РОЗДІЛ 2.
ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ.

2.1. Основні поняття і властивості

Границя за Коші.
Def (мовою околів)**.** Число b називається границею функції $f(x)$ коли x прямує до a, де a точка згущення області визначення функції $f(x)$, якщо для будь якого околу $U_\varepsilon(b)=\{\, y\in\mathbf{R} \mid |y-b|<\varepsilon \,\}$ точки b знайдеться проколотий окіл $\widehat{V}_\delta(a)=\{\, x\in\mathbf{R} \mid 0<|x-a|<\delta \}$ точки a, образ якого належить $U_\varepsilon(b)$, тобто $f(\widehat{V}_\delta(a))\subset U_\varepsilon(b)$.
Def **(**скорочено, мовою «ε – δ»)**:** $f(x)\to b$ коли $x\to a$ або
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |_{\forall x}\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$.

_______ .... ___________

У цьому означені лінією підкреслено частину означення, що має відношення до граничного переходу $f(x)\to b$, а крапками підкреслено частину, що має відношення до умови $x\to a$.
Інші граничні переходи, у тому числі *однобічні* та для невласних елементів, можна отримати за допомогою наступного «словника»:

$f(x)\to b$	$\forall\varepsilon>0$	....	$\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$
$f(x)\to b+0$	$\forall\varepsilon>0$	....	$b\le f(x)<b+\varepsilon$
$f(x)\to b-0$	$\forall\varepsilon>0$	....	$b-\varepsilon<f(x)\le b$
$f(x)\to\infty$	$\forall\varepsilon$	....	$\lvert f(x)\rvert>\varepsilon$
$f(x)\to+\infty$	$\forall\varepsilon$	....	$f(x)>\varepsilon$
$f(x)\to-\infty$	$\forall\varepsilon$	....	$f(x)<\varepsilon$
$x\to a$	____	$\exists\delta>0 \mid\ 0<\lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow$	______________
$x\to a+0$	____	$\exists\delta>0 \mid\ a<x<a+\delta\Rightarrow$	______________
$x\to a-0$	____	$\exists\delta>0 \mid\ a-\delta<x<a\Rightarrow$	______________
$x\to\infty$	____	$\exists\delta \mid\ \lvert x\rvert>\delta\Rightarrow$	______________
$x\to+\infty$	____	$\exists\delta \mid\ x>\delta\Rightarrow$	______________
$x\to-\infty$	____	$\exists\delta \mid\ x<\delta\Rightarrow$	______________

Зауважимо, що для невласних елементів ∞, $+\infty$ в означенні границі можно не змінювати умови $\varepsilon>0$ та $\delta>0$. Для $-\infty$, якщо залишити $\varepsilon>0$ або $\delta>0$, треба писати $f(x)<-\varepsilon$ та $x<-\delta$ відповідно. Тобто можна запам'ятати наступну структуру означення не змінною

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |_{\forall x}\quad *_\delta \quad\Rightarrow\quad *_\varepsilon}\ ,$$

та підставляти відповідні значення із наступної таблиці

$x\to$	$*_\delta$
a	$0<\lvert x-a\rvert<\delta$
$a+0$	$a<x<a+\delta$
$a-0$	$a-\delta<x<a$
∞	$\lvert x\rvert>\delta$
$+\infty$	$x>\delta$
$-\infty$	$x<-\delta$

$f(x)\to$	$*_\varepsilon$
b	$\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$
$b+0$	$b\le f(x)<b+\varepsilon$
$b-0$	$b-\varepsilon<f(x)\le b$
∞	$\lvert f(x)\rvert>\varepsilon$
$+\infty$	$f(x)>\varepsilon$
$-\infty$	$f(x)<-\varepsilon$

Th 2.1. Якщо у функції існує границя у деякій точці, то ця границя єдина.
Усунути необхідність наперед знати границю для перевірки її існування допомагає наступна теорема.
Th 2.2 (Критерій Коші). $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |_{\forall}\ x', x''\in\widehat{V}_\delta(a) \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Часткова, верхня та нижня границі.
Обмеженням функції f на множину X називається функція $f|_X$, що співпадає з f на $X\cap D_f$, тобто область визначення якої звужено на X.
Def. *Частковою границею* функції $f(x)$ коли x прямує до a називається границя обмеження функції $f|_X$, для деякої множини X такої, що a є точкою згущення $X\cap D_f$.
Права та ліва границі функції є прикладами часткових границь. Границя функції існує тоді й тільки тоді, коли існують всі часткові границі і співпадають. Найбільша серед всіх часткових границь називається *верхньою границею* функції: $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)=\limsup\limits_{x\to a} f(x)$.
Найменша часткова границя – *нижня границя* функції: $\underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)=\liminf\limits_{x\to a} f(x)$. Отже границя існує і дорівнює b тоді й тільки тоді, коли $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)=\underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)=b$.

Границя послідовності. Границя за Гейне.
Def. Границею послідовності (x_n) називається границя функції натурального аргументу $f(n)=x_n$ коли $n\to+\infty$. Мовою «ε – δ»:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = b \iff \forall\varepsilon>0\ \exists N\in \mathbb{N}\ \ |\ n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon.$$

Якщо послідовність має скінчену границю, то вона називається *збіжною*, якщо не має - *розбіжною*. Частковою границею послідовності є границя підпослідовності $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$, де індекси n_k – це зростаючі натуральні числа. Послідовність (x_n) *обмежена*, якщо вона обмежена як множина, тобто існує така $C > 0$, що для всіх натуральних n виконується $|x_n| < C$.

