РОЗДІЛ 1.
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ ТА ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Основні поняття і властивості

Елементи математичної логіки.

Прості й сполучені висловлювання. Логічні зв'язування.

Оповідальне речення, яке за змістом істина або неправда називається *висловлюванням* (приклад: 2×2 = 4 – висловлювання, що є істиною; 2×2 = 5 – висловлювання, що є неправдою). Прості висловлювання позначають літерами (маленькими або великими грецькими або латинськими *A*, *B*, *C*, *D*, …) та називають *пропозиціональними змінними*. За допомогою операцій логічного зв'язування можна створювати *складні висловлювання* та формули. Змістовно виправдано використання 5ти логічних зв'язувань[1], які вказано у порядку пріоритету:

1. унарна – заперечення « $\neg$ » ($\neg A$) (не A);

 і бінарні:

2. кон'юнкція « $\wedge$ » ($A \wedge B$, A і B);
3. диз'юнкція « $\vee$ » ($A \vee B$, A або B);
4. імплікація « $\Rightarrow$ » ($A \Rightarrow B$, якщо A то B, із A випливає B);
5. еквіваленція « $\Leftrightarrow$ » ($A \Leftrightarrow B$, A еквівалентно B).

Для значень «істина» та «неправда» використовують скорочення «і» та «н» або «1» та «0» відповідно. Результати застосування 5ти логічних зв'язувань до висловів наведемо у наступній таблиці (таблиці істинності):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

[1] Додаткові логічні зв'язування:
« | » – антікон'юнкція (штрих Шефера): $A \mid B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$;
« $\downarrow$ » – антідиз'юнкція (стрілка Пірса): $A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$.

Таким чином мова математичної логіки складається із наступного *алфавіту*: $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$, де $\sigma_1 = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ - змінні висловлювання або пропозиціональні змінні, $\sigma_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ - логічні зв'язування; $\sigma_3 = \{(\,,\,)\}$ - додаткові символи.

Взаємозв'язок логічних зв'язувань:

Кожне зв'язування можна виразити через три основні $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B);$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Алгебраїчні властивості зв'язувань:

1. $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$ – комутативний закон (всі бінарні зв'язування крім імплікації комутативні);
2. $\left.\begin{array}{l} a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c \end{array}\right\}$ – асоціативні закони ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ неасоціативні);
3. $\left.\begin{array}{l} a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{array}\right\}$ – дистрибутивні закони;
4. $\left.\begin{array}{l} \neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b \\ \neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b \end{array}\right\}$ – закони де Моргана;
5. Транзитивність $\Rightarrow$ (так саме і $\Leftrightarrow$): $a \Rightarrow b$ та $b \Rightarrow c$, тоді $a \Rightarrow c$;
6. Закон подвійного заперечення: $\neg\neg a \Leftrightarrow a$;
7. Принцип тотожності: $\neg a \vee a \Leftrightarrow 1$, $\neg a \wedge a \Leftrightarrow 0$;
8. Правила поглинання: $a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$, $a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$;
9. Закони 0 та 1: $0 \wedge a \Leftrightarrow 0$, $1 \wedge a \Leftrightarrow a$, $0 \vee a \Leftrightarrow a$, $1 \vee a \Leftrightarrow 1$.

Формули та їх класифікація.

Формула: = {пропозиціональна змінна | $\neg U$ | $(U \wedge V)$ | $(U \vee V)$ | $(U \Rightarrow V)$ | $(U \Leftrightarrow V)$}, де U і V – формули або висловлювання.

Def. Формула може бути

а) *здійснима* – якщо існує ($\exists$) набор параметрів (значень змінних), при яких формула істина;

б) *тавтологія* (тотожна істина) – якщо для будь-якого набору параметрів формула істинна;

в) *спростовна* – якщо існує набор параметрів, при яких формула неправдива;

г) *протиріччя* (тотожна неправда) – якщо для будь-якого набору параметрів формула неправдива.

Формула називається *формулою з тісними запереченнями*, якщо в ній нема символів $\Rightarrow$ та $\Leftrightarrow$, і заперечення має відношення тільки до пропозиціональних змінних.

Довільна кон'юнкція (диз'юнкція) формул, кожна з яких є пропозиціональною змінною або її запереченням називається *елементарною кон'юнкцією* (*диз'юнкцією*).

Def. Довільна диз'юнкція елементарних кон'юнкцій називається *диз'юнктивною нормальною формою*, а довільна кон'юнкція елементарних диз'юнкцій називається *кон'юнктивною нормальною формою* (д.н.ф. і к.н.ф. відповідно).

Def. Д.н.ф. (к.н.ф.) називається *досконалою* – д.д.н.ф. (д.к.н.ф.), якщо кожна змінна формули входить до елементарної кон'юнкції (диз'юнкції) рівно один раз із запереченням або без нього.

Зауваження: д.к.н.ф. дозволяє сказати, що вихідна формула неправдива тільки у випадку, коли A, B, C – неправдиві. Знаючи д.к.н.ф., легко написати і д.д.н.ф якщо врахувати, що окремі елементарні кон'юнкції описують випадки істинності форми.

$$((A \vee B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee$$
$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)).$$

У записаної формулі ліворуч від $\Leftrightarrow$ стоїть д.к.н.ф. а праворуч д.д.н.ф.

Обчислити складне висловлювання, тобто встановити істинна воно або неправда при різних значеннях пропозиціональних змінних можливо не тільки за допомогою таблиць істинності, але й за допомогою репрезентуючих функцій, при цьому обчислення висловлювань робиться за допомогою арифметичних дій із 0 та 1. Нехай f (істина) = 1, f (неправда) = 0 тоді:

$f(\neg A) = 1 - f(A)$; $\quad f(B \vee A) = f(B) + f(A) - f(A)\cdot f(B)$;

$f(A \wedge B) = f(A)\cdot f(B)$; $\quad f(B \Rightarrow A) = 1 - f(B) + f(A)\cdot f(B)$;

$f(A \Leftrightarrow B) = 1 - f(A) - f(B) + 2f(A)f(B)$.

