{x_0}. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) удобно переписать в виде

$$v(x, 0) = -e^x + C,$$

где C – произвольная вещественная постоянная.

Шаг 3: Находим $f(z)$ по формуле (3.4)

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = -ie^z + iC, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $f(z) = -ie^z + iC, C \in \mathbb{R}$.

Пример 3.8. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(0) = 0$ и ее мнимая часть равна $v(x, y) = (y \cos x + x \sin x)e^{-y}$.

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Легко проверить, что $v(x, y)$ – гармоническая функция во всей комплексной плоскости

$$\begin{aligned} \partial_x v(x, y) &= (-y \sin x + \sin x + x \cos x)e^{-y}, & \partial_x^2 v(x, y) &= (-y \cos x + 2 \cos x - x \sin x)e^{-y}, \\ \partial_y v(x, y) &= (\cos x - y \cos x - x \sin x)e^{-y}, & \partial_y^2 v(x, y) &= (-2 \cos x + y \cos x + x \sin x)e^{-y}. \end{aligned}$$

Шаг 2: Находим вещественную часть $u(x, y)$ на вещественной оси

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_0^x (\cos \tilde{x} - \tilde{x} \sin \tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^x \cos \tilde{x} d\tilde{x} + \int_0^x \tilde{x} d \cos \tilde{x} = \\ &= \int_0^x \cos \tilde{x} d\tilde{x} + \tilde{x} \cos \tilde{x} \Big|_0^x - \int_0^x \cos \tilde{x} d\tilde{x} = x \cos x. \end{aligned}$$

Мы сразу выбрали $x_0 = 0$, чтобы добиться выполнения условия $f(0) = 0$.

Шаг 3: Находим $f(z)$ по формуле (3.4)

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = z \sin z + iz \cos z = ze^{iz}.$$

Ответ: $f(z) = ze^{iz}$.

Домашнее задание:

Задача 3.9. Восстановить регулярную функцию $f(z)$ по ее мнимой части $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Ответ: $f(z) = iz^3 + C$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Задача 3.10. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(0) = 1$ и ее вещественная часть равна $u(x, y) = \operatorname{ch} x \cos y$.

Ответ: $f(z) = \operatorname{ch} z$.

Задача 3.11. Восстановить регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(1) = 0$ и ее мнимая часть равна $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Ответ: $f(z) = 2i \ln z$.

Задача 3.12. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(1) = 1$ и ее вещественная часть равна $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Ответ: $f(z) = z^{-1}$.

Задача 3.13. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(0) = 2$ и ее вещественная часть равна $u(x, y) = xy + \frac{2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}$.

Ответ: $f(z) = -i \frac{z^2}{2} + \frac{2i}{z+i}$.

Задача 3.14. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(0) = -i$ и ее вещественная часть равна $u(x, y) = xy^3 - x^3y + \frac{3x}{x^2 + (y+3)^2}$.

Ответ: $f(z) = iz^4 + \frac{3}{z+3i}$.

Задача 3.15. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что ее вещественная часть равна $u(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

Ответ: $f(z) = iz^{-2} + iC$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Задача 3.16. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что ее мнимая часть равна $v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{(x^2 + y^2)^3}$.

Ответ: $f(z) = z^{-3} + C$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Задача 3.17. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(0) = 1 + \frac{i}{2}$ и ее мнимая часть равна $v(x, y) = \frac{(x+2) \cos y + y \sin y}{(x+2)^2 + y^2} e^x - 6xy$.

Ответ: $f(z) = e^z \frac{i}{z+2} - 3z^2 + 1$.

Задача 3.18. Пусть на мнимой оси заданы вещественная $u(0, y)$ и мнимая $v(0, y)$ части регулярной функции $f(z)$. Как восстановить функцию $f(z)$?

Ответ: $f(z) = u(0, -iz) + iv(0, -iz)$.

Задача 3.19. Где в доказательстве теоремы 3.4 используется односвязность области D ?

Задача 3.20. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $|f(z)| = e^{x^2-y^2}$.³

Ответ: $f(z) = e^{z^2} e^{i\psi}$, где ψ — произвольная вещественная постоянная.

Задача 3.21. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^{-y}$.

Ответ: $f(z) = z^2 e^{iz} e^{i\psi}$, где ψ — произвольная вещественная постоянная.

Задача 3.22. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(0) = 0$ и ее вещественная часть равна $u(x, y) = r^8 \cos(8\varphi)$, где r, φ — полярные координаты z .⁴

Ответ: $f(z) = z^8$.

Задача 3.23. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $f(1) = 0$ и ее вещественная часть равна $u(x, y) = r \ln r \cos \varphi - r \varphi \sin \varphi$, где r, φ — полярные координаты z .

Ответ: $f(z) = z \ln z$.

³Рассмотрите вспомогательную функцию $g(z) = \ln f(z)$.

⁴Воспользуйтесь результатом задачи 2.20.

4. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши.

Определение 4.1. Пусть γ – контур в комплексной плоскости, который начинается в точке a и заканчивается в b . Пусть $f(z)$ – непрерывная функция, заданная на кривой γ . Интегралом от $f(z)$ вдоль контура γ называют величину

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k). \quad (4.1)$$

Здесь $z_1 = a, z_2, \dots, z_{n+1} = b$ – последовательные точки, которые разбивают контур γ на n частей, ζ_k – произвольная точка, лежащая на участке $[z_k, z_{k+1}]$ кривой γ , и предел (4.1) берется в предположении, что $\max_k |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0$.

Интеграл по замкнутому контуру γ обозначают символом $\oint_{\gamma} f(z) dz$.

Для вычисления интеграла (4.1) полезна следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть $z = \zeta(t)$ – непрерывно дифференцируемое отображение интервала $[\alpha, \beta]$ вещественной оси на контур γ , причем $\zeta(a) = \alpha$ и $\zeta(b) = \beta$. Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt.$$

Отображение $z = \zeta(t)$ называют параметризацией контура γ .

Пример 4.3. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z},$$

где контур интегрирования обходится против часовой стрелки.

Решение. Поскольку контур интегрирования – окружность, удобно параметризовать его углом φ в полярных координатах $z = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$. Отсюда

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \left(dz = de^{i\varphi} = ie^{i\varphi} d\varphi \right) = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad \square$$

Ответ: $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

Пример 4.4. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, где контур γ – ломаная, последовательно соединяющая точки $-1, 1$ и $1+i$.

Решение. Разбивая контур интегрирования на два отрезка $\gamma_1 = [-1, 1]$ и $\gamma_2 = [1, 1+i]$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_{\gamma_1} \bar{z} dz + \int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \left(\gamma_1 : z = x, x \in [-1, 1], \gamma_2 : z = 1 + iy, y \in [0, 1] \right) = \\ &= \int_{-1}^1 x dx + \int_0^1 (1 - iy)i dy = 1 + i + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + i. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\int_{\gamma} \bar{z} dz = \frac{3}{2} + i$.

Теорема 4.5 (Теорема Коши). Пусть $f(z)$ – регулярная функция в односвязной области D . Тогда для всех контуров γ , лежащих в области D и имеющих общие концы, интеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$ имеет одно и то же значение.

Пример 4.6. Вычислить интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}, \quad (4.2)$$

где контур γ – ломаная, последовательно соединяющая точки $1, -i, -1, i$ и 2 , см. рисунок 3.

Решение. Функция $\frac{1}{z^2}$ регулярна при $z \neq 0$. Из теоремы 4.5 следует, что если деформировать контур γ не пересекая точки $z = 0$, то значение интеграла (4.2) не будет меняться. Прodeформируем контур γ в новый контур $\tilde{\gamma}$ как показано на рисунке 4. При этом значение интеграла (4.2) не изменится.

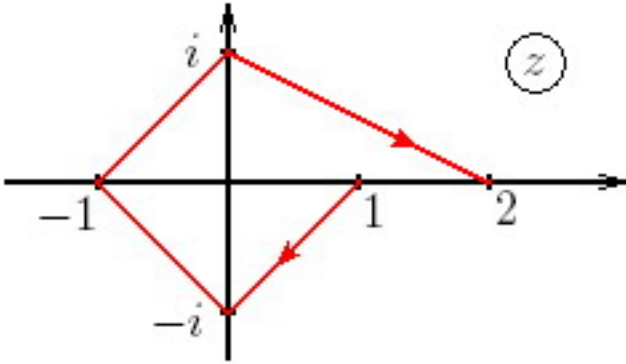


Рис. 3. Контур γ выделен зеленым цветом.

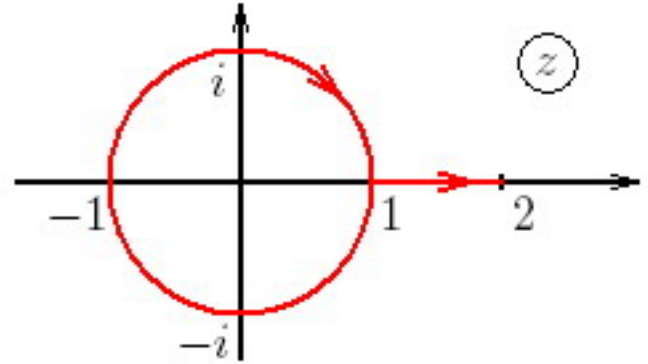


Рис. 4. Контур $\tilde{\gamma}$, полученный деформированием контура γ , выделен красным цветом.

Далее, разбивая контур интегрирования $\tilde{\gamma}$ на два $\tilde{\gamma}_1 = \{z : |z| = 1\}$ и $\tilde{\gamma}_2 = [1, 2]$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} &= \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z^2} = \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{dz}{z^2} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \frac{dz}{z^2} = \left(\tilde{\gamma}_1 : z = e^{i\varphi}, \varphi \in [2\pi, 0], \tilde{\gamma}_2 : z = x, x \in [1, 2] \right) = \\ &= \int_{2\pi}^0 \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{2i\varphi}} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = i \int_{2\pi}^0 e^{-i\varphi} d\varphi - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = i \frac{1}{(-i)} e^{-i\varphi} \Big|_{2\pi}^0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы учли, что $e^{-2\pi i} = 1$. $\square$

Ответ: $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}$.

Домашнее задание:

Задача 4.7. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$, где контур γ соединяет точки 0 и 2 вдоль верхней дуги окружности $|z - 1| = 1$.

Ответ: $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz = 2 - \frac{\pi}{2}i$.

Задача 4.8. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3}$, где контур интегрирования обходится против часовой стрелки.

Ответ: $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3} = 0$.

Задача 4.9. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, где контур γ – ломаная, последовательно соединяющая точки i , 1, $-i$, -2 и $2i$.

Ответ: $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln 2 - 2\pi i$.

Задача 4.10. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} \frac{|z|^2 + 1}{z} dz$, где контур γ – ломаная, последовательно соединяющая точки 1, i , -1 .

Ответ: $\int_{\gamma} \frac{|z|^2 + 1}{z} dz = (2 + \pi)i$.

Задача 4.11. Вычислить интеграл $\int_0^{1+i} e^{\bar{z}} dz$.

Ответ:

Задача 4.12. Вычислить интеграл $\int_0^{1+i} e^{\operatorname{Re} z} dz$.

Ответ:

5. Интегральная формула Коши. Вычисление простейших интегралов с помощью ИФК.

Теорема 5.1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D и непрерывна вплоть до ее границы ∂D , состоящей из конечного числа кусочно гладких контуров. Пусть каждый контур обходится в таком направлении, чтобы при движении в направлении обхода область D оставалась слева. Тогда справедлива интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D, \\ 0 & \text{при } z \notin \overline{D}, \end{cases} \quad (5.1)$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \begin{cases} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) & \text{при } z \in D, \\ 0 & \text{при } z \notin \overline{D}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Пример 5.2. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z-1} dz$$

с помощью интегральной формулы Коши, где контур интегрирования обходится против часовой стрелки.

Замечание 5.3. В дальнейшем, по умолчанию предполагается, что контур интегрирования обходится против часовой стрелки. Такое направление принято считать положительным.

Решение. Положим $f(\zeta) = e^{2\zeta}$, $z = 1$ и воспользуемся ИФК (5.1)

$$\oint_{|\zeta|=2} \frac{e^{2\zeta}}{\zeta - 1} d\zeta = 2\pi i e^{2z} \Big|_{z=1} = 2\pi i e^2. \quad \square$$

Ответ: $\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z-1} dz = 2\pi i e^2.$

Пример 5.4. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)} dz.$$

Решение. Внутри контура интегрирования лежит одна особая точка $z = 0$ подынтегральной функции. Поэтому воспользуемся ИФК (5.1), полагая $f(\zeta) = \frac{\cos \zeta}{\zeta - 2}$,

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{\cos \zeta}{(\zeta - z)(\zeta - 2)} d\zeta = 2\pi i f(z) = 2\pi i \frac{\cos z}{z - 2}.$$

При $z = 0$ получим

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{\cos \zeta}{\zeta(\zeta - 2)} d\zeta = -\pi i. \quad \square$$

Ответ: $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)} dz = -\pi i.$

Пример 5.5. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z(z-2)^2} dz.$$

Решение. Внутри контура интегрирования лежит одна особая точка подынтегральной функции $z = 2$. При этом знаменатель содержит выражение вида $(z - 2)^2$. Поэтому воспользуемся ИФК (5.2) при $n = 1$, полагая $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$,

$$\oint_{|\zeta-2|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta-z)^2} d\zeta = 2\pi i f'(z) = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{2\pi i}{z^2}.$$

При $z = 2$ получим

$$\oint_{|\zeta-2|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta-2)^2} d\zeta = -\frac{\pi i}{2}. \quad \square$$

Ответ: $\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z(z-2)^2} dz = -\frac{\pi i}{2}.$

Пример 5.6. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{1+z}{z(z-1)} dz. \quad (5.3)$$

Решение. Внутри контура интегрирования находятся две особые точки $z = 0$ и $z = 1$. Поэтому для вычисления интеграла (5.3) непосредственное использование ИФК невозможно (подынтегральное выражение в ИФК содержит не более одной особой точки). Для того чтобы ее все же применить, продеформируем контур интегрирования как это показано на рисунке 5. При

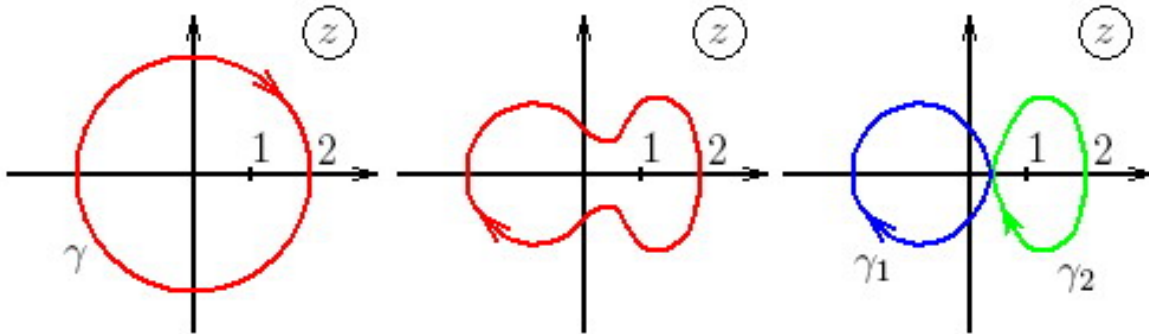


Рис. 5. Контур $\gamma = \{z : |z| = 2\}$, изображенный на левой картинке красным цветом, деформируется в два контура γ_1 и γ_2 , которые изображены на правой картинке синим и зеленым цветами соответственно.

деформации контура мы не пересекали особых точек, поэтому из теоремы Коши следует, что интеграл (5.3) не изменит своего значения

$$\oint_{|z|=2} \frac{1+z}{z(z-1)} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{1+z}{z(z-1)} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{1+z}{z(z-1)} dz.$$

Теперь каждый из интегралов вычисляется с помощью ИФК (5.1)

$$\begin{aligned} - \oint_{\gamma_1} \frac{1+\zeta}{\zeta(\zeta-1)} d\zeta &= \left(f(\zeta) = \frac{1+\zeta}{\zeta-1}, \quad z=0 \right) = 2\pi i f(0) = -2\pi i, \\ - \oint_{\gamma_2} \frac{1+\zeta}{\zeta(\zeta-1)} d\zeta &= \left(f(\zeta) = \frac{1+\zeta}{\zeta}, \quad z=1 \right) = 2\pi i f(1) = 4\pi i. \end{aligned}$$

Отметим, что знак минус перед интегралами появился из-за того, что контуры γ_1 и γ_2 обходятся по часовой стрелке (см. теорему 5.1). $\square$

Ответ: $\oint_{|z|=2} \frac{1+z}{z(z-1)} dz = 2\pi i$.

Домашнее задание:

Задача 5.7. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(i-z)(z-3)}$ с помощью интегральной формулы Коши.

Ответ: $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(i-z)(z-3)} = \frac{2\pi i}{3-i}$.

Задача 5.8. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$ с помощью интегральной формулы Коши.

Ответ: $\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = -2\pi \operatorname{ch} 1$.

Задача 5.9. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2(z+2)} dz$ с помощью интегральной формулы Коши.

Ответ: $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2(z+2)} dz = \pi i$.

Задача 5.10. Пусть задана регулярная ограниченная функция $f(z)$ во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Используя интегральную формулу Коши для интеграла вида $\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$, доказать, что $f(z)$ – постоянная функция.

Задача 5.11. Пусть регулярная функция $f(z)$ удовлетворяет оценке $|f(z)| \leq |z|$ при $z \in \mathbb{C}$. Доказать, что $f(z) = Cz$, где C – некоторая постоянная, удовлетворяющая условию $|C| \leq 1$.

6. Ряды Тейлора элементарных функций.

Одним из важнейших следствий интегральной формулы Коши является следующая теорема.

Теорема 6.1. Пусть $f(z)$ – регулярная функция в круге $|z - z_0| < R$. Тогда функция $f(z)$ допускает разложение в сходящийся в этом круге ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (6.1)$$

Данное разложение единственно. Степенной ряд (6.1) называется рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$.

Теорема 6.2. Справедливы следующие разложения в ряды Тейлора в окрестности точки $z = 0$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots, \quad |z| < 1, \quad (6.2)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < \infty, \quad (6.3)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{6} z^3 + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z + \frac{1}{6} z^3 + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = -z - \frac{1}{2} z^2 - \dots, \quad |z| < 1,$$

$$(1+z)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} z^n = 1 + \mu z + \frac{\mu(\mu-1)}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < 1. \quad (6.4)$$

При этом для многозначных функций $\ln(1-z)$ и $(1+z)^\mu$ имеются в виду ветви, фиксированные равенствами $\ln(1-z) = 0$ и $(1+z)^\mu = 1$ при $z = 0$.

Домашнее задание:

Задача 6.3. Непосредственным вычислением $f^{(n)}(0)$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = \frac{1}{2-z}$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $\frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, |z| < 2$.

Задача 6.4. Разложить функцию $f(z) = z^3$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $z^3 = 1 + 3(z-1) + 3(z-1)^2 + (z-1)^3, |z-1| < \infty$.

7. Нахождение нескольких первых членов ряда Тейлора.

Пример 7.1. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{3-z}{(1-2z)(2+z)}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ и указать область сходимости ряда.

Решение. Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости за исключением двух точек $z_1 = \frac{1}{2}$ и $z_2 = -2$. Из теоремы 6.1 следует, что область сходимости ряда Тейлора совпадает с кругом (с центром в точке $z = 0$) максимального радиуса, в котором функция $f(z)$ регулярна. Отсюда легко заключить, что ряд Тейлора будет сходиться в круге $\{z : |z| < \frac{1}{2}\}$.

Для того чтобы найти ряд Тейлора функции $f(z)$, разложим ее на простейшие дроби

$$\frac{3-z}{(1-2z)(2+z)} = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{2+z}. \quad (7.1)$$

Используя стандартные разложения из теоремы 6.2, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n, \\ \frac{1}{2+z} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7.1) найдем

$$\frac{3-z}{(1-2z)(2+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n. \quad \square$$

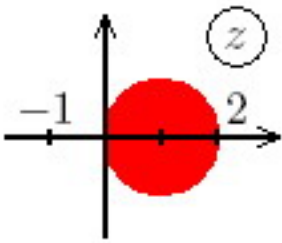
Ответ: $\frac{3-z}{(1-2z)(2+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n, |z| < \frac{1}{2}$.

Пример 7.2. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ и указать область сходимости ряда.

Решение. Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости за исключением двух точек $z_1 = -1$ и $z_2 = 2$. Для того чтобы определить область сходимости ряда Тейлора, достаточно найти круг максимального радиуса с центром в точке $z = 1$, не пересекающий точки $z = -1$ и $z = 2$ (см. пример 7.1). Отсюда находим, что ряд Тейлора функции $f(z)$ будет сходиться в области $|z-1| < 1$, см. рисунок 6.



Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби

$$\frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)} = 1 - \frac{1}{2-z} + \frac{2}{1+z}. \quad (7.2)$$

Рис. 6. Область $|z-1| < 1$ выделена красным цветом. Используя стандартные разложения из теоремы 6.2, получим

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n,$$

$$\frac{2}{1+z} = \frac{2}{2+(z-1)} = \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n.$$

Здесь мы выделили коэффициент $(z-1)$, поскольку ряд Тейлора нужно построить в окрестности точки⁵ $z_0 = 1$. Отсюда и из (7.2) найдем

$$\frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n.$$

Ответ: $\frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n, |z-1| < 1.$

Определение 7.3. *Запись*

$$f(z) = O(g(z)) \quad \text{при } z \rightarrow z_0$$

означает, что существуют постоянная C и окрестность V точки z_0 такие, что

$$|f(z)| \leq C|g(z)| \quad \text{при } z \in V.$$

Пример 7.4. *Разложить функцию*

$$\frac{e^z}{1-z}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ с точностью до $O(z^3)$ и указать область сходимости ряда.

Решение. Функция $\frac{e^z}{1-z}$ имеет единственную особую точку $z = 1$, расположенную на границе круга $|z| < 1$. Поэтому ее ряд Тейлора будет сходиться в круге $|z| < 1$.

Используя стандартные разложения, получим

$$\frac{e^z}{1-z} = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^3)\right) (1 + z + z^2 + O(z^3)) = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + O(z^3). \quad \square$$

Ответ: $\frac{e^z}{1-z} = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + O(z^3), |z| < 1.$

Пример 7.5. *Разложить функцию $\sin(e^{2z})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ с точностью до $O(z^3)$ и указать область сходимости ряда.*

Решение. Функция $\sin(e^{2z})$ регулярна в $\mathbb{C}$, а следовательно ее ряд Тейлора сходится во всей комплексной плоскости.

Используя стандартные разложения, получим

$$\begin{aligned} \sin(e^{2z}) &= \sin(1 + 2z + 2z^2 + O(z^3)) = \\ &= \sin(1) \cos(2z + 2z^2 + O(z^3)) + \cos(1) \sin(2z + 2z^2 + O(z^3)) = \\ &= \sin(1) \left(1 - \frac{1}{2}(2z + 2z^2 + O(z^3))^2 + O(z^4)\right) + \cos(1) (2z + 2z^2 + O(z^3) + O(z^3)) = \\ &= \sin(1) (1 - 2z^2 + O(z^3)) + \cos(1) (2z + 2z^2 + O(z^3)) = \\ &= \sin(1) + 2\cos(1)z + 2(\cos(1) - \sin(1))z^2 + O(z^3). \end{aligned}$$

⁵Чтобы этого избежать, и искать разложение в окрестности точки ноль, можно предварительно сделать сдвиг $\zeta = z - z_0$ (в данном примере $\zeta = z - 1$).

Заметим, что было бы неправильно во втором равенстве воспользоваться стандартным разложением в ряд Тейлора для синуса

$$\sin(e^{2z}) = \sin(1 + 2z + 2z^2 + O(z^3)) = (1 + 2z + 2z^2 + O(z^3)) - O(1 + 2z + 2z^2 + O(z^3))^3 = O(1).$$

Сколько бы мы ни выписали членов в разложении синуса, поправочный член все равно будет оцениваться как $O(1)$, и вместо ряда Тейлора мы всегда будем получать лишь оценку $O(1)$. $\square$

Ответ: $\sin(e^{2z}) = \sin(1) + 2\cos(1)z + 2(\cos(1) - \sin(1))z^2 + O(z^3)$, $|z| < \infty$.

Домашнее задание:

Задача 7.6. Разложить функцию $\frac{3-z^2}{(1+z)(2+z)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $\frac{3-z^2}{(1+z)(2+z)} = -1 + \frac{2}{1+z} + \frac{1}{2+z} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$, $|z| < 1$.

Задача 7.7. Разложить функцию z^{-2} в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -1$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $z^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$, $|z+1| < 1$.

Задача 7.8. Разложить функцию $e^z(1+z)^{10}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ с точностью до $O(z^3)$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $e^z(1+z)^{10} = 1 + 11z + \frac{111}{2}z^2 + O(z^3)$, $|z| < 1$.

Задача 7.9. Разложить функцию $(z + \cos(2z))^{-1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ с точностью до $O(z^3)$.

Ответ: $\frac{1}{z+\cos(2z)} = 1 - z + 3z^2 + O(z^3)$.

Задача 7.10. Разложить функцию $\cos(\cos(2z))$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ с точностью до $O(z^4)$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $\cos(\cos(2z)) = \cos(1) + 2\sin(1)z^2 + O(z^4)$, $|z| < \infty$.

Задача 7.11. Разложить функцию $\operatorname{tg}(\sin(z))$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ с точностью до $O(z^5)$.

Ответ: $\operatorname{tg}(\sin(z)) = z + \frac{1}{6}z^3 + O(z^5)$.

Задача 7.12. Разложить функцию $e^{z \ln z}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ с точностью до $O((z-1)^4)$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $e^{z \ln z} = 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \frac{1}{2}(z-1)^3 + O((z-1)^4)$, $|z-1| < 1$.

8. Ряд Лорана. Ряды Лорана рациональных функций.

Теорема 8.1. Пусть $f(z)$ – регулярная функция в кольце $r < |z - z_0| < R$. Тогда функция $f(z)$ допускает разложение в сходящийся в этом кольце ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8.1)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (8.2)$$

Здесь ρ – произвольное число такое, что $r < \rho < R$ и контур интегрирования обходится против часовой стрелки. Данное разложение единственно. Степенной ряд (8.1) называется рядом Лорана функции $f(z)$ с центром в точке $z = z_0$.

Пример 8.2. Указать все области в которых функция $\frac{1}{\sin z}$ может быть разложена в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$.

Решение. Функция $\frac{1}{\sin z}$ регулярна в области $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\pi n\}$. Отсюда и из теоремы 8.1 следует, что эта функция допускает разложение в ряд Лорана в следующих областях

$$0 < |z| < \pi, \quad \pi < |z| < 2\pi, \quad \dots, \quad \pi n < |z| < \pi(n+1), \quad \dots, \quad (8.3)$$

см. рисунок 7. Каждая из этих областей является кольцом максимального размера, не содержащим особых точек функции $\frac{1}{\sin z}$. При этом в каждой из указанных областей разложения в ряд Лорана будут различными. $\square$

Ответ: $\pi(n-1) < |z| < \pi n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Пример 8.3. Разложить функцию $e^{\frac{1}{z^2}}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < \infty$.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{|z^2|} < \infty$ в кольце $0 < |z| < \infty$. Поэтому мы можем воспользоваться стандартным разложением (6.3) для экспоненты

$$e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}}, \quad 0 < |z| < \infty. \quad \square$$

Ответ: $e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}}$, при $0 < |z| < \infty$.

Пример 8.4. Разложить функцию $\frac{1}{1-z}$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$ во всех возможных областях.

Решение. Функция $\frac{1}{1-z}$ имеет одну особую точку $z = 1$, поэтому ее можно разложить в ряд Лорана в двух областях $|z| < 1$ и $1 < |z| < \infty$. Еще раз повторим, что эти области – круг и кольцо максимального размера с центром в точке $z_0 = 0$, которые не содержат особых точек функции $\frac{1}{1-z}$. Граница же этих областей должна содержать по крайней мере одну особую точку исследуемой функции.

Разложим функцию $\frac{1}{1-z}$ в ряд Лорана в области $|z| < 1$. Несложно понять, что ряд Лорана в данном случае совпадает с рядом Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$. Это является следствием

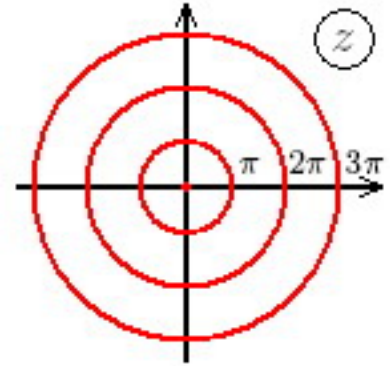


Рис. 7. Красным цветом выделены границы областей, заданных в (8.3).

того факта, что функция $\frac{1}{1-z}$ регулярна в окрестности точки $z_0 = 0$. Используя стандартные разложения, получим

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Разложим функцию $\frac{1}{1-z}$ в ряд Лорана в области $|z| > 1$. Для того, чтобы воспользоваться стандартным разложением (6.2), необходимо предварительно выделить параметр, который по модулю меньше единицы. Таким параметром является $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z} - 1\right)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1. \quad \square$$

Ответ: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, при $|z| < 1$; $\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ при $|z| > 1$.

Мы рассмотрели несколько простых примеров, в которых отыскание рядов Лорана сводилось к применению стандартных разложений из теоремы 6.2. В общем случае, не смотря на явную формулу (8.2) для коэффициентов ряда Лорана, построение этого ряда может оказаться весьма затруднительной задачей. Для эффективного вычисления коэффициентов ряда Лорана существует ряд приемов, некоторые из которых мы рассмотрим ниже.

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема.

Теорема 8.5. Пусть задана рациональная функция, которую нам удобно записать в виде

$$R(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{(z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}}.$$

Здесь $z_1, \dots, z_k$ – попарно различные комплексные числа, n – целое неотрицательное число и $n_1, \dots, n_k$ – натуральные числа. Тогда существуют такие постоянные $A_{p,n}$, что

$$R(z) = G_{\infty}(z) + \sum_{p=1}^k G_p(z). \quad (8.4)$$

Здесь $G_p(z)$ – вклады от особых точек z_p и $G_{\infty}(z)$ – вклад от бесконечности

$$G_p(z) = \frac{A_{p,1}}{z - z_p} + \frac{A_{p,2}}{(z - z_p)^2} + \dots + \frac{A_{p,n_p}}{(z - z_p)^{n_p}},$$

$$\begin{cases} G_{\infty}(z) = 0, & \text{если } \sum_{p=1}^k n_k > n, \\ G_{\infty}(z) = A_{\infty,0} + A_{\infty,1}z + \dots + A_{\infty,n_{\infty}}z^{n'}, & \text{если } n' = n - \sum_{p=1}^k n_k \geq 0, \end{cases}$$

Разложение (8.4) называется разложением на простейшие дроби.

Замечание 8.6. В теореме 8.5 ничего не говорится о том как находить постоянные $A_{p,n}$. Для того чтобы их определить, можно, например, привести выражение в правой части (8.4) к общему знаменателю и, далее, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z в числителях обеих частей равенства (8.4), получить систему линейных уравнений на коэффициенты $A_{p,n}$. Решая полученную систему, можно определить постоянные $A_{p,n}$. Заметим также, что это не самый короткий способ определения постоянных $A_{p,n}$. Другой, более короткий способ, будет описан в следующем примере.

Пример 8.7. Разложить рациональную функцию

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)}$$

на простейшие дроби.

Решение. Согласно теореме 8.5 существуют постоянные A , B и C такие, что

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)} = A + \frac{B}{z - 2} + \frac{C}{z + 4}. \quad (8.5)$$

Для определения постоянной A , устремим z к бесконечности в равенстве (8.5). В результате получим, что $A = 2$.

Для определения постоянной B , домножим обе части равенства (8.5) на $(z - 2)$ и после этого положим $z = 2$. В результате получим

$$B = \left. \frac{2z^2 + 6z - 14}{z + 4} \right|_{z=2} = 1.$$

Для определения постоянной C , домножим обе части равенства (8.5) на $(z + 4)$ и после этого положим $z = -4$. В результате получим

$$C = \left. \frac{2z^2 + 6z - 14}{z - 2} \right|_{z=-4} = 1.$$

Подставляя найденные значения для постоянных A , B и C в (8.5), получим требуемое разложение

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)} = 2 + \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{z + 4}. \quad \square$$

Ответ: $\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)} = 2 + \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{z + 4}$.

Пример 8.8. Разложить рациональную функцию $\frac{1}{z^2(z - 1)}$ на простейшие дроби.

Решение. Согласно теореме 8.5 существуют постоянные A , B и C такие, что

$$\frac{1}{z^2(z - 1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z - 1}. \quad (8.6)$$

Для определения постоянной C , домножим обе части равенства (8.6) на $(z - 1)$ и после этого положим $z = 1$. В результате получим

$$C = \left. \frac{1}{z^2} \right|_{z=1} = 1.$$

Для определения постоянной B , домножим обе части равенства (8.6) на z^2 и после этого положим $z = 0$. В результате получим

$$B = \left. \frac{1}{z - 1} \right|_{z=0} = -1.$$

Для определения постоянной A , домножим обе части равенства (8.6) на z и после этого устремим z к точке ноль. В результате получим

$$A = \left. \frac{1}{z(z - 1)} - \frac{B}{z} \right|_{z \rightarrow 0} = \left. \frac{1}{z(z - 1)} + \frac{1}{z} \right|_{z \rightarrow 0} = \left. \frac{1}{z - 1} \right|_{z \rightarrow 0} = -1.$$

Подставляя найденные значения для постоянных A , B и C в (8.6), получим требуемое разложение. $\square$

Ответ: $\frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1}$.

Пусть теперь требуется разложить некоторую *рациональную* функцию $R(z)$ в ряд Лорана с центром в точке z_0 в кольце $r < |z - z_0| < R$, которое, напомним, не должно содержать особых точек функции $R(z)$. Приведем план построения ряда Лорана в этом случае.

- (1) Раскладываем рациональную функцию $R(z)$ на простейшие дроби.
- (2) Делаем сдвиг $z = \zeta + z_0$. Это полезно сделать, для того чтобы строить ряд Лорана с центром в точке ноль.
- (3) Используя стандартное разложение (6.2), раскладываем в ряд Лорана дроби

$$\frac{1}{z - z_p} = \frac{1}{\zeta + z_0 - z_p}.$$

При этом, если $|z_p - z_0| < r$, то $|\frac{z_p - z_0}{\zeta}| < 1$ и в качестве малого параметра нужно взять $\frac{z_p - z_0}{\zeta}$. В противном случае, т. е. при $|z_p - z_0| > R$, получим, что $|\frac{\zeta}{z_p - z_0}| < 1$ и малым параметром будет $\frac{\zeta}{z_p - z_0}$, см. рисунок 8. Для разложения в ряд Лорана дроби $\frac{1}{(z - z_p)^m}$,

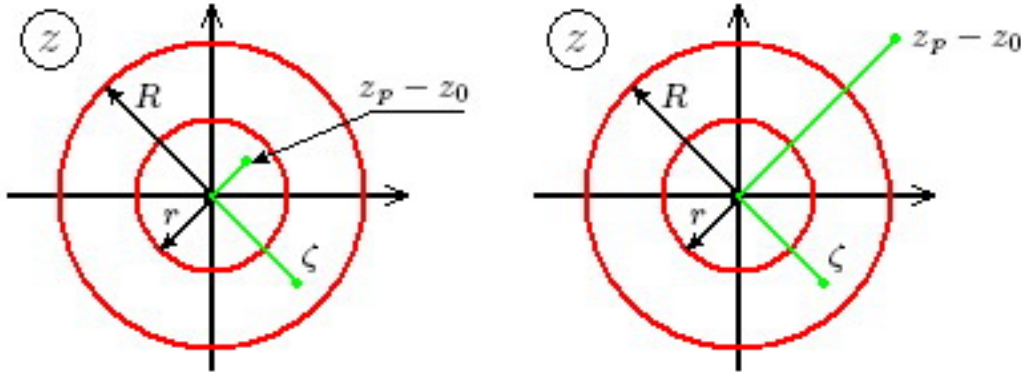


Рис. 8. Точка z_0 помещена в начало координат. На левой картинке изображен случай $|z_p - z_0| < r$, на правой — $|z_p - z_0| > R$.

необходимо $m - 1$ раз продифференцировать по z разложение в ряд Лорана дроби $\frac{1}{z - z_p}$.

- (4) Раскладываем в ряд Лорана функцию $G_\infty(z) = G_\infty(\zeta + z_0)$. Для данной функции ряд Лорана вырождается в конечный ряд Тейлора, т. е. в полином.
- (5) Возвращаемся к переменной z по формуле $\zeta = z - z_0$.
 - Ответ выписываем в виде суммы (8.4).

Пример 8.9. Разложить функцию

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)}$$

в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < 4$.

Решение. Решение проводим согласно нашему плану.

Шаг 1: Раскладываем исследуемую функцию на простейшие дроби

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)} = 2 + \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{z + 4}.$$

Шаг 2: Центром кольца $2 < |z| < 4$ является точка $z_0 = 0$. Поэтому сдвиг выполнять не нужно.

Шаг 3: Раскладываем в ряд Лорана простейшие дроби

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

Здесь мы учли, что $|\frac{2}{z}| < 1$ и $|\frac{z}{4}| < 1$.

Собирая полученные формулы вместе, найдем

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z-2)(z+4)} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}. \quad \square$$

Ответ: $\frac{2z^2+6z-14}{(z-2)(z+4)} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n, \quad 2 < |z| < 4.$

Пример 8.10. Разложить функцию

$$\frac{z^3 + 4z^2 - 2z - 14}{(z-2)(z+4)}$$

в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 1$ в кольце, содержащем точку $z = 3$ и указать область сходимости полученного ряда.

Решение. Решение проводим согласно нашему плану.

Шаг 1: Раскладываем исследуемую функцию на простейшие дроби

$$\frac{z^3 + 4z^2 - 2z - 14}{(z-2)(z+4)} = 2 + z + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+4}.$$

Шаг 2: Несложно понять, что ряд Лорана требуется искать в кольце $1 < |z-1| < 5$. Выполняем сдвиг $z = \zeta + 1$

$$\left. \frac{z^3 + 4z^2 - 2z - 14}{(z-2)(z+4)} \right|_{z=\zeta+1} = \left(2 + z + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+4} \right)_{z=\zeta+1} = 3 + \zeta + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta+5}, \quad 1 < |\zeta| < 5.$$

Шаг 3: Раскладываем в ряд Лорана простейшие дроби

$$\frac{1}{\zeta-1} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1-\frac{1}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}}, \quad \frac{1}{|\zeta|} < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta+5} = \frac{1}{5} \frac{1}{1+\frac{\zeta}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} \zeta^n, \quad \frac{|\zeta|}{5} < 1.$$

Шаг 4: Функция $G_{\infty}(z)|_{z=\zeta+1} = 3 + \zeta$ уже разложена в ряд по степеням ζ .

Шаг 5: Возвращаемся к переменной z по формуле $\zeta = z - 1$

$$\begin{aligned} \frac{z^3 + 4z^2 - 2z - 14}{(z-2)(z+4)} &= \zeta + 3 + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta+5} \Big|_{\zeta=z-1} = \zeta + 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} \zeta^n \Big|_{\zeta=z-1} = \\ &= (z-1) + 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} (z-1)^n, \quad 1 < |z-1| < 5. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{z^3+4z^2-2z-14}{(z-2)(z+4)} = (z-1) + 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{5^{n+1}}, 1 < |z-1| < 5.$

Домашнее задание:

Задача 8.11. Указать все области в которых функция $\frac{\sin z}{z(z-1)(z-3)}$ может быть разложена в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 1$.

Ответ: $0 < |z-1| < 1, 1 < |z-1| < 2, 2 < |z-1| < \infty.$

Задача 8.12. Разложить функцию $\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < \infty.$

Ответ: $\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-1)^{-2n-1}, 0 < |z-1| < \infty.$

Задача 8.13. Разложить функцию $\frac{3z^2+3z-9}{(z-1)(z+2)}$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 2.$

Ответ: $\frac{3z^2+3z-9}{(z-1)(z+2)} = 3 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = 3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, 1 < |z| < 2.$

Задача 8.14. Разложить функцию из задачи 8.13 в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = -1$ в кольце, содержащем точку $z = \frac{1}{2}$, и указать область сходимости полученного ряда.

Ответ: $\frac{3z^2+3z-9}{(z-1)(z+2)} = 3 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+1)^{n+1}}, 1 < |z+1| < 2.$

Задача 8.15. Разложить функцию $\frac{2z^2+6z+8}{z^2+4}$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = i$ в кольце, содержащем точку $z = -i$, и указать область сходимости полученного ряда.

Ответ: $\frac{2z^2+6z+8}{z^2+4} = 2 + \frac{3}{z-2i} + \frac{3}{z+2i} = 2 + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(3i)^{n+1}}, 1 < |z-i| < 3.$

Задача 8.16. Разложить функцию $\frac{z^4+2z^3+2z^2+4z+1}{z(z+1)^2}$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 1$ в кольце, содержащем точку $z = -\frac{1}{2}$, и указать область сходимости полученного ряда.

Ответ: $\frac{z^4+2z^3+2z^2+4z+1}{z(z+1)^2} = z + \frac{1}{z} + \frac{2}{(z+1)^2} = 1 + (z-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(z-1)^n}{2^{n+1}}, 1 < |z-1| < 2.$

9. Классификация изолированных особых точек.

Определение 9.1. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность $0 < |z - z_0| < \rho$ (или $\rho < |z| < \infty$, если $z_0 = \infty$) этой точки, в которой функция $f(z)$ регулярна.

Пример 9.2. Найти все изолированные особые точки функции $\frac{1}{\sin z}$.

Решение. Функция $\frac{1}{\sin z}$ имеет особенности в точках $z = \pi n$, где $n \in \mathbb{N}$ и при $z = \infty$.

Легко видеть, что в окрестности точек $z = \pi n$ функция $\frac{1}{\sin z}$ регулярна, поэтому это изолированные особые точки.

Мы видим, что особые точки $z = \pi n$ накапливаются на бесконечности, поэтому невозможно выделить окрестность $\rho < |z| < \infty$, в которой функция $\frac{1}{\sin z}$ регулярна. Таким образом, $z = \infty$ неизолированная особая точка. $\square$

Ответ: Изолированные особые точки: $z = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$; неизолированная особая точка: $z = \infty$.

Различают три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции в окрестности этих точек.

Определение 9.3. Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$.

- (1) Если предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует и конечен, то z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$.
- (2) Если предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует и равен бесконечности, то точка z_0 называется полюсом функции $f(z)$.
- (3) Если предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует, то z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$.