Th 2.3 (Больцано-Вейерштрасса). У будь-якої обмеженої послідовності (x_n) існує збіжна підпослідовність (x_{n_k}).

Def (границя за Гейне). Число b називається границею за Гейне функції $f(x)$ коли x прямує до a, якщо для будь якої послідовності $x_n \to a$, $x_n \neq a$ границя функції по послідовності $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$.

Th 2.4. Означення границі функції за Коші та за Гейне співпадають. Отже можливо переходити від границь функцій до границь послідовностей і навпаки.

Основні властивості границі.

Th 2.5. Границя суми, різниці, добутку та відношення (позначимо ці операції *) двох функцій $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють додатку, різниці, добутку та відношенню границь $f(x)$ і $g(x)$ відповідно:

$$\lim_{x\to a} f(x) * g(x) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x), \qquad (2.1)$$

за умови існування границь праворуч, які не дають *невизначеності* $\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}$.

При цьому для $a \neq 0$ визначені наступні операції з невласними елементами $\infty+\infty=\infty$, $\dfrac{\infty}{0}=\infty$, $\infty\cdot\infty=\infty$, $a\cdot\infty=\infty$, $\dfrac{a}{0}=\infty$, $\dfrac{a}{\infty}=0$.

Для композиції двох функцій за умови злагодженості їх областей визначення теорема також вірна та набуває значення зміни змінної:

$$(2.2) \qquad \lim_{x\to a} f(g(x)) = \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \\ \text{Заміна } g(x) = y \end{array} \right| = \lim_{y\to b} f(y).$$

Неперервні функції.

Def. Функція $f(x)$ *неперервна* у точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$. Функція $f(x)$ називається *неперервною праворуч* (*ліворуч*) у точці x_0 її області визначення, якщо $x_0 \in D(f)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0)$).

В ізольованій точці області визначення функція вважається неперервною за означенням. Із неперервності у точці x_0 випливають неперервність праворуч та ліворуч x_0 і навпаки. Функція $f(x)$ називається неперервної на множині X, пишуть $f(x) \in C(X)$, якщо вона неперервна у кожній точці $x_0 \in X$ цієї множини. Якщо $X = [a,b]$, то неперервність у $x = a$, розуміють ліворуч, а у точці $x = b$ праворуч.

Елементарні функції.

Def. *Основні елементарні* функції це – константи, степеневі, показні, логарифмічні, тригонометричні і функції зворотні до них. *Елементарні* функції – це функції, отримані з основних елементарних за допомогою кінцевого числа арифметичних операцій (+, -, ·, /) і суперпозицій.

Th 2.6 (про неперервність елементарних функцій). Елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Із цієї теореми випливає, що для елементарних функцій (це більшість задач, що розглядаються у цьому посібнику) при обчисленні границі правомірно підставляти у функцію відповідне до граничного переходу значення x_0, якщо це не приводить до невизначеності. Усувати невизначеності можна спрощуючи вираз за допомогою арифметичних та інших дій та використовуючи вже відомі границі, серед яких найважливішими є *перша* та *друга чудові границі*.

Коли $\underline{\boldsymbol{x\to 0}}$

Перша чудова границя $\boxed{\lim \dfrac{\sin x}{x} = 1}$.

Її основні наслідки:

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \quad \lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Друга чудова границя $\boxed{\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$.

Її наслідки:

$$\lim \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \lim \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu .$$

Якщо аргумент функції прямує до будь якого іншого окрім 0 числа або до невласного елемента, можна звести вираз до одного з наведених вище за допомогою зміни змінною (див. формулу (2.2)).

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left|\frac{1}{x} = t\right| = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

Зауважимо, що друга чудова границя стосується невизначеності 1^∞. Також при розгляданні степенево-показних виразів виникають невизначеності 0^0, ∞^0. При цьому для $a>1$ виконуються рівності $a^{+\infty} = +\infty$; $a^{-\infty} = +0$; та для $a>0$ рівності $(+0)^a = +0$; $(+\infty)^a = +\infty$; $(+0)^{-\infty} = +\infty$. Зручним при роботі зі степенево-показними функціями є наступне перетворення

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{xt\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}, \qquad (2.3)$$

що використовує неперервність функції e^x.

Символи асимптотичного порівняння, О-символіка.

Наступне поняття та теорема дають змогу значно спростити обчислення границь.

Def. Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *еквівалентними*, пишемо $f(x) \sim g(x)$ коли $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Th 2.7. При обчисленні границі добутку або частки скінченної кількості функцій будь-яку з них можна замінити на еквівалентну.

Зауважимо, що для різниці, суми або композиції це взагалі не правда.

Із першої та другої чудових границь та їх наслідків випливають наступні

Чудові еквівалентності ($x \to 0$):

$\sin x \sim x$; $\quad \mathrm{tg} x \sim x$; $\quad \arcsin x \sim x$; $\quad \mathrm{arctg}\, x \sim x$; $\quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$;

$(1+x)^{1/x} \sim e$; $\quad \ln(1+x) \sim x$; $\quad e^x - 1 \sim x$; $\quad a^x - 1 \sim x\ln a$;

$(1+x)^\mu \sim 1 + \mu x$.

Def. $f(x) = o(g(x))$ коли $x\to a$ $\Leftrightarrow f(x) = g(x)o(1)$, де $o(1)$ це *нескінченно мала* величина – будь-яка функція $h(x)$, що прямує до 0 коли $x\to a$. (*Читаємо*: $f(x)$ є величина нескінченно мала по відношенню до $g(x)$).

