

РОЗДІЛ 4. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА.

4.1. Основні поняття і властивості

Поле комплексних чисел.

Def. $\mathbf{C} = \{ z \mid z = x + iy; \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad i^2 = -1 \}$ – множина комплексних чисел, де запис $z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа; $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ називаються *дійсна* (або *реальна*) та *уявна* частини числа z відповідно.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$, тоді $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ і } y_1 = y_2$. Визначимо асоціативні та комутативні операції $+$, \cdot , що як і для дійсних чисел пов'язані дистрибутивним законом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

В множині \mathbf{C} існують різні елементи $1, 0$ нейтральні за $+$ та \cdot відповідно: $1 = 1 + i0$; $0 = 0 + i0$. А також для кожного $z \in \mathbf{C}$ існує протилежний елемент $-z = -x + i(-y) = -x - iy$; та для кожного

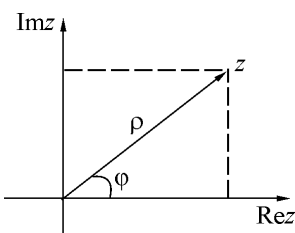
$$z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \text{ існує обернений } z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Таким чином множина \mathbf{C} утворює *поле* за операціями $+$, \cdot .

Def. Величина $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем* комплексного числа z . Для $z = x + iy$ *спряженим* комплексним числом називається $\bar{z} = z^* = x - iy$. Основні властивості операції спряження:

1. $(z^*)^* = z$;
2. $z z^* = |z|^2$;
3. $\frac{z + z^*}{2} = \operatorname{Re} z$;
4. $\frac{z - z^*}{2i} = \operatorname{Im} z$;
5. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$;
6. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$;
7. $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1} = \frac{z}{z^*}$.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел.



Розглянемо декартову площину та поставимо у відповідність кожній точці $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ комплексне число $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Таким чином комплексні числа можна розглядати як точки або радіус-вектора на площині (т.ч. \mathbf{C} називається *комплексною площиною*).

Тригонометрична форма запису.

Перейдемо від декартової системи координат до полярної:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Тоді отримуємо *тригонометричну форму* запису комплексного числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Величина $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ задає відстань від точки z до начала координат (довжину радіус-вектору z), а величина φ задає кут між додатнім напрямком осі абсцис та радіус-вектором z . Остання називається *аргументом* комплексного числа і позначається $\operatorname{Arg} z$, вона знаходиться неоднозначно, з точністю до величини кратної 2π :

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \text{ де } \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x \geq 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0 \end{cases} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

Зауважимо, що $z = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$ аргумент φ при цьому не визначено.

Th. Нехай $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тоді

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2) \wedge (\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbf{Z})$;
2. $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

Геометрична інтерпретація добутку комплексних чисел – це поворот та розтягнення.

Формула Муавра. $(\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

C. $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} (\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n})$, тут

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Отже для будь якого ненульового комплексного числа існує рівно n різних значень кореня n -го степеню, та ці n значень утворюють вершини правильного многокутника вписаного в окружність радіуса $\sqrt[n]{\rho}$.

Визначимо розширення відомих функцій на комплексну площину:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}; \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Формули Ейлера.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

C. $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

C (показникова форма запису комплексного числа).

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = \rho e^{i\varphi}.$$

Логарифм комплексного числа.

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Також позначають $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ – головне значення логарифму комплексного числа.

Нарешті введемо операцію піднесення будь-якого комплексного числа до будь-якого комплексного степеню: $z_1^{z_2} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}$.

Th (основна теорема алгебри). Кожен поліном не нульового степеню $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, $z, c_k \in \mathbf{C}$, має хоча б один комплексний корінь z_0 : $P_n(z_0) = 0$.

Принцип Руше. Приріст $\operatorname{Arg} f(z)$ при руху по замкнутому контуру C в додатному напрямку дорівнює $2\pi n$, де n кількість нулів функції $f(z)$ усередині області обмеженою C .

