

# Mathematica 4.0

## Занятие №4

7 декабря 2008 г.

### Аннотация

На данном занятии необходимо изучить встроенные функции системы *Mathematica*, предназначенные для численного и символьного решения «стандартных вычислительных» задач.

## Операции математического анализа

### Вычисление с заданной точностью

#### Задание №1

Вычислить длину окружности заданного радиуса  $R$ . Значение  $R$  получить в диалоговом режиме с помощью функции **Input**. Вычисления провести с 20 значащими цифрами, а результат вычислений вывести на экран с 17 значащими цифрами.

### Вычисление сумм

#### Задание №2

Аналитически вычислить сумму вида

$$\sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}$$

При помощи правил подстановки получить аналитическое и численное (с 18 верными знаками) значение этой суммы для следующий пар значений:  $x = 10, n = 5$ ;  $x = 11, n = 6$ ;  $x = 12, n = 7$ ;  $x = 13, n = 8$ ;  $x = 14, n = 9$ ;  $x = 15, n = 10$ .

#### Задание №3

Модифицированную функцию Бесселя  $I_1(x)$  можно представить в виде бесконечного ряда:

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+1}}{k! (k+1)!}$$

Написать функцию пользователя, которая по этой формуле численно вычисляет значение модифицированной функции Бесселя первого порядка. Результат вычислений сравнить со встроенной функцией Бесселя. Результат вычислений представить в виде таблицы:

Аргумент:	5.
Функция пользователя:	24.3356
Встроенная функция:	24.3356
Абсолютная ошибка:	$3.55271 \times 10^{-15}$

## Вычисление произведений

### Задание №4

Аналитически вычислить произведение вида

$$\prod_{n=2}^{31} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Получить абсолютно точный ответ и его приближенное (с 18 верными знаками) значение.

### Задание №5

Численно вычислить произведение

$$\prod_{n=1}^{33} \cosh\left(\frac{1}{1^n}\right)$$

## Вычисление производных

### Задание №6

Найти первую производную параметрически заданной функции  $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ .

$$\rho = \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\alpha} + 1\right) \cdot \alpha, \quad \theta = \sqrt{\alpha} \cdot e^{\sqrt{\alpha}}$$

### Задание №7

Неявная функция  $y(x)$  определяется уравнением  $x \cdot y^3 - (x+1)^2 \cdot y + 3 = 0$  и условием  $y(0) = 3$ . Найдите значения первой и второй производной функции  $y(x)$  при  $x = 0$ .

### Задание №8

Получить в наиболее простом виде аналитическое выражения для первой производной следующей функции:

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

Написать функция пользователя, которая получает два числа — значение аргумента  $x$  и порядков производной  $n$ , и возвращает численное значение  $n$ -той производной функции  $y$  в точке  $x$ .

### Задание №9

Найти  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ , если:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3(t) \\ y = a \cdot \sin^3(t) \end{cases}$$

Построить график функции  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$  при  $a = 0.1$ .

### Задание №10

Используя тот факт, что если  $\Delta x$  мало по абсолютной величине, то  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$  вычислить приближенное значение  $\arcsin(0,51)$ . Сравнить полученное значение с результатом прямого вычисления.

### Задание №11

Показать, что функция  $z = y^{y/x} \sin\left(\frac{y}{x}\right)$  удовлетворяет уравнению:

$$x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot z.$$

#### Задание №12

Задана функция  $r = \rho^2 \cdot \sin^4(\theta)$ . Найти:  $\frac{\partial r}{\partial \rho}$  и  $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ .

#### Задание №13

Пусть заданы функции:  $x = \rho \cdot \cos(\theta)$ ,  $y = \rho \cdot \sin(\theta)$ . С помощью функции **Outer** организовать вычисление:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

#### Задание №14

Пусть задана функция  $z = \arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ . Найти полный дифференциал заданной функции  $dz$ .

#### Задание №15

Приблизительно вычислить значение  $\sqrt{\sin^2(1,55) + 8 \cdot e^{0,015}}$ , исходя из значения функции  $z = \sqrt{\sin^2(x) + 8 \cdot e^y}$  при  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = 0$ .