Def. $f(x) = O(g(x))$ коли $x\to a$ $\Leftrightarrow f(x) = g(x)O(1)$, де $O(1)$ це *обмежена* в точці a функція $h(x)$, тобто існує $\varepsilon>0$ що в околі точки a функція $h(x)$ по модулю менша за ε. (*Читаємо*: $f(x)$ є величина обмежена по відношенню до $g(x)$).

Def. Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *функції називаються одного порядку* коли $x \to a$, пишемо $f(x) \asymp g(x)$, якщо $f(x) = O(g(x))$ і $g(x) = O(f(x))$. Зокрема це виконується, якщо границя відношення $f(x)$ і $g(x)$ коли $x \to a$ є скінченною величиною відмінною від 0: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.

Def. Функція $f(x)$ *відокремлена від нуля* коли $x \to a$, якщо $1/f(x) = O(1)$.

Def. Функція $f(x)$ *нескінченно велика* коли $x \to a$, якщо $1/f(x) = o(1)$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Інший спосіб говорити про еквівалентності – це застосування рівностей із додаванням нескінченно малої: $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$.

Чудові рівності:

$\sin x = x + o(x)$; $\quad \mathrm{tg} x = x + o(x)$; $\quad \arcsin x = x + o(x)$;

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$; $\quad \ln(1+x) = x + o(x)$; $\quad e^x = 1 + x + o(x)$;

$a^x = 1 + x\ln a + o(x)$; $\quad (1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x)$.

Def. Якщо при $x \to a$ функцію $f(x)$ можна представити у вигляді $f(x) = f_0(x) + o(f_0(x))$, де перший доданок $f_0(x)$ не дорівнює нулю, то $f_0(x)$ називається *головним членом* або *асимптотикою* функції $f(x)$. Головний член – це інша назва для еквівалентної функції.

Зазвичай шукають найпростішу асимптотику, а саме головний член у вигляді $f_0(x) = C(x-a)^\lambda$, якщо $x \to a$; та $f_0(x) = Cx^\lambda$, якщо $x \to \infty$ або $x \to 0$. Тут $C \neq 0$, λ – показник росту/спадання функції $f(x)$.

Зауважимо, що головний член елементарної функції не завжди можно представити степеневою функцією, він також може мати логарифмічний або експоненціальний вигляд, або бути добутком/відношенням складеним із цих трьох функцій. Це можна легко зрозуміти спираючись на шкалу зростання, що наведена нижче та факт, що головний член добутку/відношення це добуток/відношення головних членів (наслідок Th 2.1).

Одним із наслідків диференційного числення є наступний зручний спосіб усунення невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, коли існує границя відношення похідних функцій.

Правило Лопіталю: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\frac{0}{0}\vee\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

З цього правила можна довести наступну шкалу зростання.

Шкала асимптотичного порівняння (шкала зростання):

$x\to+\infty \quad \forall\alpha\,\beta,\gamma>0 \qquad \boxed{(\ln x)^{\alpha}<<x^{\beta}<<e^{x\gamma}}$,

відношення $f(x)<<g(x)$ означає $f(x)=o(g(x))$, тобто $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

Іншим важливим результатом диференційного числення (див. наступний розділ цього посібника) є формула та ряд Тейлора та її окремий випадок – формула та ряд Маклорена, коли $x\to0$. Наступні формули є узагальненнями чудових рівностей.

П'ять основних розкладань за формулою Маклорена:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})\;;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\;;$$

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)}{3!}x^3+\ldots$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu+n-1)}{n!}x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu+k-1)}{k!}+o(x^n).$$

Зауважимо, що у кожному із п'яти розкладень можна *o*-маленьке замінити на *O*-велике у якому *x* вже є у степені на 1 порядок більше.

Монотонні функції та послідовності.

Def. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* (*спадаючою*) на *X*: $f(x)\nearrow$ ($\searrow$) на *X*, якщо $\forall x_1<x_2\in X\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ $(\ge)$. Функція $f(x)$ *строго зростаюча* (*строго спадаюча*) $f(x)\uparrow(\downarrow)$, якщо остання нерівність строга $f(x_1)<f(x_2)$ ($>$ відповідно). Зростаюча або спадаюча функція називається *монотонною*, строго зростаюча або строго спадаюча – *строго монотонною*.

Для послідовності означення трохи спрощується:

$(x_n)\nearrow$ ($\searrow$), якщо $\forall n\in\mathbf{N}$ $x_n\le x_{n+1}$ $(\ge)$, або $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge1$ $(\le)$. Для строгої монотонності останні нерівності – строгі.

Додавання однойменно монотонних, добуток невід'ємних однойменно монотонних функцій та перехід до взаємно оберненої функції – залишає тип монотонності не змінним. Змінення знаку функції або знаку аргументу або перехід до арифметично зворотної функції – змінює тип монотонності на протилежний. Композиція однойменно монотонних – не строго зростає, різнойменно – не строго спадає.

Аналогом правила Лопіталю для послідовностей є наступна теорема.

Th 2.7 (Штольц). Нехай послідовність (y_n) строго монотонна та необмежена, тоді, якщо існує границя праворуч, то існує границя ліворуч та вони співпадають («$\Leftarrow|$»): $\lim\frac{x_n}{y_n}\;\Leftarrow|\;\lim\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$.

