

$\omega = \omega_{\infty}^{(1)}(\theta) = n|\omega_{Be}|$  затухание увеличивается в  $1/\beta_e^{2n-1/2}$  раз ( $n \gg 3$ ). В частности, при  $\omega = \omega_{\infty}^{(1)} = 3|\omega_{Be}|$  коэффициент затухания МН-волны в  $1/\sqrt{\beta_e}$  раз больше коэффициента затухания волны с  $v_{ph} \sim c$  при  $\omega = |\omega_{Be}|$  и  $\omega = 2|\omega_{Be}|$ .

Для плазменной волны  $\mathcal{A} \approx A_0 \sqrt{z}^2 A_1$ , и выражения (5.3.4.3) принимает вид [18, 29, 33]

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \sqrt{z} \sin^2 \theta / A_0 \quad (n \neq 1), \\ x_0 &= \sigma_0 \cos^2 \theta / A_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.4.4')$$

Коэффициенты затухания МН-волны (в области, где она переходит в электростатические плазменные колебания, см. рис. 5.2.2), определяемые формулами (5.3.4.4'), значительно больше коэффициентов затухания этой волны при  $\omega = \omega_{\infty}^{(j)}$ . При дальнейшем удалении от резонансной точки коэффициент черенковского затухания становится порядка показателя преломления; в самом деле, при  $|\omega - \omega_{\infty}^{(j)}| \sim \omega$  имеем  $A_0 \sim 1$ ,  $\mathcal{A} \sim c/v_0$ ,  $z_0 \sim 1$  и  $x_0 \sim c/v_0$ , т. е. плазменная волна затухает на расстоянии порядка  $\alpha_0 = v_0/\omega_{pe}$ .

Формулы (5.3.4.3) для  $x_n$  и выражение (5.2.3.7) для  $\mathcal{A}$  получены при условии  $|z_2| = \left| \frac{\omega - 2|\omega_{Be}|}{\sqrt{2}\beta_e \omega \cos \theta} \right| \gg 1$  и тогда коэффициент затухания  $x_2$  экспоненциально мал  $x_2 \sim \exp(-z_2^2)$ . При приближении частоты волны к  $2|\omega_{Be}|$  циклотронное затухание становится очень сильным, если при этом частота  $\omega$  близка к частоте плазменного резонанса  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$ . Последний случай требует особого исследования. Поэтому рассмотрим такой двойной резонанс ( $\omega \approx \omega_{\infty}^{(1)}(\theta) \approx 2|\omega_{Be}|$ ) подробнее.

Предполагая по-прежнему, что  $x_e \ll 1$  и  $z_n^2 \gg 1$  ( $n \neq 2$ ), найдем, что коэффициент  $A$  в дисперсионном уравнении равен

$$A = A_0 + i\sqrt{2}\pi\beta_e \mathcal{A} \frac{\sin^4 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} w(z),$$

где

$$z = \frac{\omega - 2|\omega_{Be}|}{\sqrt{2}\beta_e \omega \cos \theta}.$$

Учитывая это выражение для  $A$  и пренебрегая в дисперсионном уравнении (5.2.2.5) малым членом  $C \approx C'$ , найдем, что в области двойного резонанса оно имеет вид [29]

$$\left[ A_0 + i\sqrt{2}\pi\beta_e \mathcal{A} \frac{\sin^4 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} w(z) \right] \mathcal{A}'^2 + B' = 0, \quad (5.3.4.5)$$

Отсюда находим, что при  $\omega = \omega_{\infty}^{(1)} = 2|\omega_{Be}|$ , точнее, при  $|z| \ll 1$  и  $|A_0| \ll \beta_e \mathcal{A}$  показатель преломления определяется выражением

$$\mathcal{A}' = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2} \left( \frac{B'}{\beta_e \sqrt{2\pi \sin^4 \theta \omega_{pe}^2}} \right)^{1/2}. \quad (5.3.4.6)$$