Обчислити висловлювання можна також, якщо змоделювати вихідне складене висловлювання еквівалентною електричною схемою. Для цього, записавши вихідну формулу як формулу з тісними запереченнями, можна замінити її еквівалентним електроланцюгом. При цьому: кон'юнкція $A \wedge B$ може бути промодельована послідовним включенням в ланцюг двох вимикачів A і B, а диз'юнкція $A \vee B$ – паралельним. Провідність ланцюга визначається істинністю формули, що дозволяє а) спрощувати ланцюги (зменшити число розмикачів), спрощуючи відповідні формули з використанням алгебраїчних властивостей зв'язок; б) будувати ланцюга із заданою функцією провідності від положень (станів) пакетних перемикачів.

Квантори

Квантор - логічна операція, що перетворює твердження про певну властивість у об'єктів даного класу в твердження про кількість об'єктів, що володіють цією властивістю.

Важливими для використання є наступні квантори:

$\forall$ – квантор загальності (від англ. All, Any);

$\exists$ – квантор існування (від англ. Exist);

$\exists!$ – квантор існування й одиничності;

$\forall x\ A(x)$ – для всіх x виконується властивість $A(x)$;

$\exists x\ A(x)$ – існує x, для якого виконується властивість $A(x)$;

$\exists! x\ A(x)$ – існує й тільки один x, для якого виконана властивість $A(x)$.

Алгебраїчні властивості кванторів:

1. $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)$,
   $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)$;
2. Комутування кванторів із запереченням
   $\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$,
   $\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$;
3. Комутування однойменних кванторів по різним змінним
   $\forall x\, \forall y\, A(x, y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, A(x, y)$,
   $\exists x\, \exists y\, A(x, y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, A(x, y)$;

Різнойменні квантори, взагалі, не комутирують, але
   $\exists x\, \forall y\, A(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, A(x, y)$, хоча зворотної імплікації нема;

4. Дистрибутивність $\forall$ відносно $\wedge$ та $\exists$ відносно $\vee$:
   $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$,

$\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$;

5. $\forall x\,A(x) \vee \forall x\,B(x) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x))$,

$\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\,A(x) \wedge \exists x\,B(x)$,

$\exists x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \Rightarrow \exists x\,B(x)$,

$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x\,A(x) \Rightarrow \forall x\,B(x)$;

6. Властивості кванторів щодо ототожнення:

$\forall x\,\forall y\,A(x, y) \Rightarrow \forall x\,A(x, x)$,

$\exists x\,A(x, y) \Rightarrow \exists x\,\exists y\,A(x, y)$;

7. Дистрибутивність кванторів щодо $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ коли одно з висловлювань не залежить від кванторної змінної:

$\forall x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \wedge B$,

$\exists x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge B$,

$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \Rightarrow B$,

$\forall x\,(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \Rightarrow \forall x\,B(x)$;

8. Квантор існування й одиничності $\exists!$

$\exists! x\,A(x) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge \forall y\,(A(y) \Rightarrow y = x)$;

9. Релятивізовані квантори:

$\forall_R\,x\,A(x) \Leftrightarrow \forall x\,(R(x) \Rightarrow A(x))$ «для всіх x таких, що $R(x)$»

$\exists_R\,x\,A(x) \Leftrightarrow \exists x\,(R(x) \wedge A(x))$. «існує x такий, що $R(x)$ і $A(x)$»

Елементи теорії множин.

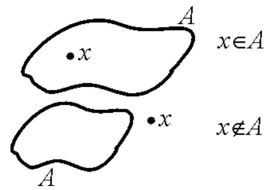
Множина – це об'єднання в одно ціле певних, цілком розпізнавальних об'єктів (*елементів*) нашого сприйняття або думки[2].

Елементи множин, здебільшого, позначатиме малими літерами із латинського алфавіту: $a, b, c, \ldots; x, y, z, \ldots$. А множини – великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots; X, Y, Z, \ldots$. Звісно, послідовно витримувати цю угоду, взагалі, неможливо оскільки множини самі можуть бути елементами інших множин.

[2] Наведене поняття (Г.Кантор) не є означенням множини воно лише пояснює його, зв'язуючи з іншими. Поняття множини відноситься до базових понять, що не визначаються. Після відкриття парадоксів «наївної теорії множин», на початку XX століття були запропоновані різні системи аксіом, серед яких найпоширенішою є система Цермело-Френкеля з аксіомою вибору (ZFC, див. задачу 20 цього розділу).

Множина задається сукупністю своїх елементів, які перелічуються у фігурних душках: $M = \{x, y, z\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Часто множина задається за допомогою *класифікатора* («|» або «:»), після якого описується властивість, що характеризує елементи цієї множини: $M \equiv \{x \mid P(x)\}$ – «множина M є множина об'єктів x для яких виконана властивість $P(x)$».

Наведемо основні позначення та ілюстрації до них за допомогою діаграм Ейлера-Венна (множини – фігури на площині, елементи – точки):



$x \in A$ – елемент x *належить* множині A, або

$A \ni x$ – множина A *містить* елемент x;

$x \notin A \Leftrightarrow \neg\,(x \in A)$ – x *не належить* множині A, або $A \not\ni x$ – множина A *не містить* елемента x.

Відношення *рівності* **й** *включення***:**

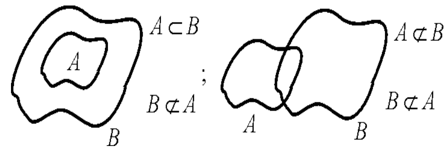
1. $A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

   а) рефлексивність: $A = A$;

   б) симетрія: $A = B \Rightarrow B = A$;

   в) транзитивність: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

2. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$



«Множина A *міститься* у множині B»,

A – *підмножина*, B – *надмножина*.

$A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$ – «*A містить B*».

Якщо $x \in A$, то $\{x\} \subset A$, але $x \neq \{x\}$.

   а) рефлективність: $A \subset A$;

   б) антисиметрія: $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$;

   в) транзитивність: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

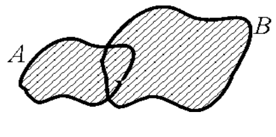
Перелічені властивості означають, що відношення рівності та включення визначають *часткову впорядкованість* на множинах.

Порожня множина $\varnothing$ – це множина, яка не має елементів: а) $\forall x\ \ x \notin \varnothing$; б) $\forall X\ \ \varnothing \subset X$.

