Mathematica 4.0

Занятие №5

29 ноября 2004 г.

Аннотация

На данном занятии необходимо познакомится с функциями, осуществляющими аналитические преобразования выражений.

Работа с аналитическими выражениями

Задание №1

Реализуйте с помощью «Математики» следующий способ решения уравнения четвертой степени $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x = -1$. Сначала обе части уравнения делятся на x^2, затем вводится новое неизвестное y, связанное с x соотношением $y = x + 1/x$. Относительно y получается квадратное уравнение. Находятся его решения, а затем x. Проверьте правильность полученных таким способом корней исходного уравнения с помощью их подстановки в это уравнение.

Задание №2

Является ли многочлен $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ точным квадратом, т.е. можно ли подобрать три числа p, q и r так, чтобы имело место тождество $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$?

Задание №3

Убедитесь, что многочлен $x^2 + y^2 + z^2$ нельзя представить в виде произведения $(ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$ ни при каких вещественных или комплексных числах a, b, c, A, B, C.

Задание №4

Дан прямоугольный ящик с длинами сторон x, y z. Найти наибольший объем данного ящика, при условии, что площадь поверхности его равна a.

Задание №5

Дано уравнение: $y = a \exp\left(-b(r - r_0)^2\right)$. Решить данное уравнение при помощи перегруппировки его частей, как руками, без помощи функции **Solve**.

Задание №6

Преобразовать матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

в список уравнений.

Задание №7

Преобразовать систему линейных уравнений к виду матричной системы. Вычислить матрицу коэффициентов и вектор правых частей для системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot x + 2 \cdot b \cdot y - z & = & 1, \\ 2 \cdot x + 3 \cdot b \cdot z + y & = & 2 \cdot b, \\ -3 \cdot b \cdot x - 2 \cdot c \cdot y & = & c \end{cases}$$

Задание №8

Не пользуясь встроенными функциями вручную решить нелинейное уравнение:

$$\frac{2}{x-14} - \frac{5}{x-13} = \frac{2}{x-9} - \frac{5}{x-11}.$$

Задание №9

Иногда бывает так, что встроенная функция **DSolve** не может решить неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение, хотя может решить соответствующее однородное уравнение. В этом случае возможно получить решение однородного обыкновенного уравнения при помощи функции **DSolve**, а затем при помощи метода вариации постоянной получить решение неоднородного уравнения. Решить таким способом уравнение

$$y'' + x \cdot y' + y = 3 \cdot x^2 + 2.$$

сравнить полученное решение с решением полученным при помощи функции **DSolve**.

Задание №10

Во многих случаях невозможно найти аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения в терминах элементарных функций. В этом случае возможно найти приближенное решение в виде ряда Тейлора в районе некоторой точки. При помощи разложения в ряд найти решение уравнения обыкновенного гармонического осциллятора с частотой ω:

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

В качестве начальных условий примем, что во время $t = 0$ осциллятор находится в положении $x = 1$ и имеет скорость $x'(0) = 0$.

Задание №11

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим применение системы *Mathematica* для построения приближенного аналитического решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Подобные методы появились задолго до возникновения компьютерной техники, но с ее появлением были несколько оттеснены в сторону численными методами, для которых компьютер является идеальным средством реализации, так как работает с числовым представлением функций, а не их аналитическим выражением. Системы аналитических вычислений позволяют достаточно просто реализовывать не только численные решения разнообразных задач, но и строить их приближенные аналитические решения.

Метод Галеркина. Из большого количества приближенных аналитических методов разберем метод Галеркина, так как он широко применяется для реализации многих численных методов.

Сформулируем общую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка: найти решение дифференциального уравнения

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \qquad a \le x \le b,$$

удовлетворяющее двум краевым условиям

$$l_0 u \equiv \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = \gamma_0,$$

$$l_1 u \equiv \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1,$$

где p, q и f являются непрерывными функциями переменной x на интервале ее изменения $[a, b]$, а α_i, β_i и γ_i — некоторые заданные числа, причем некоторые из них могут равняться нулю, но не все одновременно.

Для нахождения приближенного решения краевой задачи на отрезке $[a, b]$ задают некоторую линейно независимую систему дважды непрерывно дифференцируемых функций φ_0, φ_1, $\ldots, \varphi_n, \ldots$ таких, что функция φ_0 удовлетворяет заданным краевым условиям

$$l_0 \varphi_0 = \gamma_0,$$

$$l_1 \varphi_0 = \gamma_1,$$

а остальные функции системы при $i = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют однородным краевым условиям

$$l_0 \varphi_i = 0,$$

$$l_1 \varphi_i = 0.$$

Эта система функций называется базисной.

Приближенное решение краевой задачи ищется в виде линейной комбинации $n + 1$ базисных функций:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

с неизвестными коэффициентами a_i, $i = 1 \ldots n$, которые находятся из выполнения некоторого критерия. Следует отметить, что построенное таким способом приближенное решение в силу выбора базисных функций точно удовлетворяет краевым условиям задачи.

В методе Галеркина в качестве критерия для определения неопределенных коэффициентов приближенного решения выбирается требование ортогональности базисных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ к функции невязки $\Psi(x; a_1, \ldots, a_n)$, представляющей разность левой и правой частей обыкновенного дифференциального уравнения при подстановке в него приближенного решения:

$$\Psi(x; a_1, \ldots, a_n) = Ly_n - f(x) = L\varphi_0(x) - f(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k L\varphi_k(x).$$

Под ортогональностью понимается равенство нулю скалярного произведения невязки и базисных функций:

$$\int_a^b \Psi(x; a_1, \ldots, a_n)\varphi_i(x)\, dx = 0.$$

Это требование приводит к линейной системе алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_i приближенного решения y_n:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1(L\varphi_1, \varphi_1) + \ldots + a_n(L\varphi_n, \varphi_1) & = & (f - L\varphi_0, \varphi_1), \\ a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + \ldots + a_n(L\varphi_n, \varphi_2) & = & (f - L\varphi_0, \varphi_2), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_1(L\varphi_1, \varphi_n) + \ldots + a_n(L\varphi_n, \varphi_n) & = & (f - L\varphi_0, \varphi_n). \end{array}\right.$$

Решение этой системы всегда существует и единственно в силу линейной независимости базисных функций.

Необходимо отметить основную трудность этого метода — выбор линейно независимой системы базисных функций, удовлетворяющей граничным условиям.

Задание Решить методом Галеркина краевую задачу:

$$y''(x) + y(x) = -x, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Замечание: в качестве системы базисных функций выбрать такую систему:

$$\varphi_0(x) = 0, \qquad \varphi_i(x) = x^i(1-x), i = 1, 2, \dots$$

Функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям краевой задачи, а функция $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ — однородным граничным условиям.

Получить точное аналитическое решение задачи при помощи встроенной функции системы. Построить приближенные аналитические решения, в которых удержано один, два, три, четыре и т.д. члена решения. При помощи графиков и таблиц посмотреть, как они согласуются с точным аналитическим решением задачи.