Если  $|A_0| \ll \beta_e \mathcal{A}$  и  $|z| \ll 1$ , то по порядку величины  $\text{Re } \mathcal{A}'$  и  $\text{Im } \mathcal{A}'$  также определяются выражением (5.3.4.6), т. е.

$$\text{Re } \mathcal{A}' \sim \text{Im } \mathcal{A}' \sim 1/\sqrt{\beta_e}.$$

Таким образом, если частота волны близка к  $2|\omega_{Be}|$  и к частоте плазменного резонанса  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$ , то волна из-за сильного затухания распространяться не может и проникает в плазму только на глубину

$$\delta_n \approx (c^2/v_0^2)^{1/2}/\omega_{pe}. \quad (5.3.4.7)$$

Подумаем кратко итоги исследований затухания высокочастотных (циклотронных) электромагнитных волн в бесстолкнувительной магнитоактивной плазме. Это затухание обусловлено взаимодействием волн с резонансными электронами. Как в разреженной, так и в плотной плазме затухание электромагнитных волн в условиях электронных циклотронных резонансов  $\omega = n\omega_{Be}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) очень мало. Исключениями являются лишь случаи циклотронного резонанса на основной частоте  $\omega = |\omega_{Be}|$  в плотной плазме при продольном (или почти продольном,  $\theta$  очень мало) распространении и в плазме с промежуточным значением плотности, когда  $\omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2 \sim \beta_e$ , а также случай двойного резонанса  $\omega = 2|\omega_{Be}| = \omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$ .

Черенковское затухание рассматриваемых волн экспоненциально мало, за исключением области коротких волн  $ka_0 \gg 1$  для плазменных (электростатических) ветвей колебаний.

§ 5.4. Поглощение альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн

5.4.1. Черенковское поглощение альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн в плазме низкого давления. Фазовые скорости низкочастотных А- и БМЗ-волн в достаточно плотной плазме значительно меньше скорости света, и поэтому сами волны могут эффективно взаимодействовать с электронами плазмы в условиях черенковского резонанса.

В п. 5.1.5 были получены выражения для показателей преломления и частот А- и БМЗ-волн (см. (5.1.5.1) и (5.1.5.3)) в случае холодной плазмы, для которой фазовые скорости этих волн значительно больше тепловой скорости электронов. В области частот

$\omega \ll \omega_{B1}$  фазовые скорости обеих волн порядка  $v_A$  и условие  $v_A \gg v_e$  выполняется, если

$$\xi_e \equiv 8\pi n_0 T_e / B_0^2 \ll m_e / m_i. \quad (5.4.1.1)$$

В действительности слабаязатухающие А- и БМЗ-волны с показателем преломления (5.4.5.4) и частотой (5.4.5.3) существуют в плазме при значительно более слабых ограничениях, чем (5.4.1.1), а именно, при выполнении условий  $v_A \gg v_i$  и  $v_A \gg v_s$  ( $v_s = \sqrt{T_e/m_e}$ ), т. е. при

$$\xi \equiv 8\pi n_0 (T_e + T_i) / B_0^2 \ll 1. \quad (5.4.1.2)$$

Для плазмы с газокINETическим давлением, значительно меньшим магнитного  $B_0^2/8\pi$ , фазовая скорость низкочастотных волн может быть порядка тепловой скорости электронов и даже значительно меньше нее. В этом случае число резонансных электронов велико, но тем не менее затухание обеих волн остается слабым.