В окрестности изолированной особой точки z_0 функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана, см. теорему 8.1 на стр. 27,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \rho, \quad \text{при } z_0 \neq \infty,$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| > \rho, \quad \text{при } z_0 = \infty.$$

Определение 9.4. Главной частью ряда Лорана называется сумма тех членов этого ряда, которые стремятся к бесконечности при $z \rightarrow z_0$. При $z_0 \neq \infty$ главная часть ряда Лорана состоит из отрицательных степеней $(z - z_0)$, а при $z_0 = \infty$ из положительных степеней z .

Теорема 9.5.

- (1) Для того чтобы z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $f(z)$ в окрестности точки z_0 равнялась нулю.
- (2) Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержала лишь конечное число нетривиальных членов.
- (3) Для того чтобы z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержала бесконечное число нетривиальных членов.

Определение 9.6. Точка $z_0 \neq \infty$, в окрестности которой функция $f(z)$ регулярна, называется нулем функции $f(z)$ порядка $m \geq 1$, если ее ряд Тейлора в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots,$$

где $c_m \neq 0$.

Точка $z_0 = \infty$, в проколотой окрестности которой функция $f(z)$ регулярна, называется нулем порядка $m \geq 1$, если ее ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m-1}}{z^{m+1}} + \dots,$$

где $c_{-m} \neq 0$.

Говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка m , если функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке ноль порядка m .

Пример 9.7. Пусть функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

где $z_0 \neq \infty$, $m \in \mathbb{Z}$, функция $\varphi(z)$ регулярна в окрестности точки z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

- (1) Доказать, что если $m > 0$, то функция $f(z)$ имеет в точке z_0 ноль порядка m .
- (2) Доказать, что если $m < 0$, то функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка $|m|$.

Решение. Докажем первое утверждение. Так как функция $\varphi(z)$ регулярна в окрестности точки z_0 , то она может быть разложена в ряд Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n, \quad d_0 = \varphi(z_0) \neq 0.$$

Отсюда

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^{n+m} = d_0 (z - z_0)^m + d_1 (z - z_0)^{m+1} + \dots.$$

Для доказательства осталось вспомнить, что $d_0 \neq 0$ и воспользоваться определением 9.6.

Докажем второе утверждение. Так как $\varphi(z_0) \neq 0$, то функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ регулярна в окрестности точки z_0 (см. теорему 2.10) и может быть разложена в ряд Тейлора

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n, \quad q_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)} &= (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\varphi(z)} = (z - z_0)^{|m|} \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^{n+|m|} = \\ &= q_0 (z - z_0)^{|m|} + q_1 (z - z_0)^{|m|+1} + \dots \end{aligned}$$

Для доказательства осталось вспомнить, что $q_0 \neq 0$ и воспользоваться определением 9.6. $\square$

Пример 9.8. Найти все особые точки и нули функции $f(z) = \frac{2}{z^2 - 1}$ и указать их тип.

Решение. Функция имеет три изолированные особые точки $z = -1, 1, \infty$. Перепишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 1} = \frac{2}{(z - 1)(z + 1)}.$$

Используя результаты примера (9.7) легко получить, что точки $z = -1, 1$ – полюса первого порядка.

Вместе с тем, при больших z функция $f(z)$ ведет себя как $\frac{2}{z^2}$. Отсюда следует, что ее ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + \dots$$

Поэтому $z = \infty$ – ноль второго порядка. $\square$

Ответ: $z = -1, 1$ – полюса первого порядка; $z = \infty$ – ноль второго порядка.

Пример 9.9. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z}{1 - \cos(z^2)} \quad (9.1)$$

и указать их тип.

Решение. Особые точки функции $f(z)$ располагаются в нулях функции $1 - \cos(z^2)$ и на бесконечности. Найдем нули функции $1 - \cos(z^2)$

$$\cos(z^2) = 1 \iff z^2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} z = 0, \\ z = \pm\sqrt{2\pi k}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ z = \pm i\sqrt{2\pi k}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В окрестности точки $z = 0$

$$1 - \cos(z^2) = 1 - \left(1 - \frac{z^4}{2} + O(z^8)\right) = \frac{z^4}{2} + \dots$$

$$f(z) = \frac{z}{1 - \cos(z^2)} = \frac{2z}{z^4 + O(z^8)} = \frac{1}{z^3} \frac{2}{1 + O(z^4)}.$$

Таким образом, точка $z = 0$ – полюс третьего порядка.

В окрестностях точек $z_* = \pm\sqrt{2\pi k}, \pm i\sqrt{2\pi k}$, где $k \in \mathbb{N}$ функцию $1 - \cos(z^2)$ раскладывать в ряд Тейлора неудобно. Проще вычислить несколько первых производных

$$(1 - \cos(z^2))' \Big|_{z=z_*} = 2z \sin z^2 \Big|_{z=z_*} = 0,$$

$$(1 - \cos(z^2))'' \Big|_{z=z_*} = 2 \sin(z^2) + 4z^2 \cos(z^2) \Big|_{z=z_*} = 4z_*^2 \neq 0.$$

Отсюда следует, что ряд Тейлора функции $1 - \cos(z^2)$ в окрестностях точек z_* начинается со второй степени (см. теорему 6.1). Учитывая, что числитель в (9.1) при $z = z_*$ не обращается в ноль получим, что точки $z = \pm\sqrt{2\pi k}, \pm i\sqrt{2\pi k}$, где $k \in \mathbb{N}$ полюса второго порядка.

Поскольку особые точки накапливаются на бесконечности, то $z = \infty$ – неизоллированная особая точка. $\square$

Ответ: $z = 0$ – полюс третьего порядка; $z = \pm\sqrt{2\pi k}, \pm i\sqrt{2\pi k}$, где $k \in \mathbb{N}$ – полюса второго порядка; $z = \infty$ – неизоллированная особая точка.

Пример 9.10. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sin \frac{z}{z+1}$$

и указать их тип.

Решение. У функции $f(z)$ три изолированные особые точки: $z = -1, 0, \infty$. В точке $z = 0$ у функции $\sin \frac{z}{z+1}$ ноль первого порядка, поскольку

$$\left(\sin \frac{z}{z+1} \right)'_{z=0} = \cos \left(\frac{z}{z+1} \right) \frac{z+1-z}{(z+1)^2} \Big|_{z=0} = 1 \neq 0.$$

Отсюда и из того, что у функции $\frac{1}{z^3}$ в нуле полюс третьего порядка следует, что у $f(z)$ точка $z = 0$ – полюс второго порядка.

При $z \rightarrow -1$ вдоль вещественной оси функция $\sin \frac{z}{z+1}$ осциллирует, а потому не имеет предела. Это же касается и функции $f(z)$. Поэтому $z = -1$ – существенно особая точка.

При $z \rightarrow \infty$ существует предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3} \sin \frac{z}{z+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3} \lim_{z \rightarrow \infty} \sin \frac{z}{z+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3} \sin 1 = 0.$$

Поэтому $z = \infty$ – устранимая особая точка. $\square$

Ответ: $z = 0$ – полюс второго порядка; $z = -1$ – существенно особая точка; $z = \infty$ – устранимая особая точка.

Домашнее задание:

Задача 9.11. Найти все нули функции $\sin(z^4)$ и указать их тип.

Ответ: $z = 0$ – ноль четвертого порядка; $z = \pm \sqrt[4]{\pi n}, \pm i \sqrt[4]{\pi n}, n \in \mathbb{N}$ – нули первого порядка.

Задача 9.12. Определить порядок нуля функции $\cos(\sin z) - 1$ в точке $z = 0$.

Ответ: Ноль второго порядка.

Задача 9.13. Определить порядок нуля функции $\sin^2(e^z - z - \cos z)$ в точке $z = 0$.

Ответ: Ноль четвертого порядка.

Задача 9.14. Определить тип особенности функции $(z^3 - \sin^3 z)^{-2}$ в точке $z = 0$.

Ответ: Полюс 10-го порядка.

Задача 9.15. Определить тип особенности функции $(1 - \cos(2z) - 2z \sin z)^{-3}$ в точке $z = 0$.

Ответ: Полюс 12-го порядка.

Задача 9.16. Найти все особые точки и нули функции $\frac{z-1}{z^4-16}$ и указать их тип.

Ответ: $z = 1$ – ноль первого порядка; $z = \pm 2, \pm 2i$ – полюса первого порядка; $z = \infty$ – устранимая особая точка (ноль третьего порядка).

Задача 9.17. Найти все особые точки и нули функции $\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ и указать их тип.

Ответ: $z = \frac{1+\pi n}{1-\pi n}, n \in \mathbb{Z}$ – нули первого порядка; $z = -1$ – существенно особая точка; $z = \infty$ – устранимая особая точка (не ноль и не полюс).

Задача 9.18. Найти все особые точки функции $\frac{1}{1-e^{z^2}}$ и указать их тип.

Ответ: $z = 0$ – полюс второго порядка; $z = \pm \sqrt{2\pi i n}, n \in \mathbb{N}$ – полюса первого порядка; $z = \infty$ – существенно особая точка.

Задача 9.19. Найти все особые точки функции $\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{(1-e^z) \sin z}$ и указать их тип.

Ответ: $z = 0$ – полюс второго порядка; $z = \pm \pi n, \pm 2i\pi n, n \in \mathbb{N}$ – полюса первого порядка; $z = 1$ – существенно особая точка; $z = \infty$ – неизоллированная особая точка.

10. 1-ая контрольная работа (1 час).

Вариант контрольной работы №1.

- (1) Восстановить регулярную функцию $f(z)$ по ее мнимой части

$$v(x, y) = x^2 - y^2 - e^y \sin x.$$

Ответ: $f(z) = iz^2 + e^{-iz} + C$, где $C \in \mathbb{R}$.

- (2) Разложить функцию $\frac{z^2-2}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = -1$ в области содержащей точку $z = 1.5$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $\frac{z^2-2}{(z-1)(z-2)} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z+1)^{n+1}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$, где $2 < |z+1| < 3$.

- (3) Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 2$, и $f(z) = 1 - z$ при $\operatorname{Re}(z) = 0$. Найдите значение функции $f(z)$ в точке $z = 1 + i$ и обоснуйте свой ответ.

Ответ: $f(1+i) = -i$.

Вариант контрольной работы №1.

- (1) Восстановить регулярную функцию $f(z)$ по ее вещественной части

$$u(x, y) = e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) + 3y.$$

Ответ: $f(z) = e^{z \frac{i}{z+2}} - 3z^2 + iC$, где $C \in \mathbb{R}$.

- (2) Разложить функцию $\frac{3-z^2}{z^2+3iz}$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 4$ в области содержащей точку $z = i$ и указать область сходимости ряда.

Ответ: $\frac{3-z^2}{z^2+3iz} = -1 - \frac{i}{z} + \frac{4i}{z+3i} = -1 - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(z-4)^{n+1}} + 4i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-4)^n}{(4+3i)^{n+1}}$, где $4 < |z-4| < 5$.

- (3) Функция $f(z)$ регулярна в круге $|z-1| < 1$, и $f(1/n) = 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Следует ли из теоремы единственности, что $f(z) \equiv 0$? Обоснуйте свой ответ.

Ответ: Нет, рассмотрим, например, $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$.

11. Нахождение главной части ряда Лорана функции в окрестности ее полюса.

Пример 11.1. Найти главную часть ряда Лорана функции

$$\frac{e^z}{z \sin z}$$

в окрестности точки $z = 0$.

Решение. Воспользуемся стандартными разложениями в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z \sin z} &= \frac{1 + z + O(z^2)}{z(z + O(z^3))} = \frac{1}{z^2} \frac{1 + z + O(z^2)}{(1 + O(z^2))} = \frac{1}{z^2} (1 + z + O(z^2))(1 + O(z^2)) = \\ &= \frac{1}{z^2} (1 + z + O(z^2)) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + O(1). \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$.

Пример 11.2. Найти главную часть ряда Лорана функции

$$\frac{\sin z}{z^2(1 - e^{2z})^2}$$

в окрестности $z = 0$.

Решение. Воспользуемся стандартными разложениями в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z^2(1 - e^{2z})^2} &= \frac{z - \frac{1}{6}z^3 + O(z^5)}{z^2 \left(1 - 1 - 2z - 2z^2 - \frac{4}{3}z^3 + O(z^4)\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)}{z \left(2z + 2z^2 + \frac{4}{3}z^3 + O(z^4)\right)^2} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)}{4z^3 \left(1 + z + \frac{2}{3}z^2 + O(z^3)\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)}{4z^3 \left(1 + 2z + \frac{7}{3}z^2 + O(z^3)\right)} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)}{4z^3} \left(1 - \left(2z + \frac{7}{3}z^2 + O(z^3)\right) + \left(2z + \frac{7}{3}z^2 + O(z^3)\right)^2 + O(z^3)\right) = \\ &= \frac{1}{4z^3} \left(1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)\right) \left(1 - 2z + \frac{5}{3}z^2 + O(z^3)\right) = \frac{1}{4z^3} \left(1 - 2z + \frac{3}{2}z^2 + O(z^3)\right) = \\ &= \frac{1}{4z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{8z} + O(1). \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{4z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{8z}$.

Пример 11.3. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{1}{\sin(\pi z)}$ в окрестности всех ее изолированных особых точек.

Решение. Изолированные особые точки имеют вид $z = n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Все эти точки – полюса первого порядка. Разложим функцию $\sin(\pi z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = n$

$$\begin{aligned} \sin(\pi z) &= \sin(\pi z) \Big|_{z=n} + (\sin(\pi z))' \Big|_{z=n} (z - n) + O((z - n)^2) = \\ &= \pi \cos(\pi n)(z - n) + O((z - n)^2) = (-1)^n(z - n) + O((z - n)^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{(-1)^n(z - n)} \frac{1}{1 + O(z - n)} = \frac{1}{(-1)^n(z - n)} + O(1). \quad \square$$

Ответ: В окрестности полюса $z = n$ главная часть ряда Лорана имеет вид $\frac{1}{(-1)^n(z-n)}$.

Домашнее задание:

Задача 11.4. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{\sin z}{\cos z - \cos 2}$ в окрестности $z = 2$.

Ответ: $-\frac{1}{z-2}$.

Задача 11.5. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{2-z}{\sin(e^z-1)}$ в окрестности $z = 0$.

Ответ: $\frac{2}{z}$.

Задача 11.6. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{2+z^2}{(z-1)^2}$ в окрестности $z = 1$.

Ответ: $\frac{3}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1}$.

Задача 11.7. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{1+z}{z \ln z}$ в окрестности $z = 1$.

Ответ: $\frac{2}{z-1}$.

Задача 11.8. Найти главную часть ряда Лорана функции $e^z \operatorname{ctg}^2 z$ в окрестности $z = 0$.

Ответ: $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$.

Задача 11.9. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{1+z}{(1-z)(1-\cos z)}$ в окрестности $z = 0$.

Ответ: $\frac{2}{z^2} + \frac{4}{z}$.

Задача 11.10. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{e^{2z}}{\arcsin z \sin z}$ в окрестности $z = 0$.

Ответ: $\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}$.

Задача 11.11. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{1+z}{e^z - \cos z - \sin z}$ в окрестности $z = 0$.

Ответ: $\frac{1}{z^2} + \frac{2}{3z}$.

Задача 11.12. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{1+3z}{z^3(1-2z)}$ в окрестности $z = 0$.

Ответ: $\frac{1}{z^3} + \frac{5}{z^2} + \frac{10}{z}$.

Задача 11.13. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{1+z}{(1-ze^z)(z-\sin z)}$ в окрестности $z = 0$.

Ответ: $\frac{6}{z^3} + \frac{12}{z^2} + \frac{183}{10z}$.

12. Вычисление вычетов функции.

Определение 12.1. Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$ и ее разложение в ряд Лорана в выколотой окрестности этой точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{если } z_0 \neq \infty,$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad \text{если } z_0 = \infty.$$

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется величина

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}, \quad \text{если } z_0 \neq \infty,$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}, \quad \text{если } z_0 = \infty.$$

Пример 12.2. Найти вычет функции $\frac{z}{1-\cos z}$ в нуле.

Решение. Найдем главную часть ряда Лорана

$$\frac{z}{1-\cos z} = \frac{z}{\frac{1}{2}z^2 + O(z^4)} = \frac{2}{z} \frac{1}{1+O(z^2)} = \frac{2}{z} + O(z).$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{z}{1-\cos z} \right) = 2. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{z}{1-\cos z} \right) = 2.$

Для вычисления вычета в полюсе функции может быть полезна следующая теорема.

Теорема 12.3.

- (1) Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в точке $z_0 \neq \infty$ и z_0 – ноль первого порядка функции $\psi(z)$. Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

- (2) Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = (z - z_0)^{-m} \varphi(z)$, где функция $\varphi(z)$ регулярна в точке $z_0 \neq \infty$. Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(z_0).$$

Пример 12.4. Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=1} \frac{1+z}{z(z^2-1)}.$$

Решение. Воспользуемся пунктом (1) теоремы 12.3, полагая $\varphi(z) = \frac{1+z}{z}$ и $\psi(z) = z^2 - 1$,

$$\operatorname{res}_{z=1} \frac{1+z}{z(z^2-1)} = \left. \frac{1+z}{z(z^2-1)'} \right|_{z=1} = \left. \frac{1+z}{2z^2} \right|_{z=1} = 1. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=1} \frac{1+z}{z(z^2-1)} = 1.$

Пример 12.5. Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin(2z)(1+z^2)}.$$

Решение. Воспользуемся пунктом (1) теоремы 12.3, полагая $\varphi(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$ и $\psi(z) = \sin(2z)$,

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin(2z)(1+z^2)} = \frac{e^z}{(1+z^2)(\sin(2z))'} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2 \cos(2z)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin(2z)(1+z^2)} = \frac{1}{2}.$

Пример 12.6. Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{z^3}.$$

Решение. Воспользуемся пунктом (2) теоремы 12.3, полагая $m = 3$,

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{z^3} = \frac{1}{2} (e^{2z})'' \Big|_{z=0} = 2 e^{2z} \Big|_{z=0} = 2. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{z^3} = 2.$

Пример 12.7. Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2}.$$

Решение. Воспользуемся пунктом (2) теоремы 12.3, полагая $m = 2$,

$$\operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2} = \left(\frac{z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{(z+i)^2 - 2z(z+i)}{(z+i)^4} \Big|_{z=i} = \frac{-4+4}{16} = 0. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2} = 0.$

Для вычисления вычета на бесконечности может быть полезна следующая теорема.

Теорема 12.8. Пусть $z = \infty$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Тогда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)).$$

Пример 12.9. Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{1+z^2}.$$

Решение. Воспользуемся теоремой 12.8

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(0 - \frac{z}{1+z^2} \right) = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{1+z^2} = -1. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{1+z^2} = -1.$

Иногда, для вычисления вычета удобнее найти несколько первых членов ряда Лорана.

Пример 12.10. Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=\infty} z \cos \left(\frac{z}{1+z^2} \right).$$

Решение. Найдем несколько первых членов ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$

$$\begin{aligned} z \cos \left(\frac{z}{1+z^2} \right) &= z \cos \left(\frac{1}{z} \frac{1}{1+z^{-2}} \right) = z \cos \left(\frac{1}{z} (1 - z^{-2} + O(z^{-4})) \right) = \\ &= z \cos (z^{-1} + O(z^{-3})) = z \left(1 - \frac{1}{2} (z^{-1} + O(z^{-3}))^2 + O(z^{-4}) \right) = z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} z \cos \left(\frac{z}{1+z^2} \right) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=\infty} z \cos \left(\frac{z}{1+z^2} \right) = \frac{1}{2}$.

Домашнее задание:

Задача 12.11. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{1}{1+z^3}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{3}$.

Задача 12.12. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1+z}{(1-e^z)(1+z)^5 \cos z}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1+z}{(1-e^z)(1+z)^5 \cos z} = -1$.

Задача 12.13. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin z}{\cos z - \cos 1}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin z}{\cos z - \cos 1} = -1$.

Задача 12.14. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z}{2 \sin^2 z - 1}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z}{2 \sin^2 z - 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 12.15. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{e^z}{\operatorname{tg}^2 z - 1}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{e^z}{\operatorname{tg}^2 z - 1} = -\frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{4}}$.

Задача 12.16. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=0} \frac{3-z}{\operatorname{tg}(e^z-1)}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{3-z}{\operatorname{tg}(e^z-1)} = 3$.

Задача 12.17. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{\sin(z^{-1})}{(z+1)^3}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{\sin(z^{-1})}{(z+1)^3} = \frac{1}{2} \sin 1 - \cos 1$.

Задача 12.18. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin z - z \cos z}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin z - z \cos z} = \frac{9}{5}$.

Задача 12.19. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin(\frac{z}{z+1})}{1 - \cos z^2}$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin\left(\frac{z}{z+1}\right)}{1-\cos(z^2)} = \frac{5}{3}.$

Задача 12.20. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\exp\left(\frac{1}{1-z^2}\right)}{(1-e^z)\sin(z^2)}.$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\exp\left(\frac{1}{1-z^2}\right)}{(1-e^z)\sin(z^2)} = -\frac{13e}{12}.$

Задача 12.21. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1+z}{(e^z-1)\sin^2 z}.$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1+z}{(e^z-1)\sin^2 z} = -\frac{1}{12}.$

Задача 12.22. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^2}{(1+z)(2-z)}.$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^2}{(1+z)(2-z)} = 1.$

Задача 12.23. *Найти вычет* $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^z}{(1-z)(2+z)}.$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)} = \frac{e}{3} + \frac{1}{3e^2}.$

13. Теорема о вычетах. Вычисление интегралов по замкнутому контуру.

Полезность понятия вычета оправдывает следующая теорема.

Теорема 13.1 (Теорема о вычетах). Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D , за исключением конечного числа точек $z_k \in D$, $k = 1, \dots, n$, и непрерывна вплоть до границы ∂D , за исключением тех же точек. Граница ∂D области D предполагается состоящей из конечного числа кусочно гладких ограниченных контуров. Тогда

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z),$$

где граница ∂D обходится в положительном направлении (т. е. при движении по границе ∂D в направлении интегрирования область D остается слева).

Пример 13.2. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2(z^2+4)}.$$

Решение. Используя теорему о вычетах, получим

$$\begin{aligned} \oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2(z^2+4)} &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2(z^2+4)} \right) + \operatorname{res}_{z=-2i} \left(\frac{1}{z^2(z^2+4)} \right) \right) = \\ &= 2\pi i \left(\left(\frac{1}{z^2+4} \right)' \Big|_{z=0} + \frac{1}{2z^3} \Big|_{z=-2i} \right) = 2\pi i \left(-\frac{2z}{(z^2+4)^2} \Big|_{z=0} + \frac{1}{16i} \right) = \frac{\pi}{8}. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2(z^2+4)} = \frac{\pi}{8}.$

Пример 13.3. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)}. \quad (13.1)$$

Решение. Используя теорему о вычетах, можно получить две различные формулы для вычисления интеграла (13.1). Полагая $D = \{|z| < 2\}$, найдем

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = 2\pi i \sum_{z_*=\pm 1, \pm i} \operatorname{res}_{z=z_*} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)}.$$

Для $D = \{|z| > 2\}$ теорема о вычетах дает

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=3} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} + \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} \right). \quad (13.2)$$

Знак минус в формуле (13.2) появился из-за того, что область $|z| > 2$ остается справа при обходе контура против часовой стрелки.

Для вычисления интеграла (13.1) проще воспользоваться формулой (13.2). Простые вычисления дают

$$\operatorname{res}_{z=3} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = \frac{27}{80}, \quad \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = 0,$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = \frac{27\pi i}{40}. \quad \square$$

Ответ: $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = \frac{27\pi i}{40}.$

Пример 13.4. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z-1} dz.$$

Решение. Как и в примере 13.3 разумнее вычислять интеграл по вычетам, расположенным в области $|z| > 2$,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z-1} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z-1} = 2\pi i. \quad \square$$

Ответ: $\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z-1} dz = 2\pi i.$

Домашнее задание:

Задача 13.5. Вычислить интеграл $\oint_{|z+1|=1} \frac{e^z}{z^3+1} dz.$

Ответ: $\oint_{|z+1|=1} \frac{e^z}{z^3+1} dz = \frac{2\pi i}{3e}.$

Задача 13.6. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=\sqrt{2}} \frac{e^{\alpha z}}{\sin(z^2+1)} dz$, где α – комплексная постоянная.

Ответ: $\oint_{|z|=\sqrt{2}} \frac{e^{\alpha z}}{\sin(z^2+1)} dz = 2\pi i \sin \alpha.$

Задача 13.7. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z \sin z} dz.$

Ответ: $\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z \sin z} dz = 4\pi i.$

Задача 13.8. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{1-\cos z} dz.$

Ответ: $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{1-\cos z} dz = 4\pi i.$

Задача 13.9. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z+3} e^{\frac{2z}{z+1}} dz.$

Ответ: $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z+3} e^{\frac{2z}{z+1}} dz = -10e^2\pi i + 6e^3\pi i.$

Задача 13.10. *Вычислить интеграл* $\oint_{|z|=315} \frac{z}{\sin z} dz$.

Ответ: $\oint_{|z|=315} \frac{z}{\sin z} dz = 200 \pi^2 i$.

14. Вычисление интегралов от тригонометрических функций по периоду.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\varphi}) d\varphi, \quad (14.1)$$

где $F(z)$ – функция регулярная в круге $|z| < 1$ (или в $|z| > 1$), за исключением конечного числа точек, и непрерывна вплоть до границы $|z| = 1$, за исключением тех же точек. Заменой переменных $z = e^{i\varphi}$ интеграл (14.1) сводится к контурному интегралу

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\varphi}) d\varphi = \left(de^{i\varphi} = ie^{i\varphi} d\varphi \iff d\varphi = \frac{dz}{iz} \right) = \oint_{|z|=1} \frac{F(z)}{iz} dz, \quad (14.2)$$

где контур интегрирования обходится против часовой стрелки. Здесь мы учли тот факт, что при отображении $z = e^{i\varphi}$ интервал $[0, 2\pi)$ переходит окружность $|z| = 1$, которая обходится один раз против часовой стрелки. Вычисляя интеграл в правой части (14.2) по вычетам, можно найти исходный интеграл (14.1).

Пример 14.1. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Решение.

$$\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi = \left(z = e^{i\varphi} \right) = \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{iz} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{iz} = 2\pi. \quad \square$$

Ответ: $\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi$.

Если подынтегральная функция содержит тригонометрические функции $\sin \varphi$ или $\cos \varphi$, то их необходимо преобразовать по формулам Эйлера

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Пример 14.2. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \varphi} d\varphi.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \varphi} d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{1}{2}e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}} d\varphi = \left(z = e^{i\varphi} \right) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2z} \right)} = \\ &= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_-)(z - z_+)}, \end{aligned}$$

где $z_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3}$ – корни квадратного полинома $z^2 + 4z + 1$. В силу того, что $|z_+| < 1$, а $|z_-| > 1$, получим

$$\frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_-)(z - z_+)} = 4\pi \operatorname{res}_{z=z_+} \frac{1}{(z - z_-)(z - z_+)} = \frac{4\pi}{z_+ - z_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad \square$$

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos \varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Пример 14.3. Вычислить интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} d\varphi.$$

Решение. Преобразуем $\sin^2 \varphi$ по формуле Эйлера

$$\sin^2 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi}).$$

Поскольку подынтегральная функция фактически зависит от $e^{2i\varphi}$, то удобнее сделать замену переменных $z = e^{2i\varphi}$. Интервал интегрирования $[-\pi, \pi)$ при отображении $z = e^{2i\varphi}$ переходит в окружность, которая обходится против часовой стрелки *дважды*. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2\varphi)}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} d\varphi &= \left(de^{2i\varphi} = 2ie^{2i\varphi} d\varphi \iff d\varphi = \frac{dz}{2iz} \right) = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2iz \left(1 - \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4z}\right)^2} = \\ &= \frac{16}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(6z - z^2 - 1)^2} = \frac{16}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z - z_-)^2 (z - z_+)^2}, \end{aligned}$$

где $z_{\pm} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ – корни квадратного полинома $z^2 - 6z + 1$. Учитывая, что $|z_-| < 1$, а $|z_+| > 1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{16}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z - z_-)^2 (z - z_+)^2} &= 32\pi \operatorname{res}_{z=z_-} \frac{z}{(z - z_-)^2 (z - z_+)^2} = 32\pi \left(\frac{z}{(z - z_+)^2} \right)' \Big|_{z=z_-} = \\ &= 32\pi \frac{(z - z_+)^2 - 2z(z - z_+)}{(z - z_+)^4} \Big|_{z=z_-} = -32\pi \frac{z + z_+}{(z - z_+)^3} \Big|_{z=z_-} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\sin^2 \varphi)^2} d\varphi = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$.

Домашнее задание:

Задача 14.4. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \cos^2(e^{-i\varphi}) d\varphi$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} \cos^2(e^{-i\varphi}) d\varphi = 2\pi$.

Задача 14.5. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{i + \sin \varphi}$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{i + \sin \varphi} = -\sqrt{2}\pi i$.

Задача 14.6. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{5+4\cos \varphi}$.

Ответ: $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{5+4\cos \varphi} = \frac{\pi}{3}$.

Задача 14.7. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{3+\sin \varphi} d\varphi$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{3+\sin \varphi} d\varphi = \left(2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \pi$.

Задача 14.8. Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(2-\sin \varphi)^2}$.

Ответ: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(2-\sin \varphi)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Задача 14.9. Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{5+\sin \varphi} d\varphi$.

Ответ: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{5+\sin \varphi} d\varphi = (10 - 4\sqrt{6})\pi$.

Задача 14.10. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1+a^2 \sin^2 \varphi}$, где $a \geq 0$.

Ответ: $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1+a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$.

Задача 14.11. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+e^{i\varphi} \cos \varphi}$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+e^{i\varphi} \cos \varphi} = \frac{4}{5}\pi$.

Задача 14.12. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{2+e^{i\varphi}} d\varphi$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{2+e^{i\varphi}} d\varphi = -\frac{\pi i}{4}$.

15. Вычисление интегралов от рациональных функций по вещественной оси.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) dx, \quad (15.1)$$

где $R(x)$ – рациональная функция. Для того чтобы обеспечить сходимость интеграла (15.1), будем предполагать, что ни одна из особых точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ функции $R(z)$ не лежит на вещественной оси и при больших значениях z выполняется оценка $R(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$.

Для вычисления интеграла (15.1) воспользоваться непосредственно теоремой 13.1 о вычетах нельзя, см. стр. 44, потому что контур интегрирования неограничен. Для того чтобы воспользоваться этой теоремой, рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\oint_{\gamma} R(z) dz, \quad (15.2)$$

где контур интегрирования γ состоит из отрезка $[-R, R]$ вещественной оси и полуокружности $C_R = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ и обходится против часовой стрелки. Радиус R выбираем так, чтобы

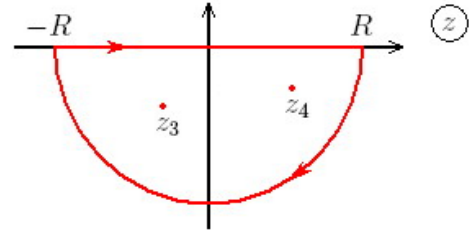
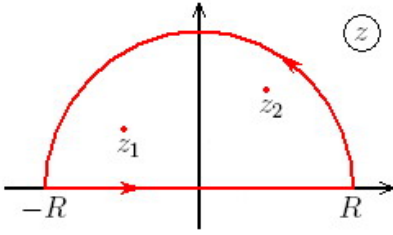


Рис. 9. Контур γ выделен красным цветом.

Рис. 10. Контур γ выделен красным цветом.

все особые точки функции $R(z)$ оказались внутри круга $|z| < R$, см. рисунок 9. Интеграл (15.2) легко найти с помощью теоремы о вычетах

$$\oint_{\gamma} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res}_{z=z_k} R(z). \quad (15.3)$$

С другой стороны

$$\oint_{\gamma} R(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_{C_R} R(z) dz. \quad (15.4)$$

Учитывая оценку $R(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R R(x) dx = \int_{\mathbb{R}} R(x) dx,$$

$$\left| \int_{C_R} R(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |R(z)| |dz| \leq \pi R \max_{z \in C_R} |R(z)| = O\left(\frac{1}{R}\right) \implies \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z) dz = 0.$$

Переходя теперь к пределу $R \rightarrow \infty$ в равенстве (15.3), получим

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res} R(z). \quad (15.5)$$

Аналогично, замыкая контур интегрирования γ в интеграле (15.2) в нижнюю полуплоскость, см. рисунок 10, можно доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) dx = -2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k < 0}} \operatorname{res} R(z). \quad (15.6)$$

Пример 15.1. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Решение. У функции $\frac{1}{1+z^2}$ две особые точки $z = \pm i$. Замыкая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, получим

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi. \quad \square$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$

Пример 15.2. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x dx}{(x+2i)^2(x-i)^5}.$$

Решение. У функции $\frac{z}{(z+2i)^2(z-i)^5}$ две особые точки $z = i, -2i$. Заметим, что искать вычет в точке $z = -2i$ (полюс второго порядка) значительно легче, чем в точке $z = i$ (полюс пятого порядка). Замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x dx}{(x+2i)^2(x-i)^5} &= -2\pi i \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{z}{(z+2i)^2(z-i)^5} = -2\pi i \left(\frac{z}{(z-i)^5} \right)' \Big|_{z=-2i} = \\ &= -2\pi i \left. \frac{(z-i)^5 - 5z(z-i)^4}{(z-i)^{10}} \right|_{z=-2i} = -2\pi i \left. \frac{z-i-5z}{(z-i)^6} \right|_{z=-2i} = -\frac{14\pi}{3^6}. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x dx}{(x+2i)^2(x-i)^5} = -\frac{14\pi}{3^6}.$

Пример 15.3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

Решение. Из четности подынтегральной функции следует, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1} dx. \quad (15.7)$$

У функции $\frac{z^2+z}{z^4+1}$ четыре особые точки $z = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$. Замыкая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1} dx &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z^2}{z^4+1} + \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{z^2}{z^4+1} \right) = 2\pi i \left(\frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{2i} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (15.7) найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \square$$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

Домашнее задание:

Задача 15.4. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-2x+10}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-2x+10} = \frac{\pi}{3}.$

Задача 15.5. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+x+1}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

Задача 15.6. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2} = \frac{\pi}{16}.$

Задача 15.7. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(x^2-6ix-10)^2}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(x^2-6ix-10)^2} = 0.$

Задача 15.8. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{2+x}{(x^2+1)^2} dx.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{2+x}{(x^2+1)^2} dx = \pi.$

Задача 15.9. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+i)^2}.$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+i)^2} = \frac{\pi}{4} e^{\frac{5\pi i}{4}}.$

Задача 15.10. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x-i)^2} dx.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x-i)^2} dx = 0.$

Задача 15.11. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-2x+2)(x^2-2ix-2)}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-2x+2)(x^2-2ix-2)} = \frac{\pi(i-1)}{8}.$

Задача 15.12. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-2ix-5)}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-2ix-5)} = \frac{\pi(2i-1)}{20}.$

Задача 15.13. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2\pi}{x-i}} \frac{dx}{x^2+1}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2\pi}{x-i}} \frac{dx}{x^2+1} = -\pi.$

Задача 15.14. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^{2n}+1)^2},$ где $n \in \mathbb{N}.$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^{2n}+1)^2} = \frac{\pi(2n-1)}{4n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Задача 15.15. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(2-e^{iax})},$ где $a \geq 0.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(2-e^{iax})} = \frac{\pi e^a}{2e^a-1}.$

Задача 15.16. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x+4i}},$ где выбрана непрерывная ветвь функции $\sqrt{x+4i}$ такая, что $\sqrt{4i} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x+4i}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

16. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, по вещественной оси.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\alpha x} dx, \quad (16.1)$$

где $R(x)$ – рациональная функция и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для того чтобы обеспечить сходимость интеграла (16.1), будем предполагать, что ни одна из особых точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ функции $R(z)$ не лежит на вещественной оси и при больших значениях z выполняется оценка $R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$.

Основная идея вычисления интеграла (16.1) во многом напоминает вычисление интеграла (15.1), см. стр. 50. Однако есть одно важное отличие. Для обоснования формул (15.5) и (15.6) нам понадобилось существование пределов

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^\pm} R(z) dz = 0,$$

где $C_R^+ = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $C_R^- = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$. В случае интеграла вида (16.1) эти пределы естественно заменяются на следующие

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} R(z) e^{i\alpha z} dz \stackrel{?}{=} 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} R(z) e^{i\alpha z} dz \stackrel{?}{=} 0. \quad (16.2)$$

Упомянутое отличие заключается в том, что пределы (16.2) не могут существовать одновременно. Причина этого обстоятельства заключается в том, что функция $e^{i\alpha z}$ экспоненциально растет при $z \rightarrow -i\infty$, если $\alpha > 0$ и при $z \rightarrow +i\infty$, если $\alpha < 0$.

Один из пределов (16.2) все же существует. Этот факт обосновывает следующая теорема.

Теорема 16.1 (лемма Жордана).

- Пусть функция $g(z)$ непрерывна в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R^+} |g(z)| = 0.$$

Тогда для любого $\alpha > 0$ существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

- Пусть функция $g(z)$ непрерывна в нижней полуплоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R^-} |g(z)| = 0.$$

Тогда для любого $\alpha < 0$ существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Выписывая аналоги формул (15.3), и (15.4) и используя лемму Жордана, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\alpha x} dx &= 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res} R(z) e^{i\alpha z} \quad \text{при } \alpha > 0, \\ \int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\alpha x} dx &= -2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k < 0}} \operatorname{res} R(z) e^{i\alpha z} \quad \text{при } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Пример 16.2. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

Решение. Функция e^{iz} убывает в верхней полуплоскости, контур интегрирования необходимо замыкать там же (лемма Жордана). Отсюда

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = 2\pi i \left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{\pi}{e}. \quad \square$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$

Пример 16.3. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx. \quad (16.3)$$

Решение. Интеграл (16.3) удобно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \right). \quad (16.4)$$

Функция e^{iz} убывает в верхней полуплоскости, контур интегрирования необходимо замыкать там же (лемма Жордана). Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=i} \frac{z e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} + \operatorname{res}_{z=2i} \frac{z e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{i e^{-1}}{2i(-1+4)} + \frac{2i e^{-2}}{(-4+1)4i} \right) = \frac{\pi i}{3} (e^{-1} - e^{-2}). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (16.4), найдем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{3} (e^{-1} - e^{-2}) = \frac{\pi(e-1)}{3e^2}. \quad \square$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi(e-1)}{3e^2}.$

Пример 16.4. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{(x-i)^2(x+2i)} dx.$$

Решение. Используя формулы Эйлера, см. теорему 1.8 на стр. 5, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{(x-i)^2(x+2i)} dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{(x-i)^2(x+2i)} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{(x-i)^2(x+2i)} dx = \\ &= \pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+2i)} - \pi i \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{e^{-iz}}{(z-i)^2(z+2i)} = \pi i \left(\frac{e^{iz}}{z+2i} \right)' \Big|_{z=i} - \pi i \frac{e^{-iz}}{(z-i)^2} \Big|_{z=-2i} = \\ &= \frac{4\pi i}{9e} + \frac{\pi i}{9e^2} = \frac{\pi i(4e+1)}{9e^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{(x-i)^2(x+2i)} dx = \frac{\pi i(4e+1)}{9e^2}.$

Домашнее задание:

Задача 16.5. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+2x+5} dx.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+2x+5} dx = \frac{\pi \cos 1}{2e^2}.$

Задача 16.6. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x)}{(x^2+6x+10)^2} dx.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x)}{(x^2+6x+10)^2} dx = -\frac{3\pi \sin 6}{2e^2}.$

Задача 16.7. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \cos(2x)}{(x^2+4)^2(x+i)} dx.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \cos(2x)}{(x^2+4)^2(x+i)} dx = \frac{(17-4e^2)\pi}{36e^4}.$

Задача 16.8. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+2ix-2} dx$, где $\alpha \in \mathbb{R}.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+2ix-2} dx = 0$ при $\alpha \geq 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+2ix-2} dx = 2\pi e^\alpha \sin \alpha$ при $\alpha < 0.$

17. Вычисление интегралов по вещественной оси от функций, содержащих устранимые особенности на контуре интегрирования.

Пример 17.1. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx. \quad (17.1)$$

Решение. Проверим, что подынтегральная функция имеет устранимую особую точку в окрестности нуля

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{\frac{1}{2}z^2 + O(z^4)}{z^2} = \frac{1}{2} + O(z^2).$$

Таким образом, интеграл (17.1) сходится в окрестности нуля.

Поскольку подынтегральная функция содержит $\cos x$, то для вычисления интеграла (17.1) нам так или иначе необходимо будет воспользоваться леммой Жордана, см. стр. 54. В свою очередь, для того чтобы воспользоваться леммой Жордана нам необходимо разбить интеграл (17.1) в сумму так, чтобы разнести экспоненты e^{ix} и e^{-ix} , содержащиеся в косинусе, по разным интегралам. Прямолинейный способ разбиения интеграла (17.1) в сумму

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{x^2} dx \quad (17.2)$$

немедленно приводит к ошибке, поскольку каждый из интегралов, стоящих в правой части (17.2) содержит неинтегрируемую особенность в нуле.

Обойти указанную трудность можно следующим образом. Функция $\frac{1 - \cos z}{z^2}$ регулярна во всей комплексной плоскости, в том числе и в окрестности нуля. Прodeформируем контур интегрирования в окрестности нуля вниз, см. рисунок 11. При этом, в силу теоремы Коши 4.5 на стр. 18, значение интеграла (17.1) не изменится. Отсюда

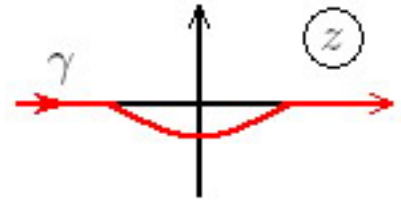


Рис. 11. Контур γ выделен красным цветом.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_{\gamma} \frac{1 - \cos z}{z^2} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z^2} dz = 0 - \pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z^2} - 0 = \pi.$$

При вычислении интеграла $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ мы замкнули контур интегрирования снизу (можно сверху), интеграла $\int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z^2} dz$ – снизу (нельзя сверху) и интеграла $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$ – сверху (нельзя снизу). $\square$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \pi.$

Пример 17.2. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x^3} dx. \quad (17.3)$$

Решение. Проверим, что подынтегральная функция имеет устранимую особую точку в окрестности нуля

$$\frac{2 \sin z - \sin(2z)}{z^3} = \frac{2z + O(z^3) - 2z + O(z^3)}{z^3} = O(1).$$

Таким образом, интеграл (17.3) сходится в окрестности нуля.

Деформируя контур интегрирования в окрестности нуля вниз, см. рисунок 11, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin z - \sin(2z)}{z^3} dz &= \int_{\gamma} \frac{2 \sin z - \sin(2z)}{z^3} dz = \\ &= \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^3} dz - \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z^3} dz - \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{e^{2iz}}{z^3} dz + \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{e^{-2iz}}{z^3} dz = \\ &= 2\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z^3} - \pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2iz}}{z^3} = -\pi + 2\pi = \pi. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x^3} dx = \pi.$

Пример 17.3. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (17.4)$$

Решение. Легко видеть, что подынтегральная функция имеет устранимую особую точку в окрестности нуля и, следовательно, интеграл (17.4) сходится в окрестности нуля.