Th 2.8 (Вейерштрасса, о границі монотонної та обмеженої послідовності). Монотонна та обмежена послідовність має скінчену границю. Для монотонно зростаючою достатньо вимагати тільки обмеженість зверху, для спадаючою – знизу.

Зауважимо, що цю теорему можна сформулювати і для функцій: якщо $f(x)$ монотонна у правому (лівому) околу точки і обмежена в ньому, то існує права (ліва) границя функції у цій точці.

Сформулюємо ще декілька важливих означень та тверджень. Вони досить абстрактні та відіграють фундаментальну роль у теорії топологічних та метричних просторів.
Згадаємо Th 2.2 та сформулюємо критерій Коші для послідовностей: $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbf{N}\ |_\forall\ n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$. Висловлювання праворуч є означенням *фундаментальної послідовності* або *послідовності Коші*. Отже критерій Коши для послідовностей говорить, що будь яка фундаментальна послідовність дійсних чисел збігається[1].

Th 2.9 (принцип вкладених множин). Будь-яка послідовність вкладених замкнутих проміжків, довжини яких прямують до нуля, стягується до єдиної спільної точки: $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_k,b_k]\supset\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0 \Rightarrow \exists! c\ \ c\in[a_k,b_k]\ \ \forall k\in\mathbf{N}$.

Def. Множина K у $\mathbf{R}$ називається компактом, якщо із будь-якого нескінченного відкритого покриття К можна виділити скінчене підпокриття[2]. Тобто якщо $\forall M_\alpha$, де M_α - відкрити множини, α пробігає деяку нескінчену множену *A*, та $K\subset\bigcup\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ тоді існує скінчена множина $B\subset A$ така, що $K\subset\bigcup\limits_{\alpha\in B} M_\alpha$.

У теоремі 2.10, що наведена нижче, еквівалентність 1 та 2 називають лемою Бореля-Лебега, а еквівалентність 2 і 3 - це вже відома нам Th 2.3 Больцано-Веєрштрасса.

[1] У загальному випадку простору *X* це не так (контрприклад **Q**). Метричні простори з наявністю цієї властивості називаються *повними*. Для цих просторів також виконується принцип вкладених множин.
[2] Це є означення компакту для будь-якого хаусдорфового топологічного простору *X*. У Th 2.10 характерізація 2 Бореля-Лебега вірна для скінченуовимірних евклідових просторів, а 3 для повних метричних просторів.

Th 2.10 Наступні умови еквівалентні.
1. *K* компакт у **R**;
2. *K* замкнена та обмежена множина у **R**;
3. *K* замкнена та будь-яка послідовності (x_n) із *K* має збіжну в *K* підпослідовність (x_{n_k}).

Основні теореми про неперервність функцій.
Теорему про неперервність елементарних функцій ми вже формулювали. Запишемо ще декілька важливих теорем.
Th 2.11 (1 і 2 теореми Вейерштрасса). Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то
1) $f(x)$ обмежена на $[a,b]$
2) $f(x)$ досягає своїх інфімуму та супремуму на $[a,b]$, тобто існують $x_m, x_M\in[a,b]$ такі, що $f(x_m)=\min f(x)=\inf f(x)$ на $[a,b]$ та $f(x_M)=\max f(x)=\sup f(x)$ на $[a,b]$.

Th 2.12 (Больцано-Коші, про проміжні значення). Якщо функція неперервна на проміжку, то вона сюр'єктивна на $[a,b]$, тобто приймає всі свої проміжні значення.
Th 2.13 (критерій неперервності монотонної функції). Нехай $f(x)$ монотонна на проміжку $[a,b]$. Тоді $f(x)\in C[a,b] \Leftrightarrow f(x)$ -sur на $[a,b]$.
Th 2.14 (про неперервність оберненої функції). Якщо $y = f(x)$ визначена, строго монотонна та неперервна на проміжку *X*, то на відповідному проміжку *Y* значень цієї функції існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$ також строго монотонна та неперервна.
Загальним висновком теорії границь є змога перевіряти неперервність різних функцій та досліджувати їхню асимптотичну поведінку в околі точки або нескінченності. Це, зокрема, дає змогу побудови ескізу графіку функції.
Нагадаємо умову неперервності функції $f(x)$ у точці $x = x_0$:

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0) \qquad (2.5)$$

Якщо ця умова порушується, то функція $f(x)$ має розрив у точці $x = x_0$.

Класифікація точок розриву функції.
Розриви *1-го роду* (коли ліва та права границі існують та скінченні):
- *усувний тип*, якщо $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$;
- *типу стрибок*, якщо $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$.

Розриви *2-го роду* (коли хоча би одна з однобічних границь дорівнює ∞ або не існує):

- *нескінченний тип*, якщо $f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)$ існують та хоча б одна з них дорівнює ∞;
- *не існує границя*, якщо $f(x_0-0)$ або $f(x_0+0)$ не існує.

Алгоритм дослідження функції на неперервність і побудова ескізу:
1. Встановити чи є функція елементарною.
2. Знайти область визначення D_f. Виписати точки x_0 на границі D_f.
3. Знайти праву та ліву границі функції $f(x)$ для кожної точки x_0.
4. Класифікувати точки розриву.
5. Побудувати ескіз графіка функції, з'єднуючи, за неперервністю $f(x)$ на D_f, отримані значення границь функції у досліджених точках, а також подивитися границі у $\pm\infty$.

Якщо функція не є елементарною, перевірка точок на розриви здійснюється за означенням, використовуючи специфіку та властивості даної функції.