Найдем частоты и коэффициенты затухания А- и БМЗ-волн в плазме малого давления. Будем считать, что длина волны в направлении, перпендикулярном магнитному полю, значительно больше ларморовского радиуса ионов (и электронов) с тепловой скоростью, т. е.  $k_z \rho_e \ll 1$ , и фазовая скорость волны значительно больше тепловой скорости ионов и скорости звука. В этом случае имеем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_1 = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2}, \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_1 + \epsilon'_{22}, \quad \epsilon'_{22} = i\sqrt{\pi} \frac{m_e}{m_i} \left( \frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}} \operatorname{tg} \theta \right)^2 \frac{w(z)}{z}, \\ \epsilon_{12} &= i\epsilon_2 = -\frac{i\omega_{pi}^2 \omega}{\omega_{Bi}(\omega^2 - \omega_{Bi}^2)}, \\ \epsilon_{33} &= \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_s^2 \cos^2 \theta} [1 + i\sqrt{\pi} z w(z)], \\ \epsilon_{23} &= -i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega \omega_{Bi}} c \operatorname{tg} \theta [1 + i\sqrt{\pi} z w(z)], \end{aligned} \right\} \quad (5.4.1.3)$$

где

$$z = z_0' = \frac{\omega}{\sqrt{2} k v_s \cos \theta} = \frac{\omega}{\sqrt{2} k v_e \omega' \cos \theta}.$$

Отметим, что величины  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  совпадают с соответствующими выражениями в гидродинамическом приближении. Подставляя

найденные соотношения в дисперсионное уравнение (5.2.2.5), представим его в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} [\cos^2 \theta \omega'^4 - \epsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) \omega'^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2] + \epsilon_1 \sin^2 \theta \omega'^4 + \\ + [2\epsilon_{12} \epsilon_{23} \cos \theta \sin \theta - (\epsilon'_{22} \epsilon_{33} + \epsilon_{23}^2) \cos^2 \theta - \\ - (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta] \omega'^2 + \epsilon'_{22} \epsilon_{33} \epsilon_1 + \epsilon_1 \epsilon_{23}^2 = 0. \quad (5.4.1.4) \end{aligned}$$

Сохраняя в этом уравнении в нулевом приближении (т. е. при  $\epsilon_{33} \rightarrow \infty$ ) наибольшие слагаемые порядка  $\epsilon_{33} \epsilon_1^2$  и  $\epsilon_{33} \epsilon_2^2$ , получим  $\cos^2 \theta \omega'^4 - \epsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) \omega'^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 = 0$ .

Отсюда для  $\omega'^2$  и  $\omega$  ( $k, \theta$ ) следуют выражения (5.4.1.4) и (5.4.1.5), полученные выше при более жестком, чем (5.4.1.2), ограничении (5.4.1.4).

В следующем приближении, сохраняя в дисперсионном уравнении (5.4.1.4) члены порядка  $\epsilon_1 \omega'^4$  и  $\epsilon_1^2 \omega'^2$ , получим для коэффициента электронного черенковского затухания  $\chi = \operatorname{Im} \omega' = \chi_e$  выражение

$$\begin{aligned} \chi_e = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{1}{\epsilon_{33}} [\epsilon_1 \omega'^4 \sin^2 \theta + \epsilon_{33} \epsilon'_{22} (\epsilon_1 - \omega'^2 \cos^2 \theta) + \\ + (2\epsilon_{12} \epsilon_{23} \cos \theta \sin \theta - \epsilon_{23}^2 \cos^2 \theta - (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta) \omega'^2] \times \\ \times [1 + \cos^2 \theta] \epsilon_1 \omega' - 2\omega'^3 \cos^2 \theta]^{-1}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \chi_e = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{m_e}{m_i} \frac{\exp(-z^2)}{z} \left[ \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}} \operatorname{tg}^2 \theta (\epsilon_1 - \omega'^2 \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 \sin^2 \theta \omega'^2 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_1 \omega'^2)}{\omega_{pi}^2 |1 + i\sqrt{\pi} z w(z)|^2} \right] [e_1 \omega' (1 + \cos^2 \theta) - \\ - 2\omega'^3 \cos^2 \theta]^{-1}. \quad (5.4.1.5) \end{aligned}$$

Последнее его применительно к коэффициентам затухания А- и БМЗ-волн в некоторых частных случаях.