Def. Поділити поліном $P_n(z)$ на $S(z)$ означає знайти поліноми $Q(z)$ -неповну частку та $R(z)$ -остачу такі, що: $P(z) = S(z)Q(z) + R(z)$. При цьому $\deg Q(z) = \deg P(z) - \deg S(z)$; $\deg R(z) < \deg S(z)$; де \deg – це n , степінь поліному (найбільша степінь z^n з $c_n \neq 0$, $\deg \operatorname{Const} = 0$).

Ділене ділиться на дільник націло, якщо остача тотожно дорівнює 0; ділення неможливе, якщо дільник дорівнює 0; поліном завжди націло ділиться на Const .

Th (Безу). Остача від ділення поліному $P_n(z)$ на двочлен $z - c$ дорівнює значенню многочлена $P_n(z)$ в точці $z = c$.

C1. Якщо $z = c$ корінь полінома $P_n(z)$, то $P_n(z)$ ділиться на $z - c$ без остачі та навпаки.

C2. Якщо $z = c$ корінь полінома $P_n(z)$, то $P_n(z)$ можна розкласти на множники: $P_n(z) = (z - c)Q_{n-1}(z)$.

Розкладання над полем комплексних чисел.

Якщо $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$ поліном з комплексними коефіцієнтами, то його можна розкласти на лінійні множники в \mathbf{C} : $P_n(z) = c_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$. З урахуванням кратності це дає:

$$P_n(z) = c_n \prod_{i=1}^r (z - z_i)^{k_i}, \quad \text{де } \sum_1^r k_i = n.$$

Розкладання поліному над полем дійсних чисел.

Якщо $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ поліном з коефіцієнтами із

\mathbf{R} , то його можна розкласти на лінійні та квадратичні множники над полем \mathbf{R} : $P_n(z) = a_n \prod_{i=1}^r (z - x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^s (z^2 + p_j z + q_j)^{l_j}$, де $x_i, p_j, q_j \in \mathbf{R}$,

$$\sum_1^r k_i + \sum_1^s 2l_j = n.$$

Основна теорема алгебри гарантує наявність коренів у поліному степені вище за нульову. А що стосовно формул для знаходження цих коренів через коефіцієнти поліному? Для першого та другого ступеню ці формули добре відомі, для третього ступеню також існують, так звані, формули Кардано. Для розв'язку рівнянь у випадку поліномів четвертого степеня існує метод Феррарі. Виявляється, що починаючи із 5-го степеня спроби знайти загальний розв'язок будуть марними.

Th (теорема Абеля). У загальному випадку, для рівнянь 5-го та вище степеня неможливо подати корені рівнянь через радикали (виразити через скінчену кількість добувань коренів та алгебраїчних операцій із коефіцієнтами полінома).

4.3. Приклади розв'язування задач

4.2. Контрольні запитання і завдання

1. Які є форми запису комплексного числа?
2. Що таке дійсна та умовна частини комплексного числа?
3. Що таке аргумент і модуль комплексного числа?
4. Яке комплексне число називається спряженим до даного?
5. Записати формули переходу від алгебраїчної до тригонометричної і показової форми запису комплексного числа.
6. Які правила множення і ділення двох комплексних чисел, що задані у тригонометричній формі? Записати формулу Муавра.
7. Як визначається операція знаходження кореня $n^{\text{го}}$ -степеня з комплексного числа?
8. Надати геометричну ілюстрацію до комплексного числа, пояснити що відбувається при множенні/діленні на інше комплексне число, при піднесенні до натурального степеня та при добуванні кореня $n^{\text{го}}$ -степеня?
9. Навести формули Ейлера зв'язку між $\sin z$, $\cos z$ і e^z . Перевірити, що $\sin iz = i \cdot \text{sh}z$; $\text{tg}iz = i \cdot \text{th}z$; $\text{sh}iz = i \cdot \sin z$; $\text{th}iz = i \cdot \text{tg}z$; $\cos iz = \text{ch}z$; $\text{ch}iz = \cos z$; $\text{ctg}iz = -i \text{th}z$; $\text{cth}iz = -i \text{ctg}z$.
10. Навести формулу для обчислення логарифма $\text{Ln } z$ комплексного числа та формулу піднесення комплексного числа до комплексного степеня $z_1^{z_2}$.
11. Сформулювати основну теорему алгебри.
12. Що таке принцип аргументу (проілюструвати його для функції $f(z) = z$)?
13. Що таке ділення многочлена на многочлен (навести означення)? Сформулювати теорему Безу.
14. Записати розкладання многочлена на незвідні множники над полем комплексних та дійсних чисел.
15. Сформулювати теорему Абеля про формулу для розв'язку рівняння п'ятого та вище степеню.