Деформируя контур интегрирования в окрестности нуля вниз, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz &= \int_{\gamma} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = -\frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{z^2} dz = -\frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{z^2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz - \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{e^{2iz}}{z^2} dz - \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{e^{-2iz}}{z^2} dz = -\frac{\pi i}{2} \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2iz}}{z^2} = \pi. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi.$

Домашнее задание:

Задача 17.4. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2} dx.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2} dx = 2\pi.$

Задача 17.5. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{\pi^2 - x^2} dx.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{\pi^2 - x^2} dx = \pi.$

Задача 17.6. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x - \sin x}{x^3} dx = \frac{\pi}{2}.$

Задача 17.7. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x) - 2x \cos x}{x^3} dx$.

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x) - 2x \cos x}{x^3} dx = 0$.

Задача 17.8. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(3x) - 3 \sin x}{x^3} dx$.

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(3x) - 3 \sin x}{x^3} dx = -3\pi$.

Задача 17.9. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x) + x \cos x - 3x}{x^3} dx$.

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x) + x \cos x - 3x}{x^3} dx = -3\pi$.

Задача 17.10. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} dx$.

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} dx = \frac{2\pi}{3}$.

Задача 17.11. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x^2)} dx$.

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{e}$.

Задача 17.12. Можно ли в примерах 17.1 – 17.3 деформировать контур интегрирования в окрестности нуля вверх?

Ответ: Можно.

18. 2-ая контрольная работа (2 часа).

Вариант контрольной работы №2.

- (1) Найти все особые точки функции и указать их тип

$$\frac{e^{\frac{1}{z+1}}}{\sin(z^2)(1 - e^z)}.$$

Ответ: $z = -1$ – существенно особая точка; $z = 0$ – полюс третьего порядка; $z = \pm 2\pi in$, $\pm \sqrt{\pi n}$, $\pm i\sqrt{\pi n}$, где $n \in \mathbb{N}$ – полюса первого порядка; $z = \infty$ – неизоллированная особая точка.

- (2) Найти вычет функции в нуле

$$\frac{\sin z}{(1 - z^2)(1 - \cos z)^2}.$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{(1 - z^2)(1 - \cos z)^2} = 4$.

- (3) Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Ответ: $\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi$.

- (4) Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x - 2i)^4(x + i)^2} dx.$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x - 2i)^4(x + i)^2} dx = -\frac{8\pi}{3^5}$.

- (5) Убедиться в том, что интеграл корректно определен и вычислить его

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{5x - \sin(2x) - 3x \cos(2x)}{x^3} dx.$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{5x - \sin(2x) - 3x \cos(2x)}{x^3} dx = 8\pi$.

- (6) Приведите пример функции $f(z)$, удовлетворяющей следующим условиям.

- $f(z)$ регулярна в $\mathbb{C}$ за исключением двух точек.
- $f(z)$ имеет один полюс первого порядка и одну существенно особую точку.
- $f(z)$ не обращается в ноль в $\mathbb{C}$.
- $z = \infty$ – ноль второго порядка.

Вариант контрольной работы №2.

- (1) Найти все особые точки функции и указать их тип

$$\frac{1}{(z + z^2) \cos \frac{\pi}{2+z^2}}.$$

Ответ: $z = 0$ – полюс третьего порядка; $z = -1, \pm i\sqrt{2 - \frac{2}{2n+1}}$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – полюса первого порядка; $z = \pm i\sqrt{2}$ – неизолированные особые точки; $z = \infty$ – ноль второго порядка.

- (2) Найти вычет функции в нуле

$$\frac{1}{(z + z^2) \cos \frac{\pi}{2+z^2}}.$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{(z+z^2) \cos \frac{\pi}{2+z^2}} = \frac{6}{\pi}.$

- (3) Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\exp(e^{i\varphi}) - 1}.$$

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\exp(e^{i\varphi}) - 1} = -\pi.$

- (4) Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2-x}{(x^2+4)(x-2i)^2} dx.$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{2-x}{(x^2+4)(x-2i)^2} dx = -\frac{\pi}{16}(1+i).$

- (5) Убедиться в том, что интеграл корректно определен и вычислить его

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos^2 x}{4x^2 - \pi^2} dx.$$

Ответ: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos^2 x}{4x^2 - \pi^2} dx = 0.$

- (6) Сформулируйте теорему Лиувилля.

19. Однозначные регулярные ветви, аналитическое продолжение, точки ветвления.

Иногда приходится иметь дело с функциями, которые могут принимать в одной точке несколько значений. К таковым, например, относятся функции $\sqrt[n]{z}$ и $\ln z$. Эти функции принято называть многозначными. Иметь дело непосредственно с многозначной функцией зачастую бывает неудобно. В таких случаях бывает полезно выделить ее однозначную регулярную ветвь.

Определение 19.1. Однозначной регулярной ветвью⁶ многозначной функции $f(z)$ в области D называют всякую регулярную функцию $f_0(z)$ в D такую, что в любой точки $z \in D$ значение функции $f_0(z)$ совпадает с одним из значений функции $f(z)$.

Пример 19.2. Выделить однозначную регулярную ветвь функции $\sqrt{z}$.

Решение. Функция $\sqrt{z}$ в каждой точке $z \neq 0$ принимает два различных значения. Для того чтобы выделить регулярную ветвь функции $\sqrt{z}$ удобно переписать ее в полярных координатах

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi n}. \quad (19.1)$$



Рис. 12. Разрез выделен красным цветом.

Пусть теперь мы фиксировали значение функции $f(z) = \sqrt{z}$ в некоторой точке $z_0 \neq 0$, например, $f(1) = 1$. Из представления (19.1) видно, что если мы теперь будем непрерывно продолжать функцию $\sqrt{z}$ вдоль окружности $|z| = 1$ против часовой стрелки, то по возвращении в точку $z = 1$ аргумент φ получит приращение равное $\Delta\varphi = 2\pi$, и, соответственно, функция $\sqrt{z}$ получит дополнительный множитель $e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} = e^{i\pi} = -1$.

Рассуждая аналогично, можно понять, что при обходе вдоль любого несамопересекающегося контура, содержащего внутри себя начало координат, функция $\sqrt{z}$ будет менять знак. Это означает, что регулярную ветвь функции $\sqrt{z}$ можно выделить только в такой области, внутри которой нельзя провести замкнутый контур, содержащий внутри себя начало координат. Примером такой области может служить комплексная плоскость с исключенной полуосью $[0, +\infty)$, см. рисунок 12. Обозначим эту область буквой D .

Фиксируем в области D пределы изменения аргумента $\varphi \in (0, 2\pi)$. В результате, согласно представлению (19.1), мы можем выделить две различные ветви функции $\sqrt{z}$

$$f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad f_1(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Эти ветви соответствуют двум значениям параметра $n = 0$ и 1 . Остальные значения параметра n приводят к одной из двух указанных ветвей функции $\sqrt{z}$.

Ответ: В области $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ можно выделить две однозначные регулярные ветви $f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$ и $f_1(z) = -\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$, где $\varphi \in (0, 2\pi)$.

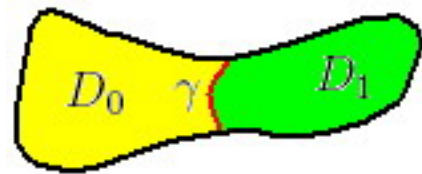


Рис. 13. Области D_0 и D_1 соприкасаются вдоль границы γ .

Определение 19.3. Пусть заданы функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$ регулярные в областях D_0 и D_1 соответственно, где области D_0 и D_1 не пересекаются и имеют общий участок границы γ , см. рисунок 13. Пусть существует регулярная функция $F(z)$ в области $D_0 \cup \gamma \cup D_1$, совпадающая с $f_0(z)$ в D_0 и с $f_1(z)$ в D_1 .

⁶Иногда мы будем сокращенно говорить *регулярная ветвь*.

Тогда говорят, что функция $f_1(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ в область D_1 .

Проверка определения 19.3 может оказаться довольно трудной задачей. Следующая теорема упрощает использование этого определения.

Теорема 19.4 (Принцип непрерывного продолжения). Пусть области D_0 и D_1 не пересекаются и имеют общий участок границы γ . Пусть функция $f_0(z)$ регулярна в области D_0 и непрерывна в $D_0 \cup \gamma$, а функция $f_1(z)$ регулярна в области D_1 и непрерывна в $D_1 \cup \gamma$. Пусть, вместе с этим, функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$ совпадают на кривой γ . Тогда функция $f_1(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ в область D_1 .

Пример 19.5. Пусть в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 0$ задана регулярная ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{z}$, удовлетворяющая условию $f(1) = 1$. Найти аналитическое продолжение функции $f(z)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re}(z) < 0$ через полюсь $(0, +i\infty)$ и через полюсь $(0, -i\infty)$. Сравнить значения полученных аналитических продолжений в точке $z = -1$.

Решение. Так же как и в примере 19.2 удобно перейти к полярным координатам

$$f(z) = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3} + i\frac{2\pi n}{3}}. \quad (19.2)$$

Фиксируем пределы изменения аргумента φ в правой полуплоскости $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Отсюда и из представления (19.2) получим, что

$$f(1) = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3} + i\frac{2\pi n}{3}} \Big|_{z=1} = \left[\begin{array}{l} r = 1 \\ \varphi = 0 \end{array} \right] = e^{i\frac{2\pi n}{3}}.$$

Таким образом, ветвь, удовлетворяющая условию $f(1) = 1$, получается при $n = 0$. Обозначим ее через $f_0(z)$.

Для того чтобы аналитически продолжить функцию $f_0(z)$ в левую полуплоскость через полюсь $(0, +i\infty)$, воспользуемся представлением (19.2) при $n = 0$

$$f_t(z) = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} \quad (\text{t – top})$$

и фиксируем пределы изменения аргумента φ следующим образом $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Легко видеть, что $f_t(z)$ – регулярная ветвь, заданная в области $\mathbb{C} \setminus [0, -i\infty)$. При этом функция $f_t(z)$ совпадает с функцией $f_0(z)$ в области $\operatorname{Re}(z) > 0$, а потому $f_t(z)$ – аналитическое продолжение функции $f_0(z)$ в левую полуплоскость через полюсь $(0, +i\infty)$ (см. определение 19.3).

Для того чтобы аналитически продолжить функцию $f_0(z)$ в левую полуплоскость через полюсь $(0, -i\infty)$, воспользуемся представлением

$$f_b(z) = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} \quad (\text{b – bottom})$$

и фиксируем пределы изменения аргумента $\varphi \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Очевидно, что $f_b(z)$ – аналитическое продолжение функции $f_0(z)$ в левую полуплоскость через полюсь $(0, -i\infty)$.

Найдем значения ветвей $f_t(z)$ и $f_b(z)$ в точке $z = -1$

$$\begin{aligned} f_t(-1) &= \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} \Big|_{r=1, \varphi=\pi} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \\ f_b(-1) &= \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} \Big|_{r=1, \varphi=-\pi} = e^{-i\frac{\pi}{3}}. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $f_t(-1) = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $f_b(-1) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Определение 19.6. Особая точка z_0 называется точкой ветвления многозначной функции $f(z)$, если существует такая окрестность $0 < |z - z_0| < r$, что $f(z)$ может быть аналитически продолжена вдоль любой цепочки областей, принадлежащих этой окрестности, и z_0 не является изолированной особой точкой хотя бы для какой-нибудь регулярной ветви функции $f(z)$.

Замечание 19.7. Менее строго можно сказать, что точка ветвления – это такая точка z_0 , что при аналитическом продолжении вдоль окружности достаточно малого радиуса с центром в z_0 после одного полного обхода функция изменяет свое значение.

Пример 19.8. Найти все точки ветвления функции $(z - z_0)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

Решение. Легко видеть, что производная

$$((z - z_0)^\alpha)' = \alpha(z - z_0)^{\alpha-1}$$

существует по крайней мере при $z \neq z_0, \infty$. Поэтому единственными кандидатами на точку ветвления являются точки z_0 и ∞ .

Для того чтобы выяснить являются ли z_0 и ∞ точками ветвления воспользуемся замечанием к определению 19.6. Перейдем к полярной системе координат с центром в точке z_0

$$z - z_0 = r e^{i\varphi}, \quad (z - z_0)^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}.$$

При аналитическом продолжении функции $(z - z_0)^\alpha$ вдоль окружности $|z - z_0| = \rho > 0$, после одного полного обхода против часовой стрелки аргумент φ получает приращение 2π . В итоге, после такого обхода функция $(z - z_0)^\alpha$ принимает в точке z новое значение

$$r^\alpha e^{i\alpha(\varphi+2\pi)} = r^\alpha e^{i\alpha\varphi} e^{2i\alpha\pi}.$$

Отсюда найдем условие, при котором функция $(z - z_0)^\alpha$ не изменит свое значение при указанном аналитическом продолжении,

$$e^{2i\alpha\pi} = 1 \iff 2i\alpha\pi = 2\pi in, \quad n \in \mathbb{Z} \iff \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Это условие гарантирует, что точки z_0 и ∞ не являются точками ветвления. Соответственно при $\alpha \notin \mathbb{Z}$ точки z_0 и ∞ являются точками ветвления. $\square$

Ответ: При $\alpha \in \mathbb{Z}$ точек ветвления нет, при $\alpha \notin \mathbb{Z}$ две точки ветвления: z_0 и ∞ .

Пример 19.9. Пусть $f(z)$ – регулярная функция в ограниченной области D . Найти все точки ветвления функции $\sqrt{f(z)}$.

Решение. Из определения ясно, что точки ветвления – это в первую очередь особые точки. Поэтому попробуем вначале выяснить в каких точках функция $\sqrt{f(z)}$ регулярна. Для этого вычислим ее производную (см. теорему 2.10 на стр. 10)

$$\left(\sqrt{f(z)}\right)' = \frac{f'(z)}{2\sqrt{f(z)}}. \quad (19.3)$$

Строго говоря, в выражении (19.3) необходимо указать какая ветвь корня выбрана в обеих частях равенства, однако поскольку мы сейчас ищем только лишь точки регулярности функции $\sqrt{f(z)}$, то этот вопрос не является принципиальным и мы позволим себе не останавливаться на нем.

Из равенства (19.3) видно, что особые точки у функции $\sqrt{f(z)}$ могут появляться только в тех точках, в которых функция $f(z)$ обращается в ноль. Таким образом, естественные кандидаты на точки ветвления функции $\sqrt{f(z)}$ – это нули функции $f(z)$.

Пусть в точке $z_0 \in D$ у функции $f(z)$ ноль порядка n (см. определение 9.6 на стр. 34). Тогда ее можно переписать в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

где $g(z)$ – регулярная функция в области D и $n \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\sqrt[n]{f(z)} = (z - z_0)^{n/2} \sqrt[n]{g(z)}.$$

Из сказанного ранее ясно, что функция $\sqrt[n]{g(z)}$ регулярна в окрестности точки z_0 . При этом из примера 19.8 следует, что у функции $(z - z_0)^{n/2}$ (а, следовательно, и у функции $\sqrt[n]{f(z)}$) точка z_0 не является точкой ветвления если n – четное и является точкой ветвления, если n – нечетное. $\square$

Ответ: Точки ветвления функции $\sqrt[n]{f(z)}$ располагаются в нулях нечетного порядка функции $f(z)$.

Пример 19.10. Выделить регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{z(2-z)}$, удовлетворяющую условию $f(1) = 1$. Найти значение этой ветви функции $f(z)$ после ее аналитического продолжения вдоль верхней дуги окружности $|z-2|=1$ в точку $z=3$.

Решение. У функции $f(z)$ две конечные точки ветвления $z_1 = 0$ и $z_2 = 2$. Введем две системы полярных координат с центрами этих точек, см. рисунок 14. В этих координатах функцию

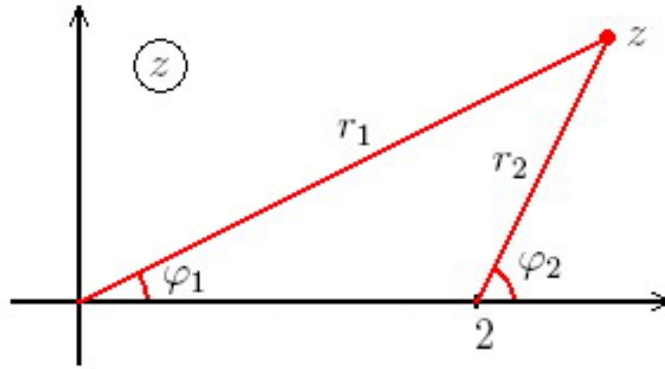


Рис. 14. Здесь $z = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z - 2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

$f(z)$ можно переписать в виде

$$f(z) = \sqrt[3]{z(2-z)} = \sqrt[3]{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \pi + 2\pi n}{3} i\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (19.4)$$

Для того чтобы избавиться от многозначности в правой части (19.4), необходимо фиксировать параметр n и договориться о пределах изменения углов φ_1 и φ_2 (пока этого не сделано, точке $z=1$ можно, например, приписать значения угла $\varphi_1 = 0$ или $\varphi_1 = \pm 2\pi$, и каждое из этих значений приводит к различным значениям функции $f(z)$).

Фиксацию пределов изменения углов φ_1 и φ_2 удобно провести следующим образом. Проведем из каждой точки ветвления разрез на бесконечность и будем считать, что точка z не может пересекать разрезов. Разрезы можно проводить в любом

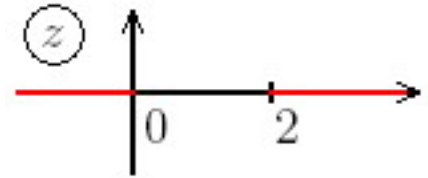


Рис. 15. Разрезы выделены красным цветом.

направлении, для определенности проведем их как на рисунке 15. В этом случае пределы изменения углов можно фиксировать следующим образом

$$\varphi_1 \in (-\pi, \pi), \quad \varphi_2 \in (0, 2\pi). \quad (19.5)$$

Для того чтобы удовлетворить условию $f(1) = 1$, подберем подходящим образом параметр n

$$f(1) = \sqrt[3]{r_1 r_2} \exp \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \pi + 2\pi n}{3} i \right) \Big|_{z=1} = \left[r_1 = 1, \varphi_1 = 0 \right] = \exp \left(\frac{2\pi(n+1)}{3} i \right).$$

Выбирая $n = -1$, добьемся выполнения условия $f(1) = 1$. Обозначим фиксированную таким способом ветвь через $f_0(z)$

$$f_0(z) = \sqrt[3]{r_1 r_2} \exp \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{3} i \right). \quad (19.6)$$

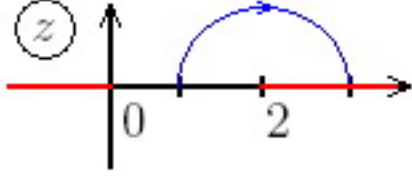


Рис. 16. Контур $|z - 2| = 1$ выделен синим цветом.

Отметим еще раз, что ветвь $f_0(z)$ задана на плоскости с разрезами, изображенной на рисунке 15, и пределы изменения углов φ_1 и φ_2 заданы в (19.5).

Изобразим теперь на нашей плоскости с разрезом контур, вдоль которого нужно аналитически продолжать ветвь $f_0(z)$, см. рисунок 16. Важным обстоятельством является тот факт, что контур нигде не пересекает разрезов. Поэтому для ответа на вопрос задачи достаточно просто вычислить значение ветви $f_0(z)$ в точке $z = 3$

$$f_0(3) = \sqrt[3]{r_1 r_2} \exp \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{3} i \right) \Big|_{z=3} = \left[r_1 = 3, \varphi_1 = 0 \right] = \sqrt[3]{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Заметим также, что $\varphi_2 = 0$, а не $\varphi_2 = 2\pi$, потому что мы подошли к правому разрезу сверху, а не снизу. $\square$

Ответ: Ветвь $f_0(z)$ фиксирована формулами (19.5) и (19.6), значение функции $f(z)$ после требуемого аналитического продолжения равно $\sqrt[3]{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Пример 19.11. Убедиться в том, что функция $f(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}}$ допускает выделение регулярной ветви в окрестности точки $z = \infty$. Фиксировать ветвь условием $f(\infty) = 1$ и найти вычет этой ветви в точке $z = \infty$.

Решение. У функции $f(z)$ две конечные точки ветвления $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. Введем две системы полярных координат с центрами в этих точках

$$z = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - 1 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

В этих координатах функция $f(z)$ может быть переписана следующим образом

$$f(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \exp \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi n}{2} i \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (19.7)$$

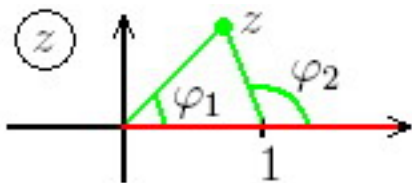


Рис. 17. Разрезы выделены красным цветом.

Для того чтобы фиксировать пределы изменения углов φ_1 и φ_2 проведем разрезы как на рисунке 17 и фиксируем их пределы изменения следующим образом $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$, $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$.

Легко видеть, что при больших значениях z углы φ_1 и φ_2 становятся близки, аналогично и радиус-векторы r_1 и r_2 становятся близки. Отсюда и из представления (19.7) следует, что при больших z функция $f(z)$ ведет себя следующим образом $f(z) = e^{\pi n i} + o(1)$. Для того чтобы удовлетворить условию

$f(\infty) = 1$, положим $n = 0$. Обозначим так фиксированную ветвь через $f_0(z)$.

Теперь нужно убедиться в том, что ветвь $f_0(z)$ регулярна в окрестности точки $z = \infty$. Для этого необходимо проверить, что значения функции $f_0(z)$ совпадают на верхнем и нижнем берегах разреза $(1, +\infty)$. На верхнем берегу разреза $(1, +\infty)$

$$f_0(z) = [\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0] = \sqrt{r_1 r_2^{-1}},$$

на нижнем

$$f_0(z) = [\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2 = 2\pi] = \sqrt{r_1 r_2^{-1}}.$$

Таким образом, согласно принципу непрерывного продолжения (см. теорему 19.4) функция $f_0(z)$ регулярна в окрестности точки $z = \infty$. В принципе это означает, что разрез $(1, +\infty)$ можно убрать и рассматривать функцию $f_0(z)$ на плоскости с одним разрезом $(0, 1)$. Однако это может привести к путанице с пределами изменения углов φ_1 и φ_2 . Поэтому мы по прежнему будем рассматривать функцию $f_0(z)$ на плоскости с разрезом $(0, \infty)$.

Для того чтобы найти вычет функции $f_0(z)$ в точке $z = \infty$, найдем несколько первых членов ее ряда Лорана. Удобно вначале разложить в ряд многозначную функцию $f(z)$, см. (6.4),

$$f(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1/2} = e^{\pi i p} \left(1 + \frac{1}{2z} + O(z^{-2})\right), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из условия $f_0(\infty) = 1$ находим, что $p = 0$. Отсюда

$$f_0(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}} = 1 + \frac{1}{2z} + O(z^{-2})$$

и

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

Ответ: $\operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) = -\frac{1}{2}$.

Домашнее задание:

Задача 19.12. Можно ли выделить регулярную ветвь функции $\sqrt[4]{z}$ в области $1 < |z| < 3$.

Ответ: Нельзя.

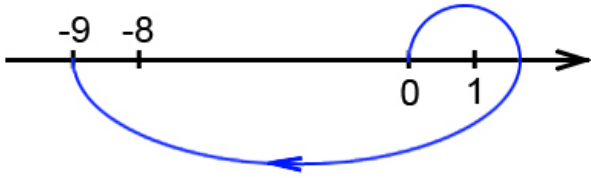
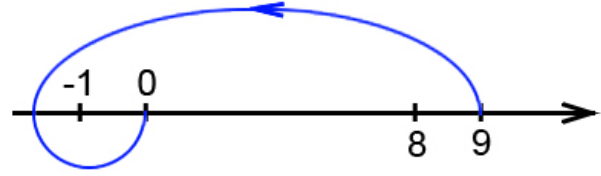
Задача 19.13. Выделить регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[4]{1-z^2}$, удовлетворяющую условию $f(0) = 1$. Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения вдоль нижней дуги окружности $|z+1| = 1$ в точку $z = -2$.

Ответ: $\sqrt[4]{3} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Задача 19.14. Выделить регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z+8)^2}{1-z}}$, удовлетворяющую условию $f(0) = 4$. Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения в точку $z = -9$ вдоль контура, изображенного на рисунке 18.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

Задача 19.15. Выделить регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z+1)^2}{8-z}}$, удовлетворяющую условию $f(9) = -\sqrt[3]{100}$. Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения в точку $z = 0$ вдоль контура, изображенного на рисунке 19.

Рис. 18. Контур γ выделен синим цветом.Рис. 19. Контур γ выделен синим цветом.

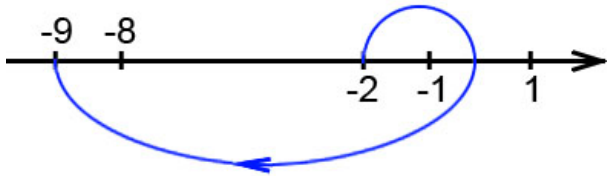
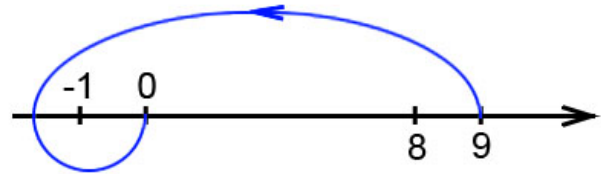
Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 19.16. Выделить регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{\frac{1-z^2}{8+z}}$, удовлетворяющую условию $f(-2) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения в точку $z = -9$ вдоль контура, изображенного на рисунке 20.

Ответ: $2\sqrt[3]{10}$.

Задача 19.17. Выделить регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt{3+z^2}$, удовлетворяющую условию $f(1) = 2$. Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения в точку $z = -2i$ вдоль контура, изображенного на рисунке 21.

Ответ: $-i$.

Рис. 20. Контур γ выделен синим цветом.Рис. 21. Контур γ выделен синим цветом.

Задача 19.18. Убедиться в том, что функция $f(z) = \sqrt{z^2+1}$ допускает выделение регулярной ветви в окрестности точки $z = \infty$. Фиксировать ветвь условием $f_0(2i) = i\sqrt{3}$ в области $|z| > 1$ и найти вычет этой ветви в точке $z = \infty$.

Ответ: $\operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) = -\frac{1}{2}$.

Задача 19.19. Пусть функция $f(z)$ задана при $\operatorname{Re}(z) > 0$ равенством $f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x-iz)(x+i)}$.

Доказать, не вычисляя интеграла, что $f(z)$ допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Сравните результат аналитического продолжения $f(z)$ и значение интеграла при $\operatorname{Re}(z) < 0$.

Ответ: $f(z) = \frac{2\pi}{z+1}$, при $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$; $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x-iz)(x+i)} = 0$ при $\operatorname{Re}(z) < 0$.

20. Римановы поверхности простейших многозначных функций: $\sqrt[n]{z-a}$, $\ln z$.

Рассмотрим произвольную многозначную функцию $f(z)$ с конечным числом точек ветвления в $\mathbb{C}$. Допустим нам удалось выделить ее всевозможные регулярные ветви, которые, вообще говоря, могут быть заданы на различных областях определения. Договоримся считать, что каждой ветви $f_n(z)$ сопоставлен свой экземпляр комплексной плоскости с разрезами D_n .

Допустим теперь, что ветвь $f_n(z)$ может быть аналитически продолжена через какой-нибудь берег γ одного из разрезов на D_n . В этом случае, найдется другая ветвь $f_k(z)$, которая будет аналитическим продолжением ветви $f_n(z)$ через γ . Тот факт, что $f_k(z)$ является аналитическим продолжением $f_n(z)$ удобно изображать склейкой соответствующих берегов разрезов на листах D_k и D_n .

Определение 20.1 (Формальное определение). Римановой поверхностью многозначной функции $f(z)$ называют набор листов D_n , на каждом из которых задана своя регулярная ветвь $f_n(z)$ функции $f(z)$, и описание способа склейки всех берегов разрезов на листах D_n между собой.

Пример 20.2. Описать риманову поверхность функции $f(z) = \sqrt{z}$.

Решение. У функции $\sqrt{z}$ одна конечная точка ветвления $z_1 = 0$. Переходя к полярным координатам, перепишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z = r e^{i\varphi}.$$

Для того, чтобы выделить однозначные ветви проводим разрез из точки ветвления $z_1 = 0$ на бесконечность вдоль полуоси $[0, +\infty)$. Соответственно с этим, пределы изменения угла φ фиксируем следующим образом

$$\varphi \in (0, 2\pi).$$

Параметрам $n = 0$ и $n = 1$ соответствуют две регулярные ветви $f_0(z)$ и $f_1(z)$ функции $f(z)$ (остальные значения параметра n приводят к одной из указанных ветвей).

Считаем, что ветвь $f_0(z)$ задана на листе D_0 , а ветвь $f_1(z)$ на D_1 . Вычислим значения функций $f_0(z)$ и $f_1(z)$ на берегах разрезов листов D_0 и D_1 , см. рисунки 22 и 23. Теперь нужно

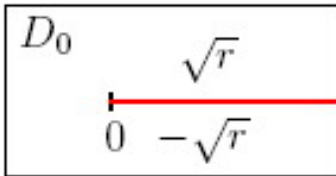


Рис. 22. Значения функции $f_0(z)$ на берегах разрезов листа D_0 .

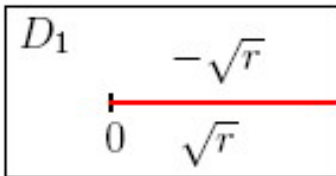


Рис. 23. Значения функции $f_1(z)$ на берегах разрезов листа D_1 .

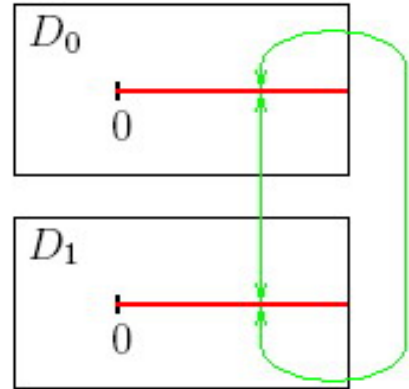


Рис. 24. Риманова поверхность функции $\sqrt{z}$.

подходящим образом склеить листы D_0 и D_1 . Сравнивая значения функций $f_0(z)$ и $f_1(z)$ на различных берегах разрезов листов D_0 и D_1 и учитывая принцип непрерывного продолжения (см. теорему 19.4), найдем требуемую склейку, см. рисунок 24. $\square$

Ответ: Риманова поверхность функции $\sqrt{z}$ изображена на рисунке 24. При этом на листе D_0 справедливо представление $f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$, а на листе $D_1 - f_1(z) = -\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$, где $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Пример 20.3. Описать риманову поверхность функции $f(z) = \ln z$. Предполагая, что $f(e) = 1 - 2\pi i$ найти значение функции $f(z)$ в точке $z = 1$ после ее аналитического продолжения вдоль контура γ , изображенного на рисунке 28.

Решение. У функции $\ln z$ одна конечная точка ветвления $z_1 = 0$. Переходя к полярным координатам, перепишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi + 2i\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z = re^{i\varphi}. \quad (20.1)$$

Для того, чтобы выделить однозначные ветви проводим разрез из точки ветвления $z_1 = 0$ на бесконечность, например, вдоль полуоси $(-\infty, 0]$. Соответственно с этим, пределы изменения угла φ фиксируем следующим образом

$$\varphi \in (-\pi, \pi). \quad (20.2)$$

Различным параметрам $n \in \mathbb{Z}$ соответствуют различные регулярные ветви $f_n(z)$ функции $f(z)$, которые задаются равенством (20.1).

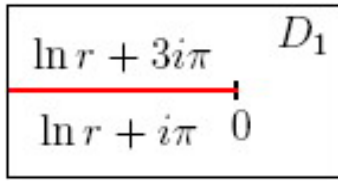


Рис. 25. Значения функции $f_1(z)$ на берегах разрезов листа D_1 .

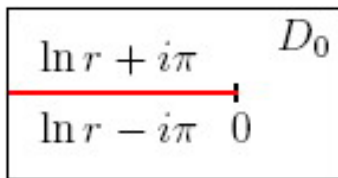


Рис. 26. Значения функции $f_0(z)$ на берегах разрезов листа D_0 .

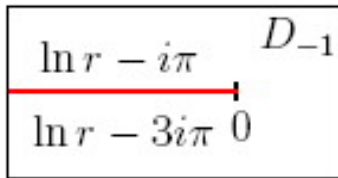


Рис. 27. Значения функции $f_{-1}(z)$ на берегах разрезов листа D_{-1} .

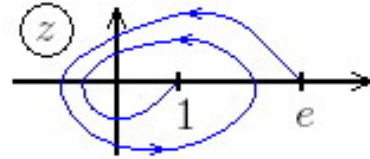


Рис. 28. Контур γ изображен синим цветом.

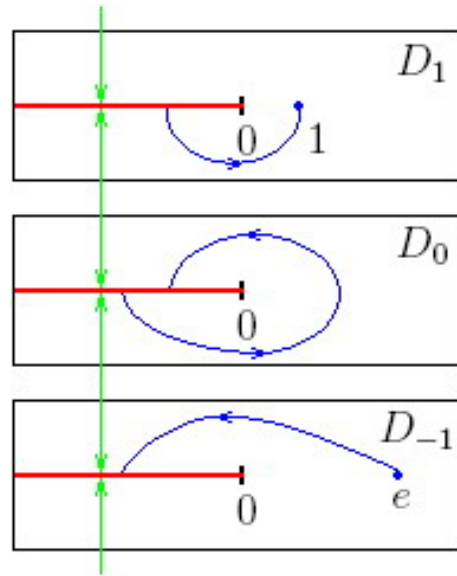


Рис. 29. Риманова поверхность функции $\ln z$. Синим цветом изображен контур γ .

Считаем, что каждая ветвь $f_n(z)$ задана на своем листе D_n . Вычислим значения функций $f_n(z)$ на берегах разрезов листов D_n для нескольких n , см. рисунки 25 – 27. Теперь нужно

подходящим образом склеить листы D_n . Сравнивая значения функций $f_n(z)$ на различных берегах разрезов листов D_n найдем требуемую склейку. На рисунке 29 изображена склейка листов D_{-1} , D_0 и D_1 . Остальные листы подклеиваются аналогично.

Легко видеть, что условию $f(e) = 1 - 2\pi i$ удовлетворяет ветвь $f_{-1}(z)$. Поэтому контур γ должен начинаться на листе D_{-1} . Изобразим теперь контур γ на римановой поверхности, см. рисунок 29. Отсюда находим значение функции $f_{-1}(z)$ в точке $z = 1$ после ее аналитического продолжения вдоль контура γ

$$f_{-1}(z)|_{\gamma} = f_1(1) = [r = 1, \varphi = 0, n = 1] = 2\pi i. \quad \square$$

Ответ: Риманова поверхность $\ln z$ состоит из бесконечного набора листов D_n , несколько из них изображено на рисунке 29. На каждом листе D_n фиксирована ветвь $f_n(z)$ равенством (20.1). Пределы изменения угла φ фиксированы равенством (20.2). Результат аналитического продолжения: $f_{-1}(z)|_{\gamma} = 2\pi i$.

Домашнее задание:

Пример 20.4. Описать риманову поверхность функции $f(z) = \sqrt[3]{z-1}$. Предполагая, что $f(2) = 1$ найти значение функции $f(z)$ в точке $z = 0$ после ее аналитического продолжения вдоль ломаной линии γ последовательно соединяющей точки: $2, -2i, -2, 2i, 3, -i, 1+i$ и 0 .

Ответ: Результат аналитического продолжения: $f(z)|_{\gamma} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

21. Римановы поверхности многозначных функций вида: $\sqrt[n]{(z-a)(z-b)}, \dots$

Рассмотрим процедуру построения римановой поверхности функции вида $\sqrt[n]{R(z)}$, где $R(z)$ – рациональная функция, на следующем примере.

Пример 21.1. Описать риманову поверхность функции $f(z) = \sqrt{(z-1)(2+z)}$.

Решение. У функции $\sqrt{(z-1)(2+z)}$ две точки ветвления $z_1 = 1$ и $z_2 = -2$. Введем две системы полярных координат с центрами в этих точках, см. рисунок 30. В этих координатах

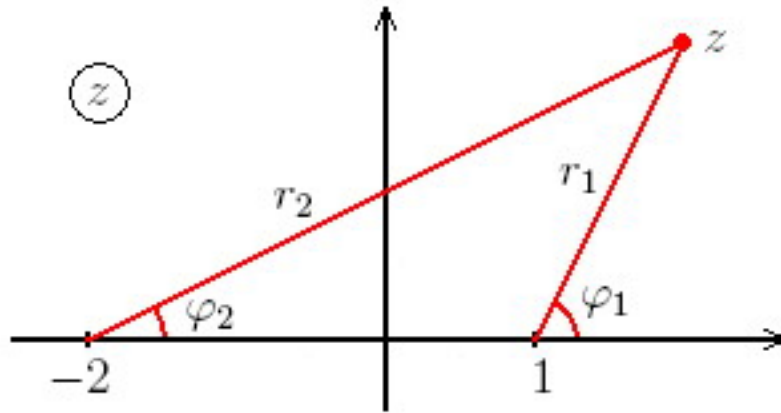
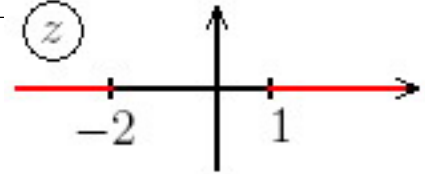


Рис. 30. Здесь $z-1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z+2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi n}{2}\right)$$

Для того чтобы избавиться от неоднозначности в правой части (21.1), необходимо договориться в каких пределах меняются углы φ_1 и φ_2 . Выберем их следующим образом



$\varphi_1 \in (0, 2\pi)$, $\varphi_2 \in (3\pi, \infty)$ Разрезы выделены красным цветом.

Этот выбор соответствует тому, что мы рассматриваем функцию $f(z)$ на комплексной плоскости с двумя разрезами $(-\infty, -2)$ и $(1, \infty)$, см. рисунок 31. На этой плоскости с разрезами можно фиксировать две различные ветви $f_0(z)$ и $f_1(z)$ функции $f(z)$, выбирая $n = 0$ и $n = 1$ (остальные значения параметра n приводят к одной из указанных ветвей).

Введем теперь в рассмотрение два экземпляра описанной плоскости с разрезами и обозначим их через D_0 и D_1 . Ради удобства, на рисунке 32 указаны значения углов φ_0 и φ_1 на берегах разрезов листов D_0 и D_1 . Будем считать, что функция $f_0(z)$ задана на D_0 , а функция $f_1(z)$ на D_1 . Несложно вычислить значения функций $f_0(z)$ и $f_1(z)$ на берегах соответствующих разрезов, см. рисунки 33 и 34.

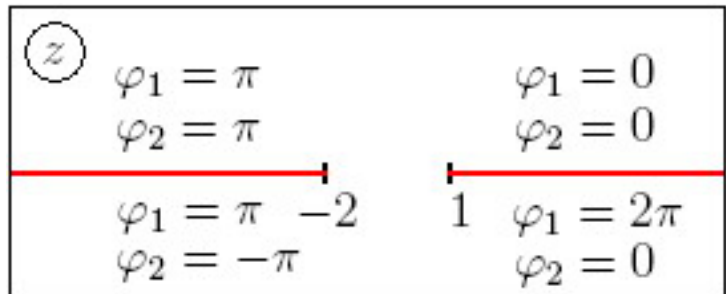


Рис. 32. Значения углов φ_0 и φ_1 на берегах разрезов.

Теперь нужно подходящим образом склеить листы D_0 и D_1 . Сравнивая значения функций $f_0(z)$ и $f_1(z)$ на различных берегах разрезов листов D_0 и D_1 и учитывая принцип непрерывного продолжения (см. теорему 19.4), найдем требуемую склейку, см. рисунок 35. $\square$

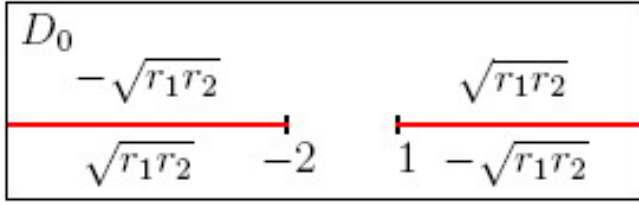


Рис. 33. Значения функции $f_0(z)$ на берегах разрезов листа D_0 .

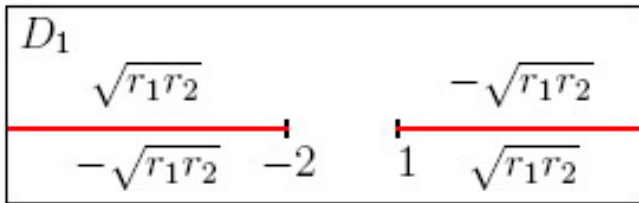


Рис. 34. Значения функции $f_1(z)$ на берегах разрезов листа D_1 .

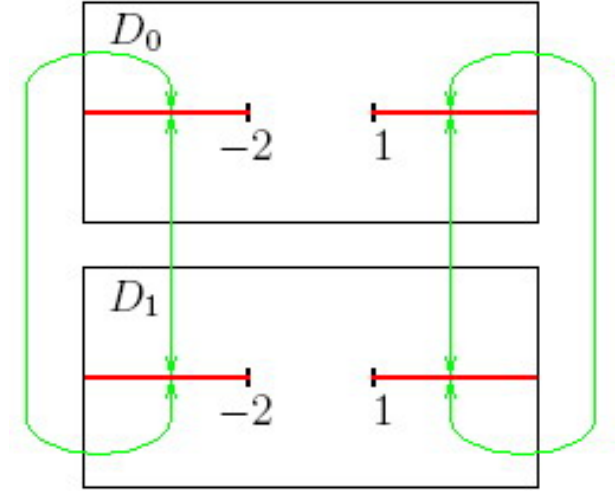


Рис. 35. Риманова поверхность функции $\sqrt{(z-1)(2+z)}$.

Ответ: Риманова поверхность функции $\sqrt{(z-1)(2+z)}$ изображена на рисунке 35. При этом на листе D_0 справедливо представление $\sqrt{(z-1)(2+z)} = \sqrt{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} i\right)$, а на листе D_1 $-\sqrt{(z-1)(2+z)} = -\sqrt{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} i\right)$, где $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$ и $\varphi_2 \in (-\pi, \pi)$.