Операції над множинами

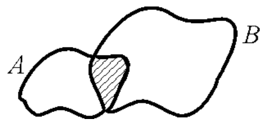
1. $A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$

$A \cup B$ – *об'єднання множин*;



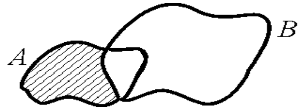
2. $A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cap B$ – *перетин множин*;



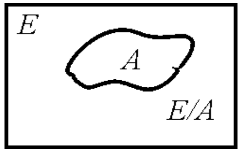
3. $A \setminus B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \setminus B$ – *різниця множин*;



Доповнення до множини на множині E:

$$E \setminus A \equiv C_E A = \bar{A}.$$



При цьому

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

4. *Симетрична різниця*:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

5. *Декартов (прямий) добуток* множин:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\},$$

тут (a, b) – *упорядкована пара* елементів a і b, на відміну від $\{a, b\}$, де порядок неважливий.

Властивості операцій

Об'єднання та перетин множин комутативні, асоціативні і дистрибутивні по відношенню один до одного:

1. $A \cup B = B \cup A$; $\quad A \cap B = B \cap A$;

2. $((A \cup B) \cup C) = (A \cup (B \cup C))$; $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

4. Об'єднання і перетин ідемпотентні:

$A \cup A = A \cap A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \setminus \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $\varnothing \setminus A = \varnothing$; $A \setminus A = \varnothing$.

5. Різниця дистрибутивна щодо об'єднання, перетину і різниці:

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

6. Прямий добуток не комутує та не асоціативен: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$; $A \times B \neq B \times A$ (якщо $B \neq A$); також $A \times A = A^2$; $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$;

$$\left.\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ (A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}\right\} \text{ дистрибутивність } \cup;$$

$$\left.\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C) \end{aligned}\right\} \text{ дистрибутивність } \cap.$$

Приклади множин[3]**:**

$\varnothing$ - порожня множина;

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - натуральний ряд;

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ - множина цілих чисел;

$\mathbf{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z} \right\}$ - множина раціональних чисел;

$\mathbf{R}$ = множина дійсних чисел;

$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ - множина невід'ємних дійсних чисел;

$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ - декартова площина;

$\mathbf{C} = \{z \mid z = x + iy;\ \ x, y \in \mathbf{R},\ \ i^2 = -1\}$ - множина комплексних чисел.

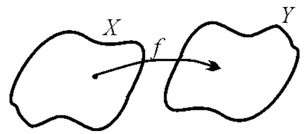
Числові проміжки:

а) інтервал : $\quad (a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$;

б) полуінтервали: $\quad [a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$, $\ (a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$;

в) сегмент: $\quad [a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

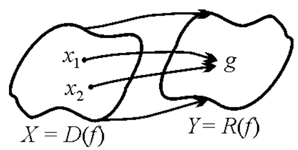
Відповідності між множинами



Нехай X та Y – довільні множини, f – закон або правило за яким кожному елементу множини X встановлюється у відповідність один елемент множини Y: $\forall x \in X\ \ \exists! y \in Y\ \ y = f(x)$, тоді говорять, що задано *відображення* (або, у разі числових множин, *функція*) $f: X \to Y$ між множинами X та Y. Множина X називається *областю визначення* відображення f і позначається $D(f)$; множина елементів $y \in Y$, які поставлені у відповідність елементам множини X називається *областю значень* відображення f і позначається $E(f)$. Відображення від множини це $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, тоді маємо $E(f) = f(D(f))$.

Типи відповідностей:

1. Сюр'єкція (f -sur, відображення «на»):



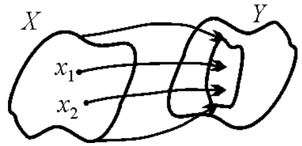
$Y = E(f)$; тобто

$\forall y \in Y\ \ \exists x \in X\ \ y = f(x)$;

$\uparrow$ (x не обов'язково $\exists!$)

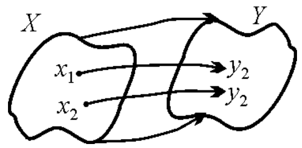
[3] Зауважимо, що тут ми не наводимо аксіоматичних означень перелічених множин. Детальніше про множину **R** див. нижче у цьому розділу, про **C** у розділу 4.

2. Ін'єкція (f -inj, вкладення або відображення «в»):



$E(f) \subset Y, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Бієкція (f -bij, взаємооднозначне відображення):



f -sur $\wedge$ f -inj;

або $E(f) = Y, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

тобто $\forall y \in Y \quad \exists!\, x \in X \quad y = f(x)$;

а це те саме, що у f є *обернене* до неї відображення $f^{-1} : Y \to X$.

Def. Множини X і Y називаються *рівнопотужними* ($X \cong Y$), якщо існує бієкція між X та Y (взаємнооднозначна відповідність).

Def. Множина рівнопотужна множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ називається *зліченною*. Множина рівнопотужна інтервалу (0,1) називається множиною *потужності континуум*.

Множина дійсних чисел **R** рівнопотужна інтервалу (0,1), отже є множиною потужності *континуум*.

Th 1.1. Множина **Q** раціональних чисел – зліченна.

Th 1.2. Множина дійсних чисел **R** як і інтервал (0,1) не є зліченними.

Зауважимо, що існування або відсутність множин потужності більше за зліченну та менше за континуум не випливає з аксіом теорії множин (ZFC, див. вправу 20 цього розділу) і може бути прийнято як ще одна аксіома теорії множин.

Дійсна числова пряма. R – повне впорядковане поле.

Множину дійсних чисел **R** наділено операціями додавання і добутку, тобто відображеннями $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, з наступними властивостями:

1. $a + b = b + a$ і $a \cdot b = b \cdot a$ (комутативний закон);
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$ і $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot a)$ (асоціативний закон);
3. $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (дистрибутивний закон);
4. Існують різні елементи 0 і 1 такі, що $0 + a = a$, $1 \cdot a = a$ для всіх a.
5. Для кожного a існує *протилежний* $-a$ такий, що $a + (-a) = 0$; для кожного $a \neq 0$ існує *зворотний* елемент a^{-1} такий, що $a \cdot (a^{-1}) = 1$.