Приклад 1.

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1(\cos 0 + i \sin 0)} = \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} \right) = \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3},$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Усі шість коренів шостого степеню від одиниці лежать на окружності одиничного радіуса на вершинах правильного шестикутника.

Приклад 2.

а) $\text{Ln} 2 = \ln 2 + i \cdot 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

б) $\text{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 3.

а) $(1+i)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}\text{Ln}(1+i)} = e^{\frac{1}{5}\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)} = e^{\frac{1}{5}\ln\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)} = \sqrt[10]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$.

б) $(1+i)^i = e^{i\text{Ln}(1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} \cdot e^{i\ln\sqrt{2}}$.

в) $(1+i)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\text{Ln}(1+i)} = e^{\sqrt{2}\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)} = e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}$.

г)

$$(1+i)^{\sqrt{2}+i\sqrt{3}} = e^{(\sqrt{2}+i\sqrt{3})\text{Ln}(1+i)} = e^{(\sqrt{2}+i\sqrt{3})\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)} = e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} \cdot e^{i\left(\sqrt{3}\ln\sqrt{2} + \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)}$$

д) $i^i = e^{i\text{Ln}i} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$.

е) $2^2 = e^{2\text{Ln}2} = e^{2(\ln 2 + i \cdot 2k\pi)} = e^{2\ln 2} \cdot e^{i \cdot 4k\pi} = e^{2\ln 2} = 4$.

Зробимо декілька спостережень із розглянутих прикладів. У пункті а) отримано п'ять різних рішень, що лежать на окружності радіуса $\sqrt[10]{2}$ у вершинах правильного п'ятикутника. У задачі б) нескінченна кількість розв'язків. Усі вони лежать на промені $\varphi = \ln\sqrt{2}$ та за модулем утворюють нескінчену (в обидві сторони: до 0 та ∞) геометричну послідовність із знаменником $e^{2\pi}$. У задачі в) всі рішення лежать на

окружності радіуса $e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}$ та покривають її усюди щільним чином. У задачі г) рішення лежать на спіралі та щільно наближуються до 0 та ∞ . Пункт д) є дивний факт: чисто уявне число в чисто уявній степені є нескінченна множина дійсних додатних чисел. І все ж таки, пункт е), двічі два дорівнює чотирьом ☺.

4.4. Задачі для самостійного розв'язку

1. Виконати дії із комплексним числами використовуючи алгебраїчну форму запису: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 2 - 3i$; $z_3 = -2 + 6i$. Знайти:

$$z_1 + z_2; \quad z_1 - z_2; \quad 3z_1 - 2z_3; \quad z_1 \cdot z_3; \quad z_1 \cdot z_2; \quad \frac{z_1}{z_2}; \quad \frac{z_1}{z_3}; \quad z_1^2; \quad z_2^3.$$

2. Обчислити а) $\frac{2}{1-3i}$; б) $(1+i\sqrt{3})^3$.