Зазначимо, що на множині X часто актуальнішою за звичайну неперервність є наступна більш вимоглива властивість.
Def. Функція $f(x)$ називається *рівномірно неперервною* на X, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |\forall x,a\in X\cap D_f\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.
Th 2.15 (Кантора, про рівномірну неперервність). Із неперервності на замкненому проміжку випливає і рівномірна неперервність на ньому.
Коливання функції та її зв'язок із неперервністю.
Def. *Коливанням функції* $f(x)$ *на множині* M називається величина:
$$\omega(f)\big|_M = \omega(f,M) = \sup_{x,x'\in D(f)\cap M}\left|f(x)-f(x')\right|.$$
Якщо $\exists\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f,O(a,\delta))=\omega(f,a)\ge 0$, то величину $\omega(f,a)$ називають *коливанням функції в точці*.
Th 2.16. $f(x)\in C(\{a\}) \Leftrightarrow \omega(f,a)=0$.
Def. *Модулем неперервності* функції $f(x)$ на множині M називається:
$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{x,x'\in M\\ |x-x'|<\delta}}|f(x)-f(x')|.$$
Th 2.17. Функція $f(x)$ рівномірно неперервна на M тоді й тільки тоді, коли її модуль неперервності має нульову границю, коли $\delta\to+0$.

2.2. Контрольні запитання і завдання

1. Записати визначення границі числової функції і послідовності. Як змінюються означення для однобічних випадків та для невласних елементів?
2. Записати критерій Коші існування границі числової послідовності та функції.
3. Як пов'язані часткові границі з границею функції. Що таке верхня та нижня межа послідовності і функції?
4. Як формулюється визначення границі функції по Гейне, який її зв'язок з визначенням границі по Коші?
5. Які можуть виникати невизначеності коли шукаєш границю?
6. Сформулювати визначення неперервності функції. Які бувають розриви у функції (класифікація)?
7. Що таке елементарна функція та що відомо про її неперервність/розриви?
8. Що таке монотонна функція та що відомо про її неперервність/розриви?
9. Які теореми відомі про границі обмеженої (монотонної) послідовності? Проілюструвати їх на прикладі.
10. Навести приклади застосування правила Лопіталю та теореми Штольца.
11. Записати першу та другу чудові границі, та інші границі, що з ними пов'язані.
12. Які функції називаються еквівалентними, які одного порядку?
13. Що означає записи $f(x)=o(g(x))$ та $f(x)=O(g(x))$ коли $x\to a$?
14. Що таке шкала зростання?
15. Що таке головний член функції та як його можна використовувати при обчислені границь?
16. Навести приклад коли не можна змінювати функцію на її головний член при обчисленні границь.
17. Навести відомі приклади асимптотичних рівностей та відповідних еквівалентностей.
18. Виписати асимптотичні розкладення за формулою Маклорена для 5-ти основних елементарних функцій.
19. Що таке коливання функції на множині та у точці?
20. Чим відрізняються визначення звичайної неперервності та рівномірної неперервності функції на множині? Яка залежність від

замкненості/відкритості множини, що розглядається? Навести приклади.

21. Довести, що будь-який поліном непарного степеню має хоча б один дійсний корінь.

22. Сформулювати теорему про неперервність оберненої функції. Проілюструвати її на прикладі обернених тригонометричних і гіперболічних функцій.

23. Яка функція та на якому проміжку обов'язково приймає свої найбільше та найменше значення?

2.3. Приклади розв'язування задач

Якщо при обчисленні границі коли $x \to a$ виникає невизначеність $\frac{0}{0}$ це означає, що $x = a$ є корінь чисельника та знаменника. Отже за треба виділити у чисельнику та знаменнику множник вигляду $(x-a)^{\lambda}$, що після скорочення усуває невизначеність.

Для поліномів вищенаведена вказівка означає розкладення на множники за допомогою розв'язань рівнянь у чисельнику та знаменнику або за допомогою ділення в стовпчик на $(x-a)$.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^4-2x+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}.$$

Для дробів із ірраціональностями для виділення необхідного множника треба усунути ірраціональність помножуючи для парних коренів на спряжене для доповнення до різниці квадратів та на неповний квадрат для коренів третього степеню.

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{3}{2}.$$

Якщо невизначеність $\frac{0}{0}$ виникає у виразах, що містять тригонометричні функції, то треба застосовувати наслідки першої чудової границі. У випадку логарифмічних, складних степеневих чи показникових функції треба використовувати наслідки другої чудової границі. Також друга чудова границя виникає при невизначеності 1^{∞} та у степенево-показних виразах.

Приклад 3.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{3^x-3^{\pi}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{3^{\pi}\left(3^{x-\pi}-1\right)}=\left|\begin{array}{l}\textit{Заміна}\\ t=x-\pi\\ x\to\pi\Leftrightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{3^{\pi}\left(3^{t}-1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{3^{\pi}t\ln 3}=-\frac{1}{3^{\pi}\ln 3}.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cancel{x}}\left(\frac{-5\cancel{x}}{x^2+3x+1}\right)}=e^{-5}.$$

У невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ треба визначити найбільші із зростаючих функцій чисельника та знаменника та винести їх за дужки. Зокрема, для поліномів та загальних степеневих виразів, треба виносити змінну у старшої степені.