а) В области высоких частот  $\omega_{Bi} \ll \omega \ll |\omega_{Be}|$  (напомним, что в этой области БМЗ-волны называются свистящими атмосферными) из (5.4.1.5) получим

$$\chi_e = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{|\omega_{Be}|} \varphi(z) \omega', \quad (5.4.1.6)$$

где  $\varphi(z) = \frac{1}{2z} \left( 1 + \frac{1}{1 + i\sqrt{\pi} z w(z)} \right) \exp(-z^2)$  — показатель преломления свистящего атмосферного

$$\varphi(z) = \frac{1}{2z} \left( 1 + \frac{1}{1 + i\sqrt{\pi} z w(z)} \right) \exp(-z^2). \quad (5.4.1.7)$$

Эта функция быстро убывает с ростом  $z$  (рис. 5.4.1).

В области малых фазовых скоростей ( $z \ll 1$ )  $\varphi(z) \approx 1/z$  и коэффициент затухания свиста равен

$$\alpha_e = \sqrt{1/8} \pi \sin^2 \theta k v_e \text{eff}, \quad (5.4.1.8)$$

где  $\rho_e = v_e / \omega_{Be}$  — ларморовский радиус электронов.

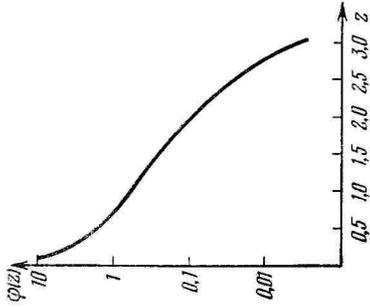
В области больших фазовых скоростей ( $z \gg 1$ ) черенковское затухание свистов экспоненциально мало [35, 36]:

$$\alpha_e = 1/2 \sqrt{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{\omega_{Be}} z^3 \exp(-z^2) \text{eff}. \quad (5.4.1.9)$$

б) В области частот  $\omega \ll \omega_{Bi}$  фазовая скорость обеих волн равна по порядку величины  $v_A$  (за исключением области циклотронного резонанса для А-ветви) и при  $1 \gg \xi_e \gg m_e/m_1$ , т. е. при  $v_A \ll v_e$  имеем

$$\frac{\alpha_e}{\text{eff}} \sim \frac{m_e}{m_1} \frac{v_e}{v_A} = \sqrt{\frac{m_e}{m_1}} \frac{v_s}{v_A} \ll 1. \quad (5.4.1.10)$$

Рис. 5.4.1. График функции  $\varphi(z)$ .



в) Для альвеновской ветви в области ионного циклотронного резонанса показатель преломления резко возрастает

$$\text{eff}^2 \approx \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \frac{\omega}{\omega_{Bi} - \omega} \quad (\omega \approx \omega_{Bi});$$

возрастает также и черенковское затухание

$$\alpha_e = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{m_e}{m_1} \text{tg}^2 \theta \frac{\omega}{\omega_{Bi} - \omega} \varphi_1(z) \text{eff}, \quad (5.4.1.11)$$

где

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{|1 + i \sqrt{\pi} z v(z)|^2} \exp(-z^2). \quad (5.4.1.12)$$

Заметим, что при  $|z| \ll 1$  и  $z \gg 1$  можно пользоваться соответственно выражениями

$$\varphi_1(z) \approx 1/z, \quad \varphi_1(z) \approx 4z^3 \exp(-z^2).$$

Сравнение выражений (5.4.1.10) и (5.4.1.11) показывает, что при приближении частоты волны к  $\omega_{Bi}$  декремент затухания А-волны возрастает в  $(\frac{\omega}{\omega_{Bi} - \omega})^{3/2}$  раз по сравнению с нерезонансными условиями.