3. Записати у тригонометричній формі: $1 + i$; $2 - 2i$; $-1 - i$; $1 - \sqrt{3}i$; $\sqrt{3} + i$; i ; $3i$; 5 ; -8 ; $3 - 4i$; $3 + 4i$.

4. Знайти модулі та аргументи чисел: а) $2 + 5i$; б) $-2 + 5i$.

5. За допомогою тригонометричної форми запису для $z_1 = 1 + i$,

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i \quad \text{знайти} \quad z_1 \cdot z_2; \quad \frac{z_1}{z_2}; \quad \frac{z_2}{z_1}; \quad z_1^{40}; \quad z_2^{66}.$$

6. Розв'язати рівняння: $z^n = z^{n-1}$ ($n \neq 2$, $n \in \mathbf{N}$).

7. Знайти значення коренів та побудувати їх на комплексній площині

$$\text{а) } \sqrt[6]{-8}; \quad \text{б) } \sqrt[8]{1}; \quad \text{в) } \sqrt{1-i}; \quad \text{г) } \sqrt{3+4i}; \quad \text{д) } \sqrt[3]{-2+2i}.$$

8. Знайти значення коренів та побудувати їх на комплексній площині

$$\sqrt{1+i}; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}; \quad \sqrt[5]{1}; \quad \sqrt[8]{-1}.$$

9. Записати числа у показниковій формі: $1 + i$; $1 - \sqrt{3}i$; $-2 + 2i$; $4i$; 5 ; -8 ; ± 1 ; $\pm i$; $\pm 1 \pm i$.

10. Знайти $e^{\pm \frac{\pi i}{2}}$, $e^{k\pi i}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

11. Знайти модулі та головні значення аргументів чисел:

$$e^{2+i}; \quad e^{2-3i}; \quad e^{3+4i}; \quad e^{-3-4i}; \quad -ae^{i\varphi} \quad (a > 0, |\varphi| \leq \pi); \\ e^{-i\varphi} \quad (|\varphi| \leq \pi); \quad e^{i\alpha} - e^{i\beta} \quad (0 \leq \beta < \alpha \leq 2\pi).$$

12. Знайти дійсну та уявну частини чисел:

$$e^{2+3i}; \quad \cos i; \quad \sin i; \quad \operatorname{tg} i.$$

13. Обчислити: $2^{\sqrt{2}}$; $(-1)^{\sqrt{2}}$; 3^i ; i^i ; $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$; $(\sqrt{3}+i)^{i-1}$; 2^2 .

14. Знайти суми: 1) $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$;
2) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.
3) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \dots + n\sin nx$.

15. Довести, що 1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

16. Знайти дійсні та уявні частини наступних функцій:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $\operatorname{tg}(2-i)$.

17. Знайти: $\operatorname{Ln} 4$; $\operatorname{Ln}(-1)$; $\ln(-1)$; $\operatorname{Ln} i$;

$$\ln i; \quad \operatorname{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{Ln}(2-3i); \quad \operatorname{Ln}(-2+3i).$$

18. Знайти: $1^{\sqrt{2}}$; $(-2)^{\sqrt{2}}$; 2^i ; 1^{-i} ; i^i ;

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}; \quad (3-4i)^{1+i}; \quad (-3+4i)^{1+i}.$$

19. Із геометричний міркувань довести нерівності:

1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; 2) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Довести також алгебраїчним шляхом, перевірити, коли виконується рівність.

20. Із геометричний міркувань довести нерівності:

1) $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\arg z|$; 2) $|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| \cdot |\arg z|$.