Приклад 5.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{9x^4-2x+1}+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\left(1+\sqrt{2/x^3+1/x^4}\right)}{3x^2\left(\sqrt{1-2/x^3+1/x^2}+1/x\right)}=\frac{2}{3}$$

Більш загальними за чудові еквівалентності виявляється застосування розкладень за формулою Тейлору або використання правила Лопіталю та шкали росту. Якщо функції, що стоять у деякому виразі мають вже відомі розкладення за формулою Тейлору або ці розкладення можуть бути легко отримані, то їх слід використовувати при обчисленні границь. Якщо отримання вищезазначених розкладень пов'язано із значними технічними трудощами, то більш зручним для обчислення границь із діленням виявляється застосування правила Лопіталю.

Приклад 6.

Спосіб 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-1+x-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}-2x}{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)}{\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)}=2.$$

Спосіб 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}=\left|\begin{matrix}\textit{За правилом}\\ \textit{Лопіталю тричі}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Для задач на знаходження головного члену або еквівалентності простішого вигляду, можна вживати всі вищенаведені заходи, окрім правила Лопіталю.

Приклад 7.

$$\ln\left(\frac{1+x}{5+x}\right)\cdot\arcsin\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}x\underset{x\to+\infty}{\sim}\left(\frac{1+x}{5+x}-1\right)\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}=\frac{-4}{5+x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-2\pi}{x^2}.$$

Еквівалентності та розкладення також зручно використовувати при обчисленні границь із добутком та у більш складних виразах. Наприклад при невизначеності $0\cdot\infty$, коли правило Лопіталю вимагає додаткових попередніх перетворень.

Приклад 8.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+x}{5+x}\right)\cdot\arcsin\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}x\cdot\left(3x^2+2x+7\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\pi}{x^2}\cdot 3x^2=-6\pi.$$

Приклад 9. Доведемо, що функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ не є рівномірно неперервна на проміжку $X=(0,+\infty)$, хоча і неперервна на ньому:

$$\forall\delta>0\quad f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_2x_1}=\frac{\delta}{x_1(x_1+\delta)}\xrightarrow{x_1\to+0}+\infty.$$

2.4. Задачі для самостійного розв’язку

Означення величин та границь мовою «ε – δ».

1. Мовою «ε – δ» довести, вказуючи правило знаходження δ по заданому ε, що

а) $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=1/2$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

2. Що означають наступні висловлювання:

а) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

б) $\exists\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

в) $\forall\varepsilon\qquad\exists\,\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

г) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

д) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta\qquad\mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

е) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

є) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid |x-a|>\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

ж) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|>\varepsilon$;

з) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)-b>\varepsilon$;

и) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid 0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>\varepsilon$;

і) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid\ 0<\ x\ <\delta\quad\Rightarrow\ f(x)<-\varepsilon$;

ї) $\forall\varepsilon\qquad\exists\,\delta\qquad\mid\ x\ <\ \delta\quad\Rightarrow\ f(x)>\varepsilon$;

к) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \mid 0<x-a<\delta\Rightarrow 0\le f(x)-b<\varepsilon$.

3. Перевести у висловлювання на мові «ε – δ»:

а) $y\to b-0,\quad x\to a$; б) $y\to b-0,\quad x\to\infty$;

в) $y\to b-0,\quad x\to a+0$; г) $y\to b-0,\quad x\to-\infty$;

д) $y\to b+0,\quad x\to a-0$; е) $y\to b+0,\quad x\to+\infty$;

є) $y\to\infty,\quad x\to a-0$; ж) $y\to-\infty,\quad x\to+\infty$.

4. Мовою «ε – δ» для $x\to a$ та для $x\to\infty$ записати твердження, що функція $f(x)$

а) обмежена; б) не обмежена;

в) відокремлена від нуля; г) не відокремлена від нуля;

д) має скінчену границю; е) не має скінченої границі;

є) нескінченно мала; ж) не нескінченно мала;

з) нескінченно велика; и) не нескінченно велика.

Обчислення границь.

Обчислити наступні границі:

5 (а, б, в, г, д). $\lim \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ $\quad x\to 1,\quad x\to 2,\quad x\to 5,\quad x\to 3,\quad x\to\infty.$

6 (а, б, в, г, д). $\lim \dfrac{3x^2+9x+6}{20+6x-2x^2}$ $\quad x\to 0,\quad x\to -1,\quad x\to 5,\quad x\to -2,\quad x\to\infty.$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{4+2x-6x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+20)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+5x^6+x^{12})^{1/4}}{(2x-1)^3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

18. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

21. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},\ (a>0)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

26. Знайти сталі a і b з умови: $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

Обчислити, застосовуючи першу чудову границю та її наслідки:

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

30. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx},\quad (m,n\in\mathbf{Z})$.

31. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

33. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}(2x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

34. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

35. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

38. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

39. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x\cdot\operatorname{arctg}2x}{2\arccos x-\pi}$.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

42. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin 6x}{2\sin x-1}\sqrt{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(6x-\pi)^2}}$.

43. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\cos\dfrac{\pi x+1}{x-2}\right)\dfrac{x^3+5x-1}{\sin\dfrac{\pi}{x}}$.

44. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

Обчислити, застосовуючи другу чудову границю та її наслідки:

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+9}\right)^{x^2\sin\frac{1}{x}}$.

47. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

48. $\lim\limits_{x\to2\pi}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\frac{x}{(x-2\pi)^2}}$.

49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

50. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$.

51. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

52. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

54. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(4^{1/x}-4^{1/(x+1)}\right)$.

55. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

56. $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

57. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3y}{2x+z}\right)^{x+1}$.

59. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{1}{e}-\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}\right)$.