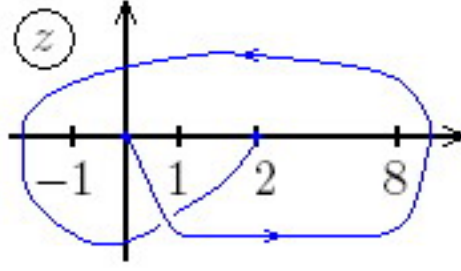
Приведем теперь для удобства план построения римановой поверхности функции вида $\sqrt[n]{R(z)}$, где $R(z)$ – рациональная функция.

- (1) Находим все конечные точки ветвления $\{z_k\}_{k=1}^p$ функции $\sqrt[n]{R(z)}$. Таковыми являются все нули и полюса функции $R(z)$.
- (2) Вводим полярные системы координат с центрами в точках ветвления $z - z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ и переписываем через них функцию $\sqrt[n]{R(z)}$.
- (3) Фиксируем один лист римановой поверхности. Для этого проводим из каждой точки ветвления разрез на бесконечность и определяем пределы изменения углов φ_k .
- (4) Фиксируем n ветвей функции $\sqrt[n]{R(z)}$ и приписываем каждой ветви свой лист римановой поверхности.
- (5) Вычисляем на берегах разрезов каждого листа граничные значения функции $\sqrt[n]{R(z)}$.
- (6) Склеиваем листы между собой, используя принцип непрерывного продолжения (см. теорему 19.4).
 - В ответ выписываем схему склейки листов между собой и способ фиксации ветвей функции $\sqrt[n]{R(z)}$ на каждом из листов римановой поверхности.

Пример 21.2. Описать риманову поверхность функции

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}}.$$

Предполагая, что $f(0) = 2$ найти значение функции $f(z)$ в точке $z = 2$ после ее аналитического продолжения вдоль контура γ , изображенного на рисунке 36.

Рис. 36. Контур γ выделен синим цветом.

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. У функции $f(z) = \sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}}$ три конечные точки ветвления $z_1 = 8$, $z_2 = 1$ и $z_3 = -1$.

Шаг 2. Вводим три полярные системы координат с центрами в точках ветвления

$$z - 8 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - 1 = r_2 e^{i\varphi_2}, \quad z + 1 = r_3 e^{i\varphi_3}.$$

В этих координатах функцию $f(z)$ можно переписать в виде

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}} = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2^2 r_3}} \exp\left(\frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 - \varphi_3 + \pi + 2\pi n}{3} i\right). \quad (21.2)$$

Шаг 3. Фиксируем лист римановой поверхности. Для этого проведем разрезы из точек ветвления на бесконечность как на рисунке 37 и фиксируем пределы изменения углов

$$\varphi_1 \in (0, 2\pi), \quad \varphi_2 \in (0, 2\pi), \quad \varphi_3 \in (-\pi, \pi).$$

Шаг 4. Значениям $n = 0, 1$ и 2 соответствуют различные ветви функции $f(z)$, заданные выражением (21.2). Обозначим эти ветви через $f_0(z)$, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ соответственно. Ветви, отвечающие остальным значениям параметра n , совпадают с одной из указанных ветвей ($e^{2\pi i p} = 1$ при $p \in \mathbb{Z}$).

Шаг 5. Находим значения ветвей $f_0(z)$, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на берегах соответствующих разрезов. При этом считаем, что функции $f_0(z)$, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ заданы на листах D_0 , D_1 и D_2 соответственно. Результаты вычислений приведены на рисунках 38, 39 и 40. Здесь, ради сокращения записи, мы учли, что $|f(z)| = |f_n(z)| = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2^2 r_3}}$, где $n = 0, 1, 2$.

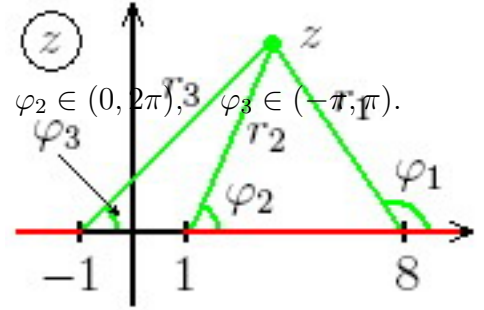
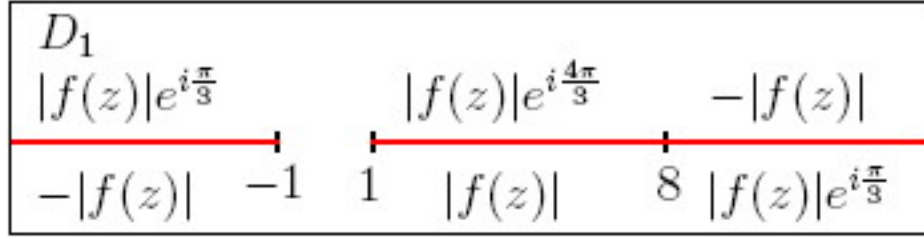
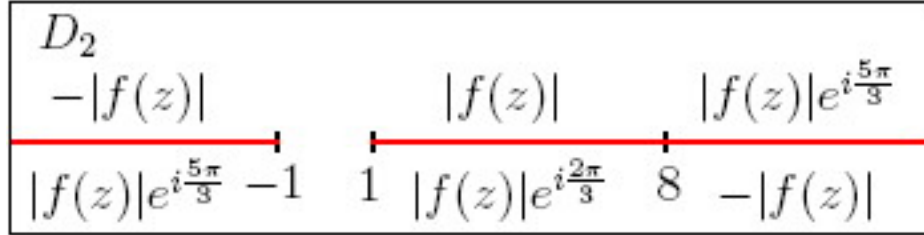
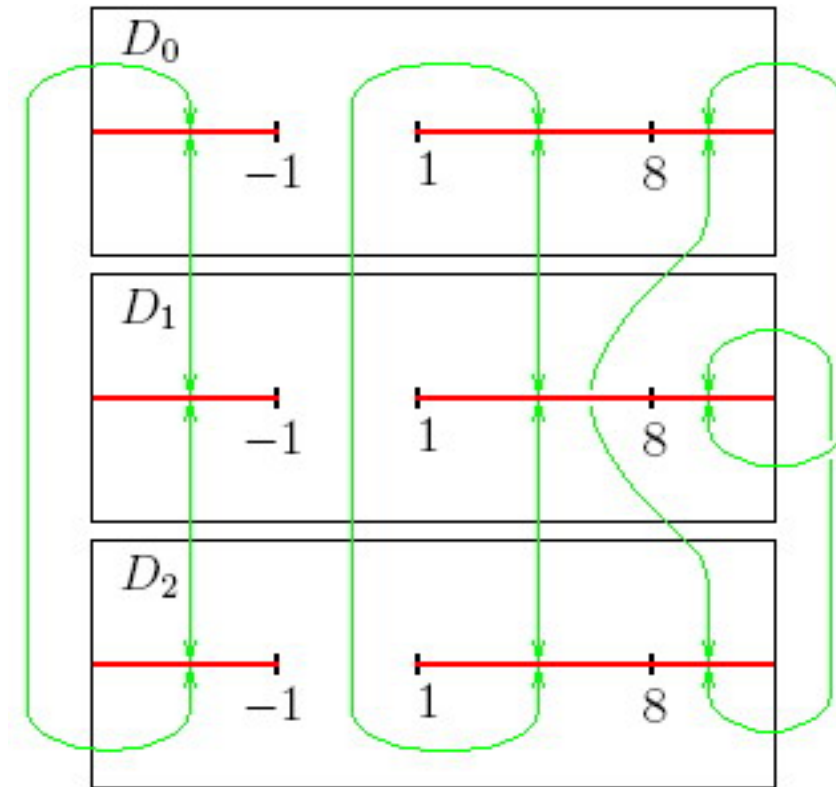


Рис. 37. Разрезы выделены красным цветом.

D_0					
$ f(z) e^{-i\frac{\pi}{3}}$		$ f(z) e^{i\frac{2\pi}{3}}$		$ f(z) e^{i\frac{\pi}{3}}$	
$ f(z) e^{i\frac{\pi}{3}}$	-1	1	$ f(z) e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	8	$ f(z) e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Рис. 38. Значения функции $f_0(z)$ на берегах разрезов листа D_0 .

Шаг 6. Склеиваем листы римановой поверхности между собой, используя принцип непрерывного продолжения (теорема 19.4), см. рисунок 41. Здесь мы учли, что $e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ и $e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Рис. 39. Значения функции $f_1(z)$ на берегах разрезов листа D_1 .Рис. 40. Значения функции $f_2(z)$ на берегах разрезов листа D_2 .Рис. 41. Риманова поверхность функции $\sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}}$.

Шаг 7. Выясним какому листу римановой поверхности отвечает значение $f(0) = 2$. Из формулы (21.2) следует, что

$$f_n(0) = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2^2 r_3}} \exp\left(\frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 - \varphi_3 + \pi + 2\pi n}{3} i\right) = \left[\begin{array}{l} r_1 = 8, \ r_2 = 1, \ r_3 = 1 \\ \varphi_1 = \pi, \ \varphi_2 = \pi, \ \varphi_3 = 0 \end{array} \right] = 2e^{i\frac{2\pi n}{3}}.$$

Таким образом, равенство $f(0) = 2$ возможно только при $n = 0$. Это означает, что точка $z = 0$ располагается на листе D_0 .

Для того чтобы найти значение функции $f(z)$ в точке $z = 2$ после ее аналитического продолжения вдоль контура γ , изобразим контур γ на построенной римановой поверхности, см. рисунок 42. Таким образом, после аналитического продолжения вдоль контура γ мы оказы-

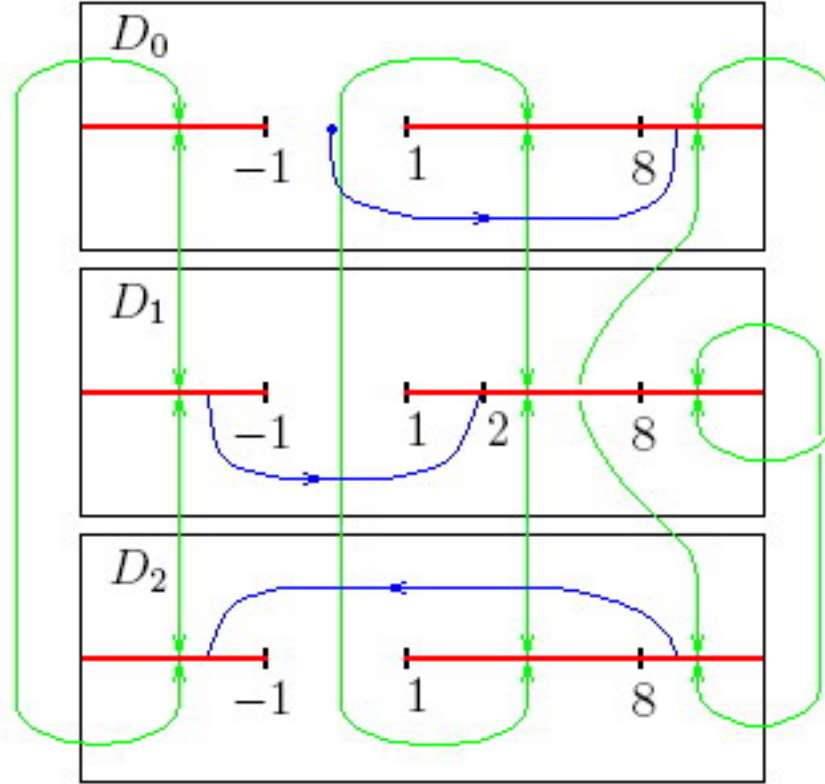


Рис. 42. Контур γ выделен синим цветом.

ваемся на листе D_1 римановой поверхности. Находим значение функции $f(z)$ в точке $z = 2$, лежащей на листе D_1 , см. (21.2),

$$f_1(z)|_{z=2} = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2^2 r_3}} \exp\left(\frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 - \varphi_3 + \pi + 2\pi n}{3} i\right) = \left[\begin{array}{c} n = 1 \\ r_1 = 6, \ r_2 = 1, \ r_3 = 3 \\ \varphi_1 = \pi, \ \varphi_2 = 2\pi, \ \varphi_3 = 0 \end{array} \right] = \sqrt[3]{2}. \quad \square$$

Ответ: Риманова поверхность функции $f(z) = \sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}}$ изображена на рисунке 41. При этом на листе D_n справедливо представление (21.2), где $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$, $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$, $\varphi_3 \in (-\pi, \pi)$. Результат аналитического продолжения $f(z)|_\gamma = \sqrt[3]{2}$.

Пример 21.3. Описать риманову поверхность функции $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$. Предполагая, что $f(4) = \sqrt{3}$ найти значение функции $f(z)$ в точке $z = 4$ после ее аналитического продолжения вдоль окружности $\gamma = \{z : |z| = 4\}$ против часовой стрелки.

Решение. Точки ветвления функции $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ располагаются в нулях подкоренных выражений. Таких точек две $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. Для того чтобы выделить однозначные ветви функции $f(z)$, будем ее рассматривать на комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$ с разрезами вдоль лучей

$(-\infty, 0]$ и $[1, +\infty)$. Функцию $f(z)$ удобно представить в виде композиции отображений $f(z) = h(g(z))$, где

$$\zeta = g(z) = \sqrt{z} : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_\zeta \quad \text{и} \quad w = h(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta} : \mathbb{C}_\zeta \rightarrow \mathbb{C}_w.$$

Ясно, что функция $f(z)$ допускает выделения четырех различных ветвей. Поэтому удобно запастись четырьмя листами комплексной плоскости с разрезами и с каждым из них связать свою ветвь $f(z)$. Обозначим эти листы через D_1 , D_2 , D_3 и D_4 .

Для фиксации ветви функции $g(z)$ удобно перейти к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$. Отсюда

$$\zeta = g_n(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp\left(i\frac{\varphi}{2} + i\pi n\right), \quad n = 0, 1.$$

Мы будем считать, что $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Это соответствует разрезу $(-\infty, 0]$ на $\mathbb{C}_z$.

Рассмотрим случай $n = 0$. Будем считать, что функция $g_0(z)$ задана на листе D_1 (D_2). Обозначим образ области D_1 (D_2) при отображении $g_0(z)$ через G_1 (G_2). Для фиксации ветвей функции $h(\zeta)$, заданных на G_1 (G_2), удобно перейти к полярным координатам вида $\zeta = -1 + \rho e^{i\psi}$. Отсюда

$$w = h_k^0(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta} = \sqrt{\rho} \exp\left(i\frac{\psi}{2} + i\pi k\right), \quad k = 0, 1.$$

Мы будем считать, что $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Это соответствует тому, что область G_1 (G_2) располагается правее точки $\zeta = -1$.

Таким образом, мы фиксировали две ветви функции $f(z)$. Первая ветвь $f_1(z) = h_0^0(g_0(z))$ задается композицией отображений (см. рисунок 43)

$$\zeta = g_0(z) : D_1 \rightarrow G_1, \quad w = h_0^0(\zeta) : G_1 \rightarrow E_1.$$

Вторая ветвь $f_2(z) = h_0^1(g_0(z))$ задается композицией отображений (см. рисунок 44)

$$\zeta = g_0(z) : D_2 \rightarrow G_2, \quad w = h_0^1(\zeta) : G_2 \rightarrow E_2.$$

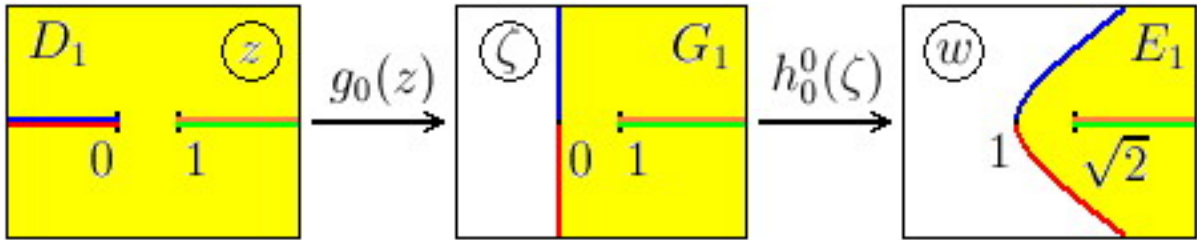


Рис. 43. Отображение $f_1(z) = h_0^0(g_0(z))$.

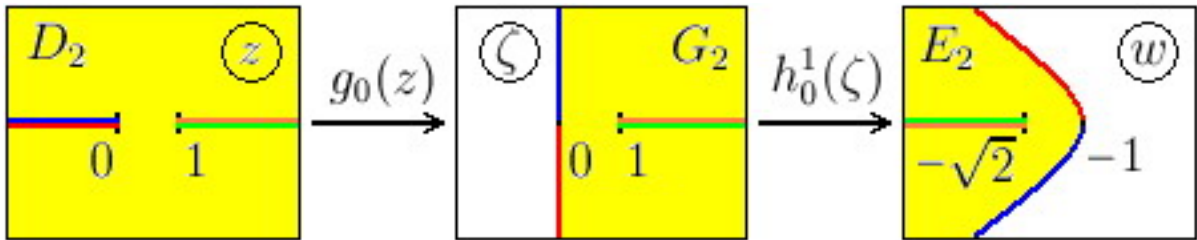


Рис. 44. Отображение $f_2(z) = h_0^1(g_0(z))$.

Фиксируем еще две ветви функции $f(z)$ отвечающие $n = 1$. Будем считать, что функция $g_1(z)$ задана на листе D_3 (D_4). Обозначим образ области D_3 (D_4) при отображении $g_1(z)$ через G_3 (G_4).

Для фиксации ветвей функции $h(\zeta)$, заданных на G_3 (G_4), переходим к полярным координатам $\zeta = -1 + \rho e^{i\psi}$. Отсюда

$$w = h_1^k(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta} = \sqrt{\rho} \exp\left(i\frac{\psi}{2} + i\pi k\right), \quad k = 0, 1.$$

Мы будем считать, что $\psi \in (-\pi, \pi)$. Это соответствует тому, что область G_3 (G_4) содержит разрез вдоль луча $(-\infty, 1]$.

Итак, мы фиксировали оставшиеся две ветви функции $f(z)$. Третья ветвь $f_3(z) = h_1^0(g_1(z))$ задается композицией отображений (см. рисунок 45)

$$\zeta = g_1(z) : D_3 \rightarrow G_3, \quad w = h_1^0(\zeta) : G_3 \rightarrow E_3.$$

Четвертая ветвь $f_4(z) = h_1^1(g_1(z))$ задается композицией отображений (см. рисунок 46)

$$\zeta = g_1(z) : D_4 \rightarrow G_4, \quad w = h_1^1(\zeta) : G_4 \rightarrow E_4.$$

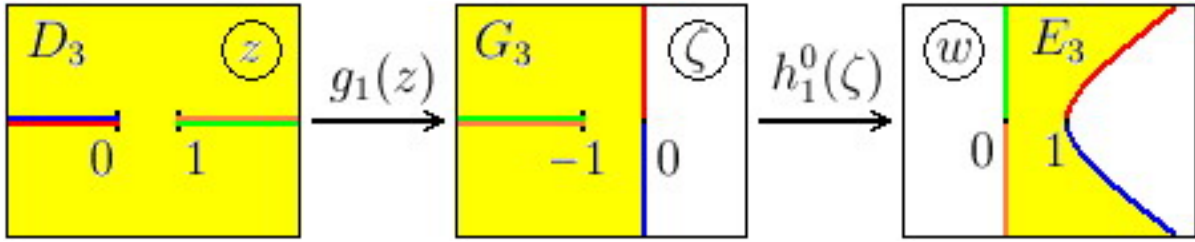


Рис. 45. Отображение $f_3(z) = h_1^0(g_1(z))$.

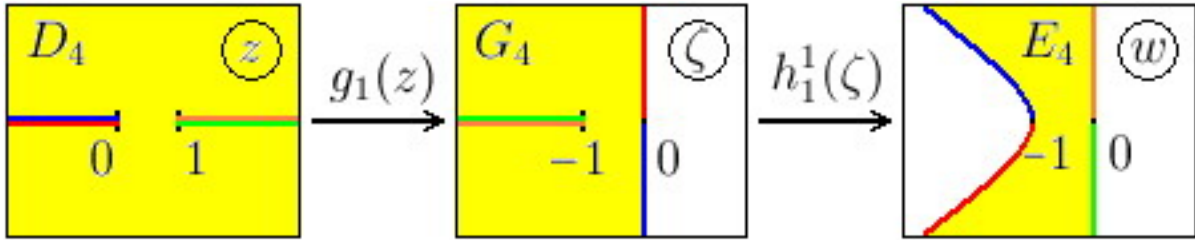


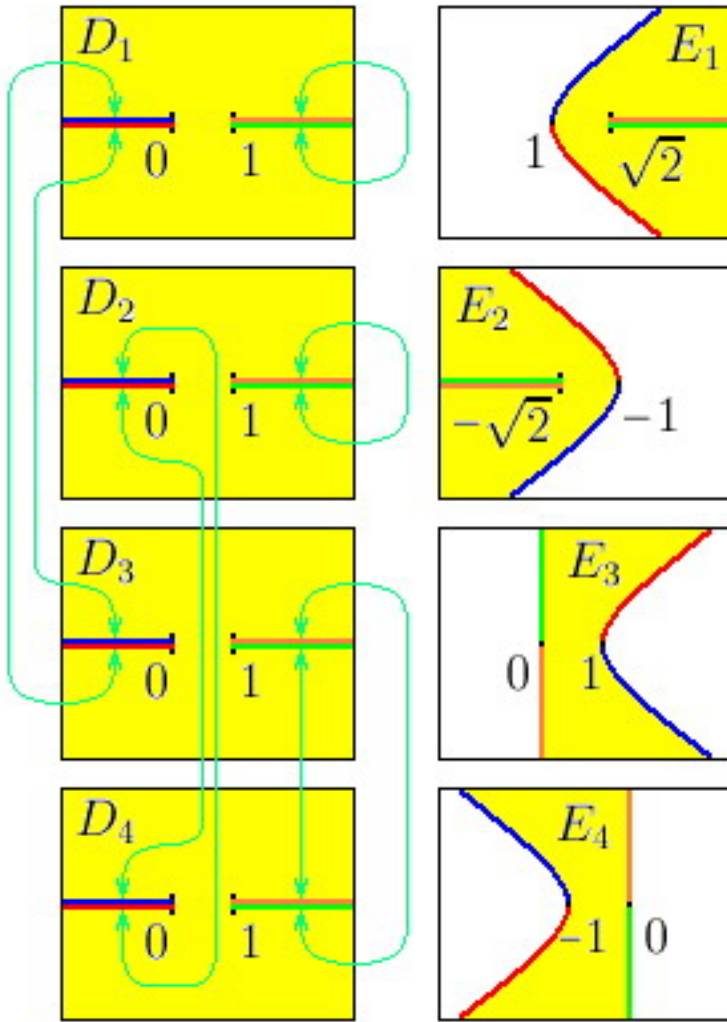
Рис. 46. Отображение $f_4(z) = h_1^1(g_1(z))$.

Склейку листов $D_1 - D_4$ в риманову поверхность R необходимо провести так, чтобы в результате получилась непрерывная, а следовательно регулярная, функция $f(z)$ на R . Сравнивая значения (см. области $E_1 - E_4$) различных ветвей функции $f(z)$ на соответствующих берегах разрезов, легко выполнить требуемую склейку, см. рисунок 47.

Заметим, что на листах D_1 и D_2 разрезы $[1, +\infty)$ фактически отсутствуют. Это соответствует тому, что точка ветвления $z = 1$ функции $f(z)$ возникает как нуль функции $1 + g(z)$, который лежит на листах D_3, D_4 и отсутствует на листах D_1 и D_2 .

Легко видеть, что точка $z_0 = 4$, удовлетворяющая условию $f(z_0) = \sqrt{3}$, располагается на листе D_1 римановой поверхности функции $f(z)$. Аналитическое продолжение вдоль окружности γ приводит в точку $z_1 = 4$, находящуюся на нижнем берегу разреза $[1, +\infty)$ листа D_3 . Отсюда следует, что $f(z_1) = i$.

Ответ: Риманова поверхность функции $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ изображена на рисунке 47. Ветви функции $f(z)$ на листах $D_1 - D_4$ фиксированы как показано на рисунках 43 – 46. Результат аналитического продолжения $f(z)|_\gamma = i$.

Рис. 47. Риманова поверхность функции $w = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$.

Домашнее задание:

Задача 21.4. Описать риманову поверхность функции $f(z) = \sqrt[3]{1 - z^2}$. Предполагая, что $f(3) = -2$ найти значение функции $f(z)$ в точке $z = -3$ после ее аналитического продолжения вдоль верхней дуги окружности $|z| = 3$.

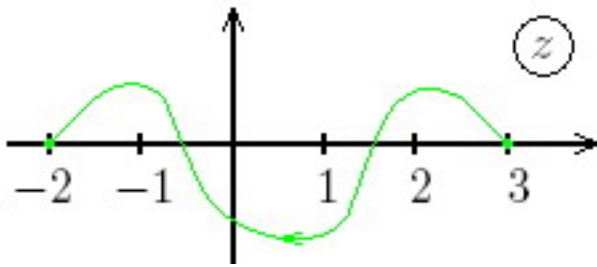
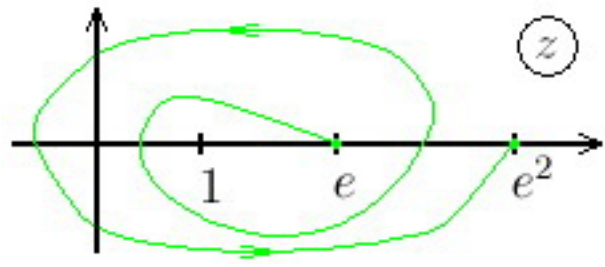
Ответ: $f(z)|_\gamma = 2e^{-i\pi/3}$.

Задача 21.5. Описать риманову поверхность функции $f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z+1)(z-2)}{z-1}}$. Предполагая, что $f(3) = \sqrt[3]{2}$ найти значение функции $f(z)$ в точке $z = -2$ после ее аналитического продолжения вдоль контура γ , изображенного на рисунке 48.

Ответ: $f(z)|_\gamma = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Задача 21.6. Описать риманову поверхность функции $f(z) = \sqrt{\ln z}$. Предполагая, что $f(e) = 1$ найти значение функции $f(z)$ в точке $z = e^2$ после ее аналитического продолжения вдоль контура, изображенного на рисунке 49.

Ответ: $f(z)|_\gamma = -2 + 2\pi i$.

Рис. 48. Контур γ выделен зеленым цветом.Рис. 49. Контур γ выделен зеленым цветом.

22. Вычисление интегралов от многозначных функций по полуоси (степенные и логарифмические особенности).

Для того чтобы вычислить интеграл по оси, полуоси или отрезку от какой-либо функции по вычетам, нам необходимо ответить на несколько вопросов. Во-первых, необходимо договориться о том, какую функцию мы будем интегрировать. В частности, если речь идет о многозначной функции, то нужно фиксировать ее регулярную ветвь. Во-вторых, нужно выбрать *замкнутый* контур интегрирования, чтобы впоследствии можно было воспользоваться теоремой о вычетах. В-третьих, необходимо связать интеграл по замкнутому контуру с исходным интегралом.

С подобной процедурой мы уже сталкивались, например, при вычислении интегралов от рациональных функций по оси. Здесь мы рассмотрим более сложные примеры, а именно, вычисление интегралов от многозначных функций по полуоси. Мы позволим себе рассматривать только такие примеры, в которых в качестве функции, интеграл от которой мы будем впоследствии считать по вычетам, можно выбирать ту же самую функцию, что и в исходном интеграле (т. е. в том, который нужно вычислить). При этом мы разберем несколько различных вариантов выбора контура интегрирования.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad (22.1)$$

где $R(x)$ – рациональная функция, особые точки которой располагаются вне полуоси $[0, +\infty)$. Будем предполагать, что интеграл (22.1) сходится в обычном смысле. Вычисление интегралов вида (22.1) проводится в четыре шага.

- (1) Выделяем регулярную ветвь $f_0(z)$ *многозначной* функции $f(z) = z^{\alpha} R(z)$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль контура интегрирования $[0, +\infty)$. Удобно фиксировать ветвь так, чтобы на верхнем берегу разреза $[0, +\infty)$ она совпадала с подынтегральной функцией $x^{\alpha} R(x)$. Тогда на нижнем берегу ветвь $f_0(z)$ будет совпадать с функцией $e^{2\pi i \alpha} x^{\alpha} R(x)$.
- (2) Вычисляем по вычетам интеграл

$$\oint_{\gamma} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z), \quad (22.2)$$

где z_n – все полюса рациональной функции $R(z)$ и контур интегрирования γ изображен на рисунке 50.

- (3) Переходим к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow +\infty$. При этом из сходимости интеграла (22.1) следует, что

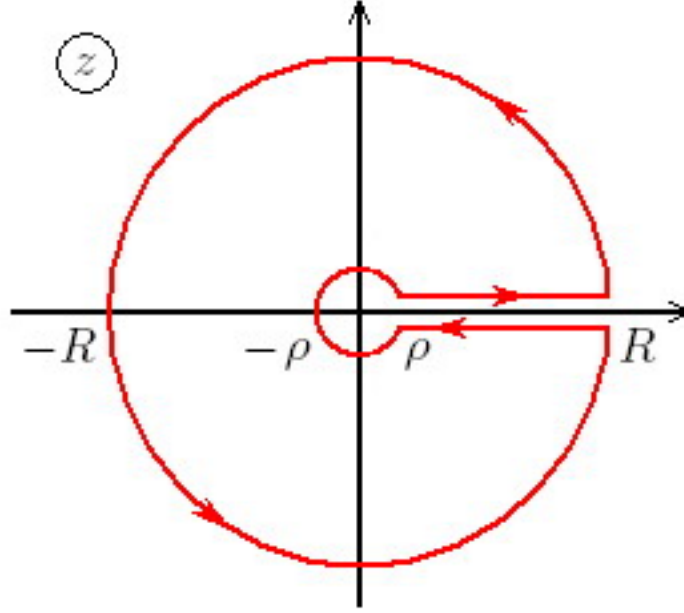
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{|z|=\rho} f_0(z) dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{|z|=R} f_0(z) dz = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} f_0(z) dz = \int_0^{+\infty} f_0(z + i0) dz + \int_{+\infty}^0 f_0(z - i0) dz. \quad (22.3)$$

- (4) Сравнивая (22.3) и (22.2), получим

$$\int_0^{+\infty} f_0(z + i0) dz - \int_0^{+\infty} f_0(z - i0) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z).$$

Рис. 50. Контур интегрирования γ выделен красным цветом.

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx - e^{2\pi i \alpha} \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z),$$

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z).$$

- Если исходный интеграл (22.1) берется от вещественной функции, то приводим ответ к вещественному виду.

Пример 22.1. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx.$$

Решение. Вычисления проводим в четыре шага.

Шаг 1. Фиксируем ветвь многозначной функции $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1}$

$$f_0(z) = \frac{\sqrt{r}}{z^2 + 1} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Шаг 2. У функции $f_0(z)$ два полюса первого порядка $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ внутри контура γ , изображенного на рисунке 50. Используя теорему о вычетах, найдем интеграл

$$\oint_{\gamma} f_0(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=i} f_0(z) + \operatorname{res}_{z=-i} f_0(z) \right) = 2\pi i \left(\left. \frac{\sqrt{r}}{2z} e^{i\frac{\varphi}{2}} \right|_{z=i} + \left. \frac{\sqrt{r}}{2z} e^{i\frac{\varphi}{2}} \right|_{z=-i} \right) = \quad (22.4)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2i} e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{-2i} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) = \pi\sqrt{2}.$$

Обращаем внимание на то, что при вычисления вычета в точке $z_2 = -i$ мы положили $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, а не $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, поскольку для ветви $f_0(z)$ должно выполняться условие $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Шаг 3. Переходим к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow +\infty$. При этом

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \oint_{|z|=\rho} f_0(z) dz \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi\rho \max_{|z|=\rho} \left| \frac{\sqrt{\rho}}{1+z^2} \right| \leq 4\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{3/2} = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \oint_{|z|=R} f_0(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi R \max_{|z|=R} \left| \frac{\sqrt{R}}{1+z^2} \right| \leq 4\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1/2} = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_0(z) dz = \int_0^{+\infty} f_0(z+i0) dz - \int_0^{+\infty} f_0(z-i0) dz. \quad (22.5)$$

Замечаем теперь, что на верхнем берегу разреза $\varphi = 0$, а на нижнем $\varphi = 2\pi$, поэтому

$$f_0(z+i0) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \quad \text{при } z = x \in [0, +\infty),$$

$$f_0(z-i0) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} e^{i\pi} = -\frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \quad \text{при } z = x \in [0, +\infty),$$

Отсюда и из (22.5) найдем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_0(z) dz = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx. \quad (22.6)$$

Шаг 4. Сравнивая (22.4) и (22.6) получим, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square$$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{\infty} R(x) \ln x dx, \quad (22.7)$$

где $R(x)$ – четная рациональная функция

$$R(-x) = R(x),$$

особые точки которой располагаются вне полуоси $[0, +\infty)$. Будем предполагать, что интеграл (22.7) сходится в обычном смысле. Вычисление интегралов вида (22.7) проводится в пять шагов.

- (1) Выделяем регулярную ветвь $f_0(z)$ *многозначной* функции $f(z) = R(z) \ln z$ в полуплоскости $\text{Im}(z) > 0$. Удобно фиксировать ветвь так, чтобы на полуоси $[0, +\infty)$ она совпадала с подынтегральной функцией $R(x) \ln x$. Тогда на левой полуоси $(-\infty, 0]$ ветвь $f_0(z)$ будет совпадать с функцией $R(|x|)(\ln |x| + \pi i)$.

(2) Вычисляем по вычетам интеграл

$$\oint_{\gamma} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_n \\ \text{Im}(z_n)>0}} \text{res } f_0(z), \quad (22.8)$$

где z_n – все полюса рациональной функции $R(z)$ и контур интегрирования γ изображен на рисунке 51.

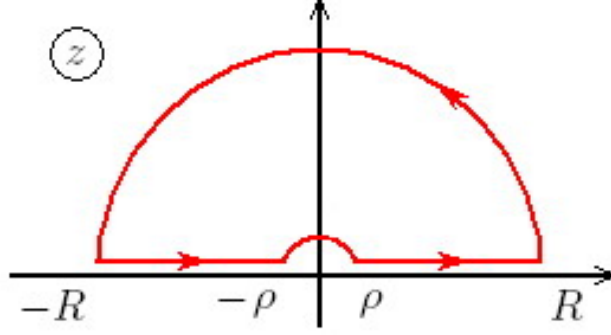


Рис. 51. Контур интегрирования γ выделен красным цветом.

(3) Переходим к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow +\infty$. При этом из сходимости интеграла (22.7) следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\{|z|=\rho\} \cap \{\text{Im}(z)>0\}} f_0(z) dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{|z|=R\} \cap \{\text{Im}(z)>0\}} f_0(z) dz = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} f_0(z) dz = \int_{-\infty}^0 f_0(z + i0) dz + \int_0^{+\infty} f_0(z + i0) dz. \quad (22.9)$$

(4) Сравнивая (22.9) и (22.8), получим

$$\int_{-\infty}^0 f_0(z + i0) dz + \int_0^{+\infty} f_0(z + i0) dz = 2\pi i \sum_n \text{res}_{z=z_n} f_0(z).$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^0 R(x)(\ln |x| + \pi i) dx + \int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_n \\ \text{Im}(z_n)>0}} \text{res } f_0(z)$$

Сделаем замену переменных $x \rightarrow -x$ в первом интеграле. Учитывая четность функции $R(x)$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} R(x)(\ln |x| + \pi i) dx + \int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx &= 2\pi i \sum_{\substack{z=z_n \\ \text{Im}(z_n)>0}} \text{res } f_0(z), \\ \int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx &= \pi i \sum_{\substack{z=z_n \\ \text{Im}(z_n)>0}} \text{res } f_0(z) - \frac{\pi i}{4} \int_{\mathbb{R}} R(x) dx. \end{aligned} \quad (22.10)$$

Здесь мы учли, что

$$2 \int_0^{+\infty} R(x) dx = \int_{\mathbb{R}} R(x) dx.$$

(5) Вычисляем интеграл $\int_{\mathbb{R}} R(x) dx$, например, методом, изложенным на стр. 50, и подставляем результат в (22.10).

- Если исходный интеграл (22.7) берется от вещественной функции, то приводим ответ к вещественному виду.

Пример 22.2. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx. \quad (22.11)$$

Решение. Вычисления проводим в пять шагов.

Шаг 1. Фиксируем ветвь многозначной функции $f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + 1}$

$$f_0(z) = \frac{\ln r + i\varphi}{z^2 + 4}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\varphi \in (0, \pi)$.

Шаг 2. У функции $f_0(z)$ один полюс первого порядка $z_1 = 2i$ внутри контура γ , изображенного на рисунке 51. Используя теорему о вычетах, вычислим интеграл

$$\oint_{\gamma} f_0(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} f_0(z) = 2\pi i \left. \frac{\ln r + i\varphi}{2z} \right|_{z=2i} = \left[r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right). \quad (22.12)$$

Шаг 3. Переходим к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow +\infty$. При этом

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\{|z|=\rho\} \cap \{\operatorname{Im}(z)>0\}} f_0(z) dz \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \pi \rho \max_{|z|=\rho} \left| \frac{|\ln \rho| + \pi}{1 + z^2} \right| \leq 4\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho |\ln \rho| = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\{|z|=R\} \cap \{\operatorname{Im}(z)>0\}} f_0(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi R \max_{|z|=R} \left| \frac{\ln R}{1 + z^2} \right| \leq 4\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln R}{R} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} f_0(z) dz &= \int_{-\infty}^0 f_0(z + i0) dz + \int_0^{+\infty} f_0(z + i0) dz = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\ln |x| + i\pi}{x^2 + 4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + i\pi}{x^2 + 4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx + \pi i \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Шаг 4. Сравнивая (22.12) и (22.13) найдем, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4} \left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right) - \frac{\pi i}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4} \left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right) - \frac{\pi i}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 4} dx. \quad (22.14)$$

Шаг 5. Вычислим интеграл в правой части равенства (22.14), см. пример 15.1,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 4} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{z^2 + 4} = \frac{\pi}{2}. \quad (22.15)$$

Подставляя (22.14) в (22.15), найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4} \left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right) - \frac{\pi i}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \ln 2}{4}. \quad \square$$

Замечание 22.3. В данном примере можно было избежать выполнения пятого шага. Для этого достаточно было взять вещественную часть от обеих частей равенства (22.14).

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi \ln 2}{4}.$

Домашнее задание:

Задача 22.4. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)}.$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

Задача 22.5. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x-8i)}.$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x-8i)} = \frac{\pi(3+i\sqrt{3})}{6}.$

Задача 22.6. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+16i)}.$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+16i)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\pi}{8}}.$

Задача 22.7. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[2]{x}(x+1)(x+4)}.$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)(x+4)} = \frac{\pi}{6}.$

Задача 22.8. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)(x+8)} dx.$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)(x+8)} dx = \frac{2\pi}{7\sqrt{3}}.$

Задача 22.9. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2+1} dx$.

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2+1} dx = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{3}} \pi \sqrt[6]{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}$.

Задача 22.10. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\pi \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$.

Задача 22.11. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$.

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Задача 22.12. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)(x-2i)} dx$.

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)(x-2i)} dx = \frac{\pi(1+i)}{16}$.

Задача 22.13. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$.

Задача 22.14. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)\sqrt{x}} dx$.

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)\sqrt{x}} dx = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$.

Задача 22.15. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{(x^2+4)} dx$.

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+4} dx = \pi \ln 3$.

23. Вычисление интегралов от многозначных функций по отрезку (степенные особенности).

Вычисление интегралов от многозначных функций по отрезку (и по полуоси тоже) по вычетам возможно только в том случае, если единственными точками ветвления подынтегральной функции являются концы контура интегрирования.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b (x-a)^\alpha (x-b)^\beta R(x) dx, \quad (23.1)$$

где $-\infty < a, b < +\infty$, $R(x)$ – рациональная функция, особые точки которой располагаются вне отрезка $[a, b]$. Мы будем предполагать, что параметры α и β подобраны так, что у подынтегральной функции нет точки ветвления на бесконечности и интеграл (23.1) сходится в обычном смысле. Вычисление интегралов вида (23.1) проводится в три шага.

- (1) Выделяем регулярную ветвь $f_0(z)$ *многозначной* функции $f(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta R(z)$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль контура интегрирования $[a, b]$. Это возможно благодаря тому, что на бесконечности нет точки ветвления. Удобно фиксировать ветвь так, чтобы на верхнем берегу разреза $[a, b]$ ветвь $f_0(z)$ совпадала с подынтегральной функцией $(x-a)^\alpha (x-b)^\beta R(x)$. Тогда на нижнем берегу ветвь $f_0(z)$ будет совпадать с функцией $e^{2\pi i(\alpha-\beta)} (x-a)^\alpha (x-b)^\beta R(x)$.
- (2) Контур интегрирования γ выбираем как на рисунке 52. При этом радиус R считаем настолько большим, что все конечные особенности функции $R(z)$ располагаются внутри окружности $|z| = R$. Вычисляем по вычетам интеграл

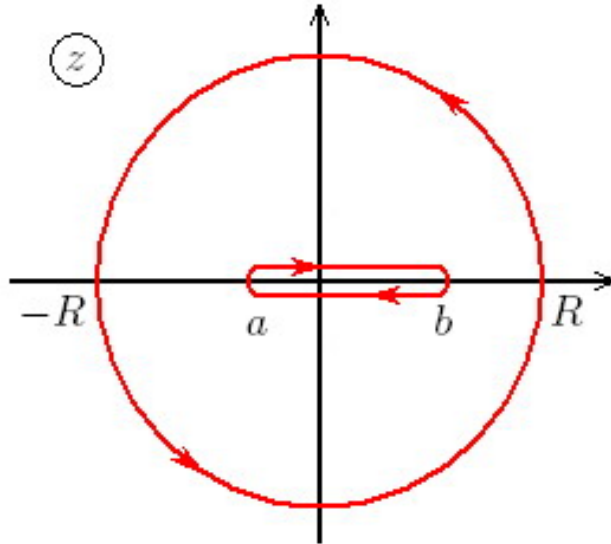


Рис. 52. Контур интегрирования γ выделен красным цветом.

$$\oint_{\gamma} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z), \quad (23.2)$$

где z_n – все полюса рациональной функции $R(z)$.

Перепишем теперь интеграл в левой части (23.2) в виде суммы интегралов по внутреннему контуру, обозначим его через γ_{ab} , и по окружности $|z| = R$. В результате получим

$$\oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z) - \oint_{|z|=R} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z) + 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z). \quad (23.3)$$

- (3) Вообще говоря, правильно было бы в окрестности точек a и b контур γ выполнить в виде маленьких окружностей $|z - a| = \rho$, как на рисунке 50, стр 82, в окрестности нуля, и затем переходить к пределу при $\rho \rightarrow 0$. Однако мы уже могли убедиться на примере вычисления интегралов вида (22.1), что в случае интегрируемой особенности в точке этого можно не делать.

