Программа курса ММФ1 (4 семестр, 2013).

1. Комплексные числа. Различные представления. Свойства операций. Геометрическая интерпретация. Неравенства треугольника.
2. Последовательности комплексных чисел. Сходимость. Предел. Алгебраические свойства пределов. Условия сходимости. Критерий Коши. Теорема Вейерштрасса. Расширенная комплексная плоскость и ее геометрическая интерпретация (сфера Римана). Компактность расширенной комплексной плоскости.
3. Комплекснозначные функции действительного переменного. Предел. Непрерывность. Производная. Интеграл. Непрерывные и гладкие кривые. Простые кривые. Замкнутые кривые.
4. Области. Границы. Ориентация границы. Односвязные и многосвязные области. Теорема Жордана.
5. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Геометрическая интерпретация.
6. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Голоморфные функции. Правила дифференцирования. Условия Коши-Римана в декартовых и полярных координатах.
7. Функции комплексного переменного как отображения. Однолистность. Обратная функция. Примеры: $w = az + b$; $w = \frac{1}{z}$; $w = z^2$; $w = \sqrt{z}$; $w = e^z$; $w = \ln z$.
8. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного: сохранение углов между кривыми и постоянство растяжений. Локальная и глобальная однолистность. Конформные отображения.
9. Дробно-линейная функция. Однолистность в расширенной комплексной области. Угол между кривыми в бесконечно удаленной точке. Конформность в расширенной комплексной области. Групповое свойство дробно-линейных отображений. Круговое свойство. Сохранение симметрии. Неподвижные точки.
10. Дробно-линейное отображение, переводящее три различные точки в три различные точки. Его единственность. Инвариант дробно-линейных отображений (двойное отношение четырех точек). Общий вид дробно-линейного преобразования с двумя различными неподвижными точками. Общий вид дробно-линейного отображения верхней полуплоскости на единичный круг.
11. Функция Жуковского. Критерий однолистности. Отображение лучей и окружностей. Функция обратная к функции Жуковского. Примеры областей однолистности.
12. Интегрирование функции комплексного переменного. Пример: $\int_\gamma dz$. Связь с криволинейными интегралами от действительных функций. Свойства интеграла. Интеграл $\int_\gamma (z-a)^n dz, n \in Z, \gamma : z = a + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Интеграл $\int_\gamma z^n dz, n \neq -1$. Оценки интегралов.

13. Интегральная теорема Коши. Обобщение теоремы Коши на случай многосвязной области (интеграл по границе области). Непрерывная деформация кривой в области. Независимость интеграла от пути интегрирования.
14. Существование первообразной голоморфной функции в односвязной области. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям. Случай многосвязной области.
15. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Гармонические функции. Теорема о среднем для гармонических функций.
16. Интеграл типа Коши. Теорема о голоморфности функции представляемой интегралом типа Коши. Бесконечная дифференцируемость голоморфной функции. Теорема Лиувилля. Теорема Морера.
17. Ряды функций комплексного переменного. Сходимость. Абсолютная сходимость. Равномерная сходимость. Теорема о непрерывности суммы ряда. Признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Возможность почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Возможность почленного дифференцирования равномерно сходящегося ряда голоморфных функций (теорема Вейерштрасса).
18. Степенные ряды. Теорема Абеля. Голоморфность суммы степенного ряда. Степенной ряд – это ряд Тейлора своей суммы. Регулярные функции. Регулярность голоморфной функции. Радиус круга сходимости степенного ряда голоморфной функции.
19. Регулярность в бесконечности. Нули регулярной функции. Порядок нуля. Изолированность нулей регулярной функции.
20. Ряд Лорана. Голоморфность суммы ряда Лорана в кольце. Представимость функции голоморфной в кольце сходящимся рядом Лорана. Единственность разложения голоморфной в кольце функции в ряд Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
21. Изолированные особые точки однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка. Связь между главной частью ряда Лорана и типом особой точки. Теоремы Сохоцкого и Пикара.
22. Определение вычета. Формула для вычисления вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удаленной точке. Основная теорема теории вычетов. Теорема о сумме всех вычетов.
23. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Интегралы типа $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$.
24. Лемма Жордана. Интегралы типа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\exp(i\alpha x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)dx$.
25. Интегралы Френеля $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$, $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx$. Интеграл Эйлера-Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\cos(2hx)dx$.

26. Интегралы от ветвей многозначных функций на примере $\int\limits_0^{+\infty} R(x)x^{\alpha-1}dx$.

27. Теорема единственности. Аналитическое продолжение. Единственность аналитического продолжения. Аналитическое продолжение соотношений на примерах.

28. Понятие о полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса. Пример аналитической функции: логарифмическая функция $w = \ln z$. Алгебраические и логарифмические точки ветвления. Выделение однозначных голоморфных ветвей.

29. Теорема о голоморфности интеграла зависящего от параметра. Возможность дифференцирования под знаком интеграла. Случай несобственных интегралов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов.

30. Определение преобразования Лапласа. Оригинал. Область регулярности изображения. Поведение в бесконечности. Линейность. Подобие. Дифференцирование оригинала и изображения. Интегрирование оригинала и изображения. Запаздывание оригинала. Смещение изображения. Изображение свертки.

31. Изображения некоторых элементарных функций: t^n, $\exp(\lambda t)$, $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, $t^n \exp(\lambda t)$, $t\cos(\omega t)$, $t\sin(\omega t)$. Формула обращения преобразования Лапласа. Первая и вторая теоремы разложения. Пример: изображение функции Бесселя нулевого порядка.