Множина з двома операціями, що задовольняють аксіомам 1-5, називається *полем*. Множина **Q** раціональних чисел, як **R** і **C**, є поле.

Відношення порядку ≤.

Множина дійсних чисел впорядкована відношенням $\leq$, з наступними властивостями:

6. Для кожної пари дійсних чисел a і b виконується $a \leq b$ або $b \leq a$ (якщо $a \leq b$ і $b \leq a$ одночасно, то $a = b$);
7. Якщо $a \leq b$ і $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивність);
8. Якщо $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$ для будь-якого c, та якщо $0 \leq c$, то $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Поле з відношенням порядку, що задовольняє 6-8 є впорядкованим полем. Поле **Q** раціональних чисел, як і **R**, є впорядкованим.

Найважливішою аксіомою для математичного аналізу дійсних чисел є наступна дев'ята *аксіома повноти*. Пред тим як її сформулювати нам знадобляться ще декілька означень.

Грані числових множин.

Def. Множина X називається *обмеженою зверху* (*знизу*) якщо існує дійсне число L – *верхня грань* (l – *нижня грань*) таке, що L більше (l менше) кожного елементу X.

Обмежена зверху: $\exists L \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad x \leq L$.

Обмежена знизу: $\exists l \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad x \geq l$.

Множина *обмежена*, якщо вона обмежена зверху і знизу:

$\exists L, l \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad l \leq x \leq L$ або $\exists A \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad |x| < A$.

Def. Найменша з верхніх граній множини, якщо вона існує, називається *супремумом* або *точною верхньою гранню* L^* множини X і позначається: $L^* = \sup X$. Найбільша з нижніх граній, якщо існує, називається *інфімумом* або *точною нижньою гранню* l^* множини X і позначається: $l^* = \inf X$.

Th 1.3 (критерій супремума й інфімума).

$L^* = \sup X$: 1. $\forall x \in X \quad x \leq L^*$ і 2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \quad x > L^* - \varepsilon$.

$l^* = \inf X$: 1. $\forall x \in X \quad x > l^*$ і 2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \quad x < l^* + \varepsilon$.

Def. Якщо $L^* \in X$, тоді L^* називається *максимальним елементом* множини X: $L^* = \max X$. Аналогічно, якщо $l^* \in X$, то l^* називається *мінімальним елементом* множини X: $l^* = \min X$.

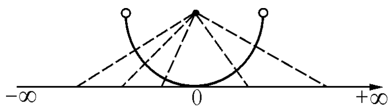
Аксіома повноти. Якщо непорожня множина в **R** обмежена зверху (знизу), то вона має точну верхню (нижню) грань в **R**.

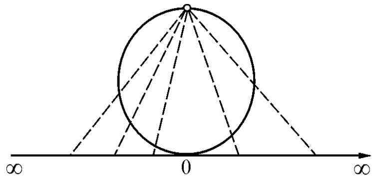
Розширена числова пряма.

Числову пряму **R** можна розширити додаючи до неї нескінченість ∞, або дві нескінчености $-\infty$, $+\infty$ (*невласні елементи*):

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \text{ або } \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Наступні рисунки ілюструють той факт, що $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ топологічно еквівалентна[4] полуокружності із крайніми точками дуги або відрізку, а $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ топологічно[5] еквівалентна окружності.





На $\overline{\mathbf{R}}$ кожна непорожня множина має точну верхню (нижню) грань (можливо невласну).

Приклади.

1. $X = \mathbf{N}$ $\inf X = \min X = 1$, $\sup X = +\infty$, $\max X$ не існує.
2. $X = \mathbf{Q}$ $\inf X = -\infty$, $\sup X = +\infty$, $\max X$ і $\min X$ не існують.

Обмеженість, числові грані, супремум (*інфімум*) *функції* f визначаються як відповідні властивості для множини її значень $E(f)$.

---

[4] тобто існує бієкція, що зберігає відкрити множини.

[5] Взагалі, т*опологічний простір* – це пара (X, Γ), де X – множина, а Γ – система підмножин множини X (їх називають *відкритими*, а Γ *топологією*), що задовільняє таким умовам:

- Порожня множина $\emptyset$ та множина X належать Γ.
- Об'єднання довільного набору множин з Γ також належить Γ.
- Перетин скінченного набору множин з Γ також належить Γ.

Тоді (відкритим) *околом точки* називається будь-яка відкрита множина, що містить цю точку.

Аналогічно топологію можна задавати за допомогою *бази околів*, як сім'ю підмножин $\{B(x) \mid x \in X\}$, що задовольняють властивостям:

- Для кожного $x \in X$ $B(x) \neq \emptyset$, і для кожного $U \in B(x)$ $x \in U$.
- Якщо $U \in B(x)$ та $y \in U$, то існує $V \in B(y)$ такий, що $V \subset U$.
- Перетин скінченної кількості елементів $B(x)$ містить деякий елемент $B(x)$.

Тоді означення *відкритої множини* – це множина всі точки якої містяця в неї із деяким своїм околом (тобто *внутрішні*, див. *Def*. нижче).

Числові проміжки та околи точок.

Def. Види проміжків:

а) інтервал: $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$;

б) полуінтервали: $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x \le b\}$;

в) сегмент (відрізок): $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$.

Def. *Відкритим околом* точки a (позначаємо U_a) називається будь-який інтервал, що її містить.

Def. *Відкритим ε-околом* точки a називається інтервал $O(a,\varepsilon)$:

$$O(a,\varepsilon) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}.$$

Def. *Проколотим околом* точки a називається множина $\hat{U}_a = U_a \setminus \{a\}$.

Відповідно, *проколотим ε-околом* точки a є множина

$$\hat{O}(a,\varepsilon) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathrm{R} \mid 0 < |x-a| < \varepsilon\}.$$

Def. *Однобічним околом* точки a називається перетин околу a і однією із полупрямих, на які a розбиває числову пряму:

$$U_a^+ = [a, +\infty) \cap U_a, \quad U_a^- = (-\infty, a] \cap U_a;$$

$$\hat{U}_a^+ = (a, +\infty) \cap U_a, \quad \hat{U}_a^- = (-\infty, a) \cap U_a.$$

Для невласних елементів околи визначаються наступним чином:

Лівий полуокіл $+\infty$: $O(+\infty, \varepsilon) \equiv (\varepsilon, +\infty)$,

Правий полуокіл $-\infty$: $O(-\infty, \varepsilon) \equiv (-\infty, \varepsilon)$.