г) Для магнитогиродинамических волн ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ) выражение (5.4.1.5) сильно упрощается. Для альвеновской магнитогиродинамической волны с частотой  $\omega = k v_A \cos \theta$ , имеем

$$\frac{\alpha_e}{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_1} \frac{v_e}{v_A} \frac{\omega^2}{\omega_{Bi}^2} \left[ \text{ctg}^2 \theta + \frac{\text{tg}^2 \theta}{|1 + i \sqrt{\pi} z v(z)|^2} \right] \exp(-z^2). \quad (5.4.1.13)$$

Для быстрой магнитозвуковой волны ( $\omega = k v_A$ ) коэффициент затухания определяется соотношением \*

$$\frac{\alpha_e}{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_1} \frac{v_e}{v_A} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \exp(-z^2). \quad (5.4.1.14)$$

Отсюда следует, что альвеновская магнитогиродинамическая волна затухает значительно слабее (в  $\omega^2 v_A / \omega^2$  раз), чем быстрая магнитозвуковая волна.

Отметим, что альвеновская магнитогиродинамическая волна слабо затухает даже в случае большого давления ( $\xi \sim 1$ ), когда ее фазовая скорость порядка тепловой скорости ионов; в этом случае релаксация БМЗ-волны, а также А- и БМЗ-волн с частотами порядка  $\omega_{Bi}$ , становится вообще невозможным из-за сильного ионного черенковского затухания (см. [37]).

Формулы (5.4.1.13) и (5.4.1.14) неприменимы в области малых углов  $\theta \ll \omega / \omega_{Bi}$ . В этом случае затухание обеих магнитогиродинамических волн одинаково по порядку величины

$$\alpha_e / N \sim (m_e / m_1) (v_e / v_A) \theta^2$$

и стремится к нулю при  $\theta \rightarrow 0$ . Точные выражения для  $\alpha_e$  определяются соотношениями [37]

$$\frac{\alpha_e}{\text{eff}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4 \sqrt{2}} \frac{m_e}{m_1} \frac{v_e}{v_A} \theta^2 \left( 1 \pm \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^4 + 4 \omega^2 / \omega_{Bi}^2}} \right) \exp(-z^2). \quad (5.4.1.15)$$

При  $\theta^2 \gg 2 \omega / \omega_{Bi}$  они переходят в выражения (5.4.1.13) и (5.4.1.14), если в последних устремить  $\theta$  к нулю.

**5.4.2. Ионный циклотронный резонанс.** Если частота БМЗ-волны близка к ионной циклотронной частоте или частоте, кратной ей ( $\omega \approx n \omega_{Bi}$ ,  $n=1, 2, \dots$ ), то возникает циклотронное поглощение этой волны \*\*).

\* Формула (5.4.1.14) была получена в [37]; это выражение при  $z \ll 1$  было получено ранее в [38, 39], а при  $z \gg 1$  — в работе [39].

\*\* Ионное циклотронное затухание было впервые рассмотрено в работе [40] для магнитогиродинамических волн ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ) при  $\theta=0$ , когда декремент затухания экспоненциально мал, и в работе [43] в области сильного затухания для А-ветви.

Частота А-волн меньше  $\omega_{\infty}^{(3)}(\theta) \approx \omega_{Bi}$ , и поэтому их циклотронное поглощение становится существенным на краю полосы прозрачности при  $\omega \approx \omega_{Bi}$ .

Будем по-прежнему считать давление плазмы малым, т. е.  $\xi \ll 1$ . Тогда при  $kv_1 \ll 1$  и  $|z_n^i| = \left| \frac{\omega - n\omega_{Bi}}{\sqrt{2} \beta_n e \omega \cos \theta} \right| \gg 1$  ( $n = 0, \pm 1$ ) тензор  $\epsilon_{ij}$  определяется выражениями (5.4.1.3), в которых к  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{22}$  надо добавить при  $\omega \approx n\omega_{Bi}$  малое слагаемое  $2i\sigma_n$ , а к  $\epsilon_{12}$  — слагаемое  $-2\sigma_n$ , где