#### Задание №16

Пусть задана функция  $z = y \cdot \ln(x)$ . Найти:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

#### ЗАМЕЧАНИЕ:

Если функция  $f(x, y)$  дифференцируема, то производная в направлении вектора  $\vec{e}$  вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin(\alpha),$$

где  $\alpha$  — угол, образованный вектором  $\vec{e}$  с осью  $ox$ .

Градиентом функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M(x, y)$  называется вектор, выходящий из точки  $M$  и имеющий своими координатами частные производные функции  $z$ :

$$\overrightarrow{\text{grad}(z)} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}.$$

#### Задание №17

Найти производную функции  $z = x^2 - y^2$  в точке  $M(1, 1)$  в направлении  $\vec{e}$ , составляющем угол  $\alpha = 60^\circ$  с положительным направлением оси  $ox$ .

#### Задание №18

Найти величину и направление градиента функции  $u = \tan(x) - x + 3 \cdot \sin(y) - \sin^3(y) + z + \cot(z)$  в точке  $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

#### Задание №19

Функция  $z(x, y)$  определяется как неявная функция уравнением  $z^5 - x \cdot z + y^2 \cdot z^2 - 1 = 0$  и условием  $z(0, 0) = 1$ . Найдите значения первых производных этой функции в точке  $(0, 0)$ .

## Вычисление пределов функции

### Задание №20

Исходя из определения производной (не пользуясь формулами дифференцирования), найти производную функции  $y = 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 4$ .

## Вычисление интегралов

### Задание №21

Среднее значение функции  $f$  на интервале  $[a, b]$  может быть вычислено по формуле:

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Вычислить среднее значение функций

$$f(x) = 10 + 2 \sin(x) + 3 \cos(x)$$

$$g(x) = \sin(x) \sin(x + \varphi)$$

на интервале  $[0, 2\pi]$ .

### Задание №22

Среднее значение функции  $f$  на интервале  $[0, +\infty)$  может быть вычислено по формуле:

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi$$

Вычислить среднее значение функции

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$$

### Задание №23

Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}}$$

### Задание №24

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах:

$$y = x^2, \quad x + y = 2.$$

### Задание №25

Площадь фигуры, заданной в параметрическом виде можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными параметрически:

$$x = a \cos t, \quad y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}.$$

### Задание №26

Площадь кривой  $r = r(\varphi)$ , заданной в полярных координатах и двумя полупрямыми  $\varphi = \alpha$  и  $\varphi = \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) может быть записана в виде

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Найти площадь, ограниченной кривой

$$r = a \sin(3\varphi) \text{ (трилистник).}$$

### Задание №27

Найдите численно длину отрезка кривой  $4 \cdot y^2 = (x - 1)^5$ , заключенного внутри параболы  $y^2 = x$ . Используйте функцию **ImplicitPlot** директории Graphics и встроенную функцию **NIntegrate**.

## Решение уравнений и их систем

### Задание №28

Используя функцию **FindRoot** системы *Mathematica* при помощи метода Ньютона найти несколько численных решений уравнения

$$1 - 2 \cdot |\sin(\pi x)| = 0.$$

Выполнить проверку.

### Задание №29

Численно решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + 2y &= 1.6, \\ \cos(y - 1) + x &= 1. \end{cases}$$

Выполнить проверку.

### Задание №30

Найти численные решения системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^3 &= 5, \\ \sin(x) \cdot y^3 + \ln(z) &= 7 \cdot z, \\ \exp(-x) - y - z &= 4. \end{cases}$$

Выполнить проверку.

## Решение дифференциальных уравнений

### Задание №31

Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' &= x + 2y + 16t \exp(t), \\ y' &= 2x - 2y. \end{cases}$$

Найти ее аналитическое решение. Получить выражения констант интегрирования в зависимости от значений  $x(0)$ ,  $y(0)$ . Найти решение системы при  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ . Построить решения при  $t \in [0, 1]$ .

### Задание №32

Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$$

с начальными условиями  $x(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 0.5$ . Численно решить систему уравнений на интервале  $0 \leq t \leq 2$ . Сравнить результаты с аналитическим решением. Построить графики  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $y(x)$ .