Розташування точок відносно множини.

Def. Точка a називається *внутрішньою* точкою множини M, якщо вона належить множині M разом із деяким околом: $\exists U_a \mid U_a \subset M$.

Множина всіх внутрішніх точок M називається *внутрішністю* M і позначається $\overset{\circ}{M}$. Якщо $M = \overset{\circ}{M}$, то M називається *відкритою* множиною (тобто всі її точки внутрішні).

Def. Точка a називається *точкою дотику* множини M, якщо будь-який її окіл має точки спільні із множиною M: $\forall U_a \mid U_a \cap M \neq \emptyset$.

Сукупність точок дотику M називається *замиканням* множини M і позначається $\overline{M}$. Якщо $M = \overline{M}$, то M називається замкненою (містить всі його точки дотику).

Def. Точка a називається *точкою згущення* множини M (*гранична точка*), якщо будь-який проколотий окіл a має з M спільні точки: $\forall \hat{U}_a \mid \hat{U}_a \cap M \neq \emptyset$.

Множина всіх граничних точок M називається *похідною множиною* і позначається M'.

Def. Точка a називається *ізольованою точкою* множини M, якщо існує її окіл, що не має з M спільних точок, окрім точки a: $\exists \widehat{U}_a \mid \widehat{U}_a \cap M = \varnothing$.

Def. Точка a називається *точкою межи* множини M, якщо кожний її окіл має точки, що належать множині M і точки, що не належать M:

$$\forall U_a \mid \exists x \in U_a \cap M \quad \wedge \quad \exists y \in U_a \mid y \notin M .$$

Сукупність точок межи утворює *межу* множини M і позначається ∂M .

Def. Точка a називається *зовнішньою точкою* множини M, якщо існує її окіл, що не має з M спільних точок: $\exists U_a \mid U_a \cap M = \varnothing$.

Крім усього, числова пряма має дві важливі властивості (аксіоми[6]).

1. Напіввідокремленість точок: $\forall a, b \in \mathbf{R},\ a \neq b \ \ \exists U_a \mid b \notin U_a$.
2. Відокремленість точок: $\forall a, b \in \mathbf{R},\ \ a \neq b \ \ \exists U_a ,\ \exists U_b \mid U_a \cap U_b = \varnothing$.

Операції над функціями.

Нехай

$$f : D(f) \to E(f) ; \qquad D(f) \subset \mathbf{R}, \qquad E(f) \subset \mathbf{R},$$
$$g : D(g) \to E(g); \qquad D(g) \subset \mathbf{R}, \qquad E(g) \subset \mathbf{R}.$$

Операції над числовими функціями числового аргументу вводяться поточково, тобто

1. $(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x), \qquad D(f + g) = D(f) \cap D(g);$
2. $(\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x) , \qquad D(\alpha f) = D(f) ;$
3. $(f \cdot g)(x) \equiv f(x) \cdot g(x), \qquad D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g);$
4. $(f / g)(x) \equiv f(x) / g(x), \qquad D(f / g) = D(f) \cap D(g) \setminus \{ x \mid g(x) = 0 \};$
5. $(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)), \qquad D(f \circ g) = D(g) \setminus \{ x \mid g(x) \notin D(f) \}.$

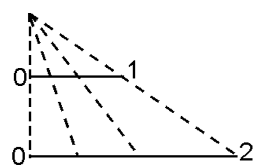
Остання операція називається *композицією* або *суперпозицією* f і g.

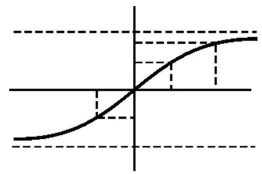
Def. Дійсно-значна функція натурального аргументу f: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ називається *послідовністю*. Кожному натуральному числу n ставиться у відповідність дійсне $x_n = f(n)$. Послідовність позначається $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ або просто (x_n), де x_n називається елементом або членом послідовності.

[6] Якщо множина із певною системою околів (топологічний простір) має властивість 2, то вона називається *відокремленим за Гаусдорфом* або *гаусдорфовим* топологічним простором. Ця властивість забезпечує одиничність границі за умови її існування.

1.2. Контрольні запитання і завдання

1. Що таке висловлювання?
2. Які є операції над висловлюваннями та їх властивості? Який порядок виконання операцій у висловлюванні $\big((\neg P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow (Q \wedge P)) \big)$?
3. Перелічити три основні квантори. Як заперечення діє на висловлювання з кванторами? Чи комутують квантори (навести приклади)?
4. Поняття множини, їх опис, класифікатор, діаграми Ейлера-Венна. Перелічити відносини та основні операції над множинами та їх властивості.
5. Аксіоматика дійсних чисел $\mathbf{R}$: аксіоми поля, упорядкованість, повнота. Визначення верхньої і нижньої та точної верхньої і нижньої грані множини їх критерії.
6. Записати означення множини:
   а) обмеженої зверху; б) обмеженої знизу;
   в) обмеженої; г) необмеженої зверху;
   д) необмеженої знизу; е) необмеженої.
7. Записати твердження, що функція $f(x)$ на множині X є:
   а) обмеженою зверху; б) обмеженою знизу;
   в) обмеженою; г) необмеженою зверху;
   д) необмеженою знизу; е) необмеженою.
8. Сформулювати критерії інфімуму та супремуму функції (для множини її значень) на проміжку.
9. Навести функції, що здійснюють бієкції а) інтервалу (0, 1) та інтервалу (0, 2); б) (-1, 1) та $\mathbf{R}$ (див. рисунки нижче).





10. Навести приклад множини, що є об'єднанням замкненого проміжку, відкритого проколотого околу та ізольованої точки, що попарно не перетинаються. Які точки цієї множини є внутрішні, граничні, зовнішні та точки межи?
11. Що таке послідовність? Як визначити суму двох послідовностей, як

визначити композицію (за умови, що одна з послідовностей має натуральні значення)?