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{n^2}{2^n n!} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega kv_1 \cos \theta} x_n^{n-1} \exp(-x_n^2), \quad (5.4.2.1)$$

$$z_n \equiv z_n^i = \frac{\omega - n\omega_{Bi}}{\sqrt{2} kv_1 \cos \theta}, \quad x_n = \left( \frac{kv_1 \sin \theta}{\omega_{Bi}} \right)^2.$$

Используя эти соотношения для тензора  $\epsilon_{ij}$ , нетрудно получить следующее выражение для коэффициента затухания БМЗ-волны в условиях кратного ионного циклотронного резонанса [33]:

$$x_n \equiv \sigma_n \frac{(1 + \cos^2 \theta) \omega \theta^2 - 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2 \cos^2 \theta \omega \theta^3 - \epsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) \omega \theta}. \quad (5.4.2.2)$$

Контуры линии поглощения БМЗ-волны в области ионного циклотронного резонанса  $\omega \approx n\omega_{Bi}$  определяется функцией  $\exp(-x_n^2)$ , ширина линии поглощения равна  $\Delta\omega/\omega \sim v_1/v_A \ll 1$ . При  $|z_n| \ll 1$  имеем

$$x_n / e \theta^2 \sim (v_1/v_A)^{2n-3} \sim \xi_n^{n-3/2}, \quad (5.4.2.3)$$

где  $\xi_1 = 8\pi n T / B_0^2$ .

В частности, при  $\omega = 2\omega_{Bi}$  имеем  $x_n / e \theta^2 \sim v_1/v_A \sim \xi_1^{1/2}$ .

Затухание, определяемое (5.4.2.2), быстро убывает с ростом номера гармоник  $n$  и становится меньше электронного черенковского затухания, если  $v_A \sim v_e$ , уже для сравнительно небольших значений  $n$ , так что практически циклотронное затухание БМЗ-волн существенно только для первых гармоник.

Перейдем теперь к изучению ионного циклотронного резонанса на основной частоте  $\omega \approx \omega_{Bi}$ . В этом случае компонента  $\epsilon_{33}$  по-прежнему определяется (5.4.1.3), а остальные компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$  равны

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = 2i\sigma_1 - 1/4 (\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2, \\ \epsilon_{12} &= -2\sigma_1 - i^2/4 (\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2, \\ \epsilon_{23} &= -i (\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 [1/2 + i \sqrt{\pi} z_1 w(z_1)] \operatorname{tg} \theta, \\ \epsilon_{13} &= -1/2 (\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 [1 + i \sqrt{\pi} z_1 w(z_1)] \operatorname{tg} \theta, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.2.4)$$

где  $z_1 = \frac{\omega - \omega_{Bi}}{\sqrt{2} kv_1 \cos \theta}$ ,  $z = \frac{\omega}{\sqrt{2} kv_e \cos \theta}$  и величина  $\sigma_1$  определяется выражением (5.4.2.1) при  $n = 1$ , умноженным на  $w(z_1)$ .

Учитывая, что  $|\epsilon_{33}| \gg |\epsilon_{11}| = |\epsilon_{12}| \approx 2|\sigma_1| \gg |\epsilon_{23}| \geq |\epsilon_{13}|$ , можно сохранить в дисперсионном уравнении (5.2.2.5) только найбольшие члены, пропорциональные  $\epsilon_{33}$ , и представить его в виде  $\cos^2 \theta \theta \omega^4 - \epsilon_{11} (1 + \cos^2 \theta) \omega^2 + \epsilon_{11}^2 + \epsilon_{12}^2 = 0$ . (5.4.2.5)