Таким образом, к пределу переходить не нужно, а достаточно просто преобразовать интеграл по контуру γ_{ab}

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz &= \int_a^b f_0(z + i0) dz + \int_b^a f_0(z - i0) dz = \\ &= \int_a^b (x - a)^\alpha (x - b)^\beta R(x) dx + e^{2\pi i(\alpha - \beta)} \int_b^a (x - a)^\alpha (x - b)^\beta R(x) dx = \\ &= (1 - e^{2\pi i(\alpha - \beta)}) \int_a^b (x - a)^\alpha (x - b)^\beta R(x) dx. \end{aligned} \quad (23.4)$$

Сравнивая представления (23.3) и (23.4), найдем

$$\int_a^b (x - a)^\alpha (x - b)^\beta R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(\alpha - \beta)}} \left(\sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) \right).$$

- Если исходный интеграл (23.1) берется от вещественной функции, то приводим ответ к вещественному виду.

Пример 23.1. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx.$$

Решение. Вычисления проводим в три шага.

Шаг 1. Фиксируем ветвь многозначной функции $f(z) = \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z+2}$. Для этого вводим в рассмотрение две системы полярных координат с центрами в точках ветвления $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ и фиксируем с их помощью ветвь функции $f(z)$

$$f_0(z) = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{z+2} \exp \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{2} i \right), \quad z = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - 1 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

где $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$ и $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$.

Подобная фиксация пределов изменения углов φ_1 и φ_2 соответствует разрезу $[0, +\infty)$ на комплексной плоскости. При этом легко видеть, что на верхнем ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) и нижнем ($\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$) берегах разреза $[1, +\infty)$ значения ветви $f_0(z)$ совпадают и, следовательно, точка $z = \infty$ не является точкой ветвления.

Сразу вычислим значение ветви $f_0(z)$ на верхнем берегу разреза $[0, 1]$

$$f_0(x + i0) = [\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi] = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2}, \quad x \in [0, 1]$$

и на нижнем

$$f_0(x - i0) = [\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2 = \pi] = -\frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2}, \quad x \in [0, 1].$$

Шаг 2. Вычисляя интеграл по контуру γ , см. рисунок 52, от функции $f_0(z)$ получим, см. (23.3),

$$\oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-2} f_0(z) + 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z). \quad (23.5)$$

Найдем вычет в точке $z = -2$, которая является полюсом первого порядка,

$$\operatorname{res}_{z=-2} f_0(z) = \sqrt{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{2} i\right) \Big|_{z=-2} = \left[\begin{array}{l} r_1 = 2, \quad r_2 = 3 \\ \varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = \pi \end{array} \right] = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{6}. \quad (23.6)$$

Для того чтобы найти вычет на бесконечности, разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z+2} = \pm i \frac{\sqrt{1-\frac{1}{z}}}{1+\frac{2}{z}} = \pm i \left(1 - \frac{1}{2z} + O(z^{-2})\right) \left(1 - \frac{2}{z} + O(z^{-2})\right) = \\ &= \pm i \left(1 - \frac{5}{2z} + O(z^{-2})\right) \end{aligned} \quad (23.7)$$

Чтобы понять какой знак отвечает ветви $f_0(z)$ выясним как ведет себя $f(z)$ при $z \rightarrow +\infty$. В этом случае можно положить $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и $z \sim r_1 \sim r_2$

$$f_0(z) = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{z+2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{2} i\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}} + O(z^{-1}) = -i + O(z^{-1}). \quad (23.8)$$

Сравнивая асимптотики (23.8) и (23.7), найдем

$$f_0(z) = -i \left(1 - \frac{5}{2z} + O(z^{-2})\right) = -i + \frac{5i}{2z} + O(z^{-2}).$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) = -\frac{5i}{2}. \quad (23.9)$$

Подставляя (23.6) и (23.9) в (23.5), получим

$$\oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz = 2\pi i \left(i\sqrt{6} - \frac{5i}{2}\right) = \pi(5 - 2\sqrt{6}). \quad (23.10)$$

Шаг 3. Преобразуем интеграл по контуру γ_{ab}

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz &= \int_0^1 f_0(x + i0) dx + \int_1^0 f_0(x - i0) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx - \int_1^0 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Сравнивая (23.9) и (23.11), найдем значение исходного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx = \frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{2}. \quad \square$$

Ответ: $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx = \frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{2}.$

Домашнее задание:

Задача 23.2. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$

Ответ: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \pi.$

Задача 23.3. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-x} dx.$

Ответ: $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-x} dx = (2 - \sqrt{3})\pi.$

Задача 23.4. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{2-x}} dx.$

Ответ: $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{2-x}} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}.$

Задача 23.5. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} dx.$

Ответ: $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} dx = \frac{10\pi}{3\sqrt{3}}.$

Задача 23.6. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx.$

Ответ: $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}.$

Задача 23.7. Вычислить интеграл $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

Ответ: $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi.$

Задача 23.8. Вычислить интеграл⁷ $\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \frac{dx}{x+2}.$

⁷Рассмотрите интеграл от функции $\ln^2\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \frac{1}{z+2}$ по контуру, изображенному на рисунке 52.

Ответ: $\int_{-1}^1 \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2} \ln^2 3.$

Задача 23.9. *Вычислить интеграл* $\int_0^{2\pi} \ln(5 + 4 \cos \varphi) d\varphi.$

Ответ: $\int_0^{2\pi} \ln(5 + 4 \cos \varphi) d\varphi = 4\pi \ln 2.$

24. 3-ая контрольная работа (1 час).

Вариант контрольной работы №3.

- (1) Выделить однозначную регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)(8+z)}$, удовлетворяющую условию $f(0) = 2$. Найти значение функции в точке $z = 2$ после ее аналитического продолжения вдоль окружности $|z - 1| = 1$ (направление обхода против часовой стрелки).

Ответ: $\sqrt[3]{10} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- (2) Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt[3]{x}}.$$

Ответ: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

- (3) Существует ли конформное отображение круга $|z| < 1$ на кольцо $1 < |w| < 2$. Обоснуйте свой ответ.

25. Свойства конформных отображений. Теорема Римана.

В дальнейшем нам понадобится понятие *расширенной комплексной плоскости* $\bar{\mathbb{C}}$. Мы позволим себе дать нестрогое определение этого понятия.

Определение 25.1 (Формальное определение). Расширенной комплексной плоскостью $\bar{\mathbb{C}}$ называют комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой ∞ .

Для того чтобы рассматривать регулярные функции на расширенной комплексной плоскости, необходимо определить понятие регулярности в окрестности бесконечности.

Определение 25.2.

- Пусть $f(\infty) = w_0 \neq \infty$. Тогда говорят, что функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки $z = \infty$, если функция $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ регулярна в окрестности точки $\zeta = 0$.
- Пусть $f(z_0 \neq \infty) = \infty$. Тогда говорят, что функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки $z = z_0$, если функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ регулярна в окрестности точки $z = z_0$.
- Пусть $f(\infty) = \infty$. Тогда говорят, что функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки $z = \infty$, если функция $g(\zeta) = \frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$ регулярна в окрестности точки $\zeta = 0$.

Определение 25.3. Пусть D и D^* – области в расширенной комплексной плоскости. Взаимно однозначное отображение $w = f(z)$ области D на область D^* называется конформным, если $f(z)$ – регулярная функция в D .

Теорема 25.4. Пусть $f(z)$ – конформное отображение области D на D^* и $f^{-1}(z)$ – обратное отображение к $f(z)$. Тогда

- (1) $f^{-1}(z)$ – конформное отображение области D^* на D .
- (2) Пусть $z \in D$, $z \neq \infty$ и $f(z) \neq \infty$, тогда $f'(z) \neq 0$.
- (3) Пусть $z \in D$ и $z = \infty$ или $f(z) = \infty$, тогда $g'(z) \neq 0$, где $g(z)$ – функция из определения 25.2.
- (4) Отображение $f(z)$ сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения, если эта точка пересечения лежит внутри области D (т. е. не на границе).
- (5) Отображение $f(z)$ переводит бесконечно малые окружности в окружности с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

Остановимся более подробно на свойствах (4) и (5) теоремы 25.4. Допустим, ради упрощения обозначений, что конформное отображение $f(z)$ переводит точку $z = 0$ в $w = 0$, и исследуем это отображение в окрестности точки $z = 0$. Для этого разложим функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в малой окрестности точки $z = 0$

$$w = f(z) = f'(0)z + O(z^2). \quad (25.1)$$

Для качественного описания свойств отображения (25.1) при достаточно малых z можно пренебречь поправкой $O(z^2)$. В результате получим линейное отображение

$$w = f(z) = f'(0)z. \quad (25.2)$$

Переходя к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, перепишем выражение (25.2) в виде

$$w = f(z) = |f'(0)|re^{i(\varphi + \arg f'(0))}. \quad (25.3)$$

Легко видеть, что отображение (25.3) сводится к равномерному растяжению во всех направлениях с коэффициентом растяжения $|f'(0)|$ и повороту на угол $\arg f'(0)$. Очевидно, что при

повороте и равномерном растяжении углы между прямыми сохраняются и окружности переходят в окружности. Поскольку исходное отображение $f(z)$ лишь при малых z хорошо описывается линейным отображением (25.2), то и свойства (4) и (5) выполняются только в малой окрестности точки $z = 0$.

Пример 25.5. *Отображение $w = f(z) = z^2$ является конформным отображением области $D = \{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ на область $\{|w| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} w > 0\}$. При этом угол между прямыми $\operatorname{Im} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 0$ в точке их пересечения, равный $\frac{\pi}{2}$, переходит после отображения в угол, равный π . Не противоречит ли это пункту 4 теоремы 25.4.*

Решение. Не противоречит, потому что точка $z = 0$ пересечения прямых $\operatorname{Im} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 0$ принадлежит границе области D . $\square$

Ответ: Нет не противоречит.

Теорема 25.6 (Теорема Римана). *Пусть заданы две односвязные области D и D^* с границами, состоящими более чем из одной точки. Пусть заданы две точки $z_0 \in D$, $w_0 \in D^*$ и действительное число α_0 . Тогда существует единственное конформное отображение $w = f(z)$ области D на область D^* такое, что*

$$w_0 = f(z_0) \quad \text{и} \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0.$$

Пример 25.7. *Найти конформное отображение круга $|z| < 1$ на себя такое, что $f(0) = 0$ и $\arg f'(0) = \pi$.*

Решение. Легко видеть, что примером конформного отображения круга $|z| < 1$ на себя, оставляющего начало координат на месте, может служить поворот $w = f(z) = e^{i\alpha}z$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Отсюда $\arg f'(0) = \alpha = \pi$. Из теоремы Римана следует, что такое отображение единственно. $\square$

Ответ: $w = f(z) = -z$.

Домашнее задание:

Задача 25.8. *Найти конформное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w - 2| < 2$ такое, что $\arg f'(0) = \frac{\pi}{2}$.*

Ответ: Например, $w = f(z) = 2iz + 2$. Такое отображение не единственно.

26. Отображения: z^n , $\sqrt[n]{z}$, e^z , $\ln z$.

Пример 26.1. *Определить типы областей, которые функция $w = z^n$, где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, отображает как конформное отображение.*

Решение. Сразу заметим, что производная функции $w = z^n$ обращается в ноль в точке $z = 0$ и поэтому она не является взаимно однозначным отображением в окрестности точки $z = 0$, см. теорему 25.4 пункт 2. Поэтому область D , на которой функция $w = z^n$ действует как конформное отображение, не может содержать точки $z = 0$.

В окрестности точки $z = \infty$ функция $f(z) = z^n$ также не является взаимно однозначной, см. теорему 25.4 пункт 3. Здесь в качестве $g(\zeta)$ нужно взять функцию $\frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})} = \zeta^n$, которая не взаимно однозначна в окрестности точки $\zeta = 0$.

Далее, удобно перейти к полярным координатам по обеим переменным $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$

$$w = z^n \iff \rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi} \iff \begin{cases} \rho = r^n, \\ \theta = n\varphi. \end{cases} \quad (26.1)$$

Вообще говоря, в последнем равенстве формулы (26.1) следовало бы написать, что существует целое число p такое, что $\theta = n\varphi + 2\pi p$. Однако, различные целые p приводят к одному и тому же значению переменной w . Поэтому мы положили $p = 0$.

Из (26.1) следует, что отображение $w = z^n$ наиболее просто отображает области, границы которых состоят из кривых вида $\varphi = \varphi_0$ или $r = r_0$, где φ_0 и r_0 – некоторые постоянные. Примером такой области может служить сектор вида

$$\{\Phi_1 < \varphi < \Phi_2\} \cap \{R_1 < r < R_2\}. \quad (26.2)$$

Отображение $w = z^n$ переводит его в сектор

$$\{n\Phi_1 < \theta < n\Phi_2\} \cap \{R_1^n < \rho < R_2^n\}. \quad (26.3)$$

Обсудим теперь условия при которых отображение $w = z^n$ будет конформным. Отображение $w = z^n$ регулярно в $\overline{\mathbb{C}}$, поэтому для его конформности необходимо и достаточно, чтобы оно было взаимно однозначным. Пусть две различные точки $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ отображаются в одну и ту же точку w . Тогда из (26.1) получим

$$\begin{cases} r_1 = r_2, \\ \exists p \in \mathbb{Z}: \varphi_1 n = \varphi_2 n + 2\pi p, \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \exists p \in \mathbb{Z}: \varphi_1 = \varphi_2 + \frac{2\pi p}{n}. \end{cases} \quad (26.4)$$

Здесь мы учли, что два угла θ_1 и θ_2 , отличающиеся на угол $2\pi p$, соответствуют одному и тому же лучу на комплексной плоскости w . Итак, для того чтобы отображение $w = z^n$ некоторой области D на область D^* было конформным, необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала двух различных точек, удовлетворяющих условию (26.4).

В частности, для того чтобы функция $w = z^n$ была конформным отображением сектора (26.2) на сектор (26.3), достаточно наложить условие вида

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < \frac{2\pi}{n}.$$

На рисунке 53 приведен пример области D , которую функция $w = z^2$ конформно отображает на область D^* , изображенную на рисунке 54. $\square$

Ответ: Для того чтобы функция $w = z^n$ была конформным отображением области D на образ, необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала точек $z = 0$, $z = \infty$ и никаких двух различных точек, удовлетворяющих условию (26.4).

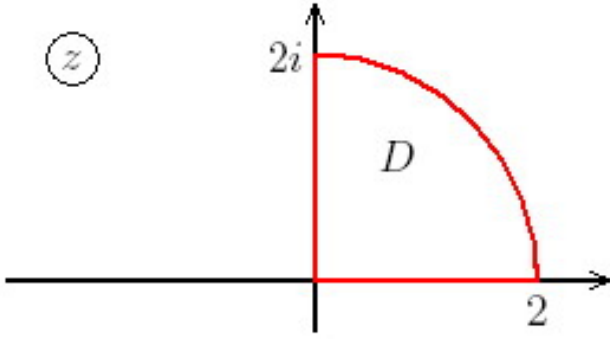


Рис. 53. Граница сектора $D = \{0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\} \cap \{0 < r < 2\}$ изображена красным цветом.

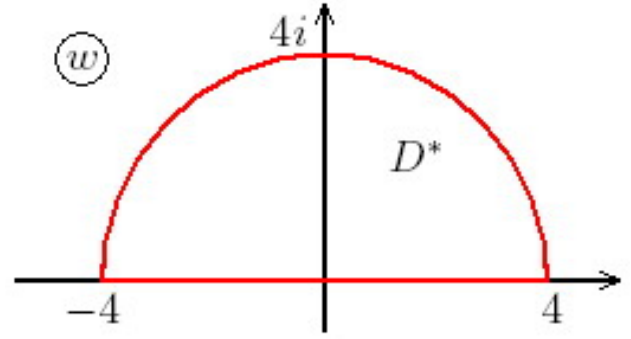


Рис. 54. Граница сектора $D^* = \{0 < \theta < \pi\} \cap \{0 < \rho < 4\}$ изображена красным цветом.

Пример 26.2. Определить типы областей, которые функция $w = \sqrt[n]{z}$, где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, отображает как конформное отображение.

Решение. В окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$ функция $w = \sqrt[n]{z}$ не взаимно однозначна, потому что $z = 0$ и $z = \infty$ ее точки ветвления.

Как и в примере 26.1, удобно перейти к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$

$$w = \sqrt[n]{z} \iff \rho e^{i\theta} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi p}{n}, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (26.5)$$

Из (26.5) следует, что отображение $w = \sqrt[n]{z}$ наиболее просто отображает сектора вида

$$\{\Phi_1 < \varphi < \Phi_2\} \cap \{R_1 < r < R_2\}. \quad (26.6)$$

При отображении $w = \sqrt[n]{z}$ сектор (26.6) отображается в один из секторов вида

$$\left\{ \frac{\Phi_1}{n} + \frac{2\pi p}{n} < \theta < \frac{\Phi_2}{n} + \frac{2\pi p}{n} \right\} \cap \{ \sqrt[n]{R_1} < \rho < \sqrt[n]{R_2} \}, \quad (26.7)$$

где $p = 0, 1, \dots, n-1$ (любое другое n приводит к одному из указанных секторов).

Тот факт, что образом сектора (26.6) может служить несколько различных секторов, является следствием многозначности функции $\sqrt[n]{z}$. Выбирая ту или иную ветвь функции $w = \sqrt[n]{z}$ мы будем получать образом один из секторов вида (26.7).

Обсудим теперь условия при которых отображение $w = \sqrt[n]{z}$ будет конформным. Допустим, что функция $\sqrt[n]{z}$ регулярна на области D . Тогда остается проверить при каких условиях это отображение взаимно однозначно. Пусть две различные точки $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ отображаются в одну и ту же точку w . Тогда из (26.5) получим

$$\begin{cases} r_1 = r_2, \\ \frac{\varphi_1}{n} = \frac{\varphi_2}{n} + \frac{2\pi p}{n}, \quad p \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi p, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (26.8)$$

Легко видеть, что условие (26.8) выполнено только если точки z_1 и z_2 совпадают. Таким образом, функция $\sqrt[n]{z}$ является конформным отображением области D , если она регулярна на этой области.

В частности, для того чтобы функция $w = \sqrt[n]{z}$ была конформным отображением сектора (26.6) на сектор (26.7), достаточно наложить условие

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < 2\pi.$$

На рисунке 55 приведен пример области D , которую функция $w = \sqrt{z}$ конформно отображает на область D^* , изображенную на рисунке 56. При этом была выбрана ветвь $f_0(z)$ функции $\sqrt{z}$, отвечающая условию $f_0(i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\square$

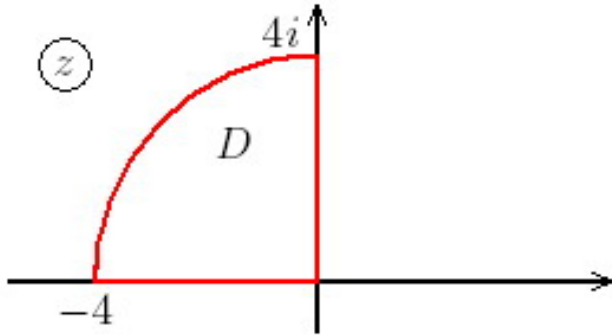


Рис. 55. Граница сектора $D = \{\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\} \cap \{0 < r < 4\}$ изображена красным цветом.

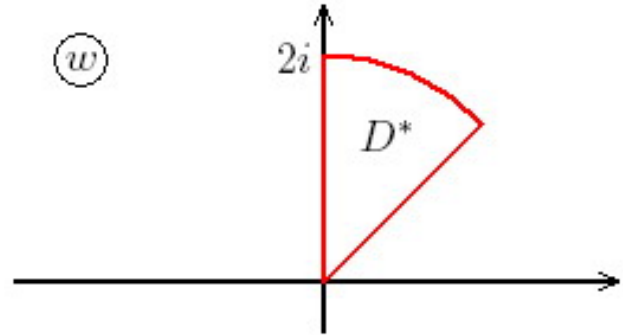


Рис. 56. Граница сектора $D^* = \{\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\} \cap \{0 < \rho < 2\}$ изображена красным цветом.

Ответ: Для того чтобы функция $w = \sqrt[n]{z}$ была конформным отображением области D на образ, необходимо и достаточно, чтобы функция $w = \sqrt[n]{z}$ была регулярна в области D .

Пример 26.3. Определить типы областей, которые функция $w = e^z$ отображает как конформное отображение.

Решение. Перейдем к полярным координатам по переменной $w = \rho e^{i\theta}$, и к декартовым по переменной $z = x + iy$

$$w = e^z \iff \rho e^{i\theta} = e^x e^{iy} \iff \begin{cases} \rho = e^x, \\ \theta = y. \end{cases} \quad (26.9)$$

Из (26.9) следует, что отображение $w = e^z$ наиболее просто отображает области, границы которых состоят из кривых вида $x = x_0$ или $y = y_0$, где x_0 и y_0 – некоторые постоянные. Примером такой области может служить прямоугольник

$$\{x_1 < x < x_2\} \cap \{y_1 < y < y_2\}. \quad (26.10)$$

При этом отображение $w = e^z$ переводит прямоугольник (26.10) в сектор

$$\{y_1 < \theta < y_2\} \cap \{e^{x_1} < \rho < e^{x_2}\}. \quad (26.11)$$

Обсудим теперь условия при которых отображение $w = e^z$ будет взаимно однозначным. В точке $z = \infty$ у функции e^z существенная особая точка и поэтому в окрестности этой точки функция e^z не взаимно однозначна. Пусть теперь две различные точки $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ отображаются в одну и ту же точку w . Тогда из (26.9) получим, что

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, для того чтобы отображение $w = e^z$ некоторой области D на область D^* было конформным, необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала двух различных точек, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (26.12)$$

В частности, для того чтобы $w = e^z$ было конформным отображением прямоугольника (26.10) на сектор (26.11) достаточно наложить условие на высоту прямоугольника

$$|y_2 - y_1| < 2\pi.$$

На рисунке 57 приведен пример области D , которую функция $w = e^z$ конформно отображает на область D^* , изображенную на рисунке 58. $\square$

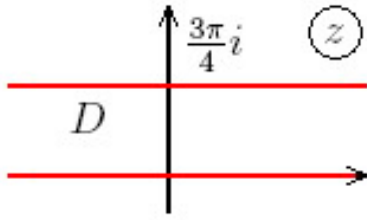


Рис. 57. Граница полосы $D = \{0 < \operatorname{Im} z < \frac{3\pi}{4}\}$ изображена красным цветом.

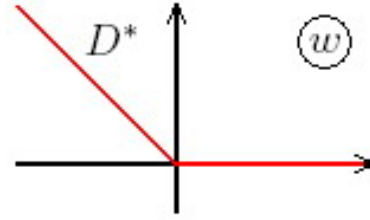


Рис. 58. Граница сектора $D^* = \{0 < \theta < \frac{3\pi}{4}\}$ изображена красным цветом.

Ответ: Для того чтобы функция $w = e^z$ была конформным отображением области D на образ, необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала точку $z = \infty$ и никаких двух различных точек, удовлетворяющих условию (26.12).

Пример 26.4. Определить типы областей, которые функция $w = \ln z$ отображает как конформное отображение.

Решение. Перейдем к полярным координатам по переменной $z = re^{i\varphi}$, и к декартовым по переменной $w = u + iv$

$$w = \ln z \iff u + iv = \ln r + i\varphi + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} u = \ln r, \\ v = \varphi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (26.13)$$

Из (26.13) следует, что отображение $w = \ln z$ наиболее просто отображает сектора вида

$$\{R_1 < r < R_2\} \cap \{\Phi_1 < \varphi < \Phi_2\}. \quad (26.14)$$

При отображении $w = \ln z$ сектор (26.14) отображается в один из прямоугольников вида

$$\{\ln R_1 < u < \ln R_2\} \cap \{\Phi_1 + 2\pi n < v < \Phi_2 + 2\pi n\}, \quad (26.15)$$

где $n \in \mathbb{Z}$. На какой именно прямоугольник будет отображен сектор (26.14) зависит от выбора ветви функции $\ln z$.

Как и в примере 26.2 легко показать, что функция $\ln z$ будет конформным отображением области D , если она регулярна на этой области. В частности, для того чтобы функция $\ln z$ была конформным отображением сектора (26.14) на прямоугольник вида (26.15), достаточно наложить условие

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < 2\pi.$$

На рисунке 59 приведен пример области D , которую функция $w = \ln z$ конформно отображает на полуполосу D^* , изображенную на рисунке 60. При этом была выбрана ветвь $f_0(z)$ функции $\ln z$, отвечающая условию. $f_0(1) = 0$ $\square$

Ответ: Для того чтобы функция $w = \ln z$ была конформным отображением области D на образ, необходимо и достаточно, чтобы функция $w = \ln z$ была регулярна в области D .

Домашнее задание:

Задача 26.5. Найти конформное отображение полосы $0 < \operatorname{Re} z < 4\pi$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$.

Ответ: Например, $w = \exp\left(\frac{z}{4i}\right)$.

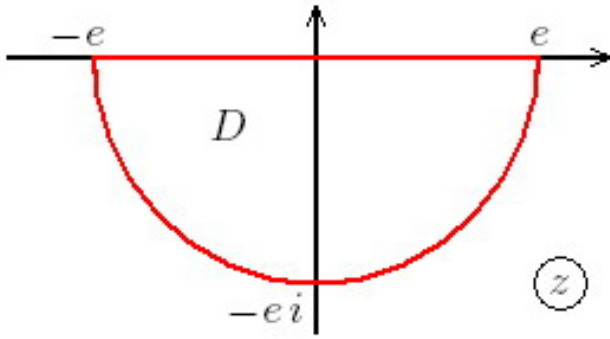


Рис. 59. Граница сектора $D = \{-\pi < \varphi < 0\} \cap \{0 < r < e\}$ изображена красным цветом.

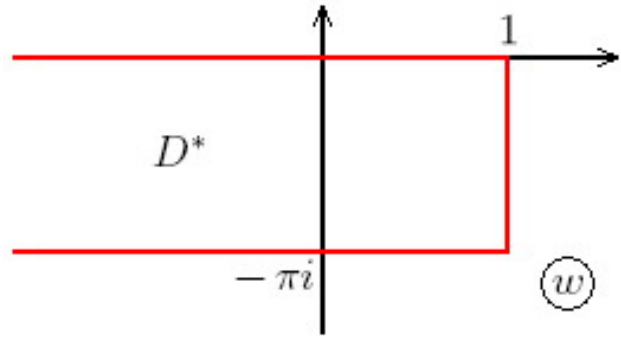


Рис. 60. Граница полуполосы $D^* = \{-\infty < u < 1\} \cap \{-\pi < v < 0\}$ изображена красным цветом.

Задача 26.6. Найти конформное отображение сектора $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

Ответ: Например, $w = iz^6$.

Задача 26.7. Найти конформное отображение полуполосы $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на круг $|w| < 1$ с разрезом вдоль отрезка $[0, 1]$.

Ответ: Например, $w = e^{2\pi iz}$.

Задача 26.8. Найти конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом вдоль отрезка $[0, i]$ на сектор $\pi < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: Например, $w = -\sqrt[4]{z^2 + 1}$. Здесь ветвь функции $g(\zeta) = \sqrt[4]{\zeta}$ фиксирована следующим образом: $g(\zeta) = \sqrt[4]{r} e^{i\frac{\varphi}{4}}$, где $\zeta = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Задача 26.9. Найти конформное отображение полосы $0 < \operatorname{Im} z < 2$ с разрезом вдоль луча $(-\infty + i, i]$ на полосу $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$.

Ответ: Например, $w = \ln(e^{\pi z} + 1)$. Здесь ветвь функции $g(\zeta) = \ln \zeta$ фиксирована следующим образом: $g(\zeta) = \ln r + i\varphi$, где $\zeta = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

27. Дробно-линейные отображения. Отображение круга на полуплоскость.

Определение 27.1. Дробно-линейным отображением называют отображение вида

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где a, b, c и d – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $ad - bc \neq 0$.

Замечание 27.2. При $ad - bc = 0$ дробь $\frac{az+b}{cz+d}$ не зависит от z .

Теорема 27.3.

- Любое дробно-линейное отображение является конформным отображением расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
- Любое конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя является дробно-линейным отображением.
- Для любых трех попарно различных точек a_1, b_1, c_1 и любых трех попарно различных точек a_2, b_2, c_2 существует единственное дробно-линейное отображение такое, что $w(a_1) = a_2, w(b_1) = b_2$ и $w(c_1) = c_2$.

Определение 27.4. Точки z_* и z^* называют симметричными относительно прямой C , если выполнены следующие условия.

- (1) Точки z_* и z^* лежат на прямой перпендикулярной к C .
- (2) Точки z_* и z^* расположены на одинаковом расстоянии от прямой C .

Определение 27.5. Точки z_* и z^* называют симметричными относительно окружности $|z - z_0| = R$, если выполнены следующие условия.

- (1) Точки z_* и z^* лежат на одном луче, начинающемся в точке z_0 .
 - (2) Справедливо равенство $|z_* - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$.
- Если $z_* = z_0$, то полагают $z^* = \infty$.

Теорема 27.6. Всякая окружность или прямая C_z переводится дробно-линейным отображением в окружность или прямую C_w . При этом любые две симметричные точки z_* и z^* относительно C_z отображаются в симметричные точки w_* и w^* относительно C_w .

Пример 27.7. Найти какое-нибудь конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя такое, что $\operatorname{Re} z = 0$ переходит в окружность $|w| = 2$.

Решение. Из теоремы 27.3 следует, что таким отображением может быть только дробно-линейное отображение

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (27.1)$$

Допустим, что (27.1) осуществляет необходимое отображение и воспользуемся результатами теоремы 27.6. Для этого выберем произвольным образом две точки, симметричные относительно прямой $\operatorname{Re} z = 0$, например, $z_* = 1$ и $z^* = -1$. Из теоремы 27.6 следует, что эти точки должны перейти в симметричные точки w_* и w^* относительно окружности $|w| = 2$. Поскольку нас не интересует общий вид отображения, то мы можем зафиксировать эти точки произвольным образом. Поскольку центр окружности и бесконечность две наиболее просто вычисляемые симметричные точки относительно окружности, то удобно положить $w_* = 0$ и $w^* = \infty$.

Подставляя условия $w(1) = 0$ и $w(-1) = \infty$ в (27.1), получим

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = 0, \\ \frac{b-a}{d-c} = \infty, \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = 0, \\ d-c = 0. \end{cases} \quad (27.2)$$

Заметим, что мы довольно легко смогли решить уравнения $w_* = 0$ и $w^* = \infty$ благодаря тому, что в их правых частях стояли числа 0 и ∞ . Это еще одна причина по которой было удобно выбрать бесконечность в качестве одной из симметричных точек.

Подведем промежуточный итог. Условия (27.2) гарантируют, что прямая $\operatorname{Re} z = 0$ перейдет в окружность с центром в точке $w = 0$. Осталось добиться того, чтобы радиус этой окружности был равен двум. Для этого достаточно, чтобы одна из точек прямой $\operatorname{Re} z = 0$, например $z = 0$, переводилась отображением (27.1) в некоторую точку на окружности $|w| = 2$. Отсюда получим

$$|b/d| = 2. \quad (27.3)$$

Снова, поскольку нас интересует хотя бы какое-нибудь отображение переводящее прямую $\operatorname{Re} z = 0$ в окружность $|w| = 2$, нам достаточно выбрать какое-нибудь решение уравнений (27.2) и (27.3). Положим, например,

$$a = 2, \quad b = -2, \quad c = 1, \quad d = 1. \quad \square$$

Ответ: Например, $w = \frac{2(z-1)}{z+1}$.

Пример 27.8. Найти все конформные отображения круга $|z - 1| < 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ такие, что точка $z = 1$ переходит в точку $w = 2i$.

Решение. Из теоремы Римана 25.6 следует, что требуемое семейство отображений будет зависеть от одного произвольного вещественного параметра. Этот параметр будет соответствовать произволу в выборе аргумента производной отображения в точке $z = 0$. Таким образом, если мы построим некоторое однопараметрическое семейство требуемых отображений, то на основании теоремы Римана можно утверждать, что на самом деле мы построили все отображения нужного вида.

Будем искать требуемое отображение в виде дробно-линейного

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (27.4)$$

Точка $z^* = \infty$ является симметричной относительно окружности $|z - 1| = 1$ к точке $z_* = 1$, а точка $w^* = -2i$ — симметричной относительно прямой $\operatorname{Im} w = 0$ к точке $w_* = 2i$. Учитывая, что любое дробно-линейное отображение является конформным отображением расширенной комплексной плоскости на себя и переводит симметричные точки в симметричные, получим, что отображение (27.4) переводит окружность $|z - 1| = 1$ в прямую $\operatorname{Im} w = 0$, точку $z_* = 1$ в точку $w_* = 2i$, а также точку $z^* = \infty$ в точку $w^* = -2i$. Отсюда

$$\begin{cases} w(1) = 2i, \\ w(\infty) = -2i, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = 2i, \\ \frac{a}{c} = -2i, \end{cases} \quad (27.5)$$

Условия (27.5) гарантируют лишь то, что окружность $|z - 1| = 1$ перейдет в окружность или прямую симметричную относительно точек $2i$ и $-2i$. Поэтому к (27.5) необходимо добавить условие, которое гарантирует, что образом окружности $|z - 1| = 1$ будет именно прямая $\operatorname{Im} w = 0$. В качестве такого условия можно взять следующее: точка $z = 0$ отображается в некоторую

точку $w = k$ вещественной оси, где k – произвольный вещественный параметр. Отсюда и из (27.5) получим, что

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = 2i, \\ \frac{a}{c} = -2i, \\ \frac{b}{d} = k, \end{cases} \iff \begin{cases} kd - 2ic = 2ic + 2id, \\ a = -2ic, \\ b = kd, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{c}{d} = \frac{k-2i}{4i}, \\ \frac{a}{d} = -\frac{k-2i}{2}, \\ \frac{b}{d} = k. \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения в (27.4), найдем

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}}{\frac{c}{d}z + 1} = \frac{-\frac{k-2i}{2}z + k}{\frac{k-2i}{4i}z + 1} = -2i \frac{(k-2i)z - 2k}{(k-2i)z + 4i}. \quad \square$$

Ответ: $w = -2i \frac{(k-2i)z - 2k}{(k-2i)z + 4i}$, где $k \in \mathbb{R}$.

Пример 27.9. Найти какое-нибудь конформное отображение круга $|z| < 1$ на область $|w| > 2$, которое переводит точку $z = 0$ в точку $w = 4$.

Решение. Будем искать требуемое отображение в виде дробно-линейного

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (27.6)$$

Точки $z_* = 0$ и $z^* = \infty$ являются симметричными относительно окружности $|z| = 1$, а точки $w_* = 4$ и $w^* = 1$ – симметричными относительно окружности $|w| = 2$. Учитывая свойства дробно-линейных отображений, достаточно найти отображение вида (27.6), которое переводит точку $z_* = 0$ в $w_* = 4$, точку $z^* = \infty$ в $w^* = 1$ и, дополнительно, какую-нибудь точку окружности $|z| = 1$ в точку окружности $|w| = 2$, например, точку $z = 1$ в $w = 2$. Отсюда

$$\begin{cases} w(0) = 4, \\ w(\infty) = 1, \\ w(1) = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{b}{d} = 4, \\ \frac{a}{c} = 1, \\ \frac{a+b}{c+d} = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} b = 4d, \\ a = c, \\ c + 4d = 2c + 2d, \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2c, \\ a = c, \\ 2d = c. \end{cases}$$

Отсюда находим требуемое отображение

$$w = \frac{2z + 4}{2z + 1}. \quad \square$$

Ответ: Например, $w = \frac{2z+4}{2z+1}$.

Домашнее задание:

Задача 27.10. Найти какое-нибудь конформное отображение, которое отображает область $|z| > 2$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 1$.

Ответ: Например, $w = \frac{2iz}{z-2}$.

Задача 27.11. Найти все конформные отображения полуплоскости $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 2$ такие, что точка $z = 1$ переходит в точку $w = 0$.

Ответ: $w = 2e^{i\varphi} \frac{z-1}{z+i}$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Задача 27.12. Найти все конформные отображения области $|z+1| > 2$ на область $|w| > 2$ такие, что точка $z = 3$ переходит в точку $w = \infty$.

Ответ: $w = 4e^{i\varphi} \frac{z}{z-3}$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Задача 27.13. Найти общий вид конформного отображения верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на себя.

Ответ: $w = (c - i) \frac{z - b - ia}{z - b + ia} + i$, где $a > 0$ и $b, c \in \mathbb{R}$.

Задача 27.14. Найти все конформные отображения $w = f(z)$ расширенной комплексной плоскости на себя, удовлетворяющие условию $f^{-1}(z) = \frac{1}{f(z)}$, где $f^{-1}(z)$ – обратное отображение к $f(z)$.

Ответ: $f(z) = \frac{z+i}{1+iz}$, $f(z) = \frac{z-i}{1-iz}$.

28. Отображение луночек.

Основные идеи, которые используются для отображения луночек, мы продемонстрируем на следующих примерах.

Пример 28.1. Найти конформное отображение луночки $D_0 = \{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение. Решение этой задачи будем искать в виде композиции нескольких отображений.

Шаг 1. Отобразим расширенную комплексную плоскость с помощью дробно-линейного отображения так, чтобы луночка D_0 перешла в сектор. Для этого необходимо отобразить на бесконечность одну из двух точек пересечения окружности $|z| = 1$ и прямой $\operatorname{Im} z = 0$. Удобно также вторую точку пересечения перевести в начало координат. Этим требованиям удовлетворяет, например, отображение

$$z_1 = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (28.1)$$

Отображение (28.1) переводит точки

$$a_0 = 1, \quad b_0 = -1, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = \infty \quad \text{и} \quad e_0 = i$$

в точки

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \infty, \quad c_1 = -1, \quad d_1 = 1 \quad \text{и} \quad e_1 = i,$$

соответственно. Точки a_0 , b_0 и c_0 лежат на прямой $\operatorname{Im} z = 0$, поэтому эта прямая при отображении (28.1) перейдет в прямую, проходящую через точки a_1 , b_1 и c_1 , а именно, в прямую $\operatorname{Im} z_1 = 0$. В частности, так как точка $c_0 = 0$ лежит внутри отрезка $(-1, 1)$, то этот отрезок перейдет в луч, содержащий точку $c_1 = -1$, а именно в луч $(-\infty, 0)$ вещественной оси, см. рисунки 61 и 62.

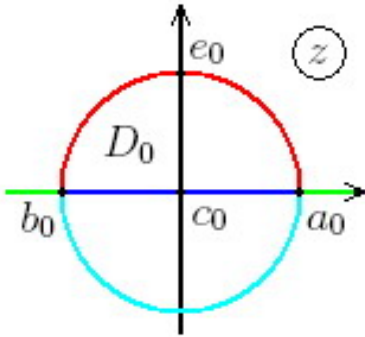


Рис. 61. Границы луночки D_0 выделены красным и синим цветами.

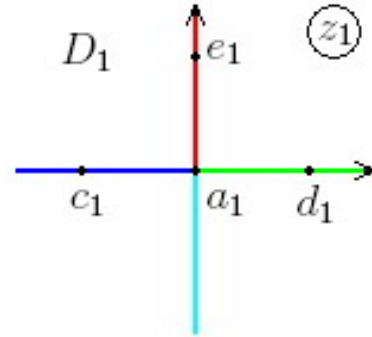


Рис. 62. Границы сектора D_1 выделены красным и синим цветами.

Точки c_0 и d_0 симметричны относительно окружности $|z| = 1$, поэтому эта окружность при отображении (28.1) перейдет в прямую, симметричную относительно точек $c_1 = -1$ и $d_1 = 1$, а именно в прямую $\operatorname{Re} z = 0$. При этом, так как точка $e_0 = i$ переходит в точку $e_1 = i$, то верхняя дуга окружности $|z| = 1$ перейдет в луч $(0, +i\infty)$ мнимой оси⁸, см. рисунки 61 и 62.

Таким образом, отображение (28.1) переводит луночку D_0 в сектор

$$D_1 = \left\{ \frac{\pi}{2} < \arg z_1 < \pi \right\}.$$

⁸Этот факт можно также вывести из свойства конформных отображений сохранять ориентацию.

Шаг 2. Сектор D_1 удобно повернуть так чтобы одна из его границ совпала с полуосью $(0, +\infty)$ вещественной оси. Этого можно добиться с помощью поворота

$$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_1 = -iz_1. \quad (28.2)$$

При этом сектор D_1 перейдет в сектор

$$D_2 = \left\{ 0 < \arg z_2 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Шаг 3. Наконец, сектор D_2 с помощью степенного отображения

$$w = z_2^2 \quad (28.3)$$

конформно отображается на верхнюю полуплоскость.

Шаг 4. Композиция отображений (28.1), (28.2) и (28.3) отображает луночку D_0 на верхнюю полуплоскость. $\square$

Ответ: Композиция отображений $w = z_2^2$, $z_2 = -iz_1$ и $z_1 = \frac{z-1}{z+1}$ конформно отображает луночку $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Пример 28.2. Найти конформное отображение луночки $D_0 = \{|z| > 1\} \cap \{|z-1| > 1\}$ на круг $|w| < 1$.

Решение. Решение этой задачи будем искать в виде композиции нескольких отображений.

Шаг 1. Точки пересечения окружностей $|z| = 1$ и $|z-1| = 1$ имеют вид

$$a_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{и} \quad b_0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Дробно-линейное отображение, которое переводит точку $a_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ в точку $a_1 = 0$ и точку $b_0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ в точку $b_1 = \infty$, можно взять в виде

$$z_1 = \frac{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}{z - e^{-i\frac{\pi}{3}}}. \quad (28.4)$$

При этом отображение (28.4) переводит точки

$$a_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad b_0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad c_0 = 0 \quad \text{и} \quad d_0 = \infty$$

в точки

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \infty, \quad c_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{и} \quad d_1 = 1,$$

соответственно.

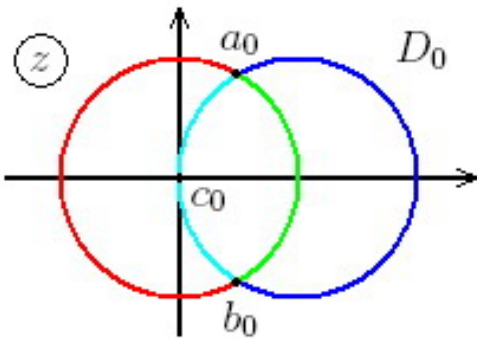


Рис. 63. Границы луночки D_0 выделены красным и синим цветами.

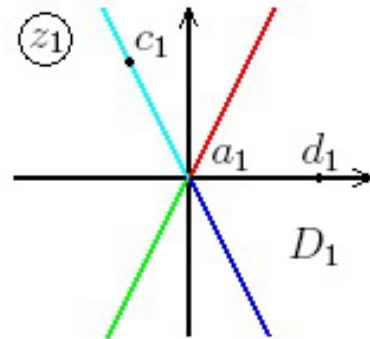


Рис. 64. Границы сектора D_1 выделены красным и синим цветами.