1.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити висловлювання:

$((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg (C \vee A) \Rightarrow B))$.

1 5 3 2 4

Цифри 1-5 вказують порядок операцій.

Спосіб 1. За допомогою формули $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ позбавимося спочатку від імплікацій 1, 4: $(\neg A \vee B) \Rightarrow (C \vee A \vee B)$. Далі від 5:
$\neg (\neg A \vee B) \vee C \vee A \vee B$. Та застосуємо закон де Моргана:
$(A \wedge \neg B) \vee C \vee A \vee B$ – отримана формула є формулою з тісними запереченнями. Запишемо її у вигляді $(A \wedge \neg B) \vee (C) \vee (A) \vee (B)$, трактуючи кожну скобку як елементарну кон'юнкцію, бачимо диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій, тобто д.н.ф. Вона не є досконалою, оскільки у кожні дужки входять не всі змінні формули.

Запишемо останню формулу у вигляді $(A \wedge \neg B) \vee (C \vee A \vee B)$ і застосуємо дистрибутивний закон: $(A \vee C \vee A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee B)$, тобто $(A \vee C \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee B)$. Висловлювання у останній дужці є тавтологія, тому отримуємо: $(A \vee B \vee C)$, що є елементарна диз'юнкція, та отже ми маємо д.к.н.ф. Це висловлювання є завжди істина, крім випадку коли всі змінні одночасно приймають значення «неправда».

Спосіб 2. Таблиця істинності:

A	*B*	*C*	1	2	3	4	5
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

У 5$^{\text{му}}$ стовпчику вказана істинність всього сполученого висловлювання при різних значеннях істинності *A*, *B* і *C*.

Приклад 2. Задайте множину $A=\{x \mid x$ – ціле невід'ємне та $x+2=5\}$ у інший спосіб.

Корінь рівняння $x+2=5$ дорівнює 3 – ціле невід'ємне число. Отже воно і тільки воно є елементом даної множини. Відповідь: $A=\{3\}$.

Приклад 3. З'ясуйте, чи є рівними множини:

a) $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{2, 3, 1\}$.

b) *A* – множина всіх рівносторонніх трикутників; *B* – множина всіх рівнокутних трикутників.

c) $A=\{1, 5, 8\}$; $B=\{1, 8\}$.

d) $A=\{0, 1\}$; $B=\{\{0, 1\}\}$.

Розв'язок: *a)*Множини складаються із однакових елементів, отже $A = B$.
b) Оскільки у рівностороннього трикутника всі кути рівні та навпаки у рівнокутного трикутника всі сторони рівні, то $A=B$.
c) $A \neq B$, оскільки ці множини містять різну кількість елементів. Всі елементи множини *B* є також в *A*, отже $B \subset A$.
d) $A \neq B$, оскільки *A* – двохелементна, а *B* – одноелементна множини.

Приклад 4. Дани дві множини *A* і *B*: $A=\{x \mid x \in \mathbf{R},\ 1 \le x \le 3\}$, $B=\{x \mid x \in \mathbf{R},\ 2 \le x \le 4\}$. Запишимо результати операцій над ними:

$A \cup B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ 1 \le x \le 4\}$; $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ 2 \le x \le 3\}$;

$A \backslash B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ 1 \le x < 2\}$;

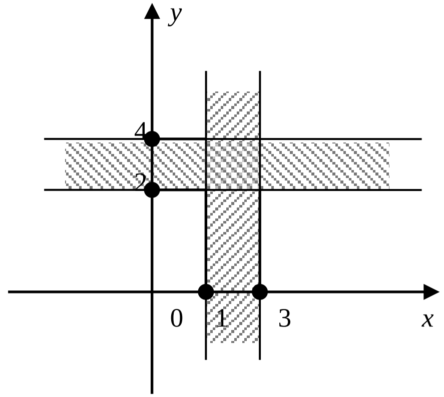
$B \backslash A = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ 3 < x \le 4\}$;

$A \Delta B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ 1 \le x < 2$ і $3 < x \le 4\}$;

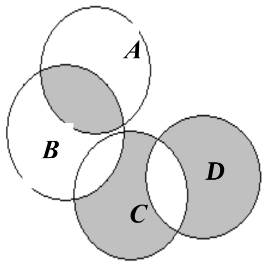
$\bar{A} = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x < 1$ або $x > 3\}$;

$A \times B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [1,3],\ y \in [2,4]\}$.

Проілюструємо останню операцію на декартовой площині (див. рис. праворуч).



Приклад 5. Запишимо формулой множину, що задано графічно діаграмою Ейлера-Вена (див. рис. праворуч):



$$A \cap B \cup (C \backslash B) \backslash D \cup D \backslash C.$$

Приклад 6. Дани множини $A=\{1, 2\}$; $B=\{a, b\}$. Знайдемо $A\times B$; $B\times A$:

$A\times B=\{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$; $B\times A=\{(a,1), (b,1), (a,2), (b,2)\}$.

Приклад 7. Довести формулу $A\cap B\subset A$.

Розпишемо відповідне твердження $((x\in A\cap B)\Rightarrow(x\in A))\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow((x\in A)\wedge(x\in B))\Rightarrow(x\in A))$ та позначимо $x\in A\Leftrightarrow\alpha$, $x\notin A\Leftrightarrow\bar{\alpha}$, $x\in B\Leftrightarrow\beta$, $x\notin B\Leftrightarrow\bar{\beta}$, тоді твердження перетворюється на тотожню істину $(\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha)\Leftrightarrow(\neg(\alpha\wedge\beta)\vee\alpha)\Leftrightarrow(\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}\vee\alpha)\Leftrightarrow(1\vee\bar{\beta})\Leftrightarrow 1$.

1.4. Задачі для самостійного розв'язку

Елементи математичної логіки.

1. Побудувати таблиці істинності:
а) $(\neg (P \Rightarrow \neg (Q \wedge P)) \Rightarrow (P \vee R))$;
б) $((P \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow \neg P)$;
в) $(((P \wedge \neg Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$;
г) $((P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \Rightarrow P) \vee Q))$.
2. Довести здійснимість формул:
а) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$;
б) $((Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \Rightarrow Q))$.
3. Довести тотожну істинність (тавтологію):
$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q)))$;
$((\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$;
$(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$;
$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$.