Для БМЗ-волны  $\omega \theta^2 \sim c^2/v_A^2 \ll |\epsilon_{11}|$ ; учитывая это, в нулевом приближении ( $|\epsilon_{11}| \rightarrow \infty$ ) можно отбросить в (5.4.2.5) слагаемое  $\cos^2 \theta \theta \omega^4$ . В результате мы получим для  $\omega \theta^2$  гидродинамическое выражение (5.1.5.8)

$$\omega \theta^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta}.$$

В следующем приближении, сохраняя в дисперсионном уравнении члены порядка  $(c/v_A)^4$ , найдем коэффициент циклотронного затухания БМЗ-волны при  $\omega \approx \omega_{Bi}$  [33]:

$$\frac{\gamma_1}{e \theta^2} = \frac{\cos \theta \sin^4 \theta}{\sqrt{2\pi} (1 + \cos^2 \theta)^{3/2}} \frac{v_1}{v_A} f(z_1), \quad (5.4.2.6)$$

где функция  $f(z_1)$  определяется формулой (5.3.2.10), т. е.

$$f(z) = \frac{\exp(-z^2)}{|w(z)|^2}.$$

График функции  $f(z)$  был приведен выше (см. рис. 5.3.1).

При  $\theta$ , не близком к 0 или  $1/2\pi$ ,  $x/e \theta^2 \sim v_1/v_A \sim \sqrt{\xi_1} \ll 1$ . Сравним эту оценку с (5.4.2.3), найдем, что по порядку величины затухание БМЗ-волны при  $\omega \approx \omega_{Bi}$  и  $\omega \approx 2\omega_{Bi}$  одинаково.

Найдем теперь затухание А-ветви в области  $\omega \approx \omega_{Bi}$  (напомним, что в этой области такая волна называется ионно-циклотронной).

Показатель преломления альвеновской волны при  $\omega \approx \omega_{Bi}$  велик, а именно  $\omega \theta^2 \sim \epsilon_{11} \sim \sigma_1$ . Учитывая это, можно упростить дисперсионное уравнение (5.4.2.5), отбросив в нем сумму двух последующих слагаемых  $\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{12}^2$ , малую по сравнению с  $\cos^2 \theta \omega^4 \sim \epsilon_{11}^2$  и  $\epsilon_{11} \omega^2 \sim \epsilon_{11}^2$ ; тогда имеем

$$\cos^2 \theta \omega \theta \omega^2 - 2i\sigma_1 (1 + \cos^2 \theta) = 0. \quad (5.4.2.7)$$

Отсюда находим, что при  $|z_1| \gg 1$  показатель преломления А-волны определяется гидродинамическим выражением (5.1.5.6)

$$\omega \theta^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \frac{\omega}{\omega_{Bi} - \omega},$$

а коэффициент циклотронного затухания экспоненциально мал [41, 43]

$$\kappa / \mathcal{M} \approx 1/2 \pi^{1/2} |z_1| \exp(-z_1^2), \quad (5.4.2.8)$$

где

$$z_1 = \left( \frac{\omega_{B1}}{\omega} - 1 \right)^{1/2} \frac{v_A}{v_1} \frac{1}{(1 + \cos^2 \theta)^{1/2}}.$$

При приближении  $\omega$  к  $\omega_{B1}$  величина  $|z_1|$  убывает и коэффициент затухания (5.4.2.8) возрастает. В области  $|z_1| \ll 1$  затухание ионно-циклотронной волны становится настолько сильным, что ее распространение оказывается невозможным:

$$\text{Re } \mathcal{M} \sim \text{Im } \mathcal{M} \sim \left( \frac{c^3 (1 + \cos^2 \theta)^{1/2}}{v_A^2 v_1 \cos^3 \theta} \right)^{1/2}. \quad (5.4.2.9)$$

При  $|z_1| \ll 1$  можно получить точное выражение для  $\mathcal{M}$  [33, 44]; имеем

$$\mathcal{M} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{c^3 (1 + \cos^2 \theta)^{1/2}}{v_A^2 v_1 \cos^3 \theta} \right)^{1/2}. \quad (5.4.2.10)$$