Точки a_0 , b_0 и c_0 лежат на окружности $|z - 1| = 1$, поэтому эта окружность при отображении (28.4) перейдет в прямую, проходящую через точки a_1 , b_1 и c_1 , а именно, в прямую $\arg z_1 = \frac{2\pi}{3}$, см. рисунки 63 и 64.

Точки c_0 и d_0 симметричны относительно окружности $|z| = 1$, поэтому эта окружность при отображении (28.4) перейдет в прямую, симметричную относительно точек $c_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ и $d_1 = 1$, а именно в прямую $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$, см. рисунки 63 и 64.

Шаг 2. Сектор D_1 удобно повернуть так чтобы одна из его границ совпала с полуосью $(0, +\infty)$ вещественной оси. Этого можно добиться с помощью поворота

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} z_1. \quad (28.5)$$

При этом сектор D_1 перейдет в сектор

$$D_2 = \left\{ 0 < \arg z_2 < \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

Шаг 3. Сектор D_2 с помощью степенного отображения

$$z_3 = (z_2)^{3/2} \quad (28.6)$$

конформно отображается на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z_3 > 0$. При этом ветвь многозначной функции $w = (z_2)^{3/2}$ фиксируется условием $(1)^{3/2} = 1$.

Шаг 4. Наконец верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z_3 > 0$ с помощью дробно-линейного отображения

$$w = \frac{z_3 - i}{z_3 + i} \quad (28.7)$$

конформно отображается на единичный круг $|w| < 1$.

Шаг 5. Композиция отображений (28.4), (28.5), (28.6) и (28.7) отображает луночку D_0 на круг $|w| < 1$. $\square$

Ответ: Композиция отображений $w = \frac{z_3 - i}{z_3 + i}$, $z_3 = (z_2)^{3/2}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} z_1$ и $z_1 = \frac{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}{z - e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ конформно отображает луночку $\{|z| > 1\} \cap \{|z - 1| > 1\}$ на круг $|w| < 1$.

Домашнее задание:

Задача 28.3. Найти конформное отображение внешности луночки $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$.

Ответ: Композиция отображений $w = (z_1)^{2/3}$ и $z_1 = \frac{z-1}{z+1}$ конформно отображает внешность луночки $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$. Здесь ветвь многозначной функции $g(z_1) = (z_1)^{2/3}$ фиксирована условием $g(z_1) = r^{2/3} e^{\frac{2i\varphi}{3}}$, где $z_1 = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\frac{3\pi}{2}, 0)$.

Задача 28.4. Найти конформное отображение луночки $\{|z| < 2\} \cap \{|z - 1| > 1\}$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

Ответ: Композиция отображений $w = -iz_4$, $z_4 = e^{z_3}$, $z_3 = 4\pi iz_2$, $z_2 = z_1 + \frac{1}{2}$ и $z_1 = \frac{1}{z-2}$ конформно отображает луночку $\{|z| < 2\} \cap \{|z - 1| > 1\}$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

Задача 28.5. Найти конформное отображение луночки $\{|z| < 2\} \cap \{|z - 2| > 1\}$ на область $|w| > 1$.

Ответ:

Задача 28.6. Найти общий вид конформного отображения луночки $\{|z| < 2\} \cap \{\operatorname{Re}(z) < 1\}$ на круг $|w| < 2$.

Ответ:

29. Г-функция, интегралы с Г-функцией.

Определение 29.1. Гамма-функцией называется функция определенная равенством

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

при $\operatorname{Re} z > 0$.

Теорема 29.2. Г-функция обладает следующими свойствами.

- (1) Г-функция регулярна во всей комплексной плоскости за исключением целых неположительных точек ($z \neq 0, -1, \dots$).
- (2) Г-функция удовлетворяет соотношению $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ при $z \neq 0, -1, \dots$
- (3) При $n = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $\Gamma(n+1) = n!$.
- (4) В целых неположительных точках у Г-функции полюса первого порядка. При этом

$$\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

- (5) Г-функция нигде не обращается в ноль.

Пример 29.3. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-2|=2.5} \frac{\Gamma(z)}{z-3} dz.$$

Решение. Используя теорему о вычетах, найдем

$$\begin{aligned} \int_{|z-2|=2.5} \frac{\Gamma(z)}{z-3} dz &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{\Gamma(z)}{z-3} + 2\pi i \operatorname{res}_{z=3} \frac{\Gamma(z)}{z-3} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{\Gamma(z+1)}{z(z-3)} + 2\pi i \Gamma(3) = \\ &= 2\pi i \frac{\Gamma(1)}{-3} + 2\pi i \Gamma(3) = \frac{10\pi i}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $\int_{|z-2|=2.5} \frac{\Gamma(z)}{z-3} dz = \frac{10\pi i}{3}.$

Пример 29.4. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-0.5i|=0.6} \Gamma(z^2) e^{\pi z} dz.$$

Решение. Функция $\Gamma(z^2)e^{\pi z}$ имеет две особые точки $z = 0$ и $z = i$ внутри контура интегрирования. Для того, чтобы найти ее вычет в точке $z = 0$, найдем главную часть ряда Лорана

$$\Gamma(z^2)e^{\pi z} = \left(\frac{1}{z^2} + O(1) \right) (1 + \pi z + O(z^2)) = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi}{z} + O(1).$$

Отсюда находим, что

$$\operatorname{res}_{z=0} \Gamma(z^2)e^{\pi z} = \pi.$$

Для того, чтобы найти вычет функции $\Gamma(z^2)e^{\pi z}$ в точке $z = i$, удобно воспользоваться пунктом 2 теоремы 29.2

$$\operatorname{res}_{z=i} \Gamma(z^2)e^{\pi z} = \operatorname{res}_{z=i} \frac{\Gamma(z^2+1)}{z^2} e^{\pi z} = \operatorname{res}_{z=i} \frac{\Gamma(z^2+2)}{z^2(z^2+1)} e^{\pi z} = \frac{\Gamma(z^2+2)}{z^2(z^2+1)'} e^{\pi z} \Big|_{z=i} = \frac{\Gamma(z^2+2)}{2z^3} e^{\pi z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

Воспользуемся теперь теоремой о вычетах

$$\int_{|z-0.5i|=0.6} \Gamma(z^2) e^{\pi z} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \Gamma(z^2) e^{\pi z} + 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \Gamma(z^2) e^{\pi z} = \pi(2\pi i + 1). \quad \square$$

Ответ: $\int_{|z-0.5i|=0.6} \Gamma(z^2) e^{\pi z} dz = \pi(2\pi i + 1).$

Пример 29.5. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \Gamma(4z)} dz.$$

Решение. Функция $\frac{1}{z^2 \Gamma(4z)}$ имеет одну особую точку $z = 0$ внутри контура интегрирования. Для того, чтобы найти ее вычет в точке $z = 0$, найдем главную часть ряда Лорана в окрестности этой точки

$$\frac{1}{z^2 \Gamma(4z)} = \frac{1}{z^2 \left(\frac{1}{4z} + O(1) \right)} = \frac{4}{z + O(z^2)} = \frac{4}{z} + O(1).$$

Отсюда

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \Gamma(4z)} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \Gamma(4z)} = 8\pi i. \quad \square$$

Ответ: $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \Gamma(z)} dz = 8\pi i.$

Домашнее задание:

Задача 29.6. Вычислить интеграл $\int_{|z-1|=1.6} \frac{\Gamma(2z+1)}{z-1} dz.$

Ответ: $\int_{|z-1|=1.6} \frac{\Gamma(2z+1)}{z-1} dz = \frac{10\pi i}{3}.$

Задача 29.7. Вычислить интеграл $\int_{|z-1|=1.1} \Gamma(z^3) dz.$

Ответ: $\int_{|z-1|=1.1} \Gamma(z^3) dz = \frac{2\pi i}{3}.$

Задача 29.8. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} \Gamma(e^z - 1) dz.$

Ответ: $\int_{|z|=1} \Gamma(e^z - 1) dz = 2\pi i.$

Задача 29.9. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1.1} \frac{\Gamma(z^2)}{z-1} dz.$

Ответ: $\int_{|z|=1.1} \frac{\Gamma(z^2)}{z-1} dz = \pi i.$

Задача 29.10. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1.1} \frac{\Gamma(z^2)}{\Gamma(iz)} dz.$

Ответ: $\int_{|z|=1.1} \frac{\Gamma(z^2)}{\Gamma(iz)} dz = -2\pi.$

30. Преобразование Лапласа, основные свойства, таблица основных изображений.

Определение 30.1. Функцией-оригиналом мы будем называть любую комплексно-значную функцию $f(t)$ вещественного аргумента t , удовлетворяющую следующим свойствам.

- (1) $f(t)$ – кусочно непрерывная функция.
- (2) $f(t) = 0$ при всех $t < 0$.
- (3) Функция $f(t)$ возрастает не быстрее экспоненциальной функции. Более точно, существуют такие постоянные $M > 0$ и $s \geq 0$, что $|f(t)| \leq Me^{st}$ при $t \geq 0$. Число s называют показателем роста функции $f(t)$.

Определение 30.2. Преобразованием Лапласа (или изображением) функции оригинала $f(t)$ называют функцию комплексного переменного $F(p)$, определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ мы будем записывать символом

$$f(t) \doteq F(p).$$

Теорема 30.3. Для любого оригинала $f(t)$ его изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > s$, где s – показатель роста функции $f(t)$, и является в этой полуплоскости регулярной функцией.

Определение 30.4. θ -функцией Хевисайда называют следующую функцию

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Пример 30.5. Найти изображение функции $f(t) = e^{at}\theta(t)$, где $a \in \mathbb{C}$.

Решение. Используя определение 30.2, найдем

$$f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{at}e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-p)t} dt = \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}. \quad \square$$

Ответ: $e^{at}\theta(t) \doteq \frac{1}{p-a}$.

Пример 30.6. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2], \\ 0, & t \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Решение. Используя определение 30.2, найдем

$$f(t) \doteq \int_0^2 e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^2 = \frac{1 - e^{-2p}}{p}. \quad \square$$

Ответ: $f(t) \doteq \frac{1 - e^{-2p}}{p}$.

Теорема 30.7 (Дифференцирование оригинала). Пусть функция $f(t)$ непрерывна вместе со своими производными $f^{(k)}(t)$, $k = 1, \dots, n$ при $t \geq 0$ и $f^{(n)}(t)$ является оригиналом. Тогда

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq pF(p) - f(0), \\ f^{(n)}(t) &\doteq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \end{aligned}$$

где под $f^{(k)}(0)$ понимается правое предельное значение $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$.

Теорема 30.8 (Дифференцирование изображения). Пусть функция $f(t)$ является оригиналом. Тогда

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p).$$

Теорема 30.9 (Интегрирование оригинала). Пусть функция $f(t)$ является оригиналом. Тогда

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Определение 30.10. Сверткой двух оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Теорема 30.11 (Теорема умножения изображений). Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ являются оригиналами. Тогда

$$(f * g)(t) \doteq F(p)G(p).$$

Пример 30.12. Используя теорему о дифференцировании изображения, найти изображение функции $f(t) = te^t \theta(t)$.

Решение. Воспользуемся результатом примера 30.5

$$te^t \theta(t) \doteq - \left(\frac{1}{p-1} \right)' = \frac{1}{(p-1)^2}. \quad \square$$

Ответ: $te^t \theta(t) \doteq \frac{1}{(p-1)^2}$.

Пример 30.13 (Интеграл Дюамеля). Пусть $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$. Доказать соотношение

$$pF(p)G(p) \doteq g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t - \tau) d\tau.$$

Решение. Используя теоремы о дифференцировании и умножении изображений, получим

$$pF(p)G(p) = F(p)[pG(p) - g(0)] + g(0)F(p) \doteq (f * g')(t) + g(0)f(t). \quad \square$$

Теорема 30.14 (Таблица изображений). *Справедливы следующие соотношения*

$$\begin{aligned} t^n e^{at} \theta(t) &\doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad a \in \mathbb{C}, \\ \sin(at) \theta(t) &\doteq \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{C}, \\ \cos(at) \theta(t) &\doteq \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{C}, \\ t^a \theta(t) &\doteq \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}, \quad a > -1, \\ \begin{cases} 1, & t \in [0, a] \\ 0, & t \notin [0, a] \end{cases} &\doteq \frac{1 - e^{-ap}}{p}, \quad a > 0. \end{aligned}$$

Домашнее задание:

Задача 30.15. Докажите теорему 30.7 при $n = 1$.

Задача 30.16. Докажите теорему 30.8 при $n = 1$.

Задача 30.17. Докажите теорему 30.9.

Задача 30.18. Докажите теорему 30.14.

31. Формула обращения Меллина.

Теорема 31.1 (Формула обращения Меллина). Пусть $F(p)$ – изображение оригинала $f(t)$. Пусть s_0 такая постоянная, что функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда в точках непрерывности функции $f(t)$ имеет место формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (31.1)$$

где s – произвольное вещественное число такое, что $s > s_0$.

Вычисление интегралов вида (31.1) проводится тем же способом, что интегралов по вещественной оси, содержащих тригонометрические функции, стр. 54. Единственное отличие заключается в том, что контур интегрирования нужно будет замыкать либо в левую, либо в правую полуплоскость, в зависимости от того в какую сторону убывает экспоненциальный множитель. Сформулируем вариант леммы Жордана, приспособленный для данного случая.

Теорема 31.2.

- Пусть функция $g(z)$ непрерывна в правой полуплоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R^+} |g(z)| = 0,$$

где $C_R^+ = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$. Тогда для любого $\alpha < 0$ существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} g(z) e^{\alpha z} dz = 0.$$

- Пусть функция $g(z)$ непрерывна в левой полуплоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R^-} |g(z)| = 0,$$

где $C_R^- = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} g(z) e^{\alpha z} dz = 0.$$

Пример 31.3. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Решение. Функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > 2$. Воспользуемся формулой Меллина, полагая $s = 3 > 2$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{pt}}{p-2} dp. \quad (31.2)$$

Рассмотрим случай $t < 0$. Функция e^{pt} экспоненциально убывает в правой полуплоскости, и согласно теореме (31.2) контур интегрирования нужно замыкать там же. С учетом того, что функция $\frac{e^{pt}}{p-2}$ не имеет особых точек в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 3$, получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{pt}}{p-2} dp = 0, \quad t < 0.$$

Рассмотрим случай $t > 0$. Теперь функция e^{pt} экспоненциально убывает в левой полуплоскости, и контур интегрирования необходимо замкнуть там же. Отсюда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{pt}}{p-2} dp = \operatorname{res}_{p=2} \frac{e^{pt}}{p-2} = e^{2t}, \quad t > 0.$$

При $t = 0$ интеграл (31.2), вообще говоря, расходится, и это соответствует разрыву функции $f(t)$ в точке $t = 0$. Какое именно мы припишем значение функции $f(t)$ в ее точке разрыва не важно. $\square$

Ответ: $f(t) = e^{2t}\theta(t)$.

Пример 31.4. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

Решение. Функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > 0$. Воспользуемся формулой Меллина, полагая $s = 1 > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2} dp.$$

При $t < 2$ функция $e^{p(t-2)}$ экспоненциально убывает в правой полуплоскости, и контур интегрирования нужно замыкать там же. С учетом того, что функция $\frac{e^{p(t-2)}}{p^2}$ не имеет особых точек в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 1$, получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2} dp = 0, \quad t < 2.$$

При $t \geq 2$ контур интегрирования необходимо замыкать в левой полуплоскости. Отсюда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2} dp = \operatorname{res}_{p=0} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2} = t - 2, \quad t \geq 2. \quad (31.3)$$

Заметим, что при $t = 2$ интеграл (31.3) сходится, и, соответственно, оригинал $f(t)$ непрерывен при $t = 2$, сравни с примером 31.3. $\square$

Ответ: $f(t) = (t - 2)\theta(t - 2)$.

Домашнее задание:

Задача 31.5. Восстановить оригинал по изображению $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$.

Ответ: $f(t) = (e^{-t} - 1 + t)\theta(t)$.

Задача 31.6. Восстановить оригинал по изображению $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-4}$.

Ответ: $f(t) = \frac{\text{sh}(2(t-1))}{2}\theta(t-1)$.

Задача 31.7. Восстановить оригинал по изображению $F(p) = 2 \frac{e^{-p}-e^{-2p}}{p(p-2)}$.

Ответ:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ e^{2(t-1)} - 1, & 1 < t < 2, \\ e^{2(t-1)} - e^{2(t-2)}, & t \geq 2. \end{cases}$$

Задача 31.8. Докажите теорему 30.14, вычисляя функции-оригиналы через их изображения.

32. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Преобразование Лапласа является достаточно удобным средством для решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \quad (32.1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (32.2)$$

Здесь $x(t)$ – неизвестная функция, $f(t)$ – заданная *функция-оригинал*, $a_0, \dots, a_n, x_0, \dots, x_{n-1}$ – заданные постоянные и $a_n \neq 0$. В дальнейшем нас будет интересовать решение задачи Коши (32.1) – (32.2) при $t \geq 0$.

Замечание 32.1. Поскольку значения функции $f(t)$ при $t \leq 0$ никак не влияют на решение задачи Коши (32.1) – (32.2) при $t \geq 0$, то всегда можно положить $f(t) = 0$ при $t \leq 0$.

Опишем основную идею *операционного метода* решения задачи Коши вида (32.1) – (32.2). Решение строится в два шага.

- (1) Вводим обозначения $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$ и применяем преобразование Лапласа к уравнению (32.1). В результате, используя теорему о дифференцировании оригинала 30.7 на стр. 111, получим уравнение на изображение $X(p)$

$$\begin{aligned} & (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) X(p) = \\ & = F(p) + x_0 (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1) + \dots + x_{n-1} a_n. \end{aligned}$$

Решая это уравнение, найдем изображение $X(p)$.

- (2) Применяя формулу обращения Меллина, см. теорему 31.1 на стр. 113, к изображению $X(p)$, найдем функцию-оригинал $x(t)$.
 - Полученная таким способом функция $x(t)$ является решением задачи Коши (32.1) – (32.2) при $t \geq 0$.

Пример 32.2. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0. \quad (32.3)$$

Решение. Вычисляем преобразование Лапласа функции e^{-t} , см. таблицу изображений,

$$e^{-t} \doteq \frac{1}{p+1}.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (32.3), получим

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p+1} \quad \Longleftrightarrow \quad X(p) = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Функция $X(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > -1$. Воспользуемся формулой Меллина, полагая $s = 0 > -1$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p+1)^2} dp.$$

Достаточно рассмотреть случай $t \geq 0$. Функция e^{pt} экспоненциально убывает в левой полуплоскости, и согласно теореме (31.2) контур интегрирования нужно замыкать там же. Отсюда

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p+1)^2} dp = \operatorname{res}_{p=-1} \frac{e^{pt}}{(p+1)^2} = \left. \frac{d}{dp} e^{pt} \right|_{p=-1} = te^{-t}.$$

Ответ: $x(t) = te^{-t}$.

Пример 32.3. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x' - 2x = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t, \end{cases} \quad x(0) = 2. \quad (32.4)$$

Решение. Вычисляем преобразование Лапласа

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases} \doteq \int_0^1 e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-p}}{p}.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (32.4), получим

$$pX(p) - x(0) - 2X(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p} \iff X(p) = \frac{1 + 2p - e^{-p}}{p(p-2)}. \quad (32.5)$$

Функция $X(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > 2$. Воспользуемся формулой Меллина, полагая $s = 3 > 2$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{1 + 2p - e^{-p}}{p(p-2)} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{1 + 2p}{p(p-2)} e^{pt} dp - \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} dp. \quad (32.6)$$

Вычислим первый интеграл, стоящий в правой части (32.6). Функция e^{pt} экспоненциально убывает в левой полуплоскости при $t > 0$ и контур интегрирования необходимо замыкать там же. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{1 + 2p}{p(p-2)} e^{pt} dp = \operatorname{res}_{p=0} \frac{1 + 2p}{p(p-2)} e^{pt} + \operatorname{res}_{p=2} \frac{1 + 2p}{p(p-2)} e^{pt} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{2t}.$$

Вычислим второй интеграл, стоящий в правой части (32.6). Функция $e^{p(t-1)}$ экспоненциально убывает в правой полуплоскости при $0 \leq t < 1$ и контур интегрирования необходимо замыкать там же

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} dp = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < 1.$$

Функция $e^{p(t-1)}$ экспоненциально убывает в левой полуплоскости при $t > 1$ и контур интегрирования нужно замыкать там же

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} dp = \operatorname{res}_{p=0} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} + \operatorname{res}_{p=2} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2(t-1)} \quad \text{при} \quad t \geq 1.$$

Окончательно, собирая полученные выражения вместе, получим

$$x(t) = \frac{5e^{2t} - 1}{2} + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ \frac{e^{2(t-1)} - 1}{2}, & 1 \leq t. \end{cases} \quad \square$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{5e^{2t} - 1}{2} + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ \frac{e^{2(t-1)} - 1}{2}, & 1 \leq t. \end{cases}$$

Пример 32.4. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x'' - 2x' + x = 6te^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \quad (32.7)$$

Решение. Вычисляем преобразование Лапласа функции te^t , см. таблицу изображений,

$$6te^t \doteq \frac{6}{(p-1)^2}.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (32.7), получим

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) - 2pX(p) + 2x(0) + X(p) = \frac{6}{(p-1)^2},$$

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{6}{(p-1)^4}. \quad (32.8)$$

Функция $X(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > 1$. Воспользуемся формулой Меллина, полагая $s = 2 > 1$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p-1)^2} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{6e^{pt}}{(p-1)^4} dp.$$

Контур интегрирования нужно замыкать в левой полуплоскости при $t \geq 0$. Отсюда

$$x(t) = \operatorname{res}_{p=1} \frac{e^{pt}}{(p-1)^2} + \operatorname{res}_{p=1} \frac{6e^{pt}}{(p-1)^4} = te^t + t^3 e^t. \quad \square$$

Ответ: $x(t) = te^t + t^3 e^t$.

Теорема 32.5. Пусть $g(t)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_n g^{(n)}(t) + a_{n-1} g^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 g'(t) + a_0 g(t) = 1, \\ g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (32.9)$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t), \\ x(0) = x'(0) = \dots = x_{n-1}(0) = 0, \end{cases} \quad (32.10)$$

может быть выражено формулой

$$x(t) = (f * g')(t) = \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau.$$

Пример 32.6. Доказать теорему 32.5.

Решение. Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (32.9) и (32.10), получим

$$G(p)E(p) = \frac{1}{p}, \quad X(p)E(p) = F(p),$$

где $g(t) \doteq G(p)$, $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$ и $E(p)$ – некоторый полином. Отсюда найдем изображение $X(p)$

$$X(p) = pF(p)G(p).$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться интегралом Дюамеля, см. пример 30.13 на стр. 111, и учесть, что $g(0) = 0$. $\square$

Пример 32.7. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = A. \quad (32.11)$$

Решение. Решение задачи (32.11) удобно искать в виде

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (32.12)$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения следующих задач Коши

$$x_1'' + x_1 = f(t), \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad (32.13)$$

$$x_2'' + x_2 = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = A. \quad (32.14)$$

Для решения задачи (32.13), найдем решение вспомогательной задачи

$$g'' + g = 1, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Используя операционный метод, получим

$$g(t) = 1 - \cos t.$$

Теперь из теоремы 32.5 следует, что

$$x_1(t) = \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau. \quad (32.15)$$

Используя операционный метод для решения задачи (32.14), получим

$$x_2(t) = A \sin t. \quad (32.16)$$

Наконец, подставляя выражения (32.15) и (32.16) в формулу (32.12), найдем решение исходной задачи Коши

$$x(t) = A \sin t + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Ответ: $x(t) = A \sin t + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau$.

Пример 32.8. Найти решение задачи Коши для системы уравнений при $t \geq 0$ операционным методом

$$\begin{cases} x'' + y = 0, \\ y'' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = y'(0) = 0, \quad x'(0) = 2. \quad (32.17)$$

Решение. Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений (32.17), получим

$$\begin{cases} p^2 X(p) + Y(p) = 2, \\ p^2 Y(p) + X(p) = 0. \end{cases} \quad (32.18)$$

Из системы уравнений (32.18) найдем изображения $X(p)$ и $Y(p)$

$$X(p) = \frac{2p^2}{p^4 - 1}, \quad Y(p) = -\frac{2}{p^4 - 1}.$$

Используя формулу Меллина, найдем оригиналы $x(t)$ и $y(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{2p^2}{p^4 - 1} e^{pt} dp = \sin t + \operatorname{sh} t,$$

$$y(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{2}{p^4 - 1} e^{pt} dp = \sin t - \operatorname{sh} t.$$

Ответ: $x(t) = \sin t + \operatorname{sh} t$, $y(t) = \sin t - \operatorname{sh} t$.

Домашнее задание:

Задача 32.9. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x' = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2, \\ 4t, & 2 \leq t, \end{cases} \quad x(0) = 1.$$

Ответ:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ 2t^2 - 7, & 2 \leq t. \end{cases}$$

Задача 32.10. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x'' - 3x' + 2x = e^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

Ответ: $x(t) = e^{2t} - te^t$.

Задача 32.11. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x'' + x = 2 \cos t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Ответ: $x(t) = \cos t + t \sin t$.

Задача 32.12. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x' + x = f(t), \quad x(0) = A.$$

Ответ: $g(t) = 1 - e^{-t}$, $x(t) = Ae^{-t} + \int_0^t f(\tau) e^{\tau-t} d\tau$.

Задача 32.13. Найти решение задачи Коши при $t \geq 0$ операционным методом

$$x'' + 2x' + x = f(t), \quad x(0) = A, \quad x'(0) = B.$$

Ответ: $g(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$, $x(t) = A(e^{-t} + te^{-t}) + Bte^{-t} + \int_0^t f(\tau)(t - \tau)e^{\tau-t} d\tau$.

Задача 32.14. Найти решение задачи Коши для системы уравнений при $t \geq 0$ операционным методом

$$\begin{cases} x'' - 2y' = 0, \\ y'' - y + x' = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Ответ: $x(t) = 2 \sin t$, $y(t) = \cos t$.

33. 4-ая контрольная работа (1 час).

Вариант контрольной работы №4.

- (1) Найти конформное отображение луночки $\{|z| > 1\} \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость.

Ответ: Композиция отображений $w = z_1^2$ и $z_1 = \frac{z-i}{z+i}$ конформно отображает луночку $\{|z| > 1\} \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$.

- (2) Найти решение задачи Коши операционным методом при $t \geq 0$

$$x' + x = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad x(0) = 1.$$

Ответ:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ e^{1-t}, & t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

- (3) Сформулируйте основные свойства Γ -функции.

Вариант контрольной работы №4.

- (1) Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-0.5|=1} \Gamma(z) \frac{z+1}{z-1} dz.$$

Ответ: $\oint_{|z-0.5|=1} \Gamma(z) \frac{z+1}{z-1} dz = 2\pi i.$

- (2) Найти решение задачи Коши операционным методом при $t \geq 0$

$$x'' + 3x' + 2x = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = e.$$

Ответ:

$$x(t) = \begin{cases} e(e^{-t} - e^{-2t}), & t \in [0, 1], \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{e^2}{2} - e\right)e^{-2t}, & t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

- (3) Сформулируйте основные свойства дробно-линейных отображений.

34. Свойства обобщенных функций.

Определение 34.1. Носителем непрерывной функции $\varphi(x)$ называют замыкание множества точек вещественной оси, на котором функция $\varphi(x)$ отлична от нуля. Носитель функции $\varphi(x)$ обозначается символом $\text{supp } \varphi(x)$.

Определение 34.2. Пространством основных функций $D(\mathbb{R})$ или сокращенно D называют совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на вещественной оси и имеющих ограниченный носитель.

Определение 34.3. Последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из D называется сходящейся в пространстве D к функции $\varphi(x)$ из D , если выполнены следующие условия.

- (1) Существует такое число $R > 0$, что $\text{supp } \varphi_n(x) \subset [-R, R]$ при $n \in \mathbb{N}$.
- (2) Для любого $p \geq 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x)| = 0.$$

Сходимость в пространстве D обозначается символом $\varphi_n(x) \xrightarrow{D} \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение 34.4. Функционалом $f(x)$ над пространством основных функций D называют правило, которое сопоставляет каждой основной функции $\varphi(x)$ некоторое комплексное число. Это число обозначают символом $(f(x), \varphi(x))$.

Определение 34.5. Функционал $f(x)$ называют линейным, если для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\varphi, \psi \in D$ выполняется равенство

$$(f(x), \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)) = \alpha(f(x), \varphi(x)) + \beta(f(x), \psi(x)).$$

Определение 34.6. Линейный функционал $f(x)$ называют непрерывным в D , если для любой последовательности основных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\varphi_n(x) \xrightarrow{D} 0$ при $n \rightarrow \infty$, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x), \varphi_n(x)) = 0$$

Определение 34.7. Пространством обобщенных функций $D'(\mathbb{R})$ или сокращенно D' называют совокупность всех линейных непрерывных функционалов над D .

Определение 34.8. Дельта-функцией Дирака называют функционал, определенный равенством

$$(\delta(x - a), \varphi(x)) = \varphi(a), \quad \varphi \in D,$$

где $a \in \mathbb{R}$.

Пример 34.9. Доказать, что дельта-функция Дирака $\delta(x)$ является обобщенной функцией.

Решение. Докажем линейность функционала $\delta(x)$

$$(\delta(x), \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0) = \alpha(\delta(x), \varphi(x)) + \beta(\delta(x), \psi(x)).$$

Докажем непрерывность функционала $\delta(x)$. Пусть задана последовательность основных функций такая, что $\varphi_n(x) \xrightarrow{D} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из определения 34.3 при $p = 0$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x) - 0| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta(x), \varphi_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = 0. \quad \square$$

Определение 34.10. *Обобщенную функцию $f(x)$ называют регулярной, если существует локально абсолютно интегрируемая функция $F(x)$ такая, что*

$$(f(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D.$$

Функцию $F(x)$ называют ядром регулярного функционала $f(x)$.

Замечание 34.11. *В дальнейшем мы позволим себе пользоваться одним и тем же символом $f(x)$ для обозначения регулярной обобщенной функции $f(x)$ и ее ядра $F(x)$.*

Определение 34.12. *Обычной (не обобщенной) тэта-функцией Хевисайда называют функцию*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Обобщенной тэта-функцией Хевисайда называют регулярный функционал, определенный равенством

$$(\theta(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D.$$

Определение 34.13. *Сингулярной обобщенной функцией называют всякую обобщенную функцию, не являющуюся регулярной.*

Пример 34.14. *Доказать, что $\delta(x)$ является сингулярной обобщенной функцией.*

Решение. Доказательство проведем от противного. Пусть нашлась локально абсолютно интегрируемая функция $F(x)$ такая, что

$$\varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D. \quad (34.1)$$

Выбирая $\varphi(x)$ такие, что $\varphi(0) = 0$ получим

$$\int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi(x) dx = 0. \quad (34.2)$$

Используя оставшийся произвол в выборе функции $\varphi(x)$ можно показать, что $F(x) = 0$ всюду за исключением точки $x = 0$. Известно, что интеграл (Лебега или Римана) от функции, равной нулю всюду за исключением одной точки, обращается в ноль. Поэтому равенство (34.2) обязано выполняться и для произвольной $\varphi \in D$. Последнее утверждение противоречит соотношению (34.1). Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. $\square$

Определение 34.15. *Говорят, что обобщенная функция $f(x)$ равна нулю в открытой области G , если $(f(x), \varphi(x)) = 0$ для всех $\varphi \in D$ таких, что $\text{supp } \varphi \subset G$.*

Определение 34.16. *Носителем обобщенной функции $f(x)$ называют множество точек вещественной оси, полученное исключением из $\mathbb{R}$ всех открытых интервалов, на которых $f(x)$ обращается в ноль.*

Пример 34.17. *Найти носитель обобщенной функции $\delta(x)$.*

Решение. Ясно, что для любой функции $\varphi \in D$ такой, что ее носитель сосредоточен на одном из интервалов $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$, справедливо равенство

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = 0.$$

Поэтому носитель $\delta(x)$ может быть сосредоточен только в точке $x = 0$.

Далее для любого интервала $(-a, b)$, где $a > 0$ и $b > 0$ найдется такая функция $\varphi \in D$, что $\text{supp } \varphi(x) \in (-a, b)$ и $\varphi(0) \neq 0$. Отсюда следует, что носитель $\delta(x)$ совпадает с точкой $x = 0$. $\square$

Ответ: $\text{supp } \delta(x) = \{0\}$.

Определение 34.18. Произведением обобщенной функции $f(x)$ на бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(x)$ называют обобщенную функцию $\alpha(x)f(x)$, действующую по правилу

$$(\alpha(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), \alpha(x)\varphi(x)).$$

Пример 34.19. Упростить выражение $(1 + e^x)\delta(x)$.

Решение. Пусть $\varphi \in D$, тогда

$$((1 + e^x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), (1 + e^x)\varphi(x)) = (1 + e^0)\varphi(0) = 2\varphi(0) = (2\delta(x), \varphi(x)).$$

Отсюда следует, что

$$(1 + e^x)\delta(x) = 2\delta(x). \quad \square$$

Ответ: $(1 + e^x)\delta(x) = 2\delta(x)$.

Домашнее задание:

Задача 34.20. Упростить выражение $x\delta(x)$.

Ответ: $x\delta(x) = 0$.

Задача 34.21. Упростить выражение $x\delta(x + 1)$.

Ответ: $x\delta(x + 1) = -\delta(x + 1)$.

35. Обобщенная производная, дифференцирование скачков.

Приведем рассуждения, мотивирующие определение обобщенной производной. Точное определение обобщенной производной приведено ниже, см. определение 35.1.

Производную обобщенной функции определяют так, чтобы она, в случае регулярной обобщенной функции с гладким ядром, совпадала с производной в обычном смысле. Пусть задана регулярная обобщенная функция $f(x)$ с гладким ядром. Тогда справедливы равенства

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = -(f(x), \varphi'(x)), \quad \varphi \in D. \quad (35.1)$$

В случае сингулярной обобщенной функции $f(x)$ первые два равенства в (35.1) не имеют никакого смысла. Поэтому формулу (35.1) следует рассматривать не как доказательство, а как мотивировку определения 35.1. Далее, правая часть в формуле (35.1) корректно определена для любой обобщенной функции, в том числе и сингулярной. Отсюда мы приходим к следующему определению.

Определение 35.1. Производной обобщенной функции $f \in D'$ называется функционал $f' \in D'$, определенный равенством

$$(f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x)), \quad \varphi \in D.$$

Пример 35.2. Найти обобщенную производную функции $\theta(x)$.

Решение. Для произвольной $\varphi \in D$ выполнены равенства

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Отсюда следует, что $\theta'(x) = \delta(x)$. $\square$

Ответ: $\theta'(x) = \delta(x)$.

Пример 35.3. Пусть $f(x)$ – обобщенная функция и $\alpha(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция. Доказать равенство

$$(\alpha(x)f(x))' = \alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x).$$

Решение. В этот раз, ради упрощения записи, мы позволим себе не писать аргумент x

$$\begin{aligned} ((\alpha f)', \varphi) &= -(\alpha f, \varphi') = -(f, \alpha \varphi') = -(f, (\alpha \varphi)' - \alpha' \varphi) = -(f, (\alpha \varphi)') + (f, \alpha' \varphi) = \\ &= (f', \alpha \varphi) + (\alpha' f, \varphi) = (\alpha f', \varphi) + (\alpha' f, \varphi) = (\alpha' f + \alpha f', \varphi). \quad \square \end{aligned}$$

Пример 35.4. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям.

- (1) $f(x) \in C^1(-\infty, a) \cap C^1(a, +\infty)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$.
- (2) Левое $f(a-0)$ и правое $f(a+0)$ предельные значения конечны.
- (3) Классическая производная $f'_{\text{кл}}(x)$ является регулярной обобщенной функцией.

Доказать, что производная регулярной обобщенной функции с ядром $f(x)$ может быть найдена по формуле

$$f'(x) = f'_{\text{кл}}(x) + [f(a+0) - f(a-0)] \delta(x-a).$$

где $f'_{\text{кл}}(x)$ – классическая производная.

Решение. Воспользуемся определением производной обобщенной функцией и формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
 (f'(x), \varphi(x)) &= -(f(x), \varphi'(x)) = - \int_{-\infty}^a f(x) \varphi'(x) dx - \int_a^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\
 &= -f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{a-0} + \int_{-\infty}^a f'_{\text{кл}}(x) \varphi(x) dx - f(x) \varphi(x) \Big|_{a+0}^{+\infty} + \int_a^{+\infty} f'_{\text{кл}}(x) \varphi(x) dx = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f'_{\text{кл}}(x) \varphi(x) dx + [f(a+0) - f(a-0)] \varphi(a) = \\
 &= \left(f'_{\text{кл}}(x), \varphi(x) \right) + \left([f(a+0) - f(a-0)] \delta(x-a), \varphi(x) \right). \quad \square
 \end{aligned}$$

Пример 35.5. Найти вторую обобщенную производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in (1, +\infty]. \end{cases}$$

Решение. Используя результат примера 35.4, получим

$$f'(x) = -\delta(x-1) + \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0], \\ 2x, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in (1, +\infty]. \end{cases}$$

Аналогично,

$$f''(x) = -\delta(x) - 2\delta(x-1) - \delta'(x-1) + \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ 2, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in (1, +\infty]. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $f''(x) = -\delta(x) - 2\delta(x-1) - \delta'(x-1) + \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ 2, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in (1, +\infty]. \end{cases}$

Пример 35.6. Найти вторую обобщенную производную функции

$$f(x) = (x-1)\theta(x^2-x).$$

Решение. Используя результаты примеров 35.3 и 35.4, получим

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \theta(x^2-x) + (x-1)(\delta(x-1) - \delta(x)) = \theta(x^2-x) + \delta(x), \\
 f''(x) &= \delta(x-1) - \delta(x) + \delta'(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Ответ: $f''(x) = \delta(x-1) - \delta(x) + \delta'(x).$

Домашнее задание:

Задача 35.7. Упростить выражение $(e^x + x)\delta'(x)$.

Ответ: $(e^x + x)\delta'(x) = \delta'(x) - 2\delta(x).$

Задача 35.8. Упростить выражение $(2x^3 - x)\delta'(x-1)$.

Ответ: $(2x^3 - x)\delta'(x-1) = -5\delta(x-1) + \delta'(x-1).$

Задача 35.9. Найти вторую обобщенную производную функции

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in (-\infty, 1], \\ x^3, & x \in (1, 2], \\ 1 + 2x, & x \in (2, +\infty]. \end{cases}$$

Ответ: $f''(x) = -3\delta'(x - 2) - 10\delta(x - 2) + 4\delta(x - 1) + \begin{cases} 6x, & x \in (1, 2], \\ 0, & x \notin (1, 2]. \end{cases}$

Задача 35.10. Найти вторую обобщенную производную функции

$$f(x) = (x^2 - x)\theta(x^3 - x).$$

Ответ: $f''(x) = 2\theta(x^3 - x) - 3\delta(x + 1) + \delta(x) + \delta(x - 1) + 2\delta'(x + 1).$

36. Формулы, упрощающие выражения вида $h(x)\delta^{(n)}(x)$.

Пример 36.1. Упростить выражение $h(x)\delta'(x)$, где $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Решение. Для произвольной $\varphi \in D$ имеем

$$\begin{aligned} (h(x)\delta'(x), \varphi(x)) &= (\delta'(x), h(x)\varphi(x)) = -(\delta(x), (h(x)\varphi(x))') = \\ &= -(\delta(x), h'(x)\varphi(x)) - (\delta(x), h(x)\varphi'(x)) = -h'(0)\varphi(0) - h(0)\varphi'(0) = \\ &= -h'(0)(\delta(x), \varphi(x)) - h(0)(\delta(x), \varphi'(x)) = -h'(0)(\delta(x), \varphi(x)) + h(0)(\delta'(x), \varphi(x)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$h(x)\delta'(x) = -h'(0)\delta(x) + h(0)\delta'(x). \quad \square$$

Ответ: $h(x)\delta'(x) = -h'(0)\delta(x) + h(0)\delta'(x)$.

Пример 36.2. Упростить выражение $x\delta^{(n)}(x)$.

Решение. Для произвольной $\varphi \in D$ имеем

$$\begin{aligned} (x\delta^{(n)}(x), \varphi(x)) &= (\delta^{(n)}(x), x\varphi(x)) = (-1)^n(\delta(x), (x\varphi(x))^{(n)}) = \\ &= (-1)^n(\delta(x), x\varphi^{(n)}(x) + n\varphi^{(n-1)}(x)) = (-1)^nn(\delta(x), \varphi^{(n-1)}(x)) = -n(\delta^{(n-1)}(x), \varphi(x)). \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $x\delta^{(n)}(x) = -n\delta^{(n-1)}(x)$.

Домашнее задание:

Задача 36.3. Упростить выражение $e^{x^2-x}\delta'(x-1)$.

Ответ: $e^{x^2-x}\delta'(x-1) = -\delta(x-1) + \delta'(x-1)$.

Задача 36.4. Упростить выражение $x^2\delta^{(3)}(x)$.

Ответ: $x^2\delta^{(3)}(x) = 6\delta'(x)$.

Задача 36.5. Упростить выражение $e^x\delta^{(2)}(x)$.

Ответ: $e^x\delta^{(2)}(x) = \delta^{(2)}(x) - 2\delta'(x) + \delta(x)$.

Задача 36.6. Упростить выражение $x^3\delta^{(2)}(x+1)$.

Ответ: $x^3\delta^{(2)}(x+1) = -6\delta(x+1) - 6\delta'(x+1) - \delta^{(2)}(x+1)$.

37. Регуляризация степенных особенностей. Деление на полином.

Пример 37.1. Найти первую производную регулярной обобщенной функции $\ln |x|$.

Решение. Перед тем как приступить к решению этой задачи, заметим, что обобщенная производная от функции $\ln |x|$, вне окрестности точки $x = 0$, должна совпадать с классической производной от функции $\ln |x|$, т. е. с функцией $\frac{1}{x}$, см. мотивацию перед определением 35.1. При этом функция $\frac{1}{x}$ не может быть ядром регулярной обобщенной функции, потому что она не является абсолютно интегрируемой в окрестности точки $x = 0$.