Знайти геометричне місце точок:

21. 1) $\operatorname{Re}(z+2) > 1$; 2) $\operatorname{Re}(z+2) \geq 1$; 3) $\operatorname{Im}(z-2+i) > 1$;
4) $|z| \leq 3$; 5) $2 \leq |z-2+i| < 4$;
6) $\operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z = 1$; 7) $\operatorname{Re}\{z(1+i)\} = 2$; 8) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 1$;
9) $0 < \arg z \leq \pi/4$; 10) $0 < \arg(z-i) \leq \pi/4$;
11) $0 < \arg\{z(1-i)\} \leq \pi/4$;

22. 1) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = c$; 2) $\operatorname{Im}\frac{1}{z} = c$, ($c \in \mathbf{R}$).

23. $|z-3| = |z-1|$.

24. $|z-z_1| = |z-z_2|$.

25. $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$.

26. $|z| = \operatorname{Re}z + 1$.

27. $z: \operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0 \wedge \operatorname{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$.

28. 1) $|z| < \arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$; 2) $|z| < \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$.

29. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою
 $\frac{\pi}{2} < \arg z^2 \leq \pi$.

30. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:

$$0 \leq \arg \frac{z+i}{z-i} \leq \frac{\pi}{2}.$$

31. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:

$$\left| e^{z^{20}} \right| \leq 1.$$

32. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:

$$|\operatorname{Re}\{z(\cos 2^\circ + i \sin 2^\circ)\}| + |\operatorname{Im}\{z(\cos 2^\circ + i \sin 2^\circ)\}| \leq 1.$$

33. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:

$$|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26.$$

34. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою:

$$|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0.$$

35. Яку криву в комплексній площині описує точка: $z = at + be^{i\omega t}$, якщо t, a, b, ω – дійсні.

36. Яку криву в комплексній площині описує точка: $z = (a+it)e^{it}$, якщо t, a – дійсні.

37. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1+i \\ 3z_1 + iz_2 = 2-i \end{cases}$$

38. Визначити, при яких дійсних значеннях x і y будуть спряжені наступні комплексні числа: $z_1 = y^2 - 7y - 9xi$ та $z_2 = -12 + 20i + x^2i$.

39. Виразити $\sin^5 \varphi$ через тригонометричні функції кратних кутів, а $\sin 5\varphi$ через степені $\sin \varphi$ та $\cos \varphi$.

40. Знайти всі значення: а) 1^π ; б) i^i .

41. Обчислити:
$$\left(\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1} \right)^6.$$

42. Знайти розв'язок системи рівнянь:

$$|z+1-i| = |3+2i-z| = |z+i|.$$

43. Знайти комплексні числа, що лежать на бісектрисі кута, утвореного векторами $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$.

44. Знайти всі значення: $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{2i}$; $\sqrt{i + \sqrt{-1}}$; $\left(\sqrt[4]{(1+i)^2} \right)^2$.

45. Розв'язати рівняння: $z^5 = 1 + \sqrt{3}i$.

46. Знайти a і b при яких поліном $x^4 + 3x^2 + ax + b$ ділиться на $x^2 + 2ax + 2$.

47. Розв'язати рівняння: $z^6 - z^3 - 2 = 0$.

48. Рівняння $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$ має корень $1+i$. Знайти інші корені.

49. Розв'язати рівняння: $z^{10} - z^5 - 992 = 0$.

50. Розв'язати рівняння: $(z-i)z(z+i)(z+2i) = 24$.

51. Розв'язати рівняння:
$$\left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^i = i.$$

52. Розв'язати рівняння: $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

53. Розв'язати рівняння: $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

53. Розв'язати рівняння: $(3-i)z^2 - (8-i)z + (4+7i) = 0$.

54. Знайти спільні корені рівнянь:

$$z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0 \text{ и } z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 4 = 0.$$

- 55.** Знайти остачу ділення полінома $z^{1989} - 1$ на $z^2 + 1$.
- 56.** Знайти остачу від ділення $z^{1983} - 1$ на $(z^2 + 1)(z^2 + z + 1)$.
- 57.** Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $z^{2^n+1} - 1$.
- 58.** Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $x^{2^n} + 1$.
- 59.** Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $x^{2^n} - 1$.