60. $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x^2}}$

Границі пов'язані із логарифмічними, показними та степеневими функціями:

61. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a},\ (a>0)$.

62. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$.

63. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln\left(x^{10}+x+1\right)}$.

64. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$.

65. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a},\ (a>0)$.

66. $\lim\limits_{x\to0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

67. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}\right)$.

68. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{9^{tgx^2}-1}{\ln\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

69. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[7]{1+8x}-1}{7^{8x}-1}$.

70. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(1+\sin x)^e-1}{\sqrt{1+\cos x}}$.

71. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(1+\cos\pi x)^\pi-2^\pi}{(x-2)^2}$.

72. $\lim\limits_{x\to+1}\dfrac{\sin^2\left(\pi\cdot2^x\right)}{\ln\left[\cos\left(\pi\cdot2^x\right)\right]}$.

73 (а, б). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}$.

74. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2^x\right)\cdot\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

75. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\log_x 2$.

76 (а, б). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x)$

77 (а, б). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\mathrm{th}\,x$

78. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\mathrm{ch}\,x)$.

79. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin2x}-e^{\sin x}}{\mathrm{th}x}$.

80. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

81. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right),\ (x>0)$.

82. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

83. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left((2e)^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}-2\right)$

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$.

85. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\mathrm{ch}\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

86. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

87. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+1}{x}\left(1-\dfrac{x^2+1}{x}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)$.

88. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3},\ (a>0)$.

Обчислення границь із застосуванням правила Лопіталю та розкладень за формулами Тейлора (Маклорена):

89. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

90. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

91. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

92. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}}$

93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}$.

94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

97. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$.

98. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

99. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$.

100. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

101. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

102. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

103. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1000x^3+100x^2+10x+1\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$.

104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

105. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

106. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

107. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

109. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

110. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{\ln^x x}$.

111. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

112. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\,\dfrac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}\right]$.

113. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}-\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{1/x}}{x^n}$.

Границі послідовностей.

Обчислити границі:

114. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{10\,000n}{n^2+1}$.

115. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

116. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

117. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

118. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n^2+n}\right)$

119. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n\left(3^n+n!\right)}$

120. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

121. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

122. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

123. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

124. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right)$.

125. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

126. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

127. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)$.

128. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$.

129. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n$.

130. За теоремою Штольца довести наступні рівності (тут символ «$\Leftarrow|$» позначає існування ліворуч за умови існування границі праворуч та їх рівність, $x_k \ge 0$):

а) $\lim \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \Leftarrow | \lim x_n$;

б) $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \Leftarrow | \lim x_n$;

в) $\lim \sqrt[n]{x_n} \Leftarrow | \lim \frac{x_n}{x_{n-1}}$.

131. За допомогою 130 в) обчислити границі: а) $\lim \sqrt[n]{n}$; б) $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

За Th 2.8 **(**Вейерштраса, о границі монотонної та обмеженої послідовності) довести збіжність послідовностей і знайти їх границі:

132. $x_n = \left(\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1}\right)$. **133**. $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

134. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}},\ \ldots,\ x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ коренів}},\ \ldots$

135. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$.

Обчислити наступні границі у вигляді функцій із трьома крапками:

136. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x-1}$.

137. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}),\ |x| < 1$.

138. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$.

139. $\lim\limits_{x\to1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

140. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$

Для послідовностей (x_n), знайти $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ та $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n$:

141. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$. **142**. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$.

143. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **144**. $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$.

Знайти $\varliminf\limits_{x\to0} f(x)$ та $\varlimsup\limits_{x\to0} f(x)$:

145. $f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. **146**. $f(x) = \left(1 + \cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2(1/x)}$.

147. $f(x) = (2 - x^2)\cos\frac{1}{x}$.

***O*-символіка. Асимптотичні порівняння. Головний член.**

148. Показати, що при $x \to a$:

а) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; б) $O(o(f(x))) = o(f(x))$;

в) $o(O(f(x))) = o(f(x))$; г) $O(O(f(x))) = O(f(x))$;

149. Нехай $x \to 0$, довести, що

а) $2x - x^2 = O(x)$; б) $x\sin\sqrt{x} = O(x^{3/2})$;

в) $x\sin\frac{1}{x} = O(|x|)$; г) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon > 0)$;

д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$; е) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = O(1)$.

150. Показати, що коли $x \to +\infty$:

а) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$; б) $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$;

в) $x + x^2\sin x = O(x^2)$; г) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

151. Довести, що при достатньо великих $x > 0$ мають місце нерівності:

а) $x^2 + 10x + 100 < 0{,}001x^3$; б) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$; в) $x^{10}e^x < e^{2x}$.

152. Знайти головний член коли $x \to 0$:

а) $2x-3x^3+x^5$; б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

в) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$; г) $\mathrm{tg}x-\sin x$;

д) $\ln\dfrac{2+x}{2+3x}$; е) $\cos\dfrac{\pi(x+2)}{x+4}$;

є) $\mathrm{tg}(\sin x)-\sin(\mathrm{tg}\,x)$; ж) $(1+x)^x-1$.