4. Довести еквівалентності:
$(A \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg A$;
$(A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
5. На питання, хто з трьох студентів вивчав логіку, було отримано правильну відповідь: «Якщо вивчав 1^{й}, то вивчав і 3^{й}; але, неправда, що, якщо вивчав 2^{й}, то вивчав і 3^{й}». Хто з студентів вивчав логіку?
6. Хто з чотирьох студентів здав екзамен, за одночасним виконанням умов:

- якщо 1^{й} здав, то і 2^{й} здав;
- якщо 2^{й} здав, то і 3^{й} здав або 1^{й} не здав;
- якщо 4^{й} не здав, то 1^{й} здав, а 3^{й} не здав;
- якщо 4^{й} здав, то і 1^{й} здав.

7. Вимагається, щоб вмикання світла в кімнаті здійснювалось за допомогою трьох різних перемикачів таким чином, що кожний з них вмикав світло, якщо воно не горить, і вимикав його, якщо світло горить.
8. У деякій місцевості, кожний місцевий житель завжди говорить істину, або завжди бреше, а на питання незнайомців відповідає односкладно «так» або «ні». Турист підійшов до розвілки доріг, де стоїть місцевий житель. Яке питання, що вимагає односкладну відповідь, треба задати туристу, щоб узнати правильну дорогу? Використувати обчислення висловлювань.
9. Перевірити на тавтологічність формули обчислення висловлювань:
а) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
б) $(A \Rightarrow (B \wedge C)) \wedge\neg ((B \vee C) \Rightarrow A)$;
в) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$.
10. Побудуйте формулу обчислення висловлювань від трьох змінних, яка істинна тоді й тільки тоді, коли рівно дві змінні приймають значення «неправда».
11. Побудуйте формулу обчислення висловлювань від трьох змінних, яка має значення істинності тоді, коли і більшість її змінних.
12. Побудуйте формулу обчислення висловлювань від трьох змінних, яка має значення істинності, протилежно до більшості змінних.
13. Зведить до д.к.н.ф. формули:
а) $(C \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg (B \vee C) \Rightarrow A)$;
б) $(\neg (A \wedge B) \Rightarrow A) \vee (A \wedge (B \vee C))$;
в) $\neg (A \wedge(B \vee C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$.
14. Зведить до д.д.н.ф. формули:

а) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow (A \wedge C))$;
б) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$;
в) $(\neg (A \wedge B) \Rightarrow \neg A) \wedge \neg ((A \wedge B) \Rightarrow \neg B)$.

15. Знайти формулу X обчислення висловлювань, для якої тотожно виконуються наступні формули:
а) $((X \wedge B) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A)$;
б) $((C \Rightarrow (\neg B \wedge A)) \Rightarrow X) \Rightarrow (X \wedge (A \Rightarrow B) \wedge C)$.

16. Троє підозрюваних, з метою заплутати слідство, домовились називати у показаннях вірно або марку або колір автомобілю, причетного до злочину. Слідчий встановив правду по наступним показанням: 1) автомобіль – синій “Daewoo”, 2) автомобиль – чорний “BMW”, 3) автомобиль – “Tesla”, але не синій. Встановіть, як і слідчій, правду використуючи обчислення висловлювань.

Елементи теорії множин.

17. Встановити безпосередньо тавтології обчислення висловлювань для наступних рівностей теорії множин:
а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $X \cap Y = Y \cap X$;
в) $CCX = X$;
г) $C(X \cap Y) = CX \cup CY$.

18. В які твердження теорії множин перетворюються наступні тавтології обчислення висловлювань:
а) $(A \wedge (\neg A \vee B)) \Rightarrow B$;
б) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$;
в) $A \vee \neg A$;
г) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$;
д) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$;
е) $A \Leftrightarrow (A \wedge (B \vee \neg B))$;
є) $(A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow A$;
ж) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$;
з) $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
и) $\neg (A \wedge \neg A)$.

19. Запишіть у логічних символах твердження про те, що послідовність (x_n) не є зростаючою, як заперечення того, що послідовність (x_n) зростає, та у позитивному сенсі як формулу із щільними запереченнями.

20. Запишіть у логічних символах аксіоми теорії множин (ZFC):
а) Аксіома об’ємності: дві множини рівні тоді й тільки тоді, коли вони мають ті самі елементи;
б) Аксіома порожньої множини: існує порожня множина, що не містить жодного елемента;

в) Аксіома об’єднання: для кожного сімейства множин є множина, яка містить в собі всі елементи кожної множини сімейства і тільки їх;
г) Аксіоми пари: для двух будь-яких множин існує множина, яка складається із цих і тільки цих множин;
д) Аксіома булеана або множини підмножин: для кожної множини існує множина всіх її підмножин;
е) Аксіома нескінченості: індуктивні нескінчені множини існують, тобто, існує така множина *a*, що включає в себе пусту множину {} та для будь-якого належного їй елемента *b* включає також і множину, сформовану як об'єднання *b* та її синґлетону {*b*}.
ж) Аксіомна схема виділення: якщо є деяке математичне твердження, що може бути застосованним до будь-якого з елементів деякої множини, то можна виділити принаймні одну підмножину цієї множини, застосувавши це твердження;
з) Аксіома підстановки: функціональне відношення, що може бути застосоване до кожного з елементів деякої множини, визначає також множину;
и) Аксіома регулярності: в будь-якій непорожній множині *A* є елемент *B*, що як множина не перетинається із А. Як наслідок: жодна множина не є елементом самої себе;
к) Аксіома вибору: для будь-якого набору непорожніх, неперетинаючихся множин можна побудувати множину, кожен елемент якої є елементом однієї і тільки однієї з множин цього набору.

21. Приведіть приклади, що демонструє необоротність імплікацій:
а) $\forall x\, \forall y\ F(x, y) \Rightarrow \forall x\, F(x, x)$;
б) $\exists x\ F(x, x) \Rightarrow \exists x, y\ F(x, y)$;
в) $\exists x\ (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\ A(x) \wedge \exists x\, B(x)$;
г) $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$.

22. Дайте означення квантора існування та одиничності ($\exists!$) та з’ясуйте дію заперечення на нього.