При  $|z_1| \ll 1$  электромагнитное поле проникает в плазму на глубину порядка

$$\delta_1 = (v_A^2 v_1)^{1/2} / \omega_{B1}. \quad (5.4.2.11)$$

В сильных магнитных полях и при больших плотностях плазмы скин-глубина (5.4.2.11) очень мала. Например, при  $n_0 \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $B_0 \sim 10^5 \text{ эс}$ ,  $T_i \sim 10^6 \text{ }^\circ\text{К}$  и  $m_i \sim 10^{-24} \text{ г}$  получаем  $v_A \sim 10^9 \text{ см/сек}$ ,  $v_1 \sim 10^7 \text{ см/сек}$ ,  $\omega_{B1} \sim 10^9 \text{ 1/сек}$  и  $\delta_1 \sim 0,2 \text{ см}$ . Подведем итоги.

Слабозатухающие низкочастотные волны (БМЗ-ветвь при  $\omega \ll \omega_{Be}$  и А-ветвь) существуют не только в плазме очень малого давления ( $v_A \gg v_e$ ), когда электронное черенковское затухание экспоненциально мало, но и в плазме значительно большего давления ( $v_1, v_s \ll v_A \ll v_e$ ). Коэффициент черенковского затухания обеих волн на электронах определяется в этом случае выражением (5.4.1.5).

Ионное циклотронное затухание БМЗ-волны, определяемое (5.4.2.2) при кратном резонансе и (5.4.2.6) при  $\omega \approx \omega_B$ , всегда мало.

Ионное циклотронное затухание А-ветви при  $\omega = \omega_{B1}$  велико, и эта волна затухает на расстоянии порядка длины волны (см. (5.4.2.11)).

### § 5.5. Низкочастотные колебания горячей плазмы в магнитном поле

**5.5.1. Продольные колебания плазмы с горячими электронами и холодными ионами.** В двух предыдущих параграфах мы изучали влияние теплового движения электронов и ионов на затухание тех ветвей электромагнитных колебаний плазмы, которые существуют и в холодной плазме, а также исследовали влияние теплового движения электронов на поведение показателей преломления вблизи высокочастотных плазменных резонансов.

Здесь и в следующих параграфах настоящей главы мы рассмотрим новые ветви колебаний магнитоактивной плазмы, возникающие только благодаря конечной температуре электронов и ионов. Начнем с рассмотрения продольных колебаний плазмы с горячими электронами и холодными ионами  $T_e \gg T_i$ , находящейся в магнитном поле [45].

Как было показано в пп. 4.1.3 и 4.2.4, в такой плазме в отсутствие внешнего магнитного поля возможно распространение слабозатухающих ионно-звуковых колебаний; закон дисперсии для них имеет вид

$$\omega = \omega_s(k) = \frac{kv_s}{\sqrt{1 + k^2 a_s^2}}. \quad (5.5.1.1)$$

Итак, что если эта частота значительно больше ионной циклотронной частоты  $\omega_{B1}$ , а длина волны значительно меньше ларморовского радиуса ионов  $\rho_1 = v_i / \omega_{B1}$ , то магнитное поле будет оказывать слабое влияние на такие колебания. Возникает поэтому вопрос, как изменятся ионно-звуковые колебания, если  $\omega_s(k) \ll \omega_{B1}$  и  $k\rho_1 \ll 1$ ?

Для решения этого вопроса обратимся к дисперсионному уравнению, описывающему продольные колебания плазмы в магнитном поле:

$$A = 1 + \delta\epsilon_0 + \delta\epsilon_1 = 0, \quad (5.5.1.2)$$

где

$$\delta\epsilon_0 = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} \left[ 1 + i \sqrt{\pi} z_0^0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-z_n^0) I_n(x_n) \omega(z_n^0) \right], \quad (5.5.1.3)$$

$$z_n^0 = \frac{\omega - n \omega_{B\alpha}}{\sqrt{2} kv_\alpha \cos \theta}.$$

Примодолжим, что длина волны значительно больше ларморовского радиуса ионов и электронов, фазовая скорость волны много больше тепловой скорости ионов, но существенно меньше тепловой скорости электронов, частота колебаний не очень близка к ионной