### Задание №33

Найдите численное решение задачи Коши для следующей системы Лоренца трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = -3 \cdot (x(t) - y(t)), \\ y'(t) = -x(t) \cdot z(t) + 30 \cdot x(t) - y(t), \\ z'(t) = x(t) \cdot y(t) - z(t). \end{cases}$$

для промежутка времени  $t \approx 30$  при помощи встроенной функции **NDSolve**. Начальные значения для интегрирования принять равными  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $z(0) = 0$ . Результат использовать для наглядного представления траектории. Рисунок демонстрирует наличие так называемого «странный аттрактора» у траекторий системы Лоренца. Исследуйте, как изменится рисунок в зависимости от изменений коэффициентов 3 и 30, а также от интервала интегрирования. Сколько времени занимает численное интегрирование на вашем компьютере? Для определения времени расчета можно воспользоваться функцией **Timing**.

### Задание №34

Используя стандартные средства пакета *Mathematica*, найти решение краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ 0 < x < 4, \quad 0 < t < 6, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad u(4, t) = \psi(t). \end{aligned}$$

Пусть заданы  $F(x, t) = 0$ ,  $a^2 = 1$ ,  $f(x) = \sin \pi x / 4$  и  $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ . Построить график решения. Построить график решения, соответствующий решению при  $x = 2$ . Построить график решения для выбранного момента времени  $t$  ( $t = 1$ ). Построить на одном рисунке графики решений для различных моментов времени  $t = 0.5$ ,  $t = 1.0$ ,  $t = 1.5$  и  $t = 2.0$ .

## Оптимизационные задачи

### Задание №35

Найти положение локального минимума функции

$$f(x) = x + \frac{3}{x^2}$$

на интервале  $x \in [0.5, 3]$  двумя способами. Сравнить результаты.

### Задание №36

На параболе  $y = x^2$  найти точку, которая ближе всех к точке  $(3, 1)$ . Построить рисунок.

### Задание №37

Найти все локальные минимумы и локальные максимумы функции

$$f(x, y) = 0.02 \sin(x) \sin(y) - 0.03 \sin(2x) \sin(y) + 0.04 \sin(x) \sin(2y) + 0.08 \sin(2x) \sin(2y)$$

в квадрате  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ .

## Разложение в ряды

### Задание №38

При каком подборе коэффициентов  $a$  и  $b$  величина

$$x - (a + b \cos(x)) \sin(x)$$

будет бесконечно малой 5-го порядка относительно  $x$ ?

### Задание №39

При каких коэффициентах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  справедлива при  $x \rightarrow 0$  асимптотическая формула:

$$\exp(x) = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + O(x^5)$$

### Задание №40

Используя разложения найти предел. Сравнить результат с встроенной функцией вычисления предела.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^{\sin(x)}(x)}{x^3}$$

### Задание №41

Погрешность приближенного равенства

$$\exp(x) \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

$0 < x < n + 1$  может быть записана как

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \frac{x}{n + 1 - x}.$$

Вычислить  $\exp(x)$  с точностью 0.00001. Записать полученную формулу.

## Интерполяция. Аппроксимация. Регрессия.

### Задание №42

Задана таблица значений функции

$$f(x) = \exp(x) \cos^2(x)$$

на интервале  $x \in [0, \pi]$ . Построить интерполяционную функцию. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} f(x) dx$$

при помощи интерполяционной функции и вычислить его точное значение. Определить ошибку. Как ошибка зависит от числа разбиений отрезка. Построить графики.

### Задание №43

Задана таблица значений функции

$$f(x) = \frac{1}{(1 + 25x^2)}$$

на равномерной сетке значений  $x \in [-1, 1]$ .

Построить интерполяционный полином, проходящий через эти точки. Нарисовать графики. Найти ошибки интерполяции. Оценить качество интерполяции при разном количестве точек.

#### Задание №44

Приведена таблица экспериментальных данных зависимости теплоемкости воды ( $c_p$ ) от температуры ( $t$ ), причем теплоемкость при  $15^\circ C$  принята за единицу.

$c_p$	1.00762	1.00392	1.00153	1.00000	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818
$t$	0	5	10	15	20	25	30	35
$c_p$	0.99828	0.99849	0.99878	0.99919	0.99967	1.00024	1.00091	1.00167
$t$	40	45	50	55	60	65	70	75
$c_p$	1.00253	1.00351	1.00461	1.00586	1.00721			
$t$	80	85	90	95	100			

При помощи метода наименьших квадратов построить полином, аппроксимирующий данную зависимость. Найти наибольшее отклонение расчетного значения от экспериментального и значение температуры, при котором найдено это отклонение. Построить графики.