23. Опишіть словами елементи наступних множин:
а) $A \cap B \cap C$; б) $(A \cup B) \cap \overline{C}$.

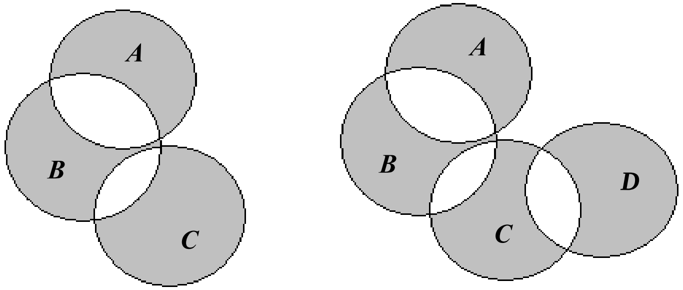
24. Нехай A={1,3,5,7}; B={2,4,6,8}; C={1,2,3,4,5}. Знайдіть:
$$A \cup C,\ B \cap C,\ A \setminus C,\ B \Delta C.$$

25. Нехай E={1,2,3,4}; A={1,3,4}; B={2,3}, C={1,4}. Знайдіть:
$$\overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cap B},\ A \cap \overline{B},\ (B \setminus A) \cup \overline{C}.$$

26. Зобразити на числовій прямій перетин, об'єднання та різницю наступних множин: $X_1=\{x \mid x\in\mathbf{R},\ x^2-1\le 0\}$ и $X_2=\{x \mid\ |x|<1\}$.

27. Виконайте всі відомі операції над заданими множинами:
а) A={1,2,3,4}; B={1,3,5}; C={5,6}.
б) A={a,b,d}; B={b,d,e,h}; U={a,b,c,d,e,f,g,h}.
в) A={2,4,6,8}; B={3,6,9}; C={1,2,3,…,10}.
г) A=[2,6); B=[5,7]; C={1}∪(6,7).

28. Запишіть формулою графічно зображені множини:



29. Дані дві множини A={x,y} і B={1,2,3}. Знайдіть декартові добудки:
A×B, B×A, B×B, A×A, B×A×B, A×B×A.

30. Відобразити на площині декартові добутки: A×B, B×A, B×B.
а) $A=\{x \mid x\in[0;1]\}$; $B=\{y \mid y\in(-1;1)\}$;
б) $A=\{x \mid x\in\mathbf{R},\ x^2>1\}$; $B=\{y \mid y\in\mathbf{R},\ y\in[1;+\infty)\}$.

31. Побудуйте множину A^2, якщо :
а) A= {0, 1};
б) A={x, y, z};
в) A={0, 2, 4, 6, 8};
г) A={1, 3, 5, 7};
д) A={день, ночь};
е) A={a, b, c, d}.

32. Перелічте елементи наступних множин:
$A=\{x \mid x\in\mathbf{Z},\ 10\le x\le 17\}$;
$C=\{x \mid x\in\mathbf{Z},\ 6x^2+x-1=0\}$;
$B=\{x \mid x\in\mathbf{Z},\ x^2<24\}$;
$D=\{x \mid x\in\mathbf{R},\ 6x^2+x-1=0\}$.

33. Дайте означення за допомогою характеристичної властивості (класифікатора) наступні множини:

$$S=\{2,5,8,11,\ldots\};\quad T=\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{15},\ldots\right\}.$$

34. Довести тотожності (за допомогою діаграм Ейлера-Венна та обчислюванням висловлювань):
а) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; б) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;
в) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$; г) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$;
д) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$; е) $A\cup B=(A\Delta B)\cup(A\cap B)$;
є) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; ж) $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$.

35. Довести за допомогою обчислювання висловлювань, що:
а) $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B$; б) $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B$;
в) $A\setminus B\subset C\Leftrightarrow A\subset B\cup C$; г) $A\cup B=A\cap B\Rightarrow A=B$;
д) $A\cap B\subset C\Leftrightarrow A\subset\overline{B}\cup C$; е) $A\subset B\cup C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}\subset C$;
є) $(A\setminus B)\cup B=A\Leftrightarrow B\subset A$; ж) $A\subset B\Rightarrow A\cup C\subset B\cup C$.

36. Для множин X і Y визначити тип включення $(X\subset Y, Y\subset X, X=Y)$:
а) $X=A\cup(B\setminus C)$, $Y=(A\cup B)\setminus(A\cup C)$;
б) $X=(A\cap B)\setminus C$, $Y=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$;
в) $X=A\setminus(B\cup C)$, $Y=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

37. Довести, що для кожного відображення $f: X\to Y$ і будь-яких підмножин $A,B\subset X$ виконується
а) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;
б) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$;
в) навести приклад, коли $f(A\cap B)\ne f(A)\cap f(B)$;
г) $f: X\to Y$ ін'єкція $\Leftrightarrow \forall A,B\subset X\quad f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

38. Вкажіть бієкцію проміжка [0, 1) на проміжок [-1, 2) та на $\mathbf{R}_+$.
39. Довести зліченість множини раціональних чисел (Th 1.1.).
40. Довести, що множина дійсних чисел – незлічена (Th 1.2.).
41. Знайдіть співвідношення між нижньою та верхньою гранями множини та його під(над)множини.
42. Знайдіть sup $(A\cup B)$ та inf $(A\cup B)$.
43. Довести ірраціональність чисел:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) 0,121221222122221222221…

44. Довести, що множина A чисел кратних 3 рівнопотужна множині раціональних чисел **Q**. Навести приклади функцій, що здійснюють бієкцію A і **N;** A і **Z**.

45. Нехай A – множина всіх раціональних чисел a таких, що $a^3<3$ і B – множина всіх інших раціональних чисел. Довести, що в множині A нема максимального числа, а в B – мінімального. Чому дорівнюють $\sup A, \inf A, \sup B, \inf B$ в **R**?

46. Визначити точну нижню та верхню грані функції на вказаної множині та обґрунтувати за допомогою критерію супремума та інфімума.

а) $f(x) = 1/(1+x^2)$ для $x\in\mathbf{R}$;

б) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $x\in(0,+\infty)$;

в) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$;

г) $f(x)=e^{-x}$, $x\in(0,+\infty)$.