Воспользуемся определением обобщенной производной. Для произвольной $\varphi \in D$ справедливы равенства

$$((\ln |x|)', \varphi(x)) = -(\ln |x|, \varphi'(x)) = - \int_{\mathbb{R}} \ln |x| \varphi'(x) dx. \quad (37.1)$$

В последнем интеграле хочется произвести интегрирование по частям, однако этого нельзя делать из-за особенности у подынтегральной функции в нуле. Для того чтобы обойти эту трудность перепишем интеграл в правой части (37.1) в виде

$$- \int_{\mathbb{R}} \ln |x| \varphi'(x) dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \ln |x| \varphi'(x) dx. \quad (37.2)$$

Интеграл в правой части (37.2) интегрируется вне окрестности нуля и, как следствие, не содержит никаких особенностей. Теперь можно произвести интегрирование по частям

$$\begin{aligned} - \int_{|x| > \varepsilon} \ln |x| \varphi'(x) dx &= - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln |x| \varphi'(x) dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln |x| \varphi'(x) dx = \\ &= - \ln |x| \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \ln |x| \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \\ &= (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \ln \varepsilon + \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (37.2), найдем

$$((\ln |x|)', \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \ln \varepsilon + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (37.3)$$

Учитывая, что $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + O(\varepsilon)$ при малых ε , получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} O(\varepsilon) \ln \varepsilon = 0.$$

Отсюда и из (37.3) найдем, что

$$((\ln |x|)', \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (37.4)$$

Интеграл в правой части равенства (37.4) называют интегралом в смысле главного значения, а соответствующий функционал принято обозначать символом $P_x^{\frac{1}{x}}$

$$\left(P_x^{\frac{1}{x}}, \varphi(x)\right) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad \square$$

Ответ: $(\ln |x|)' = P_x^{\frac{1}{x}}$.

Замечание 37.2. Функционал $P_x^{\frac{1}{x}}$ называют регуляризацией функции $\frac{1}{x}$. Это означает, что функционал $P_x^{\frac{1}{x}}$ действует на основные функции, которые обращаются в ноль в окрестности точки $x = 0$, также как и функция $\frac{1}{x}$. Существуют и другие регуляризации функции $\frac{1}{x}$.

Определение 37.3. Следующие равенства корректно определяют две сингулярные обобщенные функции

$$\left(\frac{1}{x - i0}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx, \quad \left(\frac{1}{x + i0}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx, \quad \varphi \in D.$$

Замечание 37.4. Мы позволим себе не останавливаться на доказательстве того, что функционалы $\frac{1}{x - i0}$ и $\frac{1}{x + i0}$ являются обобщенными функциями. В частности, мы не будем доказывать, что соответствующие пределы всегда существуют.

Пример 37.5. Найти производную обобщенной функции $P_x^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Этот пример решается вполне аналогично примеру 37.1. Для произвольной $\varphi \in D$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \left(\left(P_x^{\frac{1}{x}}\right)', \varphi(x)\right) &= -\left(P_x^{\frac{1}{x}}, \varphi'(x)\right) = -v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi'(x)}{x} dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \right). \end{aligned} \quad (37.5)$$

Преобразуем выражение в правой части (37.5)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx &= \frac{\varphi(x)}{x} \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \frac{\varphi(x)}{x} \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \\ &= \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда, разлагая функцию $\varphi(\varepsilon)$ в ряд Тейлора $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, получим

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx = \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} + O(\varepsilon) = \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx + O(\varepsilon). \quad (37.6)$$

В последнем равенстве мы учли, что $\int_{|x| > \varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\varepsilon}$.

Подставляя (37.6) в (37.5), найдем

$$\left(\left(P \frac{1}{x} \right)', \varphi(x) \right) = - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx = -v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx. \quad (37.7)$$

Функционал в правой части (37.7) принято обозначать символом $-P \frac{1}{x^2}$ $\square$

Ответ: $(P \frac{1}{x})' = -P \frac{1}{x^2}$.

Определение 37.6. Следующие равенства корректно определяют сингулярные обобщенные функции

$$\left(P \frac{1}{x^n}, \varphi(x) \right) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(0) x^p}{x^n} dx, \quad \varphi \in D,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 37.7. При $n = 1$ или $n = 2$ корректность определения 37.6 косвенно установлена в примерах 37.1 и 37.5. Для остальных n мы позволим себе не останавливаться на доказательстве корректности определения.

Пример 37.8. Доказать равенство $xP \frac{1}{x^2} = P \frac{1}{x}$.

Решение. Для любой $\varphi \in D$ справедливы равенства

$$\left(xP \frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right) = \left(P \frac{1}{x^2}, x\varphi(x) \right) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x) - 0\varphi(0)}{x^2} dx = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left(P \frac{1}{x}, \varphi(x) \right). \quad \square$$

Пример 37.9. Найти несколько регуляризаций функции $\frac{1}{x(x-1)}$.

Решение. По аналогии с функционалами $P \frac{1}{x^n}$, указанную функцию можно регуляризовать следующим образом

$$\left(P \frac{1}{x(x-1)}, \varphi(x) \right) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x(x-1)} dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\{|x|>\varepsilon_1\} \cap \{|x-1|>\varepsilon_2\}} \frac{\varphi(x)}{x(x-1)} dx, \quad \varphi \in D.$$

Однако такой способ регуляризации не всегда удобен. Например, регуляризация функции $\frac{1}{x^2(x-1)^2}$ подобным способом может оказаться трудоемким мероприятием.

Другой способ регуляризации функции вида $\frac{1}{x(x-1)}$ заключается в том, чтобы предварительно разложить ее на простейшие дроби

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

В результате регуляризация совпадает с предыдущей и имеет вид

$$P \frac{1}{x(x-1)} = P \frac{1}{x-1} - P \frac{1}{x}.$$

Еще один, зачастую более удобный, способ регуляризации заключается в том, чтобы сдвинуть особенности (в нашем случае есть две особые точки $x = 0$ и $x = 1$) с вещественной оси, а затем

перейти к пределу так, чтобы в пределе особенности вернулись на свои места. В нашем случае подобная регуляризация имеет, например, такой вид

$$\left(\frac{1}{(x-i0)(x-1-i0)}, \varphi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{(x-i\varepsilon)(x-1-i\varepsilon)} dx, \quad \varphi \in D.$$

Возможны еще три различные регуляризации подобного вида $\frac{1}{(x+i0)(x-1-i0)}$, $\frac{1}{(x-i0)(x-1+i0)}$ или $\frac{1}{(x+i0)(x-1+i0)}$. $\square$

Ответ: Регуляризацией функции $\frac{1}{x(x-1)}$ являются, например, обобщенные функции $P\frac{1}{x(x-1)}$ и $\frac{1}{(x\pm i0)(x-1\pm i0)}$.

Следующая теорема устанавливает связь между различными регуляризациями функции $\frac{1}{x}$.

Теорема 37.10 (Формулы Сохоцкого). *Справедливы следующие равенства*

$$\frac{1}{x+i0} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \quad \frac{1}{x-i0} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

Определение 37.11. Пусть $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ и $n = [\gamma]$ – целая часть числа γ . Следующие равенства корректно определяют сингулярные обобщенные функции

$$(x_+^{-\gamma}, \varphi(x)) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(0)x^p}{x^\gamma} dx, \quad \varphi \in D.$$

Домашнее задание:

Задача 37.12. Доказать равенство $x\frac{1}{x-i0} = 1$.

Задача 37.13. Найти несколько регуляризаций функции $\frac{1}{x^2(x-1)}$.

Ответ: Регуляризацией функции $\frac{1}{x^2(x-1)}$ являются, например, обобщенные функции вида $P\frac{1}{x-1} - P\frac{1}{x^2} - P\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{(x\pm i0)^2(x-1\pm i0)}$.

Задача 37.14. Доказать равенство $\left(\frac{1}{x-i0}\right)' = -\frac{1}{(x-i0)^2}$.

Задача 37.15. Доказать равенство $\frac{1}{(x-i0)^2} = P\frac{1}{x^2} - i\pi\delta'(x)$.

Задача 37.16. Доказать равенство $(x_+^{-\gamma})' = -\gamma x_+^{-\gamma-1}$.

38. Обобщенные решения дифференциальных уравнений со степенными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$.

В дальнейшем, для решения уравнений в пространстве обобщенных функций, нам понадобятся две следующие теоремы. Мы позволим себе не останавливаться на их доказательстве.

Теорема 38.1. Пусть носитель обобщенной функции $f(x)$ сосредоточен в одной точке $x = a$. Тогда существуют постоянные $C_1, \dots, C_N$ и N такие, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^N C_n \delta^{(n)}(x - a).$$

Теорема 38.2. Общее решение уравнения $y' = 0$ в D' имеет вид $y(x) = C$, где C – произвольная постоянная

Пример 38.3. Найти общий вид решения уравнения $xy = 1$ в D' .

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем общее решение однородного уравнения

$$xy_0 = 0. \quad (38.1)$$

Очевидно, что $y_0(x) \equiv 0$ при $x \neq 0$. Это означает, что носитель функции $y_0(x)$ может быть сосредоточен только в точке $x = 0$. Теперь из теоремы 38.1 следует, что функция $y_0(x)$ имеет вид

$$y_0(x) = \sum_{n=0}^N C_n \delta^{(n)}(x), \quad (38.2)$$

где постоянные C_n и N подлежат дальнейшему определению. Подставляя (38.2) в однородное уравнение (38.1), получим

$$0 = x \sum_{n=0}^N C_n \delta^{(n)}(x) = C_0 x \delta(x) + C_1 x \delta'(x) + \dots + C_N x \delta^{(N)}(x). \quad (38.3)$$

Используя результат примера 36.2, преобразуем уравнение (38.3) к виду

$$-C_1 \delta(x) - \dots - C_N N \delta^{(N-1)}(x) = 0. \quad (38.4)$$

Из уравнения (38.4) следует, что $C_1 = C_2 = \dots = C_N = 0$ и C_0 – произвольная постоянная.

Таким образом, общее решение однородного уравнения (38.1) имеет вид

$$y_0(x) = C_0 \delta(x).$$

Шаг 2. Найдем частное (т. е. хотя бы какое-нибудь) решение исходного уравнения

$$xy_1 = 1. \quad (38.5)$$

Попробуем догадаться до ответа. Для этого будем решать уравнение на $y_1(x)$ вне окрестности точки $x = 0$. В результате получим $y_1(x) = \frac{1}{x}$. Для того чтобы получить обобщенное решение, нужно выбрать какую-нибудь регуляризацию функции $\frac{1}{x}$, например,

$$y_1(x) = P \frac{1}{x}.$$

Осталось проверить, что это действительно частное решение

$$xy_1 = xP \frac{1}{x} = 1.$$

Шаг 3. Общее решение исходного уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения (38.1) и частного решения неоднородного уравнения (38.5)

$$y(x) = P \frac{1}{x} + C_0 \delta(x),$$

где C_0 – произвольная постоянная. $\square$

Ответ: $y(x) = P \frac{1}{x} + C_0 \delta(x)$, где C_0 – произвольная постоянная.

Пример 38.4. Найти общий вид решения уравнения $xy' = P \frac{1}{x}$ в D' .

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем общее решение однородного уравнения

$$xy'_0 = 0, \quad (38.6)$$

Так же как и в примере 38.3 получим, что

$$y'_0(x) = C_0 \delta(x). \quad (38.7)$$

Общее решение уравнения (38.7) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения $y'_0(x) = 0$ и частного решения неоднородного уравнения $y'_0(x) = C_0 \delta(x)$. Из теоремы 38.2 следует, что общее решение однородного уравнения $y'_0 = 0$ имеет вид $y_0(x) = C_1$. Вспоминая, что $\theta'(x) = \delta(x)$, легко догадаться до частного решения уравнения (38.7)

$$y_0(x) = C_0 \theta(x).$$

Итак, общее решение уравнения (38.6) имеет вид

$$y_0(x) = C_0 \theta(x) + C_1.$$

Шаг 2. Найдем частное решение исходного уравнения

$$xy'_1 = P \frac{1}{x}. \quad (38.8)$$

Как обычно, вначале попробуем догадаться до ответа. Для этого рассмотрим уравнение (38.8) вне особой точки $x = 0$. В результате найдем, что

$$y'_1(x) = \frac{1}{x^2} \iff y_1(x) = -\frac{1}{x}.$$

Обобщенным решением уравнения (38.8) будет любая регуляризация полученной функции, например,

$$y_1(x) = -P \frac{1}{x}.$$

Проверим, что это действительно частное решение уравнения (38.8)

$$xy'_1(x) = -x \left(P \frac{1}{x} \right)' = x P \frac{1}{x^2} = P \frac{1}{x}.$$

Шаг 3. Общее решение исходного уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения (38.6) и частного решения неоднородного уравнения (38.8)

$$y(x) = -P \frac{1}{x} + C_0 \theta(x) + C_1,$$

где C_0 и C_1 – произвольные постоянные. $\square$

Ответ: $y(x) = -P \frac{1}{x} + C_0 \theta(x) + C_1$, где C_0 и C_1 – произвольные постоянные.

Пример 38.5. Найти общее решение уравнения

$$x(x-1)y'' = P\frac{1}{x} + \delta(x) \quad \text{в } D'.$$

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем общее решение однородного уравнения $x(x-1)y_0'' = 0$. Полагая $v = y_0''$, получим

$$x(x-1)v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(x) = C_1\delta(x) + C_2\delta(x-1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y_0''(x) &= C_1\delta(x) + C_2\delta(x-1), \\ y_0'(x) &= C_1\theta(x) + C_2\theta(x-1) + C_3, \\ y_0(x) &= C_1x\theta(x) + C_2(x-1)\theta(x-1) + C_3x + C_4, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Шаг 2. Найдем частное (т. е. хотя бы какое-нибудь) решение уравнения $x(x-1)y_1'' = P\frac{1}{x}$. Положим $v(x) = y_1''(x)$ и, вначале, попробуем догадаться до ответа. Для этого будем решать уравнение на v вне окрестности точек $x = 0$ и $x = 1$

$$\begin{aligned} x(x-1)v &= P\frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \\ v(x) &= \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Теперь логично предположить, что функция

$$v(x) = P\frac{1}{x-1} - P\frac{1}{x} - P\frac{1}{x^2}$$

является решением уравнения $x(x-1)v = P\frac{1}{x}$ в $D'(\mathbb{R})$. Докажем, что наше предположение верно

$$\begin{aligned} x(x-1)v &= x(x-1)P\frac{1}{x-1} - (x-1)xP\frac{1}{x} - (x-1)xP\frac{1}{x^2} = x - (x-1) - (x-1)P\frac{1}{x} = \\ &= 1 - xP\frac{1}{x} + P\frac{1}{x} = P\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= P\frac{1}{x-1} - P\frac{1}{x} - P\frac{1}{x^2}, \\ y_1'(x) &= \ln|x-1| - \ln|x| + P\frac{1}{x}, \\ y_1(x) &= (x-1)(\ln|x-1| - 1) - x(\ln|x| - 1) + \ln|x|, \\ y_1(x) &= (x-1)\ln|x-1| - x\ln|x| + \ln|x| + 1. \end{aligned}$$

Шаг 3. Найдем частное решение уравнения $x(x-1)y_2'' = \delta(x)$. Удобно ввести новую неизвестную функцию $v(x) = xy_2''(x)$, откуда

$$(x-1)v = \delta(x). \quad (38.9)$$

Попробуем вначале догадаться до решения уравнения (38.9). Для этого формально поделим на $(x-1)$, предполагая, что $x \neq 1$

$$v(x) = \frac{1}{x-1}\delta(x) = -\delta(x).$$

Здесь мы воспользовались правилом умножения гладкой функции на $\delta(x)$ -функцию: $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$. Проверим теперь, что $v(x) = -\delta(x)$ решение уравнения (38.9)

$$(x-1)v = -(x-1)\delta(x) = \delta(x).$$

Получаем новое уравнение на $y_2(x)$

$$xy_2'' = -\delta(x).$$

Удобно ввести новую неизвестную функцию $u(x) = y_2''(x)$, откуда

$$xu = -\delta(x). \quad (38.10)$$

Ясно, что вне точки $x = 0$ существует только тривиальное $u(x) \equiv 0$ решение уравнения (38.10). Это означает, что носитель обобщенной функции $u(x)$ сосредоточен в нуле. Отсюда следует, что $u(x)$ можно искать в виде

$$u(x) = \sum_{n=0}^N A_n \delta^{(n)}(x), \quad (38.11)$$

где A_n – некоторые постоянные. Перед тем как подставлять (38.11) в (38.10), заметим, что N не может быть больше 1 (иначе в левой части равенства (38.10) появится $\delta^{(N-1)}(x)$, которой не с чем будет сократиться).

Подставляя (38.11) в (38.10) при $N = 1$, получим

$$xu = x(A_0\delta(x) + A_1\delta'(x)) = A_1x\delta'(x) = -A_1\delta(x).$$

Сверяя с уравнением (38.10) найдем, что $A_1 = 1$ и A_0 – произвольная постоянная. Поскольку мы ищем частное решение, то постоянную A_0 удобно положить равной нулю. Далее,

$$y_2''(x) = \delta'(x) \iff y_2'(x) = \delta(x) \iff y_2(x) = \theta(x).$$

Шаг 4. Окончательный ответ записывается в виде $y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x)$. $\square$

Ответ: $y(x) = C_1x\theta(x) + C_2(x-1)\theta(x-1) + C_3x + C_4 + (x-1)\ln|x-1| - x\ln|x| + \ln|x| + 1 + \theta(x)$, где C_1, C_2, C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Пример 38.6. Найти общий вид решения уравнения

$$xy = \theta(x) \quad \text{в} \quad D'. \quad (38.12)$$

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Общее решение однородного уравнения $xy_0 = 0$ имеет вид

$$y_0(x) = C\delta(x), \quad (38.13)$$

где C – произвольная постоянная.

Шаг 2. Найдем теперь частное решение уравнения (38.12). Вне точки $x = 0$ это уравнение имеет классическое решение $x^{-1}\theta(x)$, которое обязано совпадать с любым решением (38.12) вне точки $x = 0$.

Из-за неинтегрируемой особенности в нуле функция $x^{-1}\theta(x)$ не принадлежит пространству D' . Поэтому задача о поиске частного решения сводится к регуляризации функции $x^{-1}\theta(x)$. Другими словами, мы должны найти такую обобщенную функцию y_1 , которая совпадает с $x^{-1}\theta(x)$ вне точки $x = 0$. Более строго, для любой основной функции $\varphi(x)$, обращающейся в ноль в некоторой окрестности точки $x = 0$, должно быть выполнено равенство

$$(y_1(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} x^{-1}\theta(x)\varphi(x) dx.$$

Заметим, что классическая первообразная $\ln|x|\theta(x)$ функции $x^{-1}\theta(x)$ является регулярной обобщенной функцией

$$(\ln|x|\theta(x), \varphi(x)) = \int_0^{\infty} \ln|x|\varphi(x) dx.$$

Это следует из того, что у функции $\ln|x|$ интегрируемая особенность в нуле. Поэтому регуляризацию функции $x^{-1}\theta(x)$ можно искать в виде $(\ln|x|\theta(x))'$, где производная понимается в обобщенном смысле. Вычислим эту производную

$$\begin{aligned} ((\ln|x|\theta(x))', \varphi(x)) &= -(\ln|x|\theta(x), \varphi'(x)) = -\int_0^{\infty} \ln|x|\varphi'(x) dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln|x|\varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-1}\varphi(x) dx \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\varphi(0) \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-1}\varphi(x) dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[-\varphi(0) \int_{\varepsilon}^1 x^{-1} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-1}\varphi(x) dx \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Осталось проверить, что найденная обобщенная функция

$$(y_1(x), \varphi(x)) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (38.14)$$

является частным решением уравнения (38.12). Действительно,

$$\begin{aligned} (xy_1(x), \psi(x)) &= (y_1(x), x\psi(x)) = [\varphi(x) = x\psi(x)] = (y_1(x), \varphi(x)) = \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_0^1 \psi(x) dx + \int_1^{\infty} \psi(x) dx = \int_0^{\infty} \psi(x) dx = (\theta(x), \psi(x)). \end{aligned}$$

Шаг 3. Общее решение уравнения (38.12) имеет вид $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$, где y_0 и y_1 задаются формулами (38.13) и (38.14) соответственно.

Ответ: $y(x) = C\delta(x) + y_1(x)$, где C – произвольная постоянная и y_1 задается формулой (38.14).

Домашнее задание:

Задача 38.7. Найти общий вид решения уравнения $(x-1)y = x$ в D' .

Ответ: $y(x) = 1 + P_{x-1} \frac{1}{x-1} + C\delta(x-1)$, где C – произвольная постоянная.

Задача 38.8. Найти общий вид решения уравнения $(x+1)y' = P_x \frac{1}{x} + \delta(x-2)$ в D' .

Ответ: $y(x) = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{3}\theta(x-2) + C_0\theta(x+1) + C_1$, где C_0 и C_1 – произвольные постоянные.

Задача 38.9. Найти общий вид решения уравнения $x(x+1)y'' = \delta'(x)$ в D' .

Ответ: $y(x) = -\frac{1}{2}\delta(x) - \theta(x) + C_0x\theta(x) + C_1(x+1)\theta(x+1) + C_2x + C_3$, где C_0, C_1, C_2 и C_3 – произвольные постоянные.

Задача 38.10. Найти общий вид решения уравнения $(x+1)y = \frac{1}{x-i0}$ в D' .

Ответ: $y(x) = \frac{1}{(x-i0)(x+1-i0)} + C\delta(x+1)$, где C – произвольная постоянная.

Задача 38.11. Найти общий вид решения уравнения $xy = \frac{1}{x+i0}$ в D' .

Ответ: $y(x) = \frac{1}{(x+i0)^2} + C\delta(x)$, где C – произвольная постоянная.

39. Преобразование Фурье обобщенных функций.

Перед тем как ввести понятие преобразования Фурье, сформулируем несколько вспомогательных определений.

Определение 39.1. Пространством основных функций $S(\mathbb{R})$ или сокращенно S называют совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на вещественной оси и убывающих при $|x| \rightarrow \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$.

Определение 39.2. Последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из S называется сходящейся в пространстве S к функции $\varphi(x)$ из S , если для любых $p \geq 0$ и $k \geq 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x)| = 0.$$

Сходимость в пространстве S обозначается символом $\varphi_n(x) \xrightarrow{S} \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение 39.3. Функционал $f(x)$ называют непрерывным в S , если для любой последовательности основных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\varphi_n(x) \xrightarrow{S} 0$ при $n \rightarrow \infty$, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x), \varphi_n(x)) = 0.$$

Определение 39.4. Пространством обобщенных функций $S'(\mathbb{R})$ или сокращенно S' называют совокупность всех линейных непрерывных функционалов над S .

Пример 39.5. Доказать, что $S' \subset D'$.

Решение. Сравнивая определения 34.2 и 39.1, находим, что $D \subset S$. Отсюда следует, что произвольный функционал из S' определен на любой функции из D и, следовательно, принадлежит пространству D' . $\square$

Замечание 39.6. Из включения $S' \subset D'$ следует, что все введенные ранее операции над обобщенными функциями из D' могут применяться и к обобщенным функциям из S' .

Напомним классическое определение преобразования Фурье.

Определение 39.7. Преобразование Фурье функции $\varphi \in S$ задается формулой

$$F[\varphi](k) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ikx} dx.$$

Обратное преобразование Фурье задается формулой

$$F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) e^{-ikx} dk.$$

Теорема 39.8. Пусть $\varphi \in S$, тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) $F[\varphi] \in S$.
- (2) $F^{-1}[\varphi] \in S$.
- (3) $F[F^{-1}[\varphi]](k) = \varphi(k)$.
- (4) $F^{-1}[F[\varphi]](x) = \varphi(x)$.

Преобразование Фурье обобщенной функции определяют так, чтобы оно, в случае регулярной обобщенной функции с гладким, быстро убывающим ядром, совпало с классическим преобразованием Фурье (сравни с мотивировкой к определению 35.1 обобщенной производной на стр. 126).

Пусть задана регулярная обобщенная функция $f(x)$ с гладким, быстро убывающим ядром. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} (F[f](k), \varphi(k)) &= \int_{\mathbb{R}} F[f](k) \varphi(k) dk = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} dx \right) \varphi(k) dk = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(k) e^{ikx} dk \right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) F[\varphi](x) dx = (f(x), F[\varphi](x)). \end{aligned}$$

Отсюда мы приходим к следующему определению.

Определение 39.9. Преобразованием Фурье обобщенной функции $f(x) \in S'(\mathbb{R})$ называется функционал $F[f](k) \in S'(\mathbb{R})$, определенный формулой

$$(F[f](k), \varphi(k)) = (f(x), F[\varphi](x)), \quad \varphi \in S.$$

Обратное преобразование Фурье задается формулой

$$(F^{-1}[f](x), \varphi(x)) = (f(k), F^{-1}[\varphi](k)), \quad \varphi \in S.$$

Корректность определения 39.9 вытекает из теоремы 39.8.

Обсудим теперь причину, по которой мы определили преобразование Фурье на пространстве S' более узком чем D' , а не на самом D' . Допустим, что нам удалось корректно определить преобразование Фурье $F[f]$ для произвольной функции f из D' также как в определении 39.9 и $F[f] \in D'$. Тогда для любой функции $\varphi \in D$ должно быть корректно определено выражение $(f(x), F[\varphi](x))$. Для этого необходимо, чтобы функция $F[\varphi](x)$ принадлежала D . Однако преобразование Фурье $F[\varphi](x)$ произвольной функции $\varphi \in D$, вообще говоря, не принадлежит пространству D , потому что носитель функции $F[\varphi](x)$ не обязан быть ограничен. Отсюда следует, что выражение $(f(x), F[\varphi](x))$ может оказаться не определено. Эта причина не позволяет определить преобразование Фурье $F[f]$ произвольной обобщенной функции f из D' так, чтобы $F[f] \in D'$.

Пример 39.10. Найти преобразование Фурье функции $\delta(x)$.

Решение. Несложно убедиться в том, что $\theta(x) \in S'(\mathbb{R})$. Далее, для любой функции $\varphi \in S'$ справедливы равенства

$$(F[\delta(x)](k), \varphi(k)) = (\delta(x), F[\varphi](x)) = F[\varphi](0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) dk = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(k) dk. \quad \square$$

Ответ: $F[\delta(x)](k) = 1$.

Пример 39.11. Найти преобразование Фурье функции $\theta(x)$.

Решение. Для любой функции $\varphi \in S'$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} (F[\theta(x)](k), \varphi(k)) &= (\theta(x), F[\varphi](x)) = \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{ikx} dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{(ik-\varepsilon)x} dk = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \varphi(k) \int_0^{+\infty} e^{(ik-\varepsilon)x} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(k)}{ik - \varepsilon} dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\varphi(k)}{k + i\varepsilon} dk = \left(\frac{i}{k + i0}, \varphi(k) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $F[\theta(x)](k) = \frac{i}{k+i0}$.

Пример 39.12. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}.$$

Решение. Для любой функции $\varphi \in S'$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \left(F \left[\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)} \right] (k), \varphi(k) \right) &= \left(\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}, F[\varphi](x) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(k) e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} dk = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \left(\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} dx \right) dk. \end{aligned} \quad (39.1)$$

Перестановка пределов интегрирования и переход к пределу под знаком интеграла в последнем равенстве возможны благодаря абсолютной сходимости интеграла $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} dx$. Из (39.1) следует, что

$$F \left[\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)} \right] = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} dx. \quad (39.2)$$

Интеграл в правой части (39.2) легко берется по вычетах, см. стр. 54. При $k \geq 0$ контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{x=i\varepsilon_1} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} = 2\pi i \frac{e^{-\varepsilon_1 k}}{1+i\varepsilon_1+i\varepsilon_2}.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} dx = 2\pi i, \quad k \geq 0. \quad (39.3)$$

При $k \leq 0$ контур интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} dx = -2\pi i \operatorname{res}_{x=-1-i\varepsilon_2} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} = -2\pi i \frac{e^{ik(-1-i\varepsilon_2)}}{-1-i\varepsilon_2-i\varepsilon_1}.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x - i\varepsilon_1)(x + 1 + i\varepsilon_2)} dx = 2\pi i e^{-ik}, \quad k \leq 0. \quad (39.4)$$

Подставляя (39.3) и (39.4) в представление (39.2), найдем

$$F \left[\frac{1}{(x - i0)(x + 1 + i0)} \right] = 2\pi i [\theta(k) + e^{-ik}(1 - \theta(k))]. \quad (39.5)$$

Учитывая, что

$$1 - \theta(k) = \theta(-k), \quad (39.6)$$

в смысле равенства обобщенных функций (в смысле обычных функций равенство (39.6) не выполнено при $k = 0$), равенство (39.5) удобно переписать в виде

$$F \left[\frac{1}{(x - i0)(x + 1 + i0)} \right] = 2\pi i [\theta(k) + e^{-ik}\theta(-k)]. \quad \square$$

Ответ: $F \left[\frac{1}{(x - i0)(x + 1 + i0)} \right] = 2\pi i [\theta(k) + e^{-ik}\theta(-k)].$

Замечание 39.13. Вычисление преобразования Фурье по формуле (39.2), с последующим вычислением двух пределов при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ оказалось довольно громоздким мероприятием. Следующий пример показывает, как можно избежать трудностей, связанных с введением дополнительных параметров ε_1 и ε_2 .

Пример 39.14. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{1}{(x + i0)(x - i)}.$$

Решение. Как и в примере 39.12 получим, что

$$F \left[\frac{1}{(x + i0)(x - i)} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x + i\varepsilon)(x - i)} dx. \quad (39.7)$$

Заметим теперь, что при $\varepsilon > 0$ функция

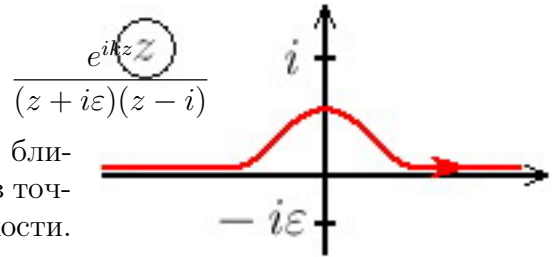


Рис. 65. Контур γ .

регулярна в малой окрестности точки $z = 0$. При этом ближайшая особенность к началу координат располагается в точке $z = -i\varepsilon$, которая располагается в нижней полуплоскости. Отсюда следует, что в окрестности нуля можно продеформировать контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, не изменяя значение интеграла (39.7). Деформируя контур как показано на рисунке 65, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x + i\varepsilon)(x - i)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z + i\varepsilon)(z - i)} dz = \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z(z - i)} dz. \quad (39.8)$$

Мы сразу смогли перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ в равенстве (39.8), потому что подынтегральная функция не содержит особенностей, лежащих на контуре γ при $\varepsilon > 0$.

Далее, при $k \geq 0$ контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости

$$F \left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)} \right] = \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z(z-i)} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{ikz}}{z(z-i)} = 2\pi e^{-k}.$$

При $k \leq 0$ контур интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости

$$F \left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)} \right] = \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z(z-i)} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{ikz}}{z(z-i)} = 2\pi.$$

Отсюда

$$F \left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)} \right] = 2\pi e^{-k} \theta(k) + 2\pi \theta(-k). \quad \square$$

Ответ: $F \left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)} \right] = 2\pi e^{-k} \theta(k) + 2\pi \theta(-k).$

Для вычисления преобразования Фурье обобщенных функций полезна следующая теорема.

Теорема 39.15. Пусть $f(x) \in S'(\mathbb{R})$, тогда справедливы следующие формулы.

- (1) $F[f^{(n)}(x)](k) = (-ik)^n F[f(x)](k), n \in \mathbb{N}.$
- (2) $F^{(n)}[f(x)](k) = F[(ix)^n f(x)](k), n \in \mathbb{N}.$
- (3) $F[f(x+x_0)](k) = e^{-ikx_0} F[f(x)](k), x_0 \in \mathbb{R}.$
- (4) $F[f(x)](k+k_0) = F[f(x)e^{ik_0x}](k), k_0 \in \mathbb{R}.$
- (5) $F^{-1}[f(x)](k) = \frac{1}{2\pi} F[f(x)](-k).$

Пример 39.16. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{x^2}{(x+2-i0)(x-1-i0)}.$$

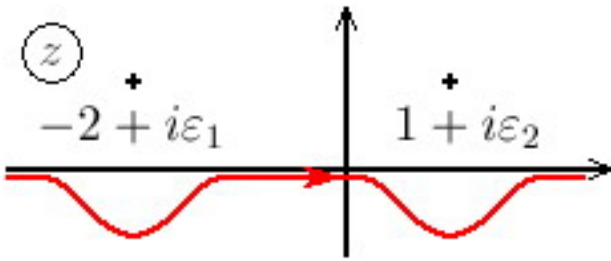
Решение. Воспользуемся утверждением 2 теоремы 39.15

$$F \left[\frac{x^2}{(x+2-i0)(x-1-i0)} \right] (k) = -F'' \left[\frac{1}{(x+2-i0)(x-1-i0)} \right] (k). \quad (39.9)$$

Найдем теперь преобразование Фурье $F \left[\frac{1}{(x+2-i0)(x-1-i0)} \right]$. Как и в примере 39.14 получим, что

$$F \left[\frac{1}{(x+2-i0)(x-1-i0)} \right] = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x+2-i\varepsilon_1)(x-1-i\varepsilon_2)} dx =$$

$$= \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)} dz, \quad (39.10)$$



где контур интегрирования γ изображен на рисунке 66

Интеграл (39.10) берется по вычетам, см. стр. 54. При $k \geq 0$ контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости

Рис. 66. Контур γ выделен красным цветом.

$$\int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=-2} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)} + \operatorname{res}_{z=1} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)} \right) = \frac{2\pi i}{3} (e^{ik} - e^{-2ik}). \quad (39.11)$$

При $k \leq 0$ контур интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости

$$\int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)} dz = 0. \quad (39.12)$$

Подставляя (39.11) и (39.12) в (39.10), найдем

$$F \left[\frac{1}{(x+2-i0)(x-1-i0)} \right] = \frac{2\pi i}{3} (e^{ik} - e^{-2ik}) \theta(k).$$

Отсюда и из (39.9) получим, что

$$\begin{aligned} F \left[\frac{x^2}{(x+2-i0)(x-1-i0)} \right] &= -\frac{2\pi i}{3} \left[(e^{ik} - e^{-2ik}) \delta(k) + (ie^{ik} + 2ie^{-2ik}) \theta(k) \right]' = \\ &= -\frac{2\pi i}{3} \left[(ie^{ik} + 2ie^{-2ik}) \theta(k) \right]' = -\frac{2\pi i}{3} \left[(-e^{ik} + 4e^{-2ik}) \theta(k) + (ie^{ik} + 2ie^{-2ik}) \delta(k) \right] = \\ &= \frac{2\pi i}{3} \left[(e^{ik} - 4e^{-2ik}) \theta(k) - 3i\delta(k) \right] = \frac{2\pi i}{3} (e^{ik} - 4e^{-2ik}) \theta(k) + 2\pi\delta(k). \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $F \left[\frac{x^2}{(x+2-i0)(x-1-i0)} \right] = \frac{2\pi i}{3} (e^{ik} - 4e^{-2ik}) \theta(k) + 2\pi\delta(k).$

Пример 39.17. Найти преобразование Фурье функции x .

Решение. Воспользуемся результатами теоремы 39.15 и примера 39.10

$$F[x](k) = -iF'[1](k) = -2\pi i (F^{-1}[1](-k))' = -2\pi i (\delta(-k))' = -2\pi i (\delta(k))' = -2\pi i \delta'(k). \quad \square$$

Ответ: $F[x](k) = -2\pi i \delta'(k).$

Пример 39.18. Найти преобразование Фурье функции $P_x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Воспользуемся формулой Сохоцкого, см. стр. 133, и результатами теоремы 39.15 и примера 39.11

$$\begin{aligned} F \left[P_x^{\frac{1}{2}} \right] (k) &= F \left[\frac{1}{x+i0} \right] (k) + i\pi F[\delta(x)](k) = 2\pi F^{-1} \left[\frac{1}{x+i0} \right] (-k) + i\pi = \\ &= -2\pi i \theta(-k) + i\pi = i\pi \operatorname{sign} k. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $F \left[P_x^{\frac{1}{2}} \right] (k) = i\pi \operatorname{sign} k.$

Пример 39.19. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} P_x^{\frac{1}{2}}. \quad (39.13)$$

Решение. Функция

$$\frac{1 - \cos x}{x^2}$$

бесконечно дифференцируема на вещественной оси, поэтому обобщенная функция (39.13) определена корректно. Используя формулу Сохоцкого 37.10, получим

$$F \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} P_x^{\frac{1}{2}} \right] = -i\pi F \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \delta(x) \right] + F \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{x-i0} \right]. \quad (39.14)$$

Легко видеть, что

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \delta(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \Big|_{x=0} \delta(x) = \frac{1}{2} \delta(x).$$

Отсюда найдем первое преобразование Фурье

$$F \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \delta(x) \right] = F \left[\frac{1}{2} \delta(x) \right] = \frac{1}{2}.$$

Второе преобразование Фурье может быть вычислено по классической формуле

$$F \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{x - i0} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{x - i\varepsilon} e^{ikx} dx. \quad (39.15)$$

Функция

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} \frac{1}{z - i\varepsilon} e^{ikz}$$

регулярна во всей комплексной плоскости за исключением точки $z = i\varepsilon$. Прodeформируем контур интегрирования в интеграле (39.15) так, чтобы в окрестности точки $z = 0$ он стал располагаться в нижней комплексной плоскости. Обозначим полученный контур через γ , см. рисунок 67. Поскольку при данной деформации контура мы не пересекли полюс $z = i\varepsilon$, значение интеграла (39.15) не изменилось. В результате получим

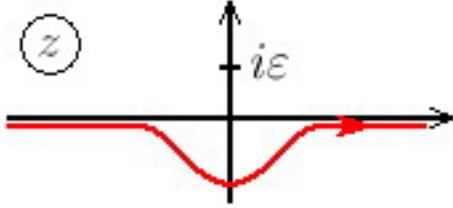


Рис. 67. Контур γ 1 выделен красным цветом.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{x - i\varepsilon} e^{ikx} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos z}{z^2(z - i\varepsilon)} e^{ikz} dz.$$

Поскольку при $\varepsilon \rightarrow +0$ полюс $z = i\varepsilon$ не пересекает контур γ , можно перейти к пределу под знаком интеграла. Отсюда

$$\begin{aligned} F \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{x - i0} \right] &= \int_{\gamma} \frac{1 - \cos z}{z^3} e^{ikz} dz = \\ &= \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z^3} dz - \int_{\gamma} \frac{e^{i(k+1)z}}{2z^3} dz - \int_{\gamma} \frac{e^{i(k-1)z}}{2z^3} dz. \end{aligned} \quad (39.16)$$

Вычислим первый интеграл в (39.16). По лемме Жордана при $k \geq 0$ контур интегрирования необходимо замкнуть сверху, а при $k < 0$ снизу. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z^3} dz &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{ikz}}{z^3} = -\pi i k^2, \quad \text{при } k \geq 0, \\ \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z^3} dz &= 0, \quad \text{при } k < 0. \end{aligned}$$

Перепишем полученное выражение в компактной форме

$$\int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z^3} dz = -\pi i k^2 \theta(k).$$

Аналогично можно вычислить два оставшихся интеграла

$$\int_{\gamma} \frac{e^{i(k+1)z}}{2z^3} dz = -\frac{\pi i}{2} k^2 \theta(k+1), \quad \int_{\gamma} \frac{e^{i(k-1)z}}{2z^3} dz = -\frac{\pi i}{2} k^2 \theta(k-1).$$

Отсюда

$$F \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{x - i0} \right] = \frac{\pi i}{2} \left[(k-1)^2 \theta(k-1) + (k+1)^2 \theta(k+1) - 2k^2 \theta(k) \right].$$

Осталось подставить полученные выражения в (39.14).

Ответ:

$$F \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} P \frac{1}{x} \right] = \frac{\pi i}{2} \left[(k-1)^2 \theta(k-1) + (k+1)^2 \theta(k+1) - 2k^2 \theta(k) - 1 \right].$$

Домашнее задание:

Задача 39.20. Докажите теорему 39.15.

Задача 39.21. Найти преобразование Фурье функции $\theta(x^2 - 1)$.

Ответ: $F[\theta(x^2 - 1)](k) = \frac{i}{k+i0} e^{ik} - \frac{i}{k-i0} e^{-ik} = 2\pi\delta(k) - 2\sin k P \frac{1}{k} = 2\pi\delta(k) - 2\frac{\sin(k)}{k}$.

Задача 39.22. Найти преобразование Фурье функции $\frac{1}{(x-i0)(x+4+i0)}$.

Ответ: $F \left[\frac{1}{(x-i0)(x+4+i0)} \right] = \frac{\pi i}{2} (\theta(k) + e^{-4ik} \theta(-k))$.

Задача 39.23. Найти преобразование Фурье функции $\frac{1}{(x-i0)^2}$.

Ответ: $F \left[\frac{1}{(x-i0)^2} \right] = -2\pi k \theta(k)$.

Задача 39.24. Найти преобразование Фурье функции $P \frac{1}{x^2}$.

Ответ: $F \left[P \frac{1}{x^2} \right] = -\pi k \operatorname{sign} k = -\pi |k|$.

40. Свертка обобщенных функций.

Напомним классическое определение свертки двух функций.

Определение 40.1. Пусть заданы две локально интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что при любом $x \in \mathbb{R}$ сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)| |g(x-y)| dy.$$

Тогда сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$ называют функцию

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy.$$

Свертку обобщенных функций определяют так, чтобы она, в случае регулярной обобщенной функции с гладким быстро убывающим ядром совпала с классической сверткой (сравни с мотивировками к определению 35.1 обобщенной производной на стр. 126 и к определению 39.9 преобразования Фурье на стр. 141).

Пусть заданы регулярные обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$ с гладкими быстро убывающими ядрами. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} ((f * g)(x), \varphi(x)) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \right) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} g(x-y) \varphi(x) dx dy = \left[x = z + y \right] = \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} g(z) \varphi(y+z) dz dy = \\ &= \left(f(y), (g(z), \varphi(y+z)) \right). \end{aligned}$$

Отсюда мы приходим к следующему определению.

Определение 40.2. Сверткой обобщенных функций $f \in D'$ и $g \in D'$ называют функционал $f * g$, действующий по правилу

$$((f * g)(x), \varphi(x)) = \left(f(y), (g(z), \varphi(y+z)) \right).$$

Здесь следует понимать, что $(g(z), \varphi(y+z))$ не всегда функция с ограниченным носителем и поэтому определение 40.2 не всегда корректно. Например, при $f(x) = 1$ и $g(x) = 1$ имеем

$$((1 * 1)(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y+z) dz dy = \left[z = y - x \right] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx dy. \quad (40.1)$$

Интеграл в правой части (40.1), вообще говоря, расходится и, следовательно, свертка обобщенных функций $f(x) = 1$ и $g(x) = 1$ не существует.

Следующая теорема приводит достаточные условия существования свертки.

Теорема 40.3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – обобщенные функции из $D'(\mathbb{R})$, удовлетворяющие одному из следующих условий.

- Носитель $\text{supp } f$ является ограниченным множеством.
- Носитель $\text{supp } g$ является ограниченным множеством.
- Носители $\text{supp } f$ и $\text{supp } g$ принадлежат множеству $[x_0, +\infty)$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$.

• Носители $\text{supp } f$ и $\text{supp } g$ принадлежат множеству $(-\infty, x_0]$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда свертка обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$ корректно определена и $f * g \in D'$.