153. Знайти головний член коли $x \to 1$:

а) x^3-3x+2; б) $\sqrt{x}-1$; в) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$; г) $\ln x$;

д) e^x-e; е) x^x-1; є) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; ж) $\dfrac{\cos\pi x+x}{x^e-1}$;

з) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; и) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; і) $\dfrac{1}{\sin\pi x}$; ї) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

154. Нехай $x \to +\infty$. Знайти головний член та визначити порядок росту/спадання:

а) $x^2+100x+10000$; б) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$;

д) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; е) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

є) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$; ж) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

155. Знайти головний член коли $x \to +\infty$:

а) $\left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{\pi}-1$; б) $\sin\dfrac{\pi(x+1)}{x+2}$; в) $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi x+2}{1+3x}$;

г) $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi x+2}{1+2x}$; д) $5^{\frac{1}{x}}-5^{\frac{1}{x+1}}$; е) $x^{100}+\ln x+e^x$.

156. Знайти головний член простішого вигляду для величин:

а) $\ln\left(x^2+e^x\right)\cdot\arcsin\mathrm{tg}\dfrac{1}{x^2}\quad(x\to\pm\infty)$;

б) $\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)\left[\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\pi}-1\right]\cdot\cos\dfrac{x+2}{x+3}\quad(x\to\infty)$;

в) $\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\cos\dfrac{\pi(x-1)}{2}\cdot\ln(2+x)\,(x\to\pm 0)$;

г) $\mathrm{arctgx}^3\cdot\sin\left(2^{x^2}-1\right)\cdot\left[\left(\cos x+x^2\right)^{\pi}-1\right]\,(x\to 0)$;

д) $\ln\dfrac{2}{1+x^2}\cdot\sin\dfrac{\pi(x+2)}{3}\cdot\left(a^x-1\right),\quad(x\to 1)$;

е) $\left[(3+x)^{\sqrt{2}}-1\right]^2\cdot\ln\left(9+x^3\right)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2},\quad(x\to -2)$;

є) $\sin x\cdot\ln\dfrac{1+x}{1+\pi}\cdot(e^x-1)\cdot(\pi^x-\pi^{\pi}),\quad(x\to\pi)$.

Неперервність, розриви та їх класифікація

Дослідити на неперервність: визначити точки розриву та з'ясувати їх характер. Намалювати ескізи графіків функцій.

157. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

158. $y=\dfrac{x+1}{x^2-5x-6}$.

159. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

160. $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

161. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

162. $y=\mathrm{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

163. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$.

164. $y=\dfrac{\mathrm{sgn}\left(x^2+5x+6\right)}{x+1}$.

165. $y=\dfrac{\mathrm{sgn}\left(x^2-8x+7\right)}{x-3}$.

166. $y=\dfrac{\mathrm{arcctg}\dfrac{3}{x-1}}{x+1}$.

167. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x+1}}{x-3}$.

168. $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

169. $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

170. $y=\dfrac{2}{1-2^x}$.

171. $y=\dfrac{\cos(\pi x/2)}{x^3-x^2}$.

172. $y=\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

173. $y=\operatorname{sgn}\left(x^2-2x\right)$.

174. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{\sin \pi x}$.

175. $y=\dfrac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}\cdot e^{-\frac{1}{\cos^2 x}}$.

176. $y=\dfrac{x^{\sqrt{2}}-1}{\operatorname{tg}\pi x}\cdot 3^{\frac{1}{\sin x}}$.

177. $y=\dfrac{(x-3)^2}{1+\cos \pi x}$.

178. $y=\dfrac{\ln|1+x|}{\operatorname{tg}2x}$.

179. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

180. $y=\operatorname{th}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

181. $y=x-[x]$.

182. $y=[x]\sin\pi x$.

183. $y=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

184. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n},\quad (x>0)$.

185. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)\right)$.

186. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

187. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

188. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$.

189. Показати, що рівняння $\operatorname{ctg}x=kx$ $\forall k\in\mathbf{R}$ та $x\in(0,\pi)$ має єдиний неперервний корінь $x=x(k)$.

190. Дослідити функцію на неперервність в залежності від значення параметра $\alpha\in\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin(\sin x)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sin x}, & x\neq\pi n\\ \alpha, & x=\pi n\ (n\in\mathbf{Z})\end{cases}.$$

191. Довести, що наступна функція Діріхлє розривна у кожній точці: $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$.

192. Модифікувати функцію Діріхлє із попереднього номера так, щоб отримати функцію розривну у кожній точці **R** крім 0.

193. Довести, що наступна функція Томе[3] неперервна у кожній ірраціональній точці та розривна у кожній раціональній точці. Ця функція визначається так:

$$t(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ \text{(нескоротний дріб)},\ p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}.$$

194. Довести наступні властивості[4] функції Томе $t(x)$, що визначена у попередньому номеру, побудувати ескіз її графіка на проміжку $(0,1)$:

а) Функція Томе обмежена та відображає всі дійсні числа в одиничний проміжок: $t(x):\mathbf{R}\to[0,1]$;

б) Функція $t(x)$ періодична з періодом 1: $t(x+n)=t(x),\ \forall x\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N}$.

195. Показати, що наступні функції не є рівномірно неперервними на проміжку $(0,1)$: а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; б) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

Чи будуть вони рівномірно неперервні на проміжку $\left(\dfrac{1}{10},1\right)$, аргументувати відповідь?

---

[3] C.J. Thomae (1840 - 1921) – німецький математик. Ця функція має багато інших назв: функція Рімана, модифікована функція Діріхле, поп-корн функція, краплева функція, функція злічених хмар (countable cloud), лінійкова функція (ruler), зірки над Вавилоном (stars over Babylon).

[4] Серед інших властивостей функції Томе: ніде не диференційованість із локальними максимумами у кожній раціональній точці (номер 147 наступного розділу 3) та інтегрованість за Ріманом (див. частину 2).