Сформулируем основные свойства свертки обобщенных функций.

Теорема 40.4. Справедливы следующие равенства, при условии, что выражения, стоящие в левой и правой частях, корректно определены.

- (1) $f * g = g * f$.
- (2) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- (3) $(f * g)' = f' * g = f * g'$.
- (4) $F[f * g] = F[f] F[g]$.

Пример 40.5. Найти свертку $f(x) * \delta(x - a)$, где $f(x) \in D'(\mathbb{R})$.

Решение. Воспользуемся определением 40.2

$$(f(x) * \delta(x - a), \varphi(x)) = (f(y), (\delta(z - a), \varphi(y + z))) = (f(y), \varphi(y + a)) = (f(x - a), \varphi(x)). \quad \square$$

Ответ: $f(x) * \delta(x - a) = f(x - a)$.

Пример 40.6. Найти свертку $x * \theta(1 - x^2)$, используя преобразование Фурье.

Решение. Вычислим преобразования Фурье функций x и $\theta(1 - x^2)$

$$F[x](k) = -iF'[1](k) = -2\pi i\delta'(k), \quad (40.2)$$

$$F[\theta(1 - x^2)](k) = \int_{-1}^1 e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \sin k}{k}.$$

Воспользуемся теперь утверждением 4 теоремы 40.4

$$F[x * \theta(1 - x^2)](k) = F[x](k) F[\theta(1 - x^2)](k) = -4\pi i\delta'(k) \frac{\sin k}{k} = -4\pi i\delta'(k). \quad (40.3)$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 36.1 на стр. 129.

Из (40.2) следует, что $F^{-1}[-4\pi i\delta'(k)] = 2x$. Отсюда и из (40.3) получим, что

$$x * \theta(1 - x^2) = 2x. \quad \square$$

Ответ: $x * \theta(1 - x^2) = 2x$.

Домашнее задание:

Задача 40.7. Найти свертку $\delta'(x) * \cos x$ двумя способами.

Ответ: $\delta'(x) * \cos x = -\sin x$.

Задача 40.8. Найти свертку $x^2 * \theta(x - x^2)$, используя преобразование Фурье.

Ответ: $x^2 * \theta(x - x^2) = x^2 - x + \frac{1}{3}$.

Задача 40.9. Найти свертку $\theta(x) * \theta(x)$, используя преобразование Фурье.

Ответ: $\theta(x) * \theta(x) = x\theta(x)$.

Задача 40.10. Найти свертку $\frac{1}{x+1+i0} * \frac{1}{x-1+i0}$, используя преобразование Фурье.

Ответ: $\frac{1}{x+1+i0} * \frac{1}{x-1+i0} = \frac{-2\pi i}{x+i0}$.

Задача 40.11. *Найти свертку $\frac{\cos x}{x+i0} * \frac{1}{x-1-i0}$, используя преобразование Фурье.*

Ответ: $\frac{\cos x}{x+i0} * \frac{1}{x-1-i0} = ?$.

41. Метод Фурье для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \in S'(\mathbb{R}) \quad (41.1)$$

с постоянными коэффициентами $a_0, \dots, a_n$. Метод Фурье для решения уравнений вида (41.1) в $S'(\mathbb{R})$ заключается в следующем. Решение строится в два шага.

- (1) Вычисляем преобразование Фурье от обеих частей равенства (41.1). Используя теорему 39.15 на стр. 144, преобразуем полученное выражение к виду

$$F[y] \left(a_n (-ik)^n + a_{n-1} (-ik)^{n-1} + \dots + a_1 (-ik) + a_0 \right) = F[f(x)]. \quad (41.2)$$

Решаем уравнение (41.2) методами, изложенными на стр. 134, и находим $F[y]$.

- (2) Вычисляем обратное преобразование Фурье от полученного выражения для $F[y]$ и находим решение $y(x)$.
- Из свойств преобразования Фурье вытекает, что найденное таким способом решение $y(x)$ принадлежит пространству $S'(\mathbb{R})$.

Пример 41.1. Найти общий вид решения уравнения $y' + y = \delta(x)$ в S' .

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей равенства $y' + y = \delta(x)$, найдем

$$F[y'] + F[y] = F[\delta(x)] \iff -ikF[y] + F[y] = 1 \iff F[y] = \frac{1}{1 - ik} = \frac{i}{k + i}.$$

Шаг 2. Для того чтобы найти решение исходного уравнения, осталось вычислить обратное преобразование Фурье

$$y(x) = F^{-1} \left[\frac{i}{k + i} \right] (x).$$

Пусть $\varphi(x) \in S'(\mathbb{R})$, тогда

$$\begin{aligned} \left(F^{-1} \left[\frac{i}{k + i} \right] (x), \varphi(x) \right) &= \left(\frac{i}{k + i}, F^{-1}[\varphi(x)](k) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{i}{k + i} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ikx} dx \right) dk = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k + i} \left(\int_{-\infty}^0 \varphi(x) e^{-ikx} dx \right) dk + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k + i} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx \right) dk = \\ &= -i^2 \operatorname{res}_{k=-i} \left(\frac{1}{k + i} \int_0^{+\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx \right) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y(x) = F^{-1} \left[\frac{i}{k + i} \right] (x) = e^{-x} \theta(x). \quad (41.3)$$

Заметим, что функция $\frac{i}{k+i}$ не является абсолютно интегрируемой, поэтому мы не могли вычислять обратное преобразование Фурье по классической формуле.

Отметим также, что решение (41.3) не содержит общего решения $y_0(x) = Ce^{-x}$ однородного уравнения $y'_0 + y_0 = 0$. Это следствие того, что преобразование Фурье действует как взаимно однозначное отображение на пространстве $S'(\mathbb{R})$ и e^{-x} не принадлежит $S'(\mathbb{R})$. $\square$

Ответ: $y(x) = e^{-x}\theta(x)$.

Пример 41.2. Найти общий вид решения уравнения в S'

$$y'' + y = 1 + \delta(x). \quad (41.4)$$

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей равенства (41.4), найдем

$$\begin{aligned} F[y''] + F[y] &= F[1] + F[\delta(x)] \iff -k^2 F[y] + F[y] = 2\pi\delta(k) + 1 \iff \\ \iff F[y] &= 2\pi\delta(k) - \frac{1}{(k+1+i0)(k-1+i0)} + C_1\delta(k-1) + C_2\delta(k+1), \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Шаг 2. Вычисляем обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} F^{-1}[2\pi\delta(k)] &= 1, \quad F^{-1}[\delta(k-1)] = \frac{1}{2\pi}e^{-ix}, \quad F^{-1}[\delta(k+1)] = \frac{1}{2\pi}e^{ix}, \\ F^{-1}\left[\frac{1}{(k+1+i0)(k-1+i0)}\right] &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(k+1+i\varepsilon_1)(k-1+i\varepsilon_2)} e^{-ikx} dk = \\ &= -i \left(\operatorname{res}_{k=-1} \frac{1}{(k+1)(k-1)} e^{-ikx} + \operatorname{res}_{k=1} \frac{1}{(k+1)(k-1)} e^{-ikx} \right) \theta(x) = \\ &= -i \left(\frac{1}{-2} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-ix} \right) \theta(-x) = -\sin(x) \theta(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$y(x) = 1 + \sin(x) \theta(x) + \frac{C_1}{2\pi} e^{-ix} + \frac{C_2}{2\pi} e^{ix} = 1 + \sin(x) \theta(x) + Ae^{-ix} + Be^{ix},$$

где A и B – произвольные постоянные. $\square$

Ответ: $y(x) = 1 + \sin(x) \theta(x) + Ae^{-ix} + Be^{ix}$, где A и B – произвольные постоянные.

Пример 41.3. Найти общий вид решения уравнения в D'

$$y'' - y = \delta'(x). \quad (41.5)$$

Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем вначале решение уравнения (41.5) в S' . Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей равенства (41.5), найдем

$$F[y''] - F[y] = F[\delta'(x)] \iff -k^2 F[y] - F[y] = -ik \iff F[y] = -\frac{ik}{k^2 + 1}.$$

Шаг 2. Вычисляем обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} y(x) &= -F^{-1}\left[\frac{ik}{k^2 + 1}\right](x) = \left(F^{-1}\left[\frac{1}{k^2 + 1}\right](x)\right)' = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k^2 + 1} e^{-ikx} dk\right)' = \\ &= i \left(\theta(-x) \operatorname{res}_{k=i} \frac{1}{k^2 + 1} e^{-ikx} - \theta(x) \operatorname{res}_{k=-i} \frac{1}{k^2 + 1} e^{-ikx}\right)' = i \left(\theta(-x) \frac{1}{2i} e^x - \theta(x) \frac{1}{-2i} e^{-x}\right)' = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (e^x \theta(-x) + e^{-x} \theta(x))' = \frac{1}{2} (e^x \theta(-x) - e^x \delta(x) - e^{-x} \theta(x) + e^{-x} \delta(x)) = \frac{1}{2} (e^x \theta(-x) - e^{-x} \theta(x)).$$

Таким образом, общее решение уравнения (41.5) в S' имеет вид

$$y_s(x) = \frac{1}{2} (e^x \theta(-x) - e^{-x} \theta(x)).$$

Шаг 3. Общее решение однородного уравнения $y_0'' - y_0 = 0$ в D' можно записать в виде

$$y_0(x) = Ae^x + Be^{-x},$$

где A и B – произвольные постоянные. Заметим, что $y_0(x) \notin S'(\mathbb{R})$, если $A \neq 0$ или $B \neq 0$.

Шаг 4. Общее решение уравнения (41.5) в D' имеет вид

$$y(x) = y_s(x) + y_0(x) = \frac{1}{2} (e^x \theta(-x) - e^{-x} \theta(x)) + Ae^x + Be^{-x}. \quad \square$$

Ответ: $y(x) = \frac{1}{2} (e^x \theta(-x) - e^{-x} \theta(x)) + Ae^x + Be^{-x}$, где A и B – произвольные постоянные.

Домашнее задание:

Задача 41.4. Найти общий вид решения уравнения $y' - iy = 1 + \delta'(x)$ в S' .

Ответ: $y(x) = i + \delta(x) + ie^{ix}\theta(x) + Ae^{ix}$, где A – произвольная постоянная.

Задача 41.5. Найти общий вид решения уравнения $y'' - 2y' + y = \delta(x)$ в S' .

Ответ: $y(x) = -xe^x\theta(-x)$.

Задача 41.6. Найти общий вид решения уравнения $y''' + y'' + y' + y = 2\delta(x)$ в S' .

Ответ: $y(x) = (e^{-x} + \sin x - \cos x)\theta(x) + A\sin x + B\cos x$, где A и B – произвольные постоянные.

Задача 41.7. Найти общий вид решения уравнения $y'' + 2y' + 2y = \delta(x) + 5e^x\theta(-x)$ в S' .

Ответ: $y(x) = e^{-x}\sin x\theta(x) + e^x\theta(-x) + e^{-x}(2\sin x + \cos x)\theta(x)$.

Задача 41.8. Найти общий вид решения уравнения $y'' + 2y' + y = x + 3\delta(x)$ в D' .

Ответ: $y(x) = 3xe^{-x}\theta(x) + x - 2 + Ae^x + Bxe^x$, где A и B – произвольные постоянные.

42. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Выражение фундаментального решения через решение задачи Коши.

Определение 42.1. Фундаментальным решением линейного дифференциального оператора

$$Ly = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$$

с постоянными коэффициентами $a_0, \dots, a_n$ называется произвольная обобщенная функция $g(x)$ из $D'(\mathbb{R})$, удовлетворяющая уравнению

$$Lg(x) = \delta(x).$$

Замечание 42.2. Фундаментальное решение определено с точностью до прибавления произвольного решения однородного уравнения $Ly = 0$.

Один из способов вычисления фундаментального решения, основанный на методе Фурье, был разобран ранее, см. стр. 151. Напомним, что этот метод всегда нас приводил к фундаментальному решению из пространства $S'(\mathbb{R})$. Следующая теорема дает другой, иногда более простой, алгоритм вычисления фундаментального решения.

Теорема 42.3. Пусть $z(x)$ – решение классической задачи Коши

$$\begin{cases} Lz = a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_1 z' + a_0 z = 0, & a_n \neq 0, \\ z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-2)}(0) = 0, \\ z^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$g(x) = \frac{1}{a_n} z(x) \theta(x)$$

является фундаментальным решением оператора L .

Пример 42.4. Найти фундаментальное решение оператора $Ly = y' - 2y$.

Решение. Общее решение однородного уравнения $z' - 2z = 0$ имеет вид

$$z(x) = Ce^{2x},$$

где C – произвольная постоянная. Отсюда находим, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} z' - 2z = 0, \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

имеет вид

$$z(x) = e^{2x}.$$

Теперь из теоремы 42.3 следует, что функция $g(x) = e^{2x} \theta(x)$ является фундаментальным решением оператора $Ly = y' - 2y$. $\square$

Ответ: $g(x) = e^{2x} \theta(x)$.

Пример 42.5. Найти фундаментальное решение оператора $Ly = 2y''' - 8y'$.

Решение. Общее решение однородного уравнения $2z''' - 8z' = 0$ имеет вид

$$z(x) = A + Be^{2x} + Ce^{-2x},$$

где A , B и C – произвольные постоянные. Отсюда находим, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} 2z''' - 8z' = 0, \\ z(0) = z'(0) = 0, \quad z''(0) = 1 \end{cases}$$

имеет вид

$$z(x) = \frac{1}{8}(e^{2x} + e^{-2x} - 2).$$

Из теоремы 42.3 следует, что фундаментальным решением оператора L является функция

$$g(x) = \frac{1}{16}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)\theta(x). \quad \square$$

Ответ: $g(x) = \frac{1}{16}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)\theta(x)$.

Домашнее задание:

Задача 42.6. Найти фундаментальное решение оператора $Ly = y' + 4y$.

Ответ: $g(x) = e^{-4x}\theta(x)$.

Задача 42.7. Найти фундаментальное решение оператора $Ly = y'' + 4y' + 4y$.

Ответ: $g(x) = xe^{-2x}\theta(x)$.

Задача 42.8. Найти фундаментальное решение оператора $Ly = y'' - 2y' + 2y$.

Ответ: $g(x) = e^x \sin x \theta(x)$.

43. Решение неоднородных уравнений с использованием фундаментального решения.

Теорема 43.1. Пусть $g(x)$ – фундаментальное решение линейного дифференциального оператора L . Пусть задана $f(x) \in D'(\mathbb{R})$ такая, что свертка $(g * f)(x)$ существует в $D'(\mathbb{R})$. Тогда

$$y(x) = (g * f)(x)$$

является решением уравнения

$$Ly(x) = f(x). \quad (43.1)$$

Теорема 43.1 позволяет найти частное решение неоднородного уравнения (43.1). Для того чтобы найти общее решение уравнения (43.1), необходимо добавить к найденному частному решению общее решение однородного уравнения $Ly(x) = 0$.

Пример 43.2. Найти частное решение уравнения

$$y' + 2y = x, \quad (43.2)$$

вычислив предварительно фундаментальное решение.

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Используя теорему 42.3, найдем Фундаментальное решение оператора $Ly = y' + 2y$

$$g(x) = e^{-2x}\theta(x).$$

Шаг 2. Легко видеть, что существует классическая свертка функций $g(x)$ и $f(x) = x$. Отсюда и из теоремы 43.1 найдем решение уравнения (43.2)

$$\begin{aligned} y(x) &= (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z) dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-2z}\theta(z)(x-z) dz = \int_0^{\infty} e^{-2z}(x-z) dz = \\ &= x \int_0^{\infty} e^{-2z} dz - \int_0^{\infty} ze^{-2z} dz = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $g(x) = e^{-2x}\theta(x)$, $y(x) = \frac{2x-1}{4}$.

Пример 43.3. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 9y = e^x, \quad (43.3)$$

вычислив предварительно фундаментальное решение.

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Используя теорему 42.3, найдем Фундаментальное решение оператора $Ly = y'' - 9y$

$$g_1(x) = \frac{1}{6} (e^{3x} - e^{-3x}) \theta(x).$$

Шаг 2. Свертка функций $g_1(x)$ и $f(x) = e^x$ не существует даже в смысле обобщенных функций. Тем не менее можно выбрать другое фундаментальное решение $g(x)$ так, чтобы свертка $g(x)$ и $f(x)$ существовала.

Общий вид фундаментального решения оператора $Ly = y'' - 9y$ складывается из фундаментального решения $g_1(x)$ и общего решения однородного уравнения $y'' - 9y = 0$

$$g(x) = \frac{1}{6} (e^{3x} - e^{-3x}) \theta(x) + Ae^{3x} + Be^{-3x},$$

где A и B – произвольные постоянные. Полагая $A = -\frac{1}{6}$ и $B = 0$, получим требуемое фундаментальное решение

$$g(x) = -\frac{1}{6}e^{3x}\theta(-x) - \frac{1}{6}e^{-3x}\theta(x).$$

Шаг 3. Легко видеть, что существует классическая свертка функций $g(x)$ и $f(x) = e^x$. Отсюда найдем решение уравнения (43.3)

$$\begin{aligned} y(x) &= (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z) dz = -\frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}} (e^{3z}\theta(-z) + e^{-3z}\theta(z)) e^{x-z} dz = \\ &= -\frac{1}{6} \int_{-\infty}^0 e^{3z} e^{x-z} dz - \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} e^{-3z} e^{x-z} dz = -\frac{1}{12}e^x - \frac{1}{24}e^x = -\frac{1}{8}e^x. \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $g(x) = -\frac{1}{6}e^{3x}\theta(-x) - \frac{1}{6}e^{-3x}\theta(x)$, $y(x) = -\frac{1}{8}e^x$.

Пример 43.4. Найти частное решение уравнения

$$y' + y = e^{-2x}, \quad (43.4)$$

вычислив предварительно фундаментальное решение.

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Используя теорему 42.3, найдем Фундаментальное решение оператора $Ly = y' + y$

$$g_1(x) = e^{-x}\theta(x).$$

Шаг 2. Свертка функций $g_1(x)$ и $f(x) = e^{-2x}$ не существует. Тем не менее можно выбрать другое фундаментальное решение $g(x)$ так, чтобы свертка $g(x)$ и $f(x)$ существовала.

Общий вид фундаментального решения оператора $Ly = y' + y$ складывается из фундаментального решения $g_1(x)$ и общего решения однородного уравнения $y' + y = 0$

$$g(x) = e^{-x}\theta(x) + Ae^{-x},$$

где A – произвольная постоянная. Полагая $A = -1$, получим требуемое фундаментальное решение

$$g(x) = -e^{-x}\theta(-x).$$

Шаг 3. Легко видеть, что существует классическая свертка функций $g(x)$ и $f(x) = e^{-2x}$. Отсюда найдем решение уравнения (43.4)

$$y(x) = (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z) dz = - \int_{\mathbb{R}} e^{-z}\theta(-z)e^{-2x+2z} dz = -e^{-2x} \int_{-\infty}^0 e^z dz = -e^{-2x}. \quad \square$$

Ответ: $g(x) = -e^{-x}\theta(-x)$, $y(x) = -e^{-2x}$.

Домашнее задание:

Задача 43.5. Найти частное решение уравнения $-y'' + y = x$, вычислив предварительно фундаментальное решение.

Ответ: $g(x) = \frac{1}{2}e^x\theta(-x) + \frac{1}{2}e^{-x}\theta(x)$, $y(x) = x$.

Задача 43.6. Найти частное решение уравнения $y'' + y = 2e^x$, вычислив предварительно фундаментальное решение.

Ответ: $g(x) = \sin(x)\theta(x)$, $y(x) = e^x$.

Задача 43.7. Найти частное решение уравнения $y' - y = \theta(x)$, вычислив предварительно фундаментальное решение.

Ответ: $g(x) = e^x\theta(x)$, $y(x) = (e^x - 1)\theta(x)$.

Задача 43.8. Найти частное решение уравнения $y'' + y = \theta(x)$, вычислив предварительно фундаментальное решение.

Ответ: $g(x) = \sin x\theta(x)$, $y(x) = (1 - \cos x)\theta(x)$.

Задача 43.9. Найти частное решение уравнения $y'' + y' - 2y = e^{-x}$, вычислив предварительно фундаментальное решение.

Ответ: $g(x) = -\frac{1}{3}e^x\theta(-x) - \frac{1}{3}e^{-2x}\theta(x)$, $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$.

44. Метод Фурье для решения простейших линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R}^2)$.

Определение 44.1. Фундаментальным решением линейного дифференциального оператора L с постоянными коэффициентами, действующего в $S'(\mathbb{R}^2)$, называется произвольная обобщенная функция $g(x, y)$ из $S'(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая уравнению

$$Lg(x, y) = \delta(x)\delta(y).$$

Пример 44.2. Найти фундаментальное решение из пространства $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Фундаментальное решение оператора L удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \delta(x)\delta(y). \quad (44.1)$$

Вычисляя преобразование Фурье по переменной y от обеих частей равенства (44.1), получим

$$\frac{\partial h(x, k)}{\partial x} + kh(x, k) = \delta(x), \quad (44.2)$$

где

$$h(x, k) = F_{y \rightarrow k}[g(x, y)]. \quad (44.3)$$

Теорема 42.3 позволяет найти решение уравнения (44.2) в пространстве $D'(\mathbb{R})$

$$h_1(x, k) = e^{-kx}\theta(x).$$

Для того чтобы найти $g(x, y)$, нам потребуется взять обратное преобразование Фурье от $h_1(x, k)$. Поэтому нам необходимо найти фундаментальное решение уравнения (44.2) из пространства $S'(\mathbb{R})$ по переменной k . Общее решение уравнения (44.2) имеет вид

$$h(x, k) = \theta(x)e^{-kx} + C(k)e^{-kx},$$

где $C(k)$ – произвольная функция. Функцию $C(k)$ выбираем так, чтобы функция $h(x, k)$ убывала по k при всех x . Отсюда

$$\begin{cases} \theta(x) + C(k) = 0 & \text{при } x > 0, k < 0, \\ \theta(x) + C(k) = 0 & \text{при } x < 0, k > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C(k) = -\theta(x) = -1 & \text{при } x > 0, k < 0, \\ C(k) = -\theta(x) = 0 & \text{при } x < 0, k > 0. \end{cases}$$

В результате находим, что $C(k) = -\theta(-k)$ и

$$h(x, k) = (\theta(x) - \theta(-k))e^{-kx}.$$

Шаг 2. Из представления (44.3) находим фундаментальное решение оператора L

$$\begin{aligned} g(x, y) &= F_{k \rightarrow y}^{-1}[h(x, k)] = F_{k \rightarrow y}^{-1}\left[(\theta(x) - \theta(-k))e^{-kx}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\theta(x) - \theta(-k))e^{-kx}e^{-iky} dk = \\ &= \begin{cases} x < 0, & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} -\theta(-k)e^{-kx}e^{-iky} dk = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-k(x+iy)} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x+iy} \\ x \geq 0, & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 - \theta(-k))e^{-kx}e^{-iky} dk = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-k(x+iy)} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x+iy} \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x+iy}. \end{aligned}$$

Ответ: $g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x+iy}$.

Пример 44.3. Найти фундаментальное решение из пространства $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Фундаментальное решение оператора L удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} = \delta(x)\delta(y). \quad (44.4)$$

Вычисляя преобразование Фурье по переменной y от обеих частей равенства (44.4), получим

$$\frac{\partial^2 h(x, k)}{\partial x^2} + k^2 h(x, k) = \delta(x), \quad (44.5)$$

где

$$h(x, k) = F_{y \rightarrow k}[g(x, y)]. \quad (44.6)$$

Теорема 42.3 позволяет найти решение уравнения (44.5)

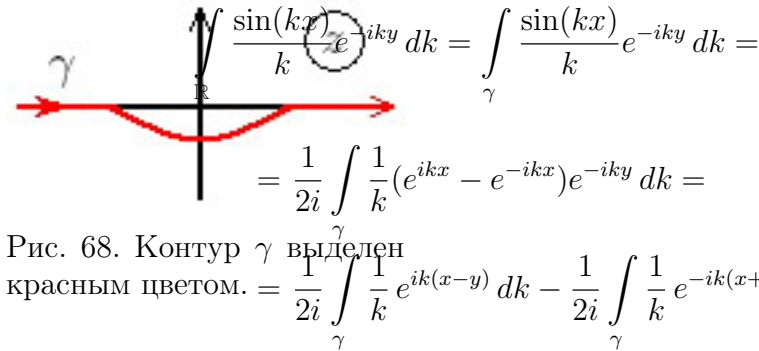
$$h(x, k) = \frac{\sin(kx)}{k} \theta(x).$$

Легко видеть, что это решение принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^2)$.

Шаг 2. Из представления (44.6) находим фундаментальное решение оператора L

$$g(x, y) = F_{k \rightarrow y}^{-1}[h(x, k)] = F_{k \rightarrow y}^{-1}\left[\frac{\sin(kx)}{k} \theta(x)\right] = \frac{1}{2\pi} \theta(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(kx)}{k} e^{-iky} dk. \quad (44.7)$$

Интеграл в правой части равенства (44.7) легко вычисляется по вычетам, см. стр. 57,



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\sin(kx)}{k} e^{-iky} dk &= \int_{\gamma} \frac{\sin(kx)}{k} e^{-iky} dk = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{1}{k} (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{-iky} dk = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{1}{k} e^{ik(x-y)} dk - \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{1}{k} e^{-ik(x+y)} dk = \end{aligned}$$

Рис. 68. Контур γ выделен красным цветом.

$$= \pi \theta(x-y) \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{1}{k} e^{ik(x-y)} \right) - \pi \theta(-x-y) \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{1}{k} e^{-ik(x+y)} \right) = \pi \theta(x-y) - \pi \theta(-x-y),$$

где контур интегрирования γ изображен на рисунке 68. Отсюда и из (44.7) найдем

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \theta(x) \left(\theta(x-y) - \theta(-x-y) \right) = \frac{1}{2} \theta(x - |y|).$$

Заметим, что мы могли вначале вычислить преобразование Фурье по переменной x . Тогда в качестве фундаментального решения мы нашли бы $g_2(x, y) = -\frac{1}{2} \theta(y - |x|)$. $\square$

Ответ: $g(x, y) = \frac{1}{2} \theta(x - |y|)$.

Пример 44.4. Найти частное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ – непрерывная функция по обоим аргументам.

Решение. Фундаментальное решение оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ найдено в примере 44.3. Отсюда

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (f * g)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} d\alpha \int_{\mathbb{R}} d\beta f(\alpha, \beta) \theta(x - \alpha - |y - \beta|) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x d\alpha \int_{y-(x-\alpha)}^{y+(x-\alpha)} d\beta f(\alpha, \beta). \quad \square \end{aligned}$$

Ответ: $u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x d\alpha \int_{y-(x-\alpha)}^{y+(x-\alpha)} d\beta f(\alpha, \beta).$

Домашнее задание:

Задача 44.5. Найти фундаментальное решение из $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

Ответ: $h(x, k) = \frac{i}{k+i0} \theta(x), g(x, y) = \theta(x)\theta(y).$

Задача 44.6. Найти фундаментальное решение из $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y}$.

Ответ: $h(x, k) = \frac{i}{k+i0} e^x \theta(x), g(x, y) = e^x \theta(x) \theta(y).$

45. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля.

Определение 45.1. Оператором Штурма-Лиувилля на промежутке $[a, b]$ называется оператор вида

$$Lu(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),$$

определенный на функциях $u(x)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{cases}$$

Здесь α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2$, $p(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, нигде не обращающаяся в ноль, и $q(x)$ – непрерывная функция.

Определение 45.2. Функцией Грина оператора Штурма-Лиувилля L называют обобщенную функцию $G(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y)$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y) = 0, \\ \alpha_2 G(b, y) + \beta_2 G'_x(b, y) = 0, \end{cases}$$

при $y \in (a, b)$.

Теорема 45.3. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля L существует тогда и только тогда когда однородная задача

$$Lu = 0, \quad \begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Пример 45.4. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u'', \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (45.1)$$

Решение. Из определения функции Грина следует, что при $x \neq y$ она должна удовлетворять однородному уравнению

$$G''_{xx}(x, y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x, y) = C_1(y) + C_2(y)x,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A(y)x, & x < y, \\ B(y)(x - 1), & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x, y)$

$$\begin{aligned} L_x G(x, y) &= - \left(\begin{cases} A(y)x, & x < y \\ B(y)(x - 1), & x > y \end{cases} \right)''_{xx} = \\ &= - \left(\begin{cases} A(y), & x < y \\ B(y), & x > y \end{cases} + [B(y)(y - 1) - A(y)y]\delta(x - y) \right)'_x = \\ &= [A(y) - B(y)]\delta(x - y) - [B(y)(y - 1) - A(y)y]\delta'_x(x - y). \end{aligned}$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_x G(x, y) = \delta(x - y)$, найдем

$$\begin{cases} A(y) - B(y) = 1, \\ B(y)(y - 1) - A(y)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = 1 - y, \\ B(y) = -y. \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора (45.1) имеет вид

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1 - y), & x \leq y, \\ (1 - x)y, & x > y. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $G(x, y) = \begin{cases} x(1 - y), & x \leq y, \\ (1 - x)y, & x > y. \end{cases}$

Пример 45.5. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -(e^{-x}u')', \quad u'(0) = u(1) = 0. \quad (45.2)$$

Решение. Из определения функции Грина следует, что при $x \neq y$ она должна удовлетворять однородному уравнению

$$(e^{-x}G'_x)'(x, y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x, y) = C_1(y) + C_2(y)e^x,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A(y), & x < y, \\ B(y)(e^{x-1} - 1), & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x, y)$

$$\begin{aligned} L_x G(x, y) &= - \left(\begin{cases} A(y), & x < y, \\ B(y)(e^{x-1} - 1), & x > y, \end{cases} \right)''_{xx} = \\ &= - \left(\begin{cases} 0, & x < y, \\ B(y)e^{x-1}, & x > y, \end{cases} + [B(y)(e^{y-1} - 1) - A(y)]\delta(x - y) \right)'_x = \\ &= -B(y)e^{y-1}\delta(x - y) - [B(y)(e^{y-1} - 1) - A(y)]\delta'_x(x - y). \end{aligned}$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_x G(x, y) = \delta(x - y)$, найдем

$$\begin{cases} -B(y)e^{y-1} = 1, \\ B(y)(e^{y-1} - 1) - A(y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = e^{1-y} - 1, \\ B(y) = -e^{1-y}. \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора (45.2) имеет вид

$$G(x, y) = \begin{cases} e^{1-y} - 1, & x \leq y, \\ (1 - e^{x-1})e^{1-y}, & x > y. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $G(x, y) = \begin{cases} e^{1-y} - 1, & x \leq y, \\ (1 - e^{x-1})e^{1-y}, & x > y. \end{cases}$

Пример 45.6. Выяснить существует ли функция Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u'', \quad u'(0) + u(0) = u(1) = 0. \quad (45.3)$$

Решение. Однородная задача

$$-u'' = 0, \quad u'(0) + u(0) = u(1) = 0$$

имеет нетривиальное решение $u(x) = x - 1$. Поэтому из теоремы 45.3 следует, что у оператора (45.3) функции Грина не существует. $\square$

Ответ: У оператора (45.3) функции Грина не существует.

Домашнее задание:

Задача 45.7. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u'', \quad u(0) = u'(2) = 0.$$

Ответ: $G(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & x > y. \end{cases}$

Задача 45.8. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u'' - u, \quad u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ответ: $G(x, y) = \begin{cases} \sin(x) \cos(y), & x \leq y, \\ \cos(x) \sin(y), & x > y. \end{cases}$

Задача 45.9. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u'' + u, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Ответ: $G(x, y) = -\frac{1}{\operatorname{sh} 1} \begin{cases} \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y - 1), & x \leq y, \\ \operatorname{sh}(x - 1) \operatorname{sh}(y), & x > y. \end{cases}$

46. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля (продолжение).

Пример 46.1. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u'' + 4u, \quad u(0) = u(+\infty) = 0. \quad (46.1)$$

Решение. Из определения функции Грина следует, что при $x \neq y$ она должна удовлетворять однородному уравнению

$$G''_{xx}(x, y) - 4G(x, y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x, y) = C_1(y)e^{2x} + C_2(y)e^{-2x},$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A(y)(e^{2x} - e^{-2x}), & x < y, \\ B(y)e^{-2x}, & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x, y)$

$$\begin{aligned} L_x G(x, y) &= - \left(\begin{cases} A(y)(e^{2x} - e^{-2x}), & x < y \\ B(y)e^{-2x}, & x > y \end{cases} \right)''_{xx} = \\ &= - \left(\begin{cases} 2A(y)(e^{2x} + e^{-2x}), & x < y \\ -2B(y)e^{-2x}, & x > y \end{cases} + [B(y)e^{-2y} - A(y)(e^{2y} - e^{-2y})]\delta(x - y) \right)'_x = \\ &= [2B(y)e^{-2y} + 2A(y)(e^{2y} + e^{-2y})]\delta(x - y) - [B(y)e^{-2y} - A(y)(e^{2y} - e^{-2y})]\delta'_x(x - y). \end{aligned}$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_x G(x, y) = \delta(x - y)$, найдем

$$\begin{cases} 2B(y)e^{-2y} + 2A(y)(e^{2y} + e^{-2y}) = 1 \\ B(y)e^{-2y} - A(y)(e^{2y} - e^{-2y}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = \frac{1}{4}e^{-2y}, \\ B(y) = \frac{1}{4}(e^{2y} - e^{-2y}). \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора (46.1) имеет вид

$$G(x, y) = \frac{1}{4} \begin{cases} (e^{2x} - e^{-2x})e^{-2y}, & x \leq y, \\ e^{-2x}(e^{2y} - e^{-2y}), & x > y. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $G(x, y) = \frac{1}{4} \begin{cases} (e^{2x} - e^{-2x})e^{-2y}, & x \leq y, \\ e^{-2x}(e^{2y} - e^{-2y}), & x > y. \end{cases}$

Пример 46.2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -(xu')', \quad |u(0)| < \infty, \quad u(1) = 0. \quad (46.2)$$

Решение. Из определения функции Грина следует, что при $x \neq y$ она должна удовлетворять однородному уравнению

$$(xG'_x)'_x(x, y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x, y) = C_1(y) + C_2(y) \ln x,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A(y), & x < y, \\ B(y) \ln x, & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x, y)$

$$\begin{aligned} L_x G(x, y) &= - \left(x \left(\begin{cases} A(y), & x < y \\ B(y) \ln x, & x > y \end{cases} \right)' \right)'_x = \\ &= - \left(\begin{cases} 0, & x < y \\ B(y), & x > y \end{cases} + [B(y)y \ln y - A(y)y] \delta(x - y) \right)'_x = \\ &= -B(y) \delta(x - y) - [B(y)y \ln y - A(y)y] \delta'_x(x - y). \end{aligned}$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_x G(x, y) = \delta(x - y)$, найдем

$$\begin{cases} -B(y) = 1, \\ B(y)y \ln y - A(y)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = -\ln y, \\ B(y) = -1. \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора (46.2) имеет вид

$$G(x, y) = - \begin{cases} \ln y, & x \leq y, \\ \ln x, & x > y. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $G(x, y) = \begin{cases} \ln y, & x \leq y, \\ \ln x, & x > y. \end{cases}$

Домашнее задание:

Задача 46.3. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u'', \quad u(0) = 0, \quad |u(+\infty)| < \infty.$$

Ответ: $G(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & x > y. \end{cases}$

Задача 46.4. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -(x^2 u')' + 2u, \quad u(0) = 0, \quad |u(+\infty)| < \infty.$$

Ответ: $G(x, y) = \frac{1}{3} \begin{cases} x, & x \leq y, \\ x^{-2} y^3, & x > y. \end{cases}$

Задача 46.5. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u'' + u', \quad u(-\infty) = 0, \quad |u(+\infty)| < \infty.$$

Ответ: $G(x, y) = \begin{cases} e^{x-y}, & x \leq y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$

47. Решение неоднородной задачи Штурма-Лиувилля с использованием функции Грина.

Теорема 47.1. Пусть $G(x, y)$ – функция Грина оператора Штурма-Лиувилля L и $f(x)$ – абсолютно интегрируемая функция на интервале (a, b) . Тогда решение задачи

$$Lu(x) \equiv -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad \begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{cases}$$

существует, единственно и может быть найдено по формуле

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy. \quad (47.1)$$

Пример 47.2. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$Lu = u'' = 2, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (47.2)$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Функция Грина оператора L удовлетворяет следующей задаче

$$G''_{xx}(x, y) = \delta(x - y), \quad G(0, y) = G(1, y) = 0.$$

Используя результат примера 45.1, найдем функцию Грина

$$G(x, y) = \begin{cases} x(y - 1), & x \leq y, \\ (x - 1)y, & x > y. \end{cases}$$

Шаг 2. Используя формулу (47.1), найдем решение задачи (47.2)

$$u(x) = 2 \int_0^1 G(x, y) dy = 2 \int_0^x (x - 1)y dy + 2 \int_x^1 x(y - 1) dy = (x - 1)x^2 - x(x - 1)^2 = x^2 - x. \quad \square$$

Ответ: $u(x) = x^2 - x$.

Пример 47.3. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$Lu = u'' - u' = e^x, \quad u(0) = u'(1) = 0. \quad (47.3)$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Функция Грина оператора L удовлетворяет следующей задаче

$$G''_{xx}(x, y) - G'_x(x, y) = \delta(x - y), \quad G(0, y) = G'_x(1, y) = 0.$$

Функция Грина $G(x, y)$ при $x \neq y$ удовлетворяет однородному уравнению

$$G''_{xx}(x, y) - G'_x(x, y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x, y) = C_1(y) + C_2(y)e^x,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A(y)(e^x - 1), & x < y, \\ B(y), & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x, y)$

$$\begin{aligned}
 L_x G(x, y) &= \left(\left\{ \begin{array}{ll} A(y)(e^x - 1), & x < y \\ B(y), & x > y \end{array} \right\} \right)''_{xx} - \left(\left\{ \begin{array}{ll} A(y)(e^x - 1), & x < y \\ B(y), & x > y \end{array} \right\} \right)'_x = \\
 &= \left(\left\{ \begin{array}{ll} A(y)e^x, & x < y \\ 0, & x > y \end{array} \right\} + [B(y) - A(y)(e^y - 1)]\delta(x - y) \right)'_x - \\
 &- \left\{ \begin{array}{ll} A(y)e^x, & x < y \\ 0, & x > y \end{array} \right\} - [B(y) - A(y)(e^y - 1)]\delta(x - y) = \\
 &= -A(y)e^y\delta(x - y) + [B(y) - A(y)(e^y - 1)]\delta'(x - y) - [B(y) - A(y)(e^y - 1)]\delta(x - y) = \\
 &= [-A(y) - B(y)]\delta(x - y) - [B(y) - A(y)(e^y - 1)]\delta'_x(x - y).
 \end{aligned}$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_x G(x, y) = \delta(x - y)$, найдем

$$\begin{cases} -A(y) - B(y) = 1, \\ B(y) - A(y)(e^y - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = -e^{-y}, \\ B(y) = e^{-y} - 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора L имеет вид

$$G(x, y) = \begin{cases} (1 - e^x)e^{-y}, & x \leq y, \\ e^{-y} - 1, & x > y. \end{cases}$$

Шаг 2. Используя формулу (47.1), найдем решение задачи (47.3)

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_0^1 G(x, y)e^y dy = \int_0^x (e^{-y} - 1)e^y dy + \int_x^1 (1 - e^x)e^{-y}e^y dy = \\
 &= 1 + x - e^x + (1 - e^x)(1 - x) = xe^x - 2e^x + 2. \quad \square
 \end{aligned}$$

Ответ: $u(x) = xe^x - 2e^x + 2$.

Пример 47.4. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$Lu = -u'' + 4u = e^{-x}, \quad u(0) = u(+\infty) = 0. \quad (47.4)$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Функция Грина оператора L удовлетворяет следующей задаче

$$-G''_{xx}(x, y) + 4G(x, y) = \delta(x - y), \quad G(0, y) = G(\infty, y) = 0.$$

Функция Грина $G(x, y)$ найдена в примере 46.1

$$G(x, y) = \frac{1}{4} \begin{cases} (e^{2x} - e^{-2x})e^{-2y}, & x \leq y, \\ e^{-2x}(e^{2y} - e^{-2y}), & x > y. \end{cases}$$

Шаг 2. Используя формулу (47.1), найдем решение задачи (47.4)

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_0^\infty G(x, y)e^{-y} dy = \frac{1}{4} \int_0^x e^{-2x}(e^{2y} - e^{-2y})e^{-y} dy + \frac{1}{4} \int_x^\infty (e^{2x} - e^{-2x})e^{-2y}e^{-y} dy = \\
 &= \frac{1}{4}e^{-2x} \int_0^x (e^y - e^{-3y}) dy + \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) \int_x^\infty e^{-3y} dy = \frac{1}{3}(e^{-x} - e^{-2x}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Ответ: $u(x) = \frac{1}{3}(e^{-x} - e^{-2x})$.

Домашнее задание:

Задача 47.5. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$u'' = 6x, \quad u'(0) = u(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = x^3 - 1$.

Задача 47.6. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$(e^x u')' = 1, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = -xe^{-x}$.

Задача 47.7. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$-(x^3 u')' = 4 - 3x^2, \quad u(1) = u'(2) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{4}{x} + x - 5$.

Задача 47.8. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$(x^2 u')' = 2x, \quad u(1) = u(2) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{2}{x} + x - 3$.

Задача 47.9. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$x^2 u'' - 2u = 48x - 24, \quad 2u(1) - u'(1) = u(2) + 2u'(2) = 0.$$

Ответ: $u(x) = 7x^2 - 24x + 12$.

48. 5-ая контрольная работа (2 часа).

Вариант контрольной работы №5.

- (1) Найти 2-ую обобщенную производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & x \in (0, 1], \\ 2x - 1, & x \in (1, 2], \\ 1, & x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Ответ:

$$f''(x) = -\delta(x) - 2\delta(x-2) - 2\delta'(x-2) + \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ 2, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in (1, 2], \\ 0, & x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

- (2) Найти свертку (использовать преобразование Фурье)

$$\sin(2x) * \delta''(x).$$

Ответ: $\sin(2x) * \delta''(x) = -4 \sin(2x)$.

- (3) Найти общий вид решения уравнения в D'

$$(x+1)y' = P \frac{1}{x} + \delta(x).$$

Ответ: $y(x) = \ln|x| - \ln|x+1| + \theta(x) + C_1 + C_2\theta(x+1)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

- (4) Найти общий вид решения уравнения в S'

$$y' - 2iy = \delta(x).$$

Ответ: $y(x) = e^{2ix}\theta(x) + Ce^{2ix}$, где C – произвольная постоянная.

- (5) Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$\left(\frac{1}{1+2x} u' \right)' = 6, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$.

- (6) Найдите и объясните ошибку в цепочке равенств $\delta(x) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x)xP_x^1 = 0 \cdot P_x^